

Nelinearno robusno upravljanje kranom s dva stupnja slobode gibanja

Šunjić, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:887404>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-22**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Luka Šunjić

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Josip Kasać, dipl. ing.

Student:

Luka Šunjić

Zagreb, 2024.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof.dr.sc. Josipu Kasaću na dostupnosti, pristupačnosti, savjetima i pomoći prilikom izrade ovog diplomskog rada.

Zahvaljujem se svojoj obitelji, prijateljima i djevojci na podršci i strpljenju tijekom studiranja. Također se zahvaljujem svim kolegama s faksa koji su mi na bilo koji način pomogli tijekom studiranja.

Luka Šunjić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
Proizvodno inženjerstvo, inženjerstvo materijala, industrijsko inženjerstvo i menadžment,
mehatronika i robotika, autonomni sustavi i računalna inteligencija



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 24 - 06 / 1	
Ur.broj: 15 - 24 -	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Luka Šunjić**

JMBAG: 0035211773

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Nelinearno robusno upravljanje kranom s dva stupnja slobode gibanja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Nonlinear robust control of a crane with two degrees of freedom**

Opis zadatka:

Linearni regulatori primijenjeni na upravljanje kranom često imaju suboptimalne performanse zbog nemogućnosti poznavanja preciznih vrijednosti parametara dinamičkog modela kрана, poput nepoznate mase ovješene tereta i koeficijenta trenja. Nadalje, vanjski poremećaji poput vjetrova ili neujednačenosti tereta, također mogu značajno utjecati na performanse linearnih regulatora. U ovom radu razmatra se primjena nelinearnih robusnih regulatora i usporedba njihovih performansi sa standardnim linearnim regulatorima.

U radu je potrebno:

- Izvesti nelinearni dinamički model kрана na temelju Euler-Lagrangeove i Newton-Eulerove metode.
- Provesti linearizaciju nelinearnih dinamičkih jednadžbi i prikazati sustav u obliku prostora stanja. Provjeriti upravljivost i mjerljivost lineariziranog sustava.
- Provesti sintezu linearnog regulatora stanja primjenom metode podešavanja polova, uz pretpostavku da su sve pozicije i brzine mjerljive.
- Provesti sintezu linearnog LQR regulatora stanja, uz pretpostavku da su sva stanja mjerljiva.
- Provjeriti simulacijama kako izbor polova regulatora stanja i težinskih matrica LQR regulatora utječe na prigušenje njihova ovješene tereta kрана.
- Provesti sintezu linearnog regulatora s observerom stanja, uz pretpostavku da su mjerljive samo linearna i kutna pozicija.
- Provesti sintezu nelinearnog robusnog regulatora stanja primjenom Lyapunovljeve metode.
- Provesti sintezu robusnog nelinearnog regulatora s kliznim režimom (engl. sliding-mode controller) uz pretpostavku nepoznatih parametara sustava i prisutnosti vanjskih poremećaja.
- Međusobno usporediti performanse navedenih regulatora u slučaju preciznog i nepreciznog poznavanja parametara poput mase ovješene tereta i koeficijenta trenja.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

18. siječnja 2024.

21. ožujka 2024.

25. – 29. ožujka 2024.

Zadatak zadao:

Prof.dr.sc. Josip Kasac

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Ivica Garašić

Sadržaj

Sadržaj	I
Popis slika	II
Popis tablica.....	III
Popis oznaka	IV
Sažetak	VI
Summary	VII
1. Uvod	1
2. Nelinearni dinamički model kрана.....	2
2.1. Grafički prikaz kрана.....	3
2.2. Euler-Lagrangeva metoda.....	4
2.3. Newton-Eulerova metoda	8
3. Linearizirani dinamički model kрана	12
3.1. Raspredanje jednadžbi za ubrzanja \ddot{x} i $\ddot{\theta}$	12
3.2. Linearizacija nelinearnih diferencijalnih jednadžbi.....	16
4. Linearne metode regulacije kрана.....	21
4.1. Upravlјivost i mjerljivost	21
4.2. Odzivi sustava bez regulacije.....	22
4.3. Sinteza regulatora metodom podešavanja polova.....	25
4.4. Sinteza LQR regulatora	27
4.5. Observer stanja.....	29
5. Nelinearne robusne metode regulacije kрана	31
5.1. Utjecaj poremećaja na linearne regulacijske sustave	31
5.2. Robusni nelinearni regulator	32
5.3. Robusni nelinearni regulator s kliznim režimom rada	35
5.4. Uspoređivanje performansi regulatora za slučaj nepoznate mase ovješnog tereta	39
6. Zaključak	42
Literatura.....	43
Prilog.....	45

Popis slika

Slika 1.	Primjer laboratorijskog modela kрана [1].....	2
Slika 2.	Grafički prikaz kрана	3
Slika 3.	Grafički prikaz kolica oslobođenih veza	8
Slika 4.	Grafički prikaz njihala oslobođenog veza	9
Slika 5.	Odzivi nereguliranog dinamičkog modela kрана; $\theta = 30^\circ$, $D_\theta = 0,0024$ $N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$	23
Slika 6.	Odzivi nereguliranog dinamičkog modela kрана; $\theta = 30^\circ$, $D_\theta = 0,024$ $N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$	24
Slika 7.	Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog metodom podešavanja polova ..	26
Slika 8.	Odziv dinamičkog modela kрана reguliranog LQR-om.....	28
Slika 9.	Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog metodom podešavanja polova sa observerom	29
Slika 10.	Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog LQR-om sa observerom stanja .	30
Slika 11.	Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog metodom podešavanja polova uz prisutnost poremećaja; $d(t) = \sin(5t)$	31
Slika 12.	Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog sa LQR-om; $d(t) = \sin(5t)$	32
Slika 13.	Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog robusnim nelinearnim regula- torom uz prisutnost poremećaja; $d(t) = \sin(5t)$	34
Slika 14.	Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog robusnim nelinearnim regula- torom sa kliznim režimom rada uz prisutnost poremećaja; $d(t) = \sin(5t)$	38
Slika 15.	Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog metodom podešavanja polova za slučaj nepoznate mase ovješnog tereta; $m \approx 4,6kg$	39
Slika 16.	Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog LQR-om za slučaj nepoznate mase ovješnog tereta; $m \approx 4,6kg$	40
Slika 17.	Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog robusnim nelinearnim regula- torom za slučaj nepoznate mase ovješnog tereta; $m \approx 4,6kg$	40
Slika 18.	Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog robusnim nelinearnim regula- torom sa kliznim režimom rada za slučaj nepoznate mase ovješnog tereta; $m \approx 4,6kg$	41

Popis tablica

Tablica 1. Tablica parametara.....	21
------------------------------------	----

Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
a	$m \cdot s^{-2}$	Akceleracija
a_x	$m \cdot s^{-2}$	Akceleracija u smjeru osi x
a_y	$m \cdot s^{-2}$	Akceleracija u smjeru osi y
\mathbf{A}	-	Matrica stanja
\mathbf{A}_{cl}	-	Matrica zatvorenog kruga
$b_1(\theta)$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
$b_2(\theta)$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
\mathbf{B}	-	Matrica ulaza
\mathbf{C}	-	Matrica izlaza
$d(t)$	-	Ukupni poremećaj koji djeluje na sustav
$d_{ext}(t)$	-	Vanjski poremećaj koji djeluje na sustav
D_x	$N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$	Koeficijent viskoznog trenja kolica
D_θ	$N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$	Koeficijent viskoznog trenja njihala
\mathbf{D}	-	Prijenosna matrica
$f(x)$	-	Funkcija koja se linearizira
$f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
$f_2(\theta, \dot{\theta})$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
F_t	N	Ukupna sila koja djeluje na sustav
g	$m \cdot s^{-2}$	Gravitacijska akceleracija
$h_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
$h_2(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})$	-	Element nelinearne vektorske funkcije modela
I	$kg \cdot m^2$	Moment tromosti
K_{11}	-	Element matrice funkcije nelinearnog modela
$K_{12}(\theta)$	-	Element matrice funkcije nelinearnog modela
$K_{21}(\theta)$	-	Element matrice funkcije nelinearnog modela
K_{22}	-	Element matrice funkcije nelinearnog modela
\mathbf{K}	-	Matrica pojačanja regulatora
$\mathbf{K}(\theta)$	-	Matrična funkcija nelinearnog modela
l	m	Duljina njihala
L	J	Lagranžijan
\mathbf{L}	-	Matrica pojačanja regulatora kod observera
m	kg	Masa njihala
M	kg	Masa kolica
n	-	Broj stanja
p	-	Broj ulaza
\mathbf{p}	-	Vektor polova

\mathbf{p}_1	-	Vektor polova
\mathbf{p}_2	-	Vektor polova
\mathbf{p}_3	-	Vektor polova
q	-	Broj izlaza
Q_x	N	Poopćena vanjska sila primjenjena na os x
Q_θ	N	Poopćena vanjska sila primjenjena na kut θ
\mathbf{Q}	-	Težinska matrica
\mathbf{Q}_1	-	Težinska matrica
\mathbf{Q}_2	-	Težinska matrica
\mathbf{Q}_3	-	Težinska matrica
\mathbf{P}	-	Modalna matrica
\mathbf{R}	-	Težinska matrica
T_{ct}	J	Translacijska kinetička energija kolica
T_{pr}	J	Translacijska kinetička energija njihala
T_{pt}	J	Rotacijska kinetička energija njihala
T_t	J	Ukupna kinetička energija
\mathbf{T}	-	Matrica transformacija
u	N	Horizontalna sila koja djeluje na kolica
$u_R(t)$	-	Nelinearni član regulatora
$\mathbf{u}(t)$	-	Vektor ulaza
V_t	J	Ukupna potencijalna energija sustava
$w(t)$	-	Referentni vektor vođenja
x	m	Horizontalna pozicija kolica
x_p	-	Koordinata centra ovješene mase na osi apscise
x_0	-	Vrijednost oko koje se funkcija aproksimira
x_1	-	Vrijednost za koju se funkcija aproksimira
\dot{x}	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Horizontalna brzina
\ddot{x}	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	Horizontalno ubrzanje kolica
$\mathbf{x}(t)$	-	Vektor stanja
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	-	Derivacija vektora stanja
$\hat{\mathbf{x}}(t)$	-	Vektora estimiranih stanja
$\hat{\dot{\mathbf{x}}}(t)$	-	Derivacija vektora estimiranih stanja
y_p	-	Koordinata centra ovješene mase na osi ordinate
$\mathbf{y}(t)$	-	Vektor izlaza
ε	-	Mali pozitivni parametar
θ	rad	Kut odklona njihala
$\dot{\theta}$	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Kutna brzina
$\ddot{\theta}$	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	Kutno ubrzanje
ρ	-	Pojačanje robusnog nelinearnog regulatora

Sažetak

U ovom radu razmatra se upravljanje kranom primjenom nelinearnih robusnih regulatora i usporedba njihovih performansi sa standardnim linearnim regulatorima. Nelinearni dinamički model kрана izveden je na temelju Euler-Lagrangeove i Newton-Eulerove metode. Provedena je linearizacija nelinearnih dinamičkih jednadžbi i dobivene linearizirane jednadžbe prikazane su u obliku prostora stanja. Provedena je sinteza linearnog regulatora primjenom metode podešavanja polova kao i linearnog kvadratičnog regulatora. Uz pretpostavku mjerljivosti samo linearne i kutne pozicije, primjenom observera stanja estimirana je linearna i kutna brzina. Provedena je sinteza robusnog nelinearnog regulatora i robusnog nelinearnog regulatora s kliznim režimom rada. Simulacijski rezultati ilustriraju značajno bolje performanse nelinearnih regulatora u slučaju prisutnosti vanjskih poremećaja kao i u slučaju nepreciznog poznavanja parametara poput mase ovješnog tereta.

Ključne riječi: kran s dva stupnja slobode gibanja, linearna regulacija, observer stanja, robusna nelinearna regulacija, robusna nelinearna regulacija s kliznim režimom rada

Summary

This thesis examines the crane control using nonlinear robust controllers and compares their performance with standard linear controllers. The nonlinear dynamic model of the crane is derived based on the Euler-Lagrange and Newton-Euler methods. Linearization of the nonlinear dynamic equations is conducted, and the resulting linearized equations are represented in state-space form. The synthesis of a linear controller is performed using pole placement method as well as a linear quadratic regulator. Assuming measurability of only linear and angular positions, linear and angular velocities are estimated using state observers. The synthesis of a robust nonlinear controller and a robust nonlinear sliding mode controller is carried out. Simulation results illustrate significantly better performance of nonlinear controllers in the presence of external disturbances as well as in cases of imprecise parameter knowledge such as the mass of the suspended load.

Keywords: gantry crane with two degrees of freedom of motion, linear control, state observer, robust nonlinear control, sliding mode control

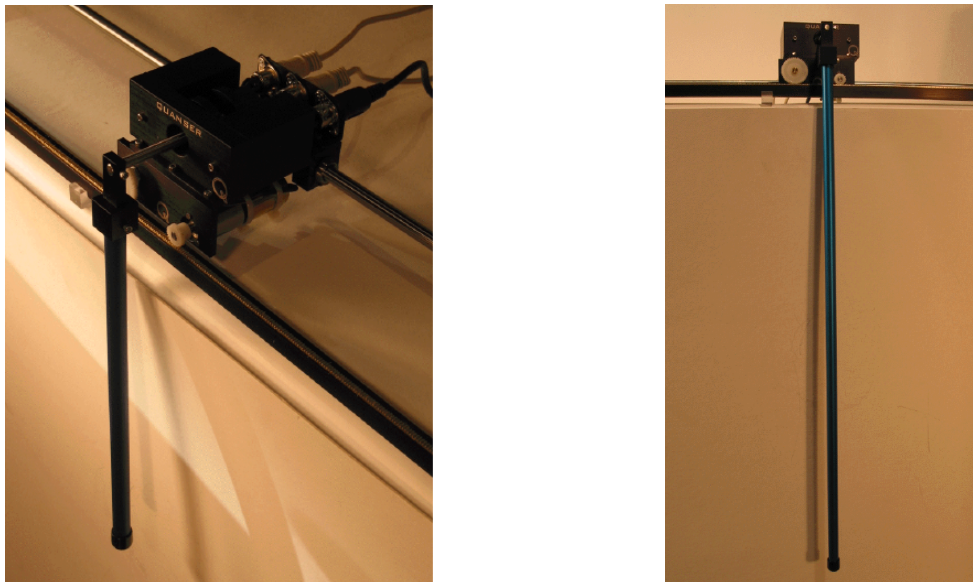
1. Uvod

Kran se koristi u mnogima područjima industrije. U građevini se koriste za prenošenje tereta na velike visine. Koriste se pri ukrcavanju kontejnera u transportne brodove. U pogonima se koriste za relokaciju većih i težih komponenti. Radi se o nelinearnim sustavima u kojima su prisutne nekontrolirane oscilacije koje uzrokuju probleme u stabilnosti i sigurnosti sustava. U radu će se s pomoću modela kрана s dva stupnja slobode gibanja prikazati kako se kran ponaša, kako utječu različiti tipovi regulacije na njegove performanse i robusnost i kako se ponaša u prisutnosti poremećaja.

Započet će se prikazom laboratorijskog modela kрана koji će dati uvid u izgled samog modela. Pojasnit će se osnovni način na koji kran funkcionira. S pomoću slike laboratorijskog modela kрана napraviti će se grafički prikaz u kojem će se označiti i pojasniti sve komponente kрана. Poslije toga će se detaljno pojasniti matematika iza Euler-Lagrangeove metode koja će se koristiti za dobivanje nelinearnog dinamičkog modela. Isti postupak će se ponoviti i za Newton-Eulerovu metodu koja će služiti kao dodatan način kojim se može opisati nelinearna dinamika. U sklopu ove metode, prikazati će se dijagrami tijela oslobođenih veza, iz kojih će se dobiti jednadžbe ravnoteže potrebne za raspisivanje dinamike. Treće poglavlje opisat će osnovni invarijantni oblik prostora stanja. Svaka komponenta tog oblika prostora stanja bit će označena i ukratko opisana. Kao dio istog poglavlja prikazati će se postupak linearne aproksimacije Taylorovim reda. Dobivena linearna dinamika modela će se koristiti za sintezu linearnih regulatora. Pojasnit će se dvije metode; metoda podešavanja polova i LQR metoda. Sintetizirani regulatori koristit će se za regulaciju nelinearnog i linearnog dinamičkog modela kрана, čiji će se odzivi paralelno grafički prikazati. Tako će se lakše moći usporediti odzivi nelinearne i linearne dinamike modela. Kao dio posljednjeg poglavlja, pokazati će se kako se matematički poremećaj unosi u sustav. Postavit će se proizvoljan poremećaj čiji će se utjecaj na odzive linearnih regulatora grafički prikazati. U ovom će se dijelu pojasniti kako funkcionira robusni nelinearni regulator i koje su mu prednosti. Grafički će se prikazati njegovo djelovanje na utjecaj poremećaja. Uz to će se i detaljno matematički prikazati kako se sintetizira robusni nelinearni regulator s kliznim režimom rada. Za njega će se također napraviti grafički prikaz djelovanja na utjecaj poremećaja. Za kraj će se svaki tip regulatora testirati za slučaj u kojem je nepoznata masa ovješena na kraju njihala. Svaki tip regulacije bit će popraćen grafom i kratkim komentarima.

2. Nelinearni dinamički model kрана

Uzet će se slika laboratorijskog modela kрана iz literature. Treba naglasiti da će se prikaz na slici 1 koristiti samo kao primjer kako bi se kasnije lakše razumijeli grafovi kрана.

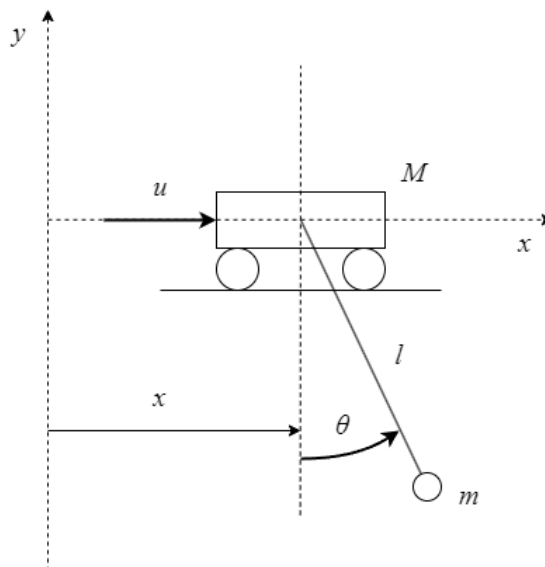


Slika 1: Primjer laboratorijskog modela kрана [1]

Kran se sastoji od kolica i letvice koja ima ulogu njihala. Kolica se mogu kretati horizontalno u dva smjera. Njihalo se kretanjem kolica otklanja za kut otklona, koji će biti tim veći što su kretanja kolica naglija. Zadatak regulacije bit će pomicanje kolica od proizvoljno zadane pozicije do po izboru postavljenog ishodišta. Cilj je da pomicanje u ishodište bude što brže što manjim otklonom njihala. Segment regulacije i simulacije rezultata napraviti će se pomoću programskog paketa *MATLAB*. Prije toga je potrebno napraviti prikladan dinamički model. Za to će se koristiti dvije metode: Euler-Lagrangeova i Newton-Eulerova metoda. Iako imaju različit pristup, rezultirat će identičnom dinamičkom modelu kрана.

2.1. Grafički prikaz kрана

Prikaz kрана u kartezijskom koordinatnom sustavu prvi je korak u definiranju dinamičkog modela. Budući da se kolica kрана mogu kretati horizontalno, dok se njihalo otklanja pri pomaku kolica, zaključit će se da kran ima dva stupnja slobode gibanja. Pomoću slike 1 napravit će se shema tj. grafički prikaz kрана.



Slika 2: Grafički prikaz kрана

Parametri označeni na slici 2 su:

- l - duljina njihala,
- M - masa kolica,
- m - masa njihala,
- u - horizontalna sila koja djeluje na kolica,
- x - horizontalna pozicija kolica i
- θ - kut otklona njihala.

Za letvicu odnosno njihalo uzet će se pretpostavka da ne mijenja svoj oblik i volumen odnosno da je kruto tijelo. Masa njihala će se zanemariti. Na kraju njihala ovješeno je teret mase m . Upravljačka varijabla u tj. horizontalna sila koja će pokretati kolica usmjerena je u pozitivnom smjeru osi x pri čemu je kut otklona θ usmjeren obrnuto od kazaljke na satu u pozitivnom smjeru rotacije. Grafički prikaz sa slike 2 bit će od velike važnosti za Newton-Eulerovu metodu, no prvo će se napraviti dinamički model pomoću Euler-Lagrangeove metode.

2.2. Euler-Lagrangeva metoda

Za sintezu dinamičkog modela kрана pomoću ove metode potrebno je izračunati ukupnu potencijalnu energiju sustava V_t i ukupnu kinetičku energiju sustava T_t sustava [1].

Potencijalna energija je energija koju neko tijelo posjeduje zbog svoga položaja u prostoru, naprezanja u sebi, električnog naboja ili nekog drugog faktora [2]. Ovaj sustav ima samo jedan utjecaj potencijalne energije; gravitacija. To znači da je ukupna potencijalna energija sustava V_t jednaka gravitacijskoj potencijalnoj energiji:

$$V_t = -m g l \cos(\theta), \quad (2.1)$$

gdje je:

g - gravitacijska akceleracija.

U jednadžbi (2.1) stavljen je minus zato što se masa m nalazi ispod kolica (pogledati sliku 2). Kinetička energija predstavlja energiju tijela u pokretu [3]. Ukupna kinetička energija bit će suma svih translacijskih i rotacijskih kinetičkih energija. Započet će se izračunom translacijske kinetičke energije kolica T_{ct} :

$$T_{ct} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad (2.2)$$

gdje je:

\dot{x} - horizontalno ubrzanje kolica.

Translacijska kinetička energija njihala T_{pt} može se izraziti kao funkcija brzine centra gravitacije ovješene mase m :

$$T_{pt} = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2} \right)^2 \quad (2.3)$$

gdje su:

x_p - koordinata centra ovješene mase na osi apscise i

y_p - koordinata centra ovješene mase na osi ordinate.

Koordinate su opisane jednadžbama:

$$x_p = x + l \sin(\theta), \quad (2.4)$$

$$y_p = -l \cos(\theta). \quad (2.5)$$

Brzine \dot{x}_p i \dot{y}_p dobit će se derivacijom jednadžbi (2.4) i (2.5) po vremenu t :

$$\dot{x}_p = \dot{x} + l \dot{\theta} \cos(\theta), \quad (2.6)$$

$$\dot{y}_p = l \dot{\theta} \sin(\theta). \quad (2.7)$$

Jednadžbe (2.6) i (2.7) uvrštavaju se u jednadžbu (2.3):

$$\begin{aligned}
 T_{\text{pt}} &= \frac{1}{2} m \left(\sqrt{(\dot{x} + l \dot{\theta} \cos(\theta))^2 + (l \dot{\theta} \sin(\theta))^2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} m \left((\dot{x} + l \dot{\theta} \cos(\theta))^2 + (l \dot{\theta} \sin(\theta))^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} m (\dot{x} + l \dot{\theta} \cos(\theta))^2 + \frac{1}{2} m (l \dot{\theta} \sin(\theta))^2 \\
 &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) \right) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \underbrace{(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))}_{=1},
 \end{aligned}$$

čime se dobiva raspisan izraz za kinetičku translacijsku energiju njihala T_{pt} :

$$T_{\text{pt}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2. \quad (2.8)$$

Preostaje još samo izračunati rotacijsku kinetičku energiju njihala T_{pr} [4]:

$$T_{\text{pr}} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, \quad (2.9)$$

gdje je:

I - moment tromosti.

Moment tromosti I dobit će se pomoću formule [5]:

$$I = m l^2. \quad (2.10)$$

Dobivene kinetičke energije u jednadžbama (2.2), (2.8) i (2.9) će se zbrojiti:

$$\begin{aligned}
 T_{\text{t}} &= T_{\text{ct}} + T_{\text{pt}} + T_{\text{pr}} \\
 &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2,
 \end{aligned}$$

čime se, nakon sređivanja, dobiva izraz za ukupnu kinetičku energiju T_{t} :

$$T_{\text{t}} = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} (I + m l^2) \dot{\theta}^2. \quad (2.11)$$

Izračun energija sustava omogućuje rješavanje Lagrangeovih jednadžbi. Produkt njihova rješenja bit će dinamički model krana.

Za slučaj krana s dva stupnja slobode gibanja, imaju oblik [6]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = Q_x, \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = Q_\theta, \quad (2.13)$$

gdje su:

L - lagranžijan,

Q_x - poopćena vanjska sila primijenjena na os x i

Q_θ - poopćena vanjska sila primijenjena na kut θ .

Lagranžijan predstavlja razliku ukupnih energija sustava [6]:

$$L = T_t - V_t. \quad (2.14)$$

Sile Q_x i Q_θ zadane su jednadžbama:

$$Q_x = u - D_x \dot{x}, \quad (2.15)$$

$$Q_\theta = -D_\theta \dot{\theta}. \quad (2.16)$$

gdje su:

D_x - koeficijent viskoznog trenja kolica i

D_θ - koeficijent viskoznog trenja njihala.

Viskozno trenje uzrokovano je kretanjem tijela kroz fluid. U ovom slučaju taj fluid je zrak. Utjecaj viskoznog trenja bit će lako vidljiv u grafovima simulacija. Trenje između podloge i kotača kolica će se zanemariti.

Jednadžbe će se raspisati postepeno, član po član. Započet će se sa raspisivanjem člana $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)$ iz jednadžbe (2.12):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T_t - V_t)}{\partial \dot{x}} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + ml \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} (I + ml^2) \dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta) \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left((M + m) \dot{x} + ml \dot{\theta} \cos(\theta) \right), \end{aligned}$$

gdje se nakon derivacije po vremenu dobiva raspisani član $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m) \ddot{x} + ml \ddot{\theta} \cos(\theta) - ml \dot{\theta}^2 \sin(\theta). \quad (2.17)$$

Član $\frac{\partial L}{\partial x}$ u jednadžbi (2.12) jednak je nuli jer lagranžijan L (2.14) nema varijablu x u sebi:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (2.18)$$

Raspisuje se član $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)$ iz jednadžbe (2.13):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T_t - V_t)}{\partial \dot{\theta}} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + ml \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} (I + ml^2) \dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta) \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} (ml \dot{x} \cos(\theta) + (I + ml^2) \dot{\theta}), \end{aligned}$$

gdje se nakon derivacije po vremenu i jednostavnog preslagivanja članova dobiva raspisani član $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml \ddot{x} \cos(\theta) + (I + ml^2) \ddot{\theta} - ml \dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta). \quad (2.19)$$

Preostaje još raspisati član $\frac{\partial L}{\partial \theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (T_t - V_t) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + ml \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} (I + ml^2) \dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta) \right), \end{aligned}$$

gdje se nakon parcijalne derivacije po kutu odklona θ dobiva član $\frac{\partial L}{\partial \theta}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml \dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta) - mgl \sin(\theta). \quad (2.20)$$

Dobiveni članovi uvrstit će se u pripadajuće jednadžbe. Izrazi (2.15), (2.17) i (2.18) uvrštavaju se u prvu Lagrangeovu jednadžbu (2.12):

$$(M + m) \ddot{x} + ml \ddot{\theta} \cos(\theta) - ml \dot{\theta}^2 \sin(\theta) = u - D_x \dot{x}. \quad (2.21)$$

Izrazi (2.16), (2.19) i (2.20) uvrštavaju se u drugu Lagrangeovu jednadžbu (2.13):

$$ml \ddot{x} \cos(\theta) - \cancel{ml \dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta)} + (I + ml^2) \ddot{\theta} + \cancel{ml \dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta)} + mgl \sin(\theta) = -D_\theta \dot{\theta},$$

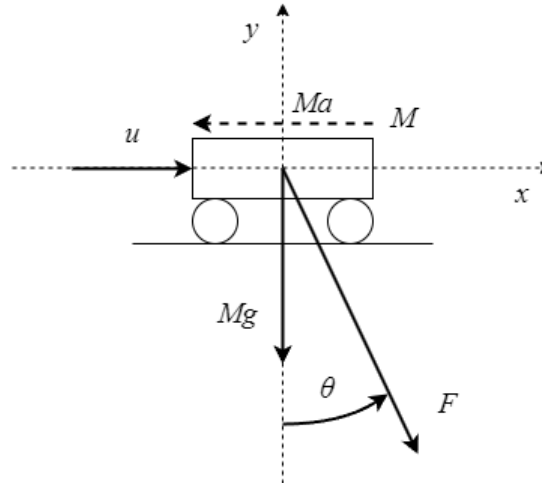
gdje se nakon kraćenja članova dobiva jednadžba:

$$ml \ddot{x} \cos(\theta) + (I + ml^2) \ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = -D_\theta \dot{\theta}. \quad (2.22)$$

S jednadžbama (2.21) i (2.22) opisan je dinamički model kрана.

2.3. Newton-Eulerova metoda

Kran sastoji se od dva tijela; kolica i njihala. Pomoću grafičkog prikaza na slici 2, napraviti će se dva grafa tijela oslobođenih veza [7], započevši sa kolicima.



Slika 3: Grafički prikaz kolica oslobođenih veza

U suprotnom smjeru osi x postavljena je sila Ma . Ta sila predstavlja inerciju kolica. Inercija je tendencija ili želja tijela da ostane u stanju mirovanja. Uvijek je usmjerena suprotno smjeru gibanja. Proizlazi iz d'Alembertovog principa [8], kojim se problem u dinamici pretvara u statički problem. Opisan je formulom:

$$F_t - Ma = 0, \quad (2.23)$$

gdje su:

F_t - ukupna sila koja djeluje na sustav i

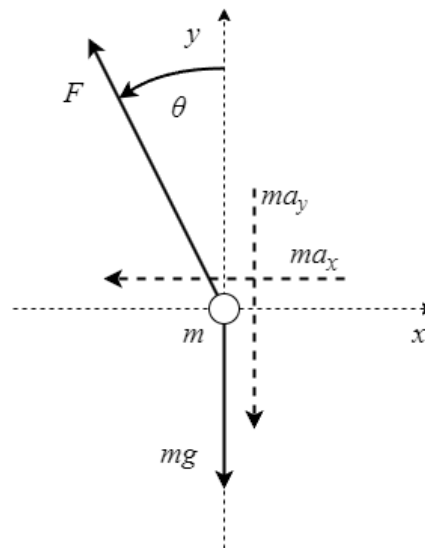
a - akceleracija.

Jednadžbe ravnoteže kolica imat će identičan oblik kao i jednadžba (2.23):

$$u + F \sin(\theta) - M\ddot{x} = 0, \quad (2.24)$$

$$F \cos(\theta) + Mg = 0. \quad (2.25)$$

Isti postupak će se ponoviti za njihalo. Napraviti će se graf njihala oslobođenog veza.



Slika 4: Grafički prikaz njihala oslobođenog veza

Sile ma_x i ma_y predstavljaju inercije njihala. U ovom slučaju se radi o dvije sile inercije zato što sustav ima dva smjera gibanja (horizontalno i vertikalno), gdje su kolica imala samo jedan (horizontalno). Razlog zadanom usmjerenju inercija je pretpostavka gibanja njihala. Pogleda li se slika 2, primjetit će se da je kut θ usmjeren obrnuto od kazaljke na satu, što znači da se njihalo njiše u tom smjeru. Inercije onda moraju biti postavljene kako je prikazano na slici 4. Akceleracije po osima definirane su formulama:

$$a_x = \frac{d^2 x_p}{dt^2}, \quad (2.26)$$

$$a_y = \frac{d^2 y_p}{dt^2}, \quad (2.27)$$

gdje su:

a_x - akceleracija u smjeru osi x i

a_y - akceleracija u smjeru osi y .

Koordinate x_p i y_p su već prije opisane u jednadžbama (2.4) i (2.5) pa ih je potrebno samo uvrstiti u jednadžbe (2.26) i (2.27):

$$a_x = \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin(\theta)), \quad (2.28)$$

$$a_y = \frac{d^2}{dt^2} (-l \cos(\theta)). \quad (2.29)$$

Prvo će se raspisati akceleracija a_x :

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d}{dt} (\dot{x} + l \dot{\theta} \cos(\theta)) \\ &= \ddot{x} + \frac{d}{dt} (l \dot{\theta} \cos(\theta)), \end{aligned}$$

gdje se nakon derivacije člana u zagradi dobiva jednadžba:

$$a_x = \ddot{x} + l \ddot{\theta} \cos(\theta) - l \dot{\theta}^2 \sin(\theta). \quad (2.30)$$

Slijedi raspisivanje akceleracije a_y :

$$a_y = \frac{d}{dt} (l \dot{\theta} \sin(\theta)),$$

derivacijom po vremenu dobiva se jednadžba:

$$a_y = l \ddot{\theta} \sin(\theta) + l \dot{\theta}^2 \cos(\theta). \quad (2.31)$$

Pomoću slike 4, raspisat će se jednadžbe ravnoteže njihala:

$$-F \sin(\theta) - m a_x = 0, \quad (2.32)$$

$$F \cos(\theta) - m g - m a_y = 0. \quad (2.33)$$

Jednadžba za akceleraciju a_x (2.30) uvrstit će se u jednadžbu (2.32):

$$\begin{aligned} -F \sin(\theta) - m (\ddot{x} + l \ddot{\theta} \cos(\theta) - l \dot{\theta}^2 \sin(\theta)) &= 0, \\ -F \sin(\theta) - m \ddot{x} - m l \ddot{\theta} \cos(\theta) + m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) &= 0, \end{aligned}$$

gdje se nakon preslagivanja članova dobiva izraz za $F \sin(\theta)$:

$$F \sin(\theta) = -m \ddot{x} - m l \ddot{\theta} \cos(\theta) + m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta). \quad (2.34)$$

Izraz za $F \sin(\theta)$ uvrstit će se u jednadžbu (2.24). Dobiveni izraz će presložiti:

$$\begin{aligned} u - m \ddot{x} - m l \ddot{\theta} \cos(\theta) + m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - M \ddot{x} &= 0, \\ M \ddot{x} + m \ddot{x} + m l \ddot{\theta} \cos(\theta) - m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) &= u. \end{aligned}$$

Nakon grupiranja fizikalnih veličina uz horizontalnu akceleraciju \ddot{x} i dodavanja djelovanje viskoznog trenja na kolica $-D_x \dot{x}$ s desne strane jednadžbe, dobiva se prva jednadžba dinamičkog modela kрана:

$$(M + m) \ddot{x} + m l \ddot{\theta} \cos(\theta) - m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) = u - D_x \dot{x}. \quad (2.35)$$

Jednadžba (2.34) će se ponovno iskoristiti. Pomnožit će se sa $\cos(\theta)$ i podijelit sa $\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned} F \sin(\theta) &= -m\ddot{x} - ml\ddot{\theta} \cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) && / \cdot \cos(\theta), \\ F \sin(\theta) \cos(\theta) &= -m\ddot{x} \cos(\theta) - ml\ddot{\theta} \cos^2(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) && / : \sin(\theta), \end{aligned}$$

nakon čega se dobiva izraz za $F \cos(\theta)$:

$$F \cos(\theta) = \frac{-m\ddot{x} \cos(\theta) - ml\ddot{\theta} \cos^2(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sin(\theta)}. \quad (2.36)$$

Izraz za $F \cos(\theta)$ i jednadžba za akceleraciju a_y (2.31) se zatim uvrštavaju u jednadžbu (2.33). Jednadžba se nakon uvrštavanja množi sa $\sin(\theta)$ i -1 :

$$\begin{aligned} \frac{-m\ddot{x} \cos(\theta) - ml\ddot{\theta} \cos^2(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - mg - ml\ddot{\theta} \sin(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \cos(\theta) &= 0 && / \cdot \sin(\theta), \\ -m\ddot{x} \cos(\theta) - ml\ddot{\theta} \cos^2(\theta) + \cancel{ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)} - mg \sin(\theta) - ml\ddot{\theta} \sin^2(\theta) - \cancel{ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)} &= 0, \\ -m\ddot{x} \cos(\theta) - ml\ddot{\theta} \underbrace{(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))}_{=1} - mg \sin(\theta) &= 0 && / \cdot (-1), \end{aligned}$$

čime se dobiva jednadžba:

$$ml\ddot{x} \cos(\theta) + ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0. \quad (2.37)$$

Dobivena jednadžba je nepotpuna. Potrebno je sa lijeve strane jednadžbe dodati utjecaj rotacije njihala $I\ddot{\theta}$ i sa desne strane jednadžbe utjecaj viskoznog trenja na njihalo $-D_\theta \dot{\theta}$:

$$ml\ddot{x} \cos(\theta) + ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) + I\ddot{\theta} = -D_\theta \dot{\theta},$$

grupiranjem izraza uz varijablu $\ddot{\theta}$, dobiva se druga jednadžba dinamičkog modela kрана:

$$ml\ddot{x} \cos(\theta) + (I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = -D_\theta \dot{\theta}. \quad (2.38)$$

Jednadžbe (2.35) i (2.38) iste su kao i jednadžbe (2.21) i (2.22), čime je potvrđena točnost dobivenog dinamičkog modela kрана.

3. Linearizirani dinamički model kрана

Za uspješnu sintezu linearnih regulatora, potrebno je dinamički sustav prikazati u prostoru stanja. Prostor stanja matematički je model fizičkog sustava koji ima određen broj ulaza, izlaza i varijabli međusobno povezanih diferencijalnim jednadžbama prvog reda [9]. Osnovna forma vremenski invarijantnog prostora stanja linearnog sustava sa ulazima p , izlazima q i stanjima n zadana je formom ispod:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (3.2)$$

gdje su:

- $\mathbf{x}(t)$ - vektor stanja; $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$,
- $\dot{\mathbf{x}}(t)$ - derivacija vektora stanja po vremenu; $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$,
- $\mathbf{y}(t)$ - vektor izlaza; $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$,
- $\mathbf{u}(t)$ - vektor ulaza; $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$,
- \mathbf{A} - matrica stanja; $\dim[\mathbf{A}] = n \times n$,
- \mathbf{B} - matrica ulaza; $\dim[\mathbf{B}] = n \times p$,
- \mathbf{C} - matrica izlaza; $\dim[\mathbf{C}] = q \times n$ i
- \mathbf{D} - prijenosna matrica; $\dim[\mathbf{D}] = q \times p$.

Matrice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} bit će vremenski invarijantne odnosno u sebi neće imati elemente ovisne o vremenu t . Za dobivanje prostora stanja, potrebno je linearizirati dinamički model. Prije nego što se napraviti linearizacija, potrebno je presložiti jednadžbe modela i raspregnuti stanja.

3.1. Rasprezanje jednadžbi za ubrzanja \ddot{x} i $\ddot{\theta}$

Nelinearne jednadžbe dinamičkog modela kрана (2.21) i (2.22) (ili (2.35) i (2.38)) presložiti će se:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) = -D_x\dot{x} + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) + u, \quad (3.3)$$

$$ml\ddot{x}\cos(\theta) + (I + ml^2)\ddot{\theta} = -D_\theta\dot{\theta} - mgl\sin(\theta). \quad (3.4)$$

Presložene jednadžbe prikazati će se u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} M + m & ml\cos(\theta) \\ ml\cos(\theta) & I + ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_x\dot{x} + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) \\ -D_\theta\dot{\theta} - mgl\sin(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

S ovakvim zapisom matrica bit će zamorno raditi osnovne matematičke operacije. Zato će se pisanje pojednostaviti supstitucijom članova unutar matrica [10]:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12}(\theta) \\ K_{21}(\theta) & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) + u \\ f_2(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

gdje supstitucijski elementi imaju vrijednosti:

$$K_{11} = M + m, \quad (3.7)$$

$$K_{12}(\theta) = K_{21}(\theta) = ml \cos(\theta), \quad (3.8)$$

$$K_{22} = I + ml^2, \quad (3.9)$$

$$f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = -D_x \dot{x} + ml \dot{\theta}^2 \sin(\theta), \quad (3.10)$$

$$f_2(\theta, \dot{\theta}) = -D_\theta \dot{\theta} - mgl \sin(\theta). \quad (3.11)$$

Matrica lijevo od vektora sa elementima \ddot{x} i $\ddot{\theta}$, označit će se sa $\mathbf{K}(\theta)$:

$$\mathbf{K}(\theta) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12}(\theta) \\ K_{21}(\theta) & K_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Jednadžba (3.6) s lijeve će se strane pomnožiti sa matricom $\mathbf{K}^{-1}(\theta)$:

$$\mathbf{K}^{-1}(\theta) \cdot / \quad \mathbf{K}(\theta) \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) + u \\ f_2(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix},$$

čime se dobiva:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) + u \\ f_2(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

gdje je $\mathbf{K}^{-1}(\theta)$ inverz matrice $\mathbf{K}(\theta)$. Inverz matrice dobit će se pomoću formule:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Elementi matrice $\mathbf{K}^{-1}(\theta)$ iz jednadžbe (3.12) uvrstit će se u formulu:

$$\mathbf{K}^{-1}(\theta) = \frac{1}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \begin{bmatrix} K_{22} & -K_{12}(\theta) \\ -K_{21}(\theta) & K_{11} \end{bmatrix},$$

gdje se, nakon uvrštavanja člana ispred matrice u matricu, dobiva:

$$\mathbf{K}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} & \frac{-K_{12}(\theta)}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \\ \frac{-K_{21}(\theta)}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} & \frac{K_{11}}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Dobiveni izraz za inverz $\mathbf{K}^{-1}(\theta)$ uvrstit će se u jednadžbu (3.13):

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{22}}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} & \frac{-K_{12}(\theta)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \\ \frac{-K_{21}(\theta)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} & \frac{K_{11}}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) + u \\ f_2(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Matrice s desne strane će se pomnožiti:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{K_{22}f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} + \frac{K_{22}u}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} - \frac{K_{12}(\theta)f_2(\theta, \dot{\theta})}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \\ -\frac{K_{21}(\theta)f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} - \frac{K_{21}(\theta)u}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} + \frac{K_{11}f_2(\theta, \dot{\theta})}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{K_{22}f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) - K_{12}(\theta)f_2(\theta, \dot{\theta})}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} + \frac{K_{22}u}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \\ \frac{-K_{21}(\theta)f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) + K_{11}f_2(\theta, \dot{\theta})}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} - \frac{K_{21}(\theta)u}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

čime se dobivaju raspregnute diferencijalne jednadžbe za horizontalno ubrzanje \ddot{x} i kutno ubrzanje $\ddot{\theta}$:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{22}f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) - K_{12}(\theta)f_2(\theta, \dot{\theta})}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \\ \frac{-K_{21}(\theta)f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) + K_{11}f_2(\theta, \dot{\theta})}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_{22}}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \\ -\frac{K_{21}(\theta)}{K_{11}K_{22}-K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)} \end{bmatrix} u. \quad (3.16)$$

Zbog jednostavnijeg zapisa, ovdje će se isto napraviti supstitucija članova:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) \\ h_2(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(\theta) \\ b_2(\theta) \end{bmatrix} u, \quad (3.17)$$

gdje članovi vektora imaju vrijednosti:

$$h_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{K_{22}f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) - K_{12}(\theta)f_2(\theta, \dot{\theta})}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)}, \quad (3.18)$$

$$b_1(\theta) = \frac{K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)}, \quad (3.19)$$

$$h_2(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{-K_{21}(\theta)f_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) + K_{11}f_2(\theta, \dot{\theta})}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)}, \quad (3.20)$$

$$b_2(\theta) = -\frac{K_{21}(\theta)}{K_{11}K_{22} - K_{12}(\theta)K_{21}(\theta)}. \quad (3.21)$$

Zbog referenciranja, diferencijalne jednadžbe u izrazu (3.17) će se zapisati zasebno:

$$\ddot{x} = h_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) + b_1(\theta)u, \quad (3.22)$$

$$\ddot{\theta} = h_2(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) + b_2(\theta)u. \quad (3.23)$$

Sve što sad preostaje je uvrstiti izraze (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) i (3.11), u supstituirane članove vektora (3.18), (3.19), (3.20) i (3.21). Započet će se sa članom $h_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})$:

$$\begin{aligned} h_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) &= \frac{(I + ml^2) \left(-D_x \dot{x} + ml \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \right) - ml \cos(\theta) \left(-D_\theta \dot{\theta} - mgl \sin(\theta) \right)}{(M + m)(I + ml^2) - ml \cos(\theta) \cdot ml \cos(\theta)} \\ &= \frac{-(I + ml^2) D_x \dot{x} + (I + ml^2) ml \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + ml D_\theta \dot{\theta} \cos(\theta) + m^2 gl^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)}, \end{aligned}$$

gdje se, nakon preslagivanja, dobiva izraz za supstitucijski član $h_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})$:

$$h_1(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{-(I + ml^2) D_x \dot{x} + ml D_\theta \dot{\theta} \cos(\theta) + (I + ml^2) ml \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + m^2 gl^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{-m^2 l^2 \cos^2(\theta) + (M + m)(I + ml^2)}. \quad (3.24)$$

Slijedi raspisivanje člana $b_1(\theta)$:

$$\begin{aligned} b_1(\theta) &= \frac{I + ml^2}{(M + m)(I + ml^2) - ml \cos(\theta) \cdot ml \cos(\theta)} \\ &= \frac{I + ml^2}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)}, \end{aligned}$$

čime se dobiva raspisani izraz za supstitucijski član $b_1(\theta)$:

$$b_1(\theta) = \frac{I + ml^2}{-m^2 l^2 \cos^2(\theta) + (M + m)(I + ml^2)}. \quad (3.25)$$

Dalje se raspisuje član $h_2(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})$:

$$\begin{aligned} h_2(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) &= \frac{-ml \cos(\theta) \left(-D_x \dot{x} + ml \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \right) + (M + m) \left(-D_\theta \dot{\theta} - mgl \sin(\theta) \right)}{(M + m)(I + ml^2) - ml \cos(\theta) \cdot ml \cos(\theta)} \\ &= \frac{ml D_x \dot{x} \cos(\theta) - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - (M + m) D_\theta \dot{\theta} - mgl (M + m) \sin(\theta)}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)}, \end{aligned}$$

gdje se, nakon preslagivanja, dobiva izraz za supstitucijski član $h_2(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})$:

$$h_2(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{ml D_x \dot{x} \cos(\theta) - (M + m) D_\theta \dot{\theta} - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - mgl (M + m) \sin(\theta)}{-m^2 l^2 \cos^2(\theta) + (M + m)(I + ml^2)}. \quad (3.26)$$

Preostaje još raspisati član $b_2(\theta)$:

$$\begin{aligned} b_2(\theta) &= \frac{-ml \cos(\theta)}{(M + m)(I + ml^2) - ml \cos(\theta) \cdot ml \cos(\theta)} \\ &= -\frac{ml \cos(\theta)}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)}, \end{aligned}$$

čime se dobiva izraz za supstitucijski član $b_2(\theta)$:

$$b_2(\theta) = -\frac{ml \cos(\theta)}{-m^2 l^2 \cos^2(\theta) + (M+m)(I+ml^2)}. \quad (3.27)$$

Izrazi (3.24) i (3.25) uvrštavaju se u jednadžbu (3.22), dok se izrazi (3.26) i (3.27) uvrštavaju u jednadžbu (3.23) čime se dobivaju rasregnute nelinearne diferencijalne jednadžbe za horizontalno ubrzanje \ddot{x} i kutno ubrzanje $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{x} = \frac{-(I+ml^2) D_x \dot{x} + ml D_\theta \dot{\theta} \cos(\theta) + (I+ml^2) ml \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + m^2 g l^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{-m^2 l^2 \cos^2(\theta) + (M+m)(I+ml^2)} + \frac{I+ml^2}{-m^2 l^2 \cos^2(\theta) + (M+m)(I+ml^2)} u, \quad (3.28)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{ml D_x \dot{x} \cos(\theta) - (M+m) D_\theta \dot{\theta} - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - mgl(M+m) \sin(\theta)}{-m^2 l^2 \cos^2(\theta) + (M+m)(I+ml^2)} - \frac{ml \cos(\theta)}{-m^2 l^2 \cos^2(\theta) + (M+m)(I+ml^2)} u. \quad (3.29)$$

3.2. Linearizacija nelinearnih diferencijalnih jednadžbi

Linearizacija je postupak linearne aproksimacije nelinearnih funkcija [11]. Potrebno je linearizirati trigonometrijske funkcije $\sin(\theta)$ i $\cos(\theta)$ i nelinearan član $\dot{\theta}^2$. Postupak linearizacije napraviti će se pomoću Taylorovog reda:

$$f(x) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x_1 - x_0)^n}{n!} f^n(x_0), \quad (3.30)$$

gdje je:

- $f(x)$ - funkcija koja se linearizira,
- x_0 - vrijednost oko koje se funkcija aproksimira,
- x_1 - vrijednost za koju se funkcija aproksimira.

Trigonometrijske funkcije $\sin(\theta)$ i $\cos(\theta)$ aproksimirat će se oko nule ($x_0 = \theta_0 = 0$). Takva aproksimacija se uzima jer je njihalo u stabilnom stanju kad je kut otklona jednak nuli. Kut otklona za koji se funkcije aproksimiraju bit će izrazito mal ($x_1 = \theta \ll$). Uzet će se samo prva dva člana reda. Ostali članovi su višeg reda i imaju izrazito male vrijednosti pa neće imati veliki utjecaj na aproksimaciju. Taylorov red će onda poprimiti sljedeći oblik:

$$f(\theta) = f(\theta_0) + (\theta - \theta_0) f'(\theta_0). \quad (3.31)$$

Pomoću reduciranog Taylorovog reda prvo će se aproksimirati funkcija $\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \sin(\theta_0) + (\theta - \theta_0) \sin'(\theta_0) \\ &= \underbrace{\sin(0)}_{=0} + (\theta - 0) \underbrace{\cos(0)}_{=1},\end{aligned}$$

gdje je linearizirani funkcija za trigonometrijsku funkciju $\sin(\theta)$ jednaka:

$$\sin(\theta) = \theta. \quad (3.32)$$

Slijedi linearizacija trigonometrijske funkcije $\cos(\theta)$:

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos(\theta_0) + (\theta - \theta_0) \cos'(\theta_0) \\ &= \underbrace{\cos(0)}_{=1} + (\theta - 0) \underbrace{(-\sin(0))}_{=0},\end{aligned}$$

čime se dobiva linearizirana funkcija za trigonometrijsku funkciju $\cos(\theta)$:

$$\cos(\theta) = 1. \quad (3.33)$$

Preostaje još linearizirati član $\dot{\theta}^2$. Uzet će se prepostavka da je kutna brzina jako mala ($\dot{\theta} \ll 1$). Prateći logiku oko članova višeg reda u Taylorovom redu, kvadrat kutne brzine će biti izrazito mal i neće imati veliki utjecaj na linearnu aproksimaciju. Ovo znači da će imati vrijednost:

$$\dot{\theta}^2 = 0. \quad (3.34)$$

Dobiveni linearizirani izrazi (3.32), (3.33) i (3.34) uvrštavaju se u jednadžbu (3.28):

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{- (I + ml^2) D_x \dot{x} + ml D_\theta \dot{\theta} \underbrace{\cos(\theta)}_{=1} + (I + ml^2) ml \underbrace{\dot{\theta}^2}_{=0} \underbrace{\sin(\theta)}_{=\theta} + m^2 g l^2 \underbrace{\sin(\theta)}_{=\theta} \underbrace{\cos(\theta)}_{=1}}{-m^2 l^2 \underbrace{\cos^2(\theta)}_{=1} + (M + m)(I + ml^2)} \\ &+ \frac{I + ml^2}{-m^2 l^2 \underbrace{\cos^2(\theta)}_{=1} + (M + m)(I + ml^2)} u \\ &= \frac{- (I + ml^2) D_x \dot{x} + ml D_\theta \dot{\theta} + m^2 g l^2 \theta}{-m^2 l^2 + (M + m)(I + ml^2)} + \frac{I + ml^2}{-m^2 l^2 + (M + m)(I + ml^2)} u \\ &= \frac{- (I + ml^2) D_x \dot{x} + ml D_\theta \dot{\theta} + m^2 g l^2 \theta}{-m^2 l^2 + (M + m) I + M m l^2 + m^2 l^2} + \frac{I + ml^2}{-m^2 l^2 + (M + m) I + M m l^2 + m^2 l^2} u,\end{aligned}$$

čime se dobiva linearizirana diferencijalna jednadžba za horizontalno ubrzanje kolica \ddot{x} :

$$\ddot{x} = \frac{- (I + ml^2) D_x \dot{x} + ml D_\theta \dot{\theta} + m^2 g l^2 \theta}{(M + m) I + M m l^2} + \frac{I + ml^2}{(M + m) I + M m l^2} u. \quad (3.35)$$

Za zapis u prostoru stanja, potrebno je raspregnut stanja \dot{x} , $\dot{\theta}$ i θ . Prije toga će se uvesti susptitucija nazivnika razlomaka v kako bi zapis bio jednostavniji:

$$v = \frac{1}{(M+m)I + Mml^2}. \quad (3.36)$$

Uvrsti li se izraz za v u jednadžbu (3.35) dobit će se:

$$\ddot{x} = -(I + ml^2) D_x \dot{x} + ml D_\theta \dot{\theta} + m^2 g l^2 \theta v + (I + ml^2) v u,$$

gdje se množenjem zagrade sa v dobiva linearizirana diferencijalna jednadžba za horizontalno ubrzanje kolica \ddot{x} sa raspregnutim stanjima:

$$\ddot{x} = -(I + ml^2) D_x v \dot{x} + ml D_\theta v \dot{\theta} + m^2 g l^2 v \theta + (I + ml^2) v u. \quad (3.37)$$

Postupak uvrštavanja lineariziranih članova ponovit će se za jednadžbu (3.29):

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{ml D_x \dot{x} \overbrace{\cos(\theta)}^{=1} - (M+m) D_\theta \dot{\theta} - m^2 l^2 \overbrace{\dot{\theta}^2}^{=0} \overbrace{\sin(\theta)}^{=\theta} \overbrace{\cos(\theta)}^{=1} - mgl(M+m) \overbrace{\sin(\theta)}^{=\theta}}{-m^2 l^2 \underbrace{\cos^2(\theta)}_{=1} + (M+m)(I + ml^2)} \\ &\quad - \frac{ml \overbrace{\cos(\theta)}^{=1}}{-m^2 l^2 \underbrace{\cos^2(\theta)}_{=1} + (M+m)(I + ml^2)} u \\ &= \frac{ml D_x \dot{x} - (M+m) D_\theta \dot{\theta} - mgl(M+m) \theta}{-m^2 l^2 + (M+m)(I + ml^2)} - \frac{ml}{-m^2 l^2 + (M+m)(I + ml^2)} u \\ &= \frac{ml D_x \dot{x} - (M+m) D_\theta \dot{\theta} - mgl(M+m) \theta}{-m^2 l^2 + (M+m)I + Mml^2 + m^2 l^2} - \frac{ml}{-m^2 l^2 + (M+m)I + Mml^2 + m^2 l^2} u, \end{aligned}$$

čime se dobiva linearizirana diferencijalna jednadžba za kutno ubrzanje njihala $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{ml D_x \dot{x} - (M+m) D_\theta \dot{\theta} - mgl(M+m) \theta}{(M+m)I + Mml^2} - \frac{ml}{(M+m)I + Mml^2} u. \quad (3.38)$$

Uvrštavanjem supstitucijskog izraza v (3.36) u jednadžbu (3.38), dobit će se:

$$\ddot{\theta} = (ml D_x \dot{x} - (M+m) D_\theta \dot{\theta} - mgl(M+m) \theta) v - ml v u, \quad (3.39)$$

gdje se množenjem zagrade sa v dobiva linearizirana diferencijalna jednadžba za kutno ubrzanje njihala $\ddot{\theta}$ sa raspregnutim stanjima:

$$\ddot{\theta} = ml D_x v \dot{x} - (M+m) D_\theta v \dot{\theta} - mgl(M+m) v \theta - ml v u. \quad (3.40)$$

Budući da su članovi u lineariziranim diferencijalnim jednadžbama za ubrzanja \ddot{x} i $\ddot{\theta}$ raspregnuti, moguće ih je napisati u obliku prostora stanja. Pomoću jednadžbi (3.1) i (3.2) ispisat će se potrebne matrice i vektori, započevši s vektorom stanja $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

gdje je onda derivacija vektora stanja po vremenu $\dot{\mathbf{x}}(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Matrica stanja \mathbf{A} dobit će se ispisivanjem članova uz stanja u raspregnutim lineariziranim diferencijalnim jednadžbama (3.37) i (3.40):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(I + ml^2) D_x v & m^2 g l^2 v & (I + ml^2) v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & ml D_x v & -m g l (M + m) v & -(M + m) D_\theta v \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Isto tako će se dobiti i matrica \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ (I + ml^2) v \\ 0 \\ -ml v \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Vektor izlaza $\mathbf{y}(t)$ bit će:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Matrica izlaza \mathbf{C} bit će:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Prijenosna matrica \mathbf{D} bit će:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

jer nema nikakvog prijenosnog djelovanja upravljačke varijable u . Vektor ulaza $\mathbf{u}(t)$ bit će:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

S obzirom da matrica $\mathbf{u}(t)$ ima samo jedan član u sebi, poprimit će oblik $u(t)$. Konačni oblik zapisa prostora stanja će onda biti:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (3.49)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (3.50)$$

Dobivanjem prostora stanja, ispunjen je uvjet za uspješnu sintezu regulatora. U sklopu svakog grafičkog prikaza istodobno će se prikazati regulacija linearnog i nelinearnog dinamičkog modela kрана. Tako će se puno lakše i jednostavnije prikazati razlike u djelovanju različitih regulatora.

4. Linearne metode regulacije kрана

Postupak sinteze regulatora i simulacije regulacije napravljeni su pomoću programskog paketa *MATLAB*. Glavni program i funkcije potrebne za rad programa nalaze se u prilogu rada. Komentarima su naznačeni segmenti koji se odnose na pojedine regulacije.

Kako bi se napravila simulacija, potrebno je postaviti parametre modela. Najjednostavnije je pronaći realne parametre u literaturi [12] i prikazati ih tablicom.

Tablica 1: Tablica parametara

M	1,0731 kg
m	0,23 kg
g	9,81 m · s ⁻²
D_x	5,4 N · m · s · rad ⁻¹
D_θ	0,0024 N · m · s · rad ⁻¹
l	0,3302 m

4.1. Upravlјivost i mjerljivost

Prije regulacije bilo kojeg modela, potrebno je provjeriti svojstva upravlјivosti (eng. *controllability*) i mjerljivosti (eng. *observability*).

Zadovoljena upravlјivost značit će mogućnost dovođenja svih stanja od trenutne vrijednosti do željene vrijednosti u nekom konačnom vremenskom intervalu. Uvjet potpune upravlјivosti po stanјima linearnih sustava [13]:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = n, \quad (4.1)$$

gdje je n broj stanјa u dinamičkom sustavu. Ovo će se u programskom paketu *MATLAB* dobiti pomoću naredbe [14]:

$$\text{rank}(\text{ctrb}(A, B)).$$

Ako je rezultat naredbe `rank()` jednak n , sva stanјa sustava upravlјiva su u svakom trenutku. Pokretanjem naredbe dobit će se:

```
>> rank(ctrb(A, B))
```

```
ans =
```

```
4.
```

S obzirom da je rezultat naredbe četiri, što je jedanko broju stanјa n , može se zaključiti da je dinamički model u potpunosti upravlјiv.

Zadovoljena mjerljivost ukazuje na mogućnost pretpostavke vrijednosti stanja sustava za svaki trenutak na temelju izlaznih vrijednosti stanja. Potvrđuje da poznavanje izlazne putanje daje dovoljno informacija za točno predviđanje vrijednosti stanja sustava. Uvjet potpune mjerljivosti po stanjima linearnih sustava [13]:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{C}^T \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T)^2 & \dots & \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (4.2)$$

U *MATLAB*-u će se ovo dobiti pomoću naredbe [15]:

$$\text{rank}(\text{obs}(\mathbf{A}, \mathbf{C})).$$

Ako je rezultat ove naredbe jednak n onda je mjerljivost zadovoljena. Pokretanjem naredbe dobit će se:

```
>> rank(obsv(A, C))
```

```
ans =
```

```
4.
```

Kao i u slučaju upravljivosti, rezultat naredbe je četiri, što znači da je dinamički model u potpunosti mjerljiv. S tom potvrdom, može se započeti sa sintezom regulatora.

4.2. Odzivi sustava bez regulacije

Prije regulacije bilo kojeg dinamičkog modela, potrebno je provjeriti kako će se model ponašati bez prisutnosti ikakve regulacije. Ovo će se napraviti tako da se njihalo pomakne za proizvoljan kut i pusti da se slobodno njiše. Postavit će se da kut otklona θ iznosi:

$$\theta = 30^\circ. \quad (4.3)$$

To znači da će matrica početnih uvjeta imati oblik:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\pi}{6} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

gdje će nule predstavljati početne uvjete ostalih stanja; horizontalni položaj kolica x , horizontalna brzina kolica \dot{x} i kutna brzina θ . Kutovi i kutne brzine se u jednadžbe dinamičkog modela uvrstavaju isključivo u radijanima, zbog čega je kut u početnim uvjetima zapisan sa $\frac{\pi}{6}$. Zbog lakšeg razumijevanja, odzivi kutova i kutnog ubrzanja u grafovima će biti prikazani u stupnjevima ($^\circ$, $^\circ/\text{s}$). Za postavljene kut otklona, prikazat će se simulacija slobodnog njihala u trajanju od 10 sekundi. Tijekom simulacije će se pratiti sva stanja sustava. Uz to će se prikazati i graf za upravljačku varijablu u . Njen iznos će u ovom slučaju uvijek biti jednak nuli jer regulacija

nije prisutna, odnosno vektor pojačanja \mathbf{K} ima vrijednosti:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

dok formula za vrijednost upravljačke varijalbe u kod linearne regulacije glasi:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + w(t), \quad (4.6)$$

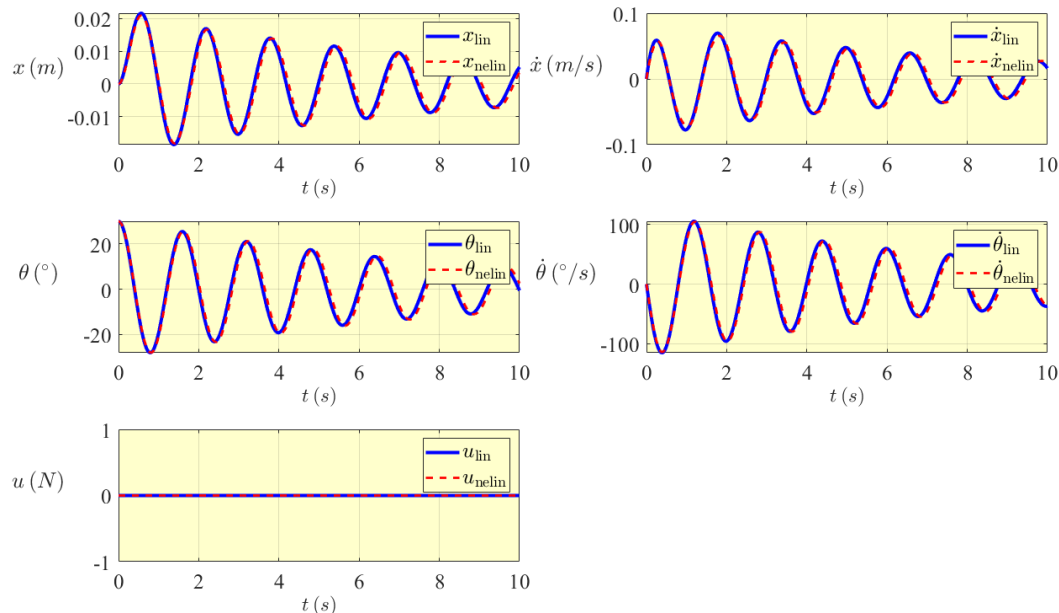
gdje je:

$w(t)$ - referentni vektor vođenja.

Za slučaju regulacije modela kрана, referentni vektor vođenja iznositi će:

$$w(t) = 0 \quad (4.7)$$

U svakom od grafova će biti nacrtane dvije krivulje; jedna za odziv regulacije linearanog dinamičkog modela, a druga za odziv regulacije nelinearnog dinamičkog modela. Legendom će se naznačiti koja se krivulja odnosi na koji slučaj. Pokretanjem programa za pojačanje \mathbf{K} (4.5) dobit će se simulacija slobodnog njihanja.



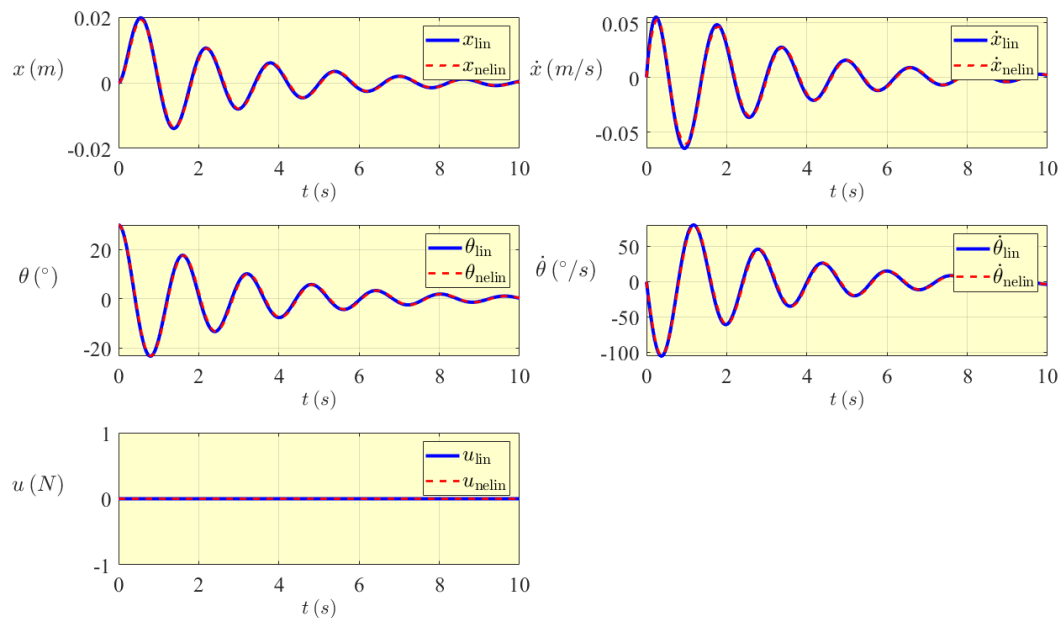
Slika 5: Odzivi nereguliranog dinamičkog modela kрана; $\theta = 30^\circ$, $D_\theta = 0,0024 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$

Nakon puštanja njihala, masa m će svojim kretanjem sinusoidno pomicati kolica, što se i vidi u grafu za horizontalni položaj x . Kako vrijeme prolazi, amplitude oscilacije njihala su sve manje zbog utjecaja gravitacije. Može se zaključiti da će se nakon nekog vremena njihalo u potpunosti smiriti.

Primjetit će se da postoji malo odstupanje između odziva linearnog i nelinearnog modela. Budući da se sustav linearizirao oko izrazito malih vrijednosti, za veliki kut otklona razlike u odzivima modela postat će zamjetne. S obzirom da se u sklopu regulacije neće postavljati početni uvjet otklona kuta, već će se samo postaviti početni horizontalni položaj, ovo neće predstavljati problem. Razlog velikom broju oscilacija je nizak koeficijent viskoznog trenja za njihalo D_θ . Koeficijent viskoznog trenja će se povećati za deset puta:

$$D_\theta = 0,024 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}, \quad (4.8)$$

Pokretanjem programa za podešen koeficijent viskoznog trenja za njihalo D_θ (4.8) dobit će se odzivi koji će se stabilizirati u kraćem vremenskom periodu.



Slika 6: Odzivi nereguliranog dinamičkog modela kрана; $\theta = 30^\circ$, $D_\theta = 0,024 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$

U ovom slučaju će oscilacije njihala biti znatno manje. Ovim se željelo pokazati koliko je bitno uračunati viskozno trenje u dinamički model kрана. Za sve tipove regulacije nadalje u radu, koristit će se parametri zadani u tablici 1.

4.3. Sinteza regulatora metodom podešavanja polova

Cilj sinteze regulatora metodom podešavanja polova je određivanje matrice pojačanja \mathbf{K} , tako da rješenje karakteristične jednadžbe budu željeni korijeni (polovi) sustava [13]:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (4.9)$$

Budući da će se vrijednosti polova dobivati iterativnim postupkom, postaviti će se da su svi polovi jednaki. Matrica polova \mathbf{p} bit će zadana izrazom:

$$\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4], \quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 < 0. \quad (4.10)$$

Za dobivanje matrice pojačanja \mathbf{K} u *MATLAB*-u će se koristiti naredba [16]:

$$\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{p}),$$

koja daje pojačanje regulatora pomoću Ackermann-ove formule. Zbog lakšeg uspoređivanja odziva različitih tipova regulacije, postaviti će se uvjeti podešavanja parametara regulacije:

1. Kolica se moraju vratiti u ishodište ($x = 0$) za ≈ 3 sekunde.
2. Maksimalan iznos upravljačke varijable u mora biti istog reda veličine za svaki tip regulacije; između -5 i -10 N.

Na taj način će se moći lakše uspoređivati odzivi ostalih stanja. Iterativnim postupkom pronaći će se zadovoljavajući set polova za ispunjene uvjete:

$$\mathbf{p} = [-3.25 \ -3.25 \ -3.25 \ -3.25]. \quad (4.11)$$

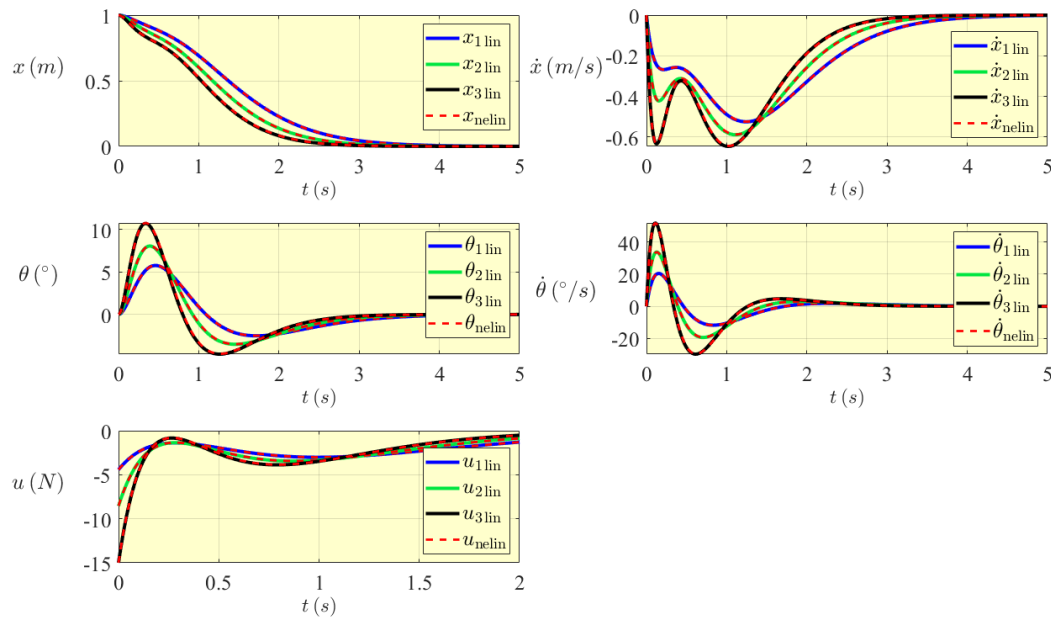
Sa svrhom boljeg prikaza kako odabir polova utječe na odzive, grafički će se na istom grafu prikazati tri slučaja:

$$\mathbf{p}_1 = [-2.75 \ -2.75 \ -2.75 \ -2.75], \quad (4.12)$$

$$\mathbf{p}_2 = [-3.25 \ -3.25 \ -3.25 \ -3.25], \quad (4.13)$$

$$\mathbf{p}_3 = [-3.75 \ -3.75 \ -3.5 \ -3.75]. \quad (4.14)$$

Pokretanjem programa dobit će se graf odziva za tri slučaja metode podešavanja polova:



Slika 7: Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog metodom podešavanja polova

Iz grafova se vidi da je pomicanje polova imalo mal utjecaj na promjenu horizontalnog položaja x . Najveće razlike se zamjećuju kod brzina \dot{x} i $\dot{\theta}$, kod kuta otklona θ i upravljačke varijable u . Pomicanjem polova u desno smanjit će se amplituda oscilacije njihala kao i maksimalna vrijednost upravljačke varijable. Pomicanjem polova u lijevo te će se vrijednosti povećati. Poštujući zadane uvjete, kao idealan slučaj će se uzeti slučaj u kojem su odabrani polovi \mathbf{p}_2 . U idućem potpoglavlju će se pokušati dobiti slični grafovi sintezom LQR-a.

4.4. Sinteza LQR regulatora

LQR (eng. *Linear Quadratic Regulation*) ili linearna kvadratična regulacija tip je regulacije u kojoj se postavke regulatora dobivaju rješavanjem problema optimalnog upravljanja [17]:

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \succeq 0, \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \succeq 0, \quad (4.15)$$

gdje su:

Q - matrica težinskih faktora stanja linearnog kvadratičnog regulatora;

$$\dim[\mathbf{Q}] = n \times n$$

R - matrica težinskih faktora ulaza linearnog kvadratičnog regulatora;

$$\dim[\mathbf{R}] = p \times p$$

Parametri unutar matrice **Q** će svi bit nula osim na pozicijama **Q**(1, 1) i **Q**(3, 3). Dijagonala će predstavljati težinske faktore stanje, gdje vrijednost na poziciji **Q**(1, 1) predstavlja težinski faktor horizontalnog položaja x . Spuštajući se dijagonalom, faktora će se odnositi na horizontalnu brzinu \dot{x} , kut oklona θ i kutnu brzinu $\dot{\theta}$ tim redoslijedom. Što je težinski faktor veći, time će se stanje definirano tim članom brže kretati u nulu. Iterativno će se dobiti vrijednosti parametara za postavljene uvjete:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Težinska matrica **R** odnosni se na upravljačku varijablu u . Povećanjem vrijednosti težinskih faktora smanjit će se maksimalna vrijednost upravljačke varijable u , a smanjenjem parametra će se povećati. Zbog jednostavnosti postaviti će se da je **R** jednak:

$$\mathbf{R} = [1] \quad (4.17)$$

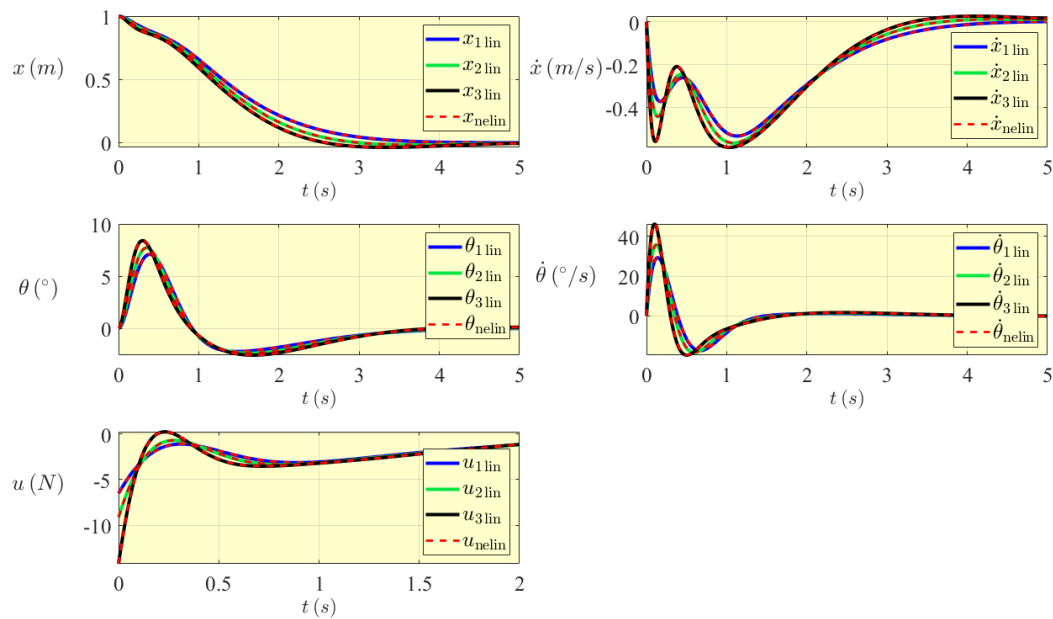
Težinska matrica **R** ima samo jedan parametar, stoga je točan zapis R , no da ne bi došlo do zabune ostavit će se matricni zapis. Naredba u *MATLAB*-u za dobivanje matrice pojačanja **K** je [18]:

$$\mathbf{K} = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}).$$

Za bolji prikaz utjecaja težinskih faktora istovremeno će se prikazati odzivi za tri različite težinske matrice **Q**:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 180 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Težinska matrica \mathbf{R} će ostati ista za svaki slučaj (4.17). Pokretanjem programa za postavljene težinske matrice \mathbf{Q} , dobiva se odziv za tri slučaja LQR-a:



Slika 8: Odziv dinamičkog modela krana reguliranog LQR-om

Odzivi za ova tri slučaja su gotovo identični odzivima kod regulacije metodom podešavanja polova. Jedina bitnija razlika je što se odzivi za kut otklona θ ne razlikuju kao kod metode podešavanja polova. Povećanjem parametara, maksimalna amplituda kuta otklona θ se povećava. Apsolutna vrijednost upravljajuće varijable u će biti također biti veća što su parametri težinske matrice \mathbf{Q} veći. Može se zaključiti da je povećanje težinskih parametara ekvivalentno pomicanju polova u lijevo kod metode podešavanja polova.

Ove metode funkcioniraju s pretpostavkom da su sva stanja mjerljiva. Treba podsjetiti da matrica izlaza \mathbf{C} (3.46) ukazuje da su mjerljivi samo horizontalni položaj x i kut otklona θ . U idućem potpoglavlju će se provjeriti je li moguće upravljati sustavom na temelju poznavanja samo dva stanja.

4.5. Observer stanja

Osnovna ideja observera stanja je da na temelju mjerenja vektora izlaza y (3.50) asimptotski estimira vektor stanja x . Jednaždbe observera stanja je:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \mathbf{A}\hat{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{x}(t)), \quad (4.19)$$

gdje su:

$\hat{x}(t)$ - vektor estimiranih stanja; $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$,

$\dot{\hat{x}}(t)$ - derivacija vektora estimiranih stanja po vremenu; $\dot{\hat{x}}(t) = \frac{d\hat{x}(t)}{dt}$ i

\mathbf{L} - matrica pojačanja regulatora kod observera.

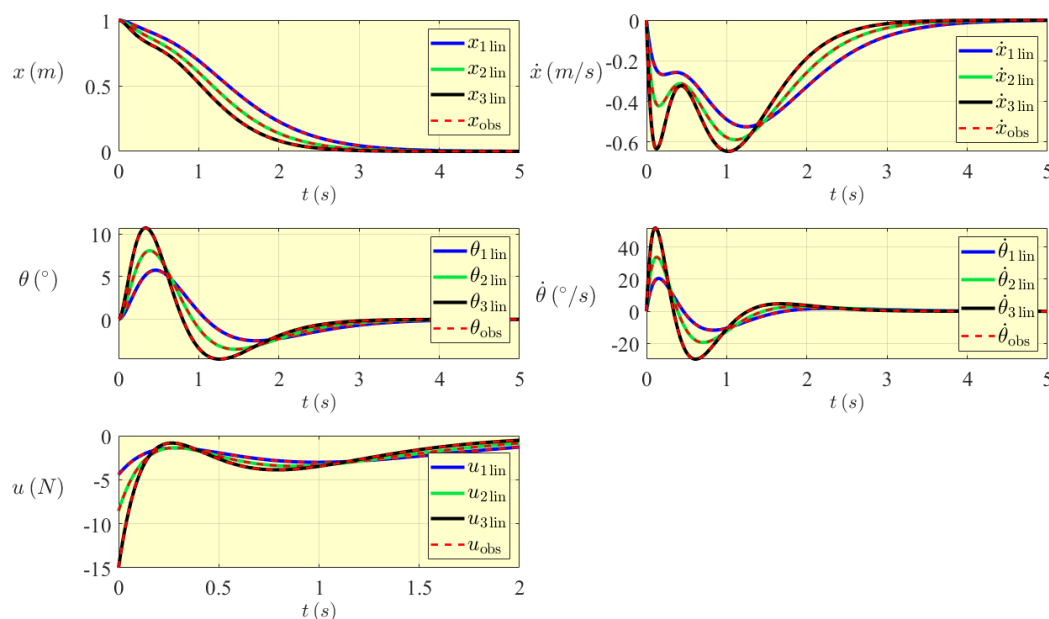
Upravljačka varijabla u kod observera će biti definira jednažbom:

$$u(t) = -\mathbf{K}\hat{x}(t) \quad (4.20)$$

Matrica pojačanja regulatora kod observer se u *MALTA*B-u također dobiva pomoću naredbe `lqr()`, s time da su parametri unutar zagrada drukčiji:

$$\mathbf{L} = \text{lqr}(\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{Q}, \mathbf{R})',$$

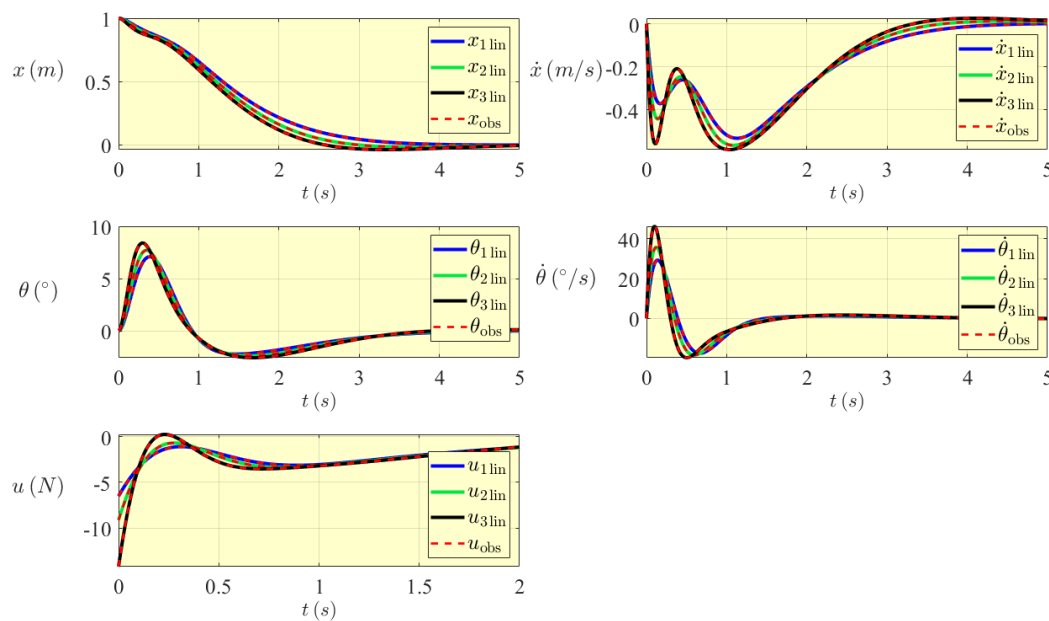
gdje znak $'$ predstavlja transponiranu matricu. Observer će se prvo upotrijebiti se metodom sinteze regulatora podešavanjem polova za matricu izlaza \mathbf{C} zadanu izrazom (3.46).



Slika 9: Odzivi dinamičkog modela krana reguliranog metodom podešavanja polova sa observerom

U slučaju regulacije sa observerom stanja, iscrtkana crvena linija predstavlja aproksimiran odziv, te je zbog toga u legendi označena sa obs . Usporede li se slike 7 i 9, primjetit će se da su odzivi identični. Ovo znači da je pomoću observera stanja moguće aproksimirati odzive horizontalne brzine \dot{x} i kutne brzine $\dot{\theta}$ na temelju poznavanja vrijednosti horizontalnog položaja x i kuta otklona θ .

Za isti slučaj matrice izlaz \mathbf{C} iz izraza (3.46), napravit će se simulacija odziva sa LQR-om uz prisutnost observera stanja.



Slika 10: Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog LQR-om sa observerom stanja

Usporede li slike 8 i 10 može se zaključiti da su i one identične, što znači da je i u ovom slučaju pomoću observera stanja moguće aproksimirati odzive horizontalne brzine \dot{x} i kutne brzine $\dot{\theta}$ na temelju poznavanja vrijednosti horizontalnog položaja x i kuta otklona θ . S obzirom da su oba regulatora linearna i rade na isti način (4.6), bilo je za očekivati da će biti moguće napraviti adekvatnu aproksimaciju pomoću observera stanja.

Odzivi reguliranih nelinearnih dinamičkih sustava sa observerom se neće prikazati. U prošla dva potpoglavlja se pokazalo da odzivi linearnog i nelinearnog dinamičkog modela kрана prate jedni druge. Ovo znači da bi se dobili praktički identični grafovi kao na slikama 9 i 10.

5. Nelinearne robusne metode regulacije kрана

U stvarnom svijetu česta su pojava poremećaji. Poremećaj može u ovom slučaju biti vjetar koji puše u određenim intervalima. Iduće potpoglavlje testirat će najbolje slučajeve parametara sinteze regulatora u slučaju prisutnosti sinusoidnog poremećaja. Jednadžbe stanja uz prisutnost poremećaja poprimit će oblik:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} (u(t) + d(t)), \quad (5.1)$$

gdje je:

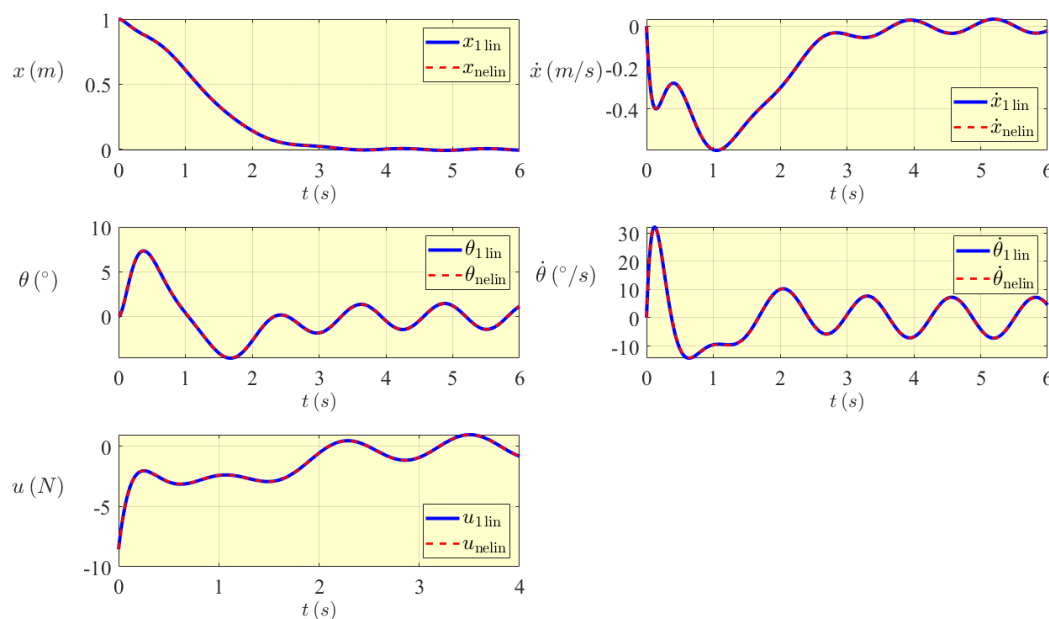
$d(t)$ - ukupni poremećaj koji djeluje na sustav.

Za ovaj slučaj, postaviti će se da je dan izrazom:

$$d(t) = \sin(5t). \quad (5.2)$$

5.1. Utjecaj poremećaja na linearne regulacijske sustave

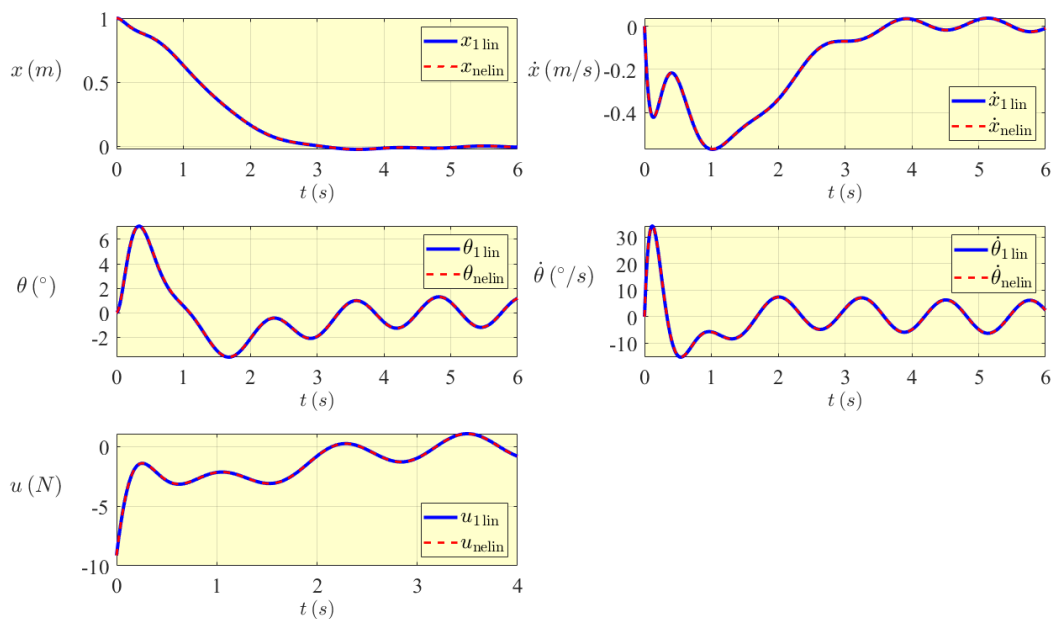
Utjecaj poremećaja testirat će se na linearnim regulatorima. Započet će se sa dinamičkim modelom kрана reguliranim metodom podešavanja polova i to za slučaj gdje su polovi dani matricom \mathbf{p}_2 (4.13). Vrijeme simulacije će se produžiti, kako bi se bolje prikazao utjecaj poremećaja na odzive. Nakon podešenja parametara, pokreće se program.



Slika 11: Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog metodom podešavanja polova uz prisutnost poremećaja; $d(t) = \sin(5t)$

Iz grafova se vidi da linearni regulator dobiven metodom podešavanja polova nije umogućnosti protubalancirati utjecaj poremećaja na sustav. U svakom od grafova se vidi sinusoidni utjecaj na sustav. U grafu upravljačke varijable u se vidi da regulator pokušava prevagnuti utjecaj sinusoide no u tome ipak ne uspijeva.

Isti postupak će se ponoviti za LQR. Uzet će se parametri dani matricama \mathbf{Q}_2 (4.18) i \mathbf{R} (4.17). I ovdje će se simulacija produžiti kako bi se bolje prikazao utjecaj poremećaja na odzive. Parametri će se podesiti i pokrenut će se program.



Slika 12: Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog sa LQR-om; $d(t) = \sin(5t)$

Odzivi na slikama 11 i 12 su skoro identični. I u slučaju LQR-a, regulator neće moći prigušiti utjecaj sinusoidnog poremećaja. Za sustave u kojima je prisutan poremećaj, koristit će se nelinearni regulatori. Njihova sinteza i odzivi će se objasniti i prikazati u narednim potpotpoglavljima.

5.2. Robusni nelinearni regulator

Realni dinamički model kрана opisan jednačinom [19]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} (u(t) + f(\mathbf{x}(t)) + d_{\text{ext}}(t)), \quad (5.3)$$

gdje je:

$f(\mathbf{x}(t))$ - nepoznata funkcija koja reprezentira nemodeliranu dinamiku modela i

$d_{\text{ext}}(t)$ - vanjski poremećaj.

Funkcija $f(\mathbf{x}(t))$ zapravo je nelinearni dio dinamičkog modela koji je u slučaju modela krana zanemaren jer je izrazito mali. Za sumu nemodelirane dinamike modela i vanjskog poremećaja mora vrijediti:

$$\underbrace{|f(\mathbf{x}(t)) + d_{\text{ext}}(t)|}_{=d(t)} \leq \rho, \quad (5.4)$$

gdje je:

ρ - pojačanje robusnog nelinearnog regulatora.

Upravljačka varijabla $u(t)$ će u ovom slučaju imati dvije komponente:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x} + u_{\text{R}}(t), \quad (5.5)$$

gdje je:

$u_{\text{R}}(t)$ - nelinearni član regulatora.

Član $u_{\text{R}}(t)$ opisan je jednadžbom [19]:

$$u_{\text{R}}(t) = -\rho \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)}{|\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)| + \varepsilon}, \quad (5.6)$$

gdje je parametar ε dodan kako bi se izbjegla singularnost (nula u nazivniku). Matrica \mathbf{P} određena je rješavanjem Lyapunovljeve jednadžbe:

$$\mathbf{A}_{\text{cl}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_{\text{cl}} = -\mathbf{Q}, \quad (5.7)$$

gdje je:

\mathbf{A}_{cl} - matrica zatvorenog kruga,

zadana izrazom:

$$\mathbf{A}_{\text{cl}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}. \quad (5.8)$$

Težinska matrica \mathbf{Q} ovdje će imati drukčije težinske parametre jer se radi o potpuno drukčijem dizajnu regulatora:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Za dobivanje matrice \mathbf{P} u *MATLAB*-u koristit će se naredba [20]:

$$\mathbf{P} = \text{lyap}(\mathbf{A}, \mathbf{r}', \mathbf{Q}).$$

Pojačanje linearnog dijela regulatora \mathbf{K} u *MATLAB*-u će se dobiti na identičan način kao i pojačanje kod LQR-a:

$$\mathbf{K} = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}),$$

gdje će matrica \mathbf{R} biti zadana sa vrijednosti:

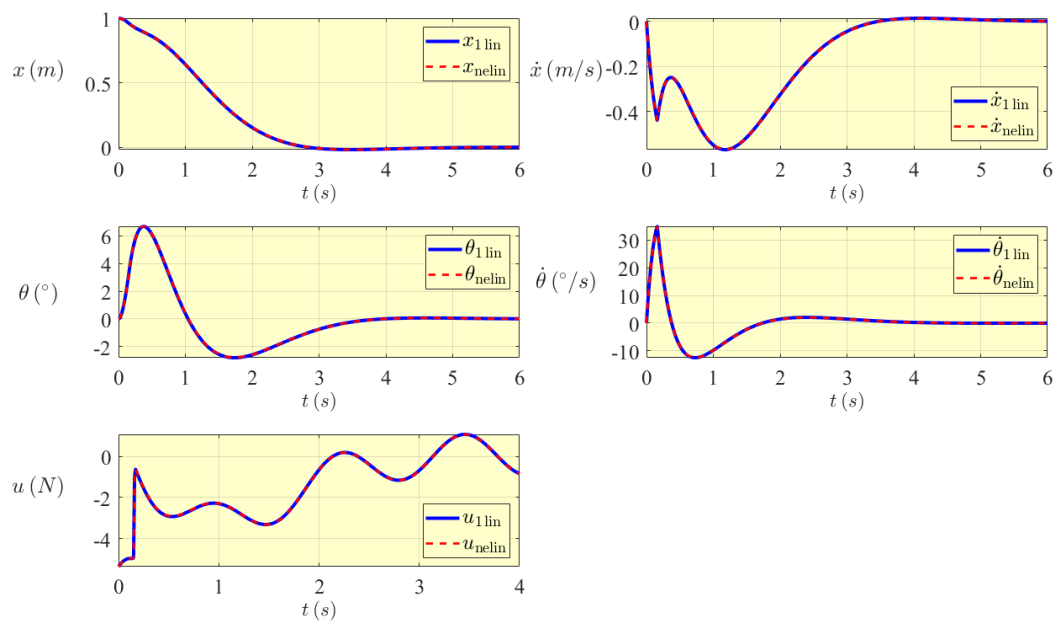
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Pojačanje ρ iznosit će:

$$\rho = 5, \quad (5.11)$$

dok će parametar ε iznositi:

$$\varepsilon = 0.001. \quad (5.12)$$



Slika 13: Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog nelinearnim robusnim regulatorom uz prisutnost poremećaja; $d(t) = \sin(5t)$

Za slučaj robusnog nelinearnog regulatora, poremećaj će biti prevladan. Iz grafa za odziv upravljačke varijable $u(t)$ vidi se sinusoidno djelovanje regulatora, koje uspješno prigušuje djelovanje sinusoidnog poremećaja. Stanja reguliranog dinamičkog modela kрана se u kratkom vremenu stabiliziraju u nulu čime je regulacija uspješna.

5.3. Robusni nelinearni regulator s kliznim režimom rada

Sinteza regulatora s kliznim režimom rada započinje podjelom matrice ulaza \mathbf{B} na način [21]:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

gdje su dimenzije matrica \mathbf{B}_1 i \mathbf{B}_2 :

$$\mathbf{B}_1 = (n - m) \times m, \quad \dim[\mathbf{B}_2] = m \times m, \quad (5.14)$$

za $n = 4$ i $m = 1$. Uvodi se matrica transformacija \mathbf{T} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-m} & -\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

gdje vrijedi:

$$\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad \mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^m. \quad (5.16)$$

Matrica transformacija \mathbf{T} transformirat će matricu stanja \mathbf{A} i matricu ulaza \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_{\text{tr}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{B}_{\text{tr}} = \mathbf{T} \mathbf{B}, \quad (5.17)$$

tako da će jednaždbe stanja linearnog dinamičkog modela kрана (3.49) prijeći u takozvani normalni oblik:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2(t), \quad (5.18)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2(t) + u(t) + d(t), \quad (5.19)$$

gdje su matrice \mathbf{A}_{ij} zadane kao:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{\text{tr}}(1:3, 1:3), \quad \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{\text{tr}}(1:3, 4), \quad \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{\text{tr}}(4, 1:3), \quad \mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_{\text{tr}}(4, 4). \quad (5.20)$$

Klizna površina matematički je opisana izrazom:

$$s = \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}_1(t), \quad (5.21)$$

Upravljačka varijabla $u(t)$ imat će linearni i nelinearni dio. Prvi korak u dobivanju linearnog dijela bit će preslagivanje jednadžbe (5.21):

$$\mathbf{x}_2(t) = s - \mathbf{K} \mathbf{x}_1(t). \quad (5.22)$$

Jednadžba (5.22) uvrstit će se u jednadžbu (5.18), čime se dobiva:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12} (s - \mathbf{K} \mathbf{x}_1(t)), \quad (5.23)$$

koju je potrebno raspisati i presložiti:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12} s - \mathbf{A}_{12} \mathbf{K} \mathbf{x}_1(t) \\ &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{K}) \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12} s, \end{aligned} \quad (5.24)$$

čime se dobiva izraz:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12} s, \quad (5.25)$$

gdje je:

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{K}. \quad (5.26)$$

Izraz u jednadžbi (5.22) potrebno je derivirati:

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \dot{s} - \mathbf{K} \dot{\mathbf{x}}_1(t), \quad (5.27)$$

i onda uvrstiti u jednadžbu (5.19):

$$\dot{s} - \mathbf{K} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2(t) + u(t) + d(t). \quad (5.28)$$

Izraz (5.25) će se zatim uvrstiti u jednadžbu (5.28) koja će se presložiti na način da se dobije izraz za \dot{s} :

$$\dot{s} - \mathbf{K} (\mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12} s) = \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2(t) + u(t) + d(t),$$

čime se dobiva raspisan izraz za \dot{s} :

$$\dot{s} = (\mathbf{A}_{21} + \mathbf{K} \mathbf{A}_{cl}) \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{K} \mathbf{A}_{12} s + u(t) + d(t). \quad (5.29)$$

Odabire se dinamika upravljačke varijable $u(t)$:

$$u(t) = -(\mathbf{A}_{21} + \mathbf{K} \mathbf{A}_{cl}) \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{K} \mathbf{A}_{12} s + u_R(t). \quad (5.30)$$

Uvrštavanjem izraza (5.30) u jednadžbu (5.29), dobiva se dinamika zatvorenog kruga:

$$\dot{s} = u_R(t) + d(t). \quad (5.31)$$

Nelinearni dio upravljačke varijable $u_R(t)$ zadan je izrazom:

$$u_R(t) = -\rho \operatorname{sign}(s), \quad (5.32)$$

gdje je $\text{sign}(s)$ funkcija nekontinuirana za $s = 0$. Zbog toga će se funkcija $\text{sign}(s)$ aproksimirati:

$$\text{sign}(s) = \tanh(10s). \quad (5.33)$$

Izraz (5.33) uvrstit će se u izraz (5.32) čime se dobiva:

$$u_R(t) = -\rho \tanh(10s). \quad (5.34)$$

Novi izraz za nelinearni dio upravljačke varijable $u_R(t)$ (5.34) uvrstit će se u jednadžbu (5.30):

$$u(t) = -(\mathbf{A}_{21} + \mathbf{K}\mathbf{A}_{c1}) \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{K}\mathbf{A}_{12}s - \rho \tanh(10s), \quad (5.35)$$

nakon čega se dobiva konačni oblik upravljačke varijable $u(t)$ za robusni nelinearni regulator s kliznim režimom rada. Matrica pojačanja \mathbf{K} će se u *MATLAB*-u dobiti pomoću naredbe:

$$\mathbf{K} = \text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{p}).$$

Iterativnim postupkom će se dobiti matrica polova \mathbf{p} koja će zadovoljiti postavljene uvjete:

$$\mathbf{p} = [-6,3 \quad -6,3 \quad -6,3]. \quad (5.36)$$

Iz dinamike zatvorenog kruga opisane jednadžbom (5.31), slijedi uvjet za pojačanje:

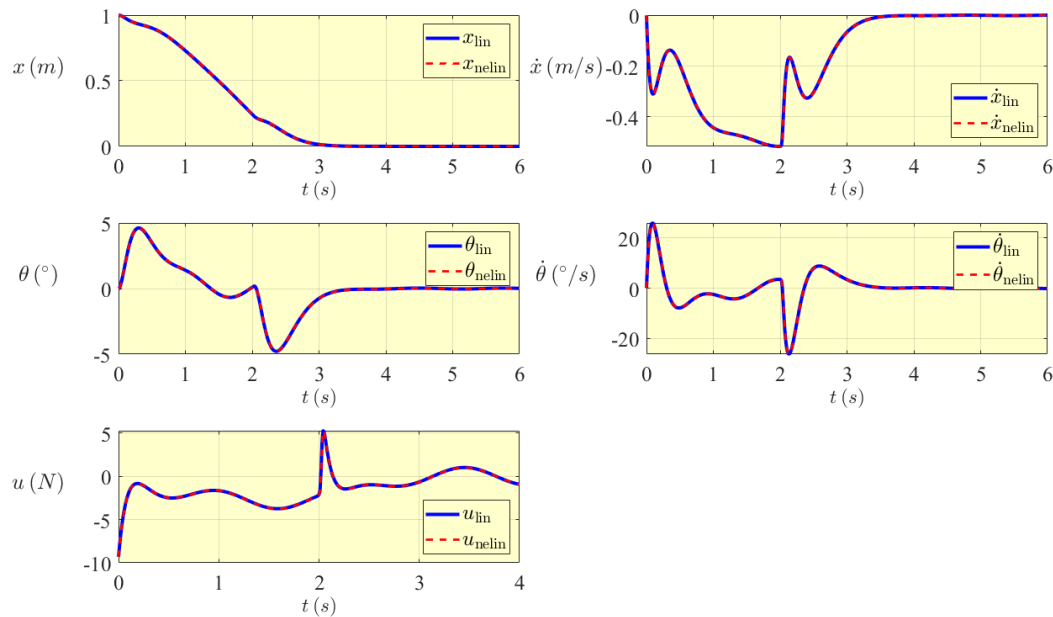
$$\rho > |d(t)|. \quad (5.37)$$

Drugim riječima, pojačanje treba biti veće od maksimalne amplitude totalno poremećaja $d(t)$. Za simuliranje će se koristiti pojačanje:

$$\rho = 10, \quad (5.38)$$

koje je veće od amplitude sinusnog poremećaja (5.2).

Nakon podešavanja parametara, pokreće se program.



Slika 14: Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog robusnim nelinearnim regulatorom sa kliznim režimom rada uz prisutnost poremećaja; $d(t) = \sin(5t)$

Odzivi stanja će u slučaju ove regulacije biti iznimno različite prirode naspram odziva prijašnjih regulacija. Ovdje će se u odzivima svakog stanja, osim horizontalnog položaja x , vidjeti nagli pomak u iznimno kratkom vremenskom intervalu. To je djelovanje kliznog režima, koji naglo prepravlja razliku između stvarnih i željenih vrijednosti. Usprkos tome, uvjeti su zadovoljeni i maksimalne amplitude otklona njihala su manje u odnosu na prijašnje slučajeve. Uz to, djelovanje regulatora uspješno će prevladati poremećaj $d(t)$ i stabilizirati sustav.

Na početku poglavlja postavili su se parametri. Radi se o nominalnim vrijednostima, za koje se uzela pretpostavka da su poznati i točni. Pitanje je što će se dogoditi ako na primjer ovješeni teret m nije poznat.

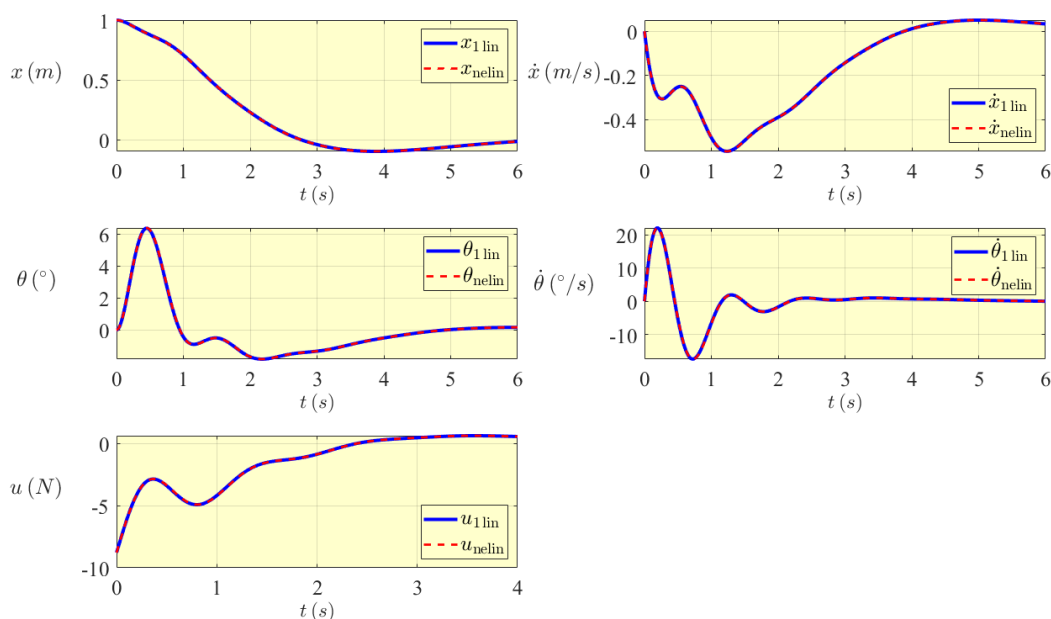
5.4. Uspoređivanje performansi regulatora za slučaj nepoznate mase ovješnog tereta

Neprecizno poznavanje znači da nije poznata točna vrijednost nekog parametra. U ovom slučaju, pretpostavit će se da se točno ne poznaje masa ovješnog tereta m . Njena nominalna vrijednost dana je u tablici 1. Već sintezirani regulatori, koji su se napravili za ovješni teret mase m , koristit će se za ovješni teret ≈ 20 puta veće mase. Ovo znači da će nova vrijednost ovještene mase m biti:

$$m \approx 4,6\text{kg} \quad (5.39)$$

Performanse će se uspoređivati zasebno za svaki graf. Grafovi odziva za modificiranu masu uspoređivat će se sa grafovima dobivenima pripadajućem tipu regulacije bez prisutnosti poremećaja s nemodificiranom masom.

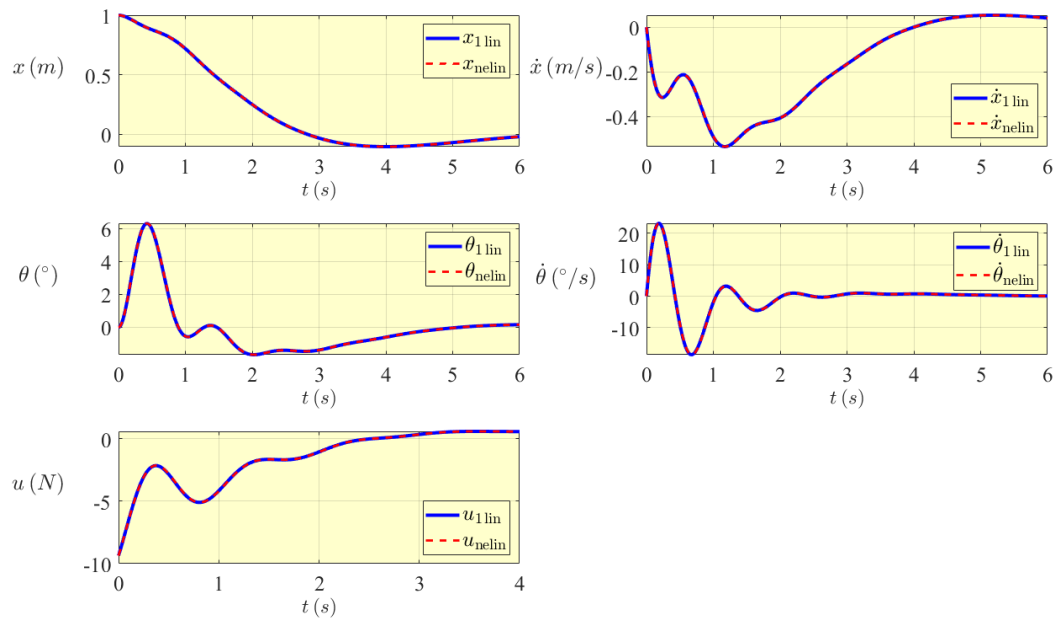
Za sintezu regulatora metodom podešavanja polova, koristit će se polovi u matrici polova \mathbf{p}_2 (4.13). U programu će se promijeniti parametar ovještene mase m na vrijednost u izrazu (5.39) i program će se pokrenuti.



Slika 15: Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog metodom podešavanja polova za slučaj nepoznate mase ovješnog tereta; $m \approx 4,6\text{kg}$

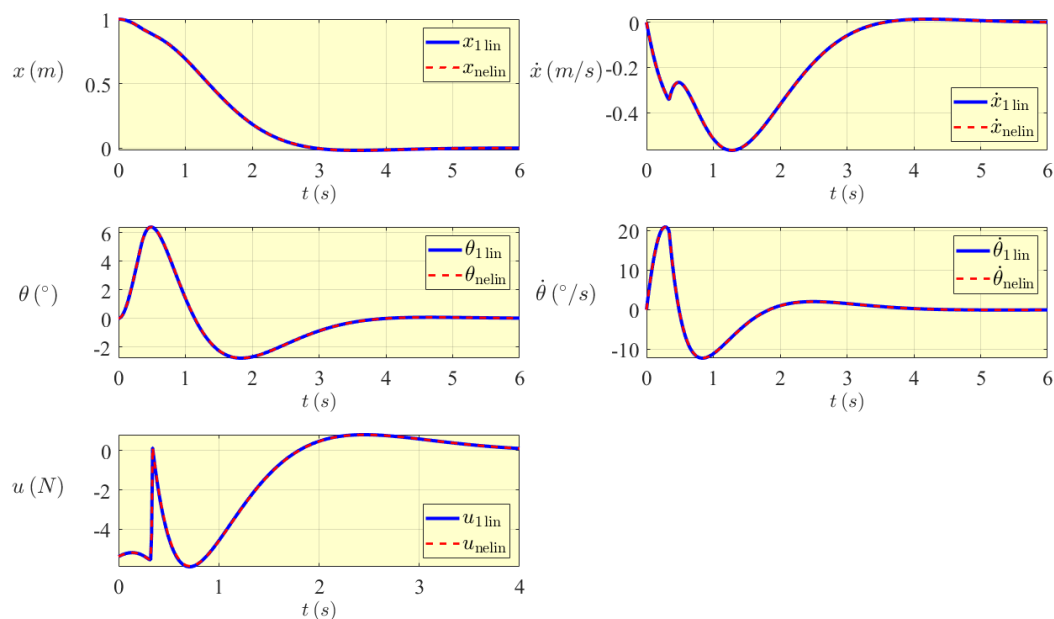
Iz grafa se vidi da se kolica kreću puno sporije i da promašaju ishodišnu poziciju i odlaze u drugom smjeru. Ovo će rezultirati duljoj simulaciji s čime je nezadovoljen zadani uvjet regulacije. Amplitude oscilacije njihala ostaje identične no njihalu treba dulje da se stabilizira.

Kod LQR-a, koristit će se slučaj s težinskim matricama \mathbf{Q}_2 (4.16) i \mathbf{R} (4.17).



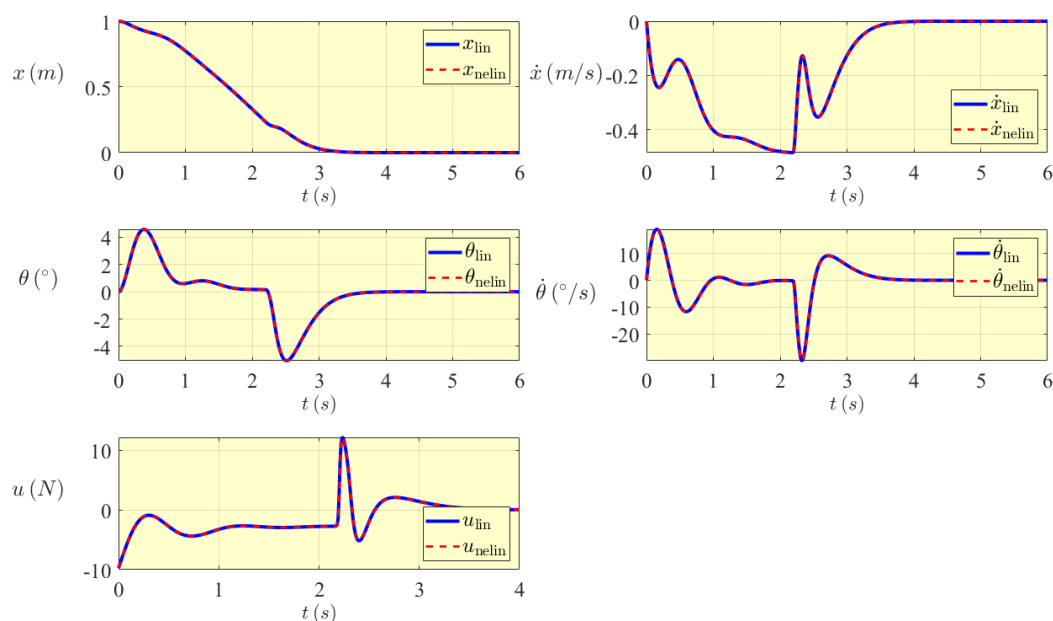
Slika 16: Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog LQR-om za slučaj nepoznate mase ovješenoг tereta; $m \approx 4,6 \text{ kg}$

Odzivi na slici 16 identični su odzivima na slici 15, stoga isti komentari kao za metodu podešavanja polova vrijede i ovdje. Slijedi provjera performanse robusnog nelinearnog regulatora s modificiranom ovješenoм masom m .



Slika 17: Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog robusnim nelinearnim regulatorom za slučaj nepoznate mase ovješenoг tereta; $m \approx 4,6 \text{ kg}$

Kod odziva robusnog nelinearnog regulatora nema drastičnih promjena. Kolica će i dalje doći u ishodišnu poziciju za oko tri sekunde. Amplitude oscilacija njihala će ostati iste, s tim da će se oko četvrtinu sekunde više njihati, no to je praktički zanemarivo. Odziv upravljačke varijable će imati malo veći apsolutni maksimum. Usprkos tome, ne kriši drugi postavljeni zahtjev jer se kreće u vrijednosti između -5 i -10 N. S istim postavkama će se provjeriti odzivi robusnog nelinearnog regulatora s kliznim režimom rada.



Slika 18: Odzivi dinamičkog modela kрана reguliranog robusnim nelinearnim regulatorom sa kliznim režimom rada za slučaj nepoznate mase ovješene tereta; $m \approx 4,6$ kg

Kao i kod robusnog nelinearnog regulatora, odziv horizontalnog položaja kolica x će se i dalje smanjiti u nulu za tri sekunde. Amplitude oscilacije još su manje u usporedbi sa odzivom otklona njihala θ na slici 14. Interesantno je što će i u ovom slučaju maksimum upravljačke varijable $u(t)$ biti veći. Ovdje se već krši drugi postavljen uvjet, jer je maksimalna vrijednost ≈ 11 N. S obzirom da je vrijednost i dalje istog reda veličine, to će biti prihvatljivo.

Provjerom ovih performansi dodatno se pokazalo zašto su nelinearni regulatori bolji i efektivniji. Vidi se da je njihova robusnost iznimno velika naspram linearnih regulatora.

6. Zaključak

U radu je izveden dinamički model krana s pomoću Euler-Lagrangeove i Newton-Eulerove metode. Prikazana je metoda linearizacije nelinearnog dinamičkog modela krana. Slijedio je grafički prikaz odziva slobodnog njihanja, s kojima se potvrdila točnost dobivenog modela. Na istim se grafovima prikazao utjecaj viskoznog trenja na kretanje kolica i njihala. Opisana su se dva tipa linearne regulacije; sinteza regulatora metodom podešavanja polova i sinteza regulatora LQR metodom. Postavili su se željeni uvjeti simulacije za koje su se iterativno dobili parametri za oba tipa regulacije. Pokazalo se da je moguće dobiti gotovo identične odzive kod oba slučaja. Korištenjem observera stanja se potvrdilo da je na temelju poznavanje odziva horizontalnog položaja i otklona kuta moguće estimirati horizontalnu brzinu i kutno ubrzanje. U narednim segmentima se grafički prikazalo djelovanje poremećaja na linearne regulatore. Ispostavilo se da ne mogu prigušiti utjecaj poremećaja na izlazne varijable. Kod takvih situacija se ispostavilo da je robusni nelinearni regulator iznimno dobar. Uz njega se kao još jedan primjer nelinearnog regulatora, matematički prikazalo djelovanje robusnog nelinearnog regulatora s kliznim režimom rada. Oba nelinearna regulatora su uspješno prigušila sinusni poremećaj. Kod slučaja gdje se ne poznaje točna masa ovješene tereta, zaključilo se da svaki od regulatora uspješno reguliraju sustav, iako se kod linearnih regulatora vrijeme stabilizacije značajnije produjlo. Na drugu ruku, nelinearni regulatori su usprkos pretpostavci znatno veće ovješene mase, uspješno regulirali sustav u zadovoljavajućem vremenskom intervalu. Po svim performansama, nelinearni regulatori su se pokazali boljima. Iz svega se može povući zaključak kako su nelinearni regulatori bolji od linearnih, jer imaju bolje performanse i veću robusnost. Usprkos tome, treba imati na umu složenost i cijenu regulatora. U slučaju da su poremećaji mali i parametri sustava se dobro poznaju, svi navedeni regulatori imaju zadovoljavajuće performanse, iako je u takvim situacijama isplativije koristiti linearni regulator. U slučaju da se želi najbolja performansa i velika robusnost sustava, primijenit će se nelinearni regulator.

Literatura

- [1] "Single Pendulum Gantry (SPG)," Appendix B. Non-Linear Equations of Motion (EOM) (stranice 30-33), *Quanser*,
<http://www.me.unlv.edu/Undergraduate/coursenotes/control/IP02Gantry.pdf> (pristupljeno 20.3.2024.)
- [2] "Potential energy," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Potential_energy&oldid=1195652569 (pristupljeno 20.3.2024.)
- [3] "Kinetic energy," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kinetic_energy&oldid=1208400633 (pristupljeno 20.3.2024.)
- [4] "Rotational energy," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rotational_energy&oldid=1181495410 (pristupljeno 20.3.2024.)
- [5] "Moment of inertia," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Moment_of_inertia&oldid=1209101186 (pristupljeno 20.3.2024.)
- [6] "Lagrangian mechanics," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lagrangian_mechanics&oldid=1208372218 (pristupljeno 20.3.2024.)
- [7] Ashwani Kharola, "Position Regulation and Anti-Swing Control of Overhead Gantry Inverted Pendulum (GIP) using Different Soft-computing Techniques", *International Journal of Intelligent Systems and Applications(IJISA)*, Vol.8, No.2, pp.28-34, 2016.
- [8] "d'Alembert's principle," *Encyclopedia Britannica*,
<https://www.britannica.com/science/dAlemberts-principle> (pristupljeno 20.3.2024.)
- [9] "State-space representation," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=State-space_representation&oldid=1194760127 (pristupljeno 20.3.2024.)
- [10] Emad, Q. Hussein and Ayad Q. Al-Dujaili and Ahmed R. Ajel, "Design of Sliding Mode Control for Overhead Crane Systems", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing, Baghdad, Iraq, 15 April 2020

- [11] "Linear approximation," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Linear_approximation&oldid=1184279580 (pristupljeno 20.3.2024.).
- [12] Dey, Rajeeb & Sinha, Nishant & Chaubey, Priyanka & Ghosh, Sandip & Ray, Goshaidas, "Active sway control of a single pendulum gantry crane system using output-delayed feedback control technique", *11th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, Singapore, 7-10 December 2010.
- [13] D. Majetić, J. Kasać, D. Brezak, *Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja – Viševarijabilni sustavi*, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2016.
- [14] "ctrb," *MathWorks*,
<https://www.mathworks.com/help/control/ref/statespacemodel.ctrb.html> (pristupljeno 20.3.2024.).
- [15] "obsv," *MathWorks*,
<https://www.mathworks.com/help/control/ref/statespacemodel.obsv.html> (pristupljeno 20.3.2024.).
- [16] "acker," *Northwestern University*,
<http://www.ece.northwestern.edu/local-apps/matlabhelp/toolbox/control/ref/acker.html> (pristupljeno 20.3.2024.).
- [17] "Underactuated Robotics", *Algorithms for Walking, Running, Swimming, Flying, and Manipulation*,
<https://underactuated.mit.edu/lqr.html> (pristupljeno 20.3.2024.)
- [18] "lqr," *MathWorks*,
<https://www.mathworks.com/help/control/ref/lti.lqr.html> (pristupljeno 20.3.2024.)
- [19] Stanislaw H. Żak, *Systems and Control*, Oxford university press, 2003.
- [20] "lyap", *MathWorks*,
<https://www.mathworks.com/help/control/ref/lyap.html>
- [21] Vadim Utkin, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*, CRC Press, 2009.
- [22] "Sign function," *Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Sign_function&oldid=1205334629 (pristupljeno 20.3.2024.)

Prilog

I. MATLAB program

(Napravljeno u MATLAB R2018a)

```
1 close all
2 clear variables
3 clc
4
5 global Do Dx g l M m I v A B C K ...
6     w LL P rho eps dist Acl ...
7     TT A21 A12 A22
8
9 C = [1 0 0 0;
10     0 1 0 0;
11     0 0 1 0;
12     0 0 0 1];
13 D = 0;
14 % Do = 0.024;
15 Do = 0.0024;
16 Dx = 5.4;
17 g = 9.81;
18 l = 0.3302;
19 M = 1.0713;
20 m = 0.23;
21 x0 = [1 0 0 0 0];
22
23 options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6);
24
25 T = 6;
26 Tu = 4;
27
28 vpoz = 0;
29 nep = 20;
30
31 for i = 1:7
32
33     if i == 1 % dinamički model bez regulacije
34
```

```
35     m = 0.23;
36     I = m*(l^2);
37     v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
38
39     A = [0 1 0 0;
40         0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
41         0 0 0 1;
42         0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
43     B = [0;
44         (I+(l^2)*m)*v;
45         0;
46         -m*l*v];
47
48     dist = 0;
49     x0 = [0 0 pi/6 0 0];
50
51     K = [0 0 0 0];
52
53     duljina = size(K,1);
54     prekl = 1;
55     precizno = 1;
56
57     elseif i == 2 % metoda podesaavanja polova
58
59     m = 0.23;
60     I = m*(l^2);
61     v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
62
63     A = [0 1 0 0;
64         0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
65         0 0 0 1;
66         0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
67     B = [0;
68         (I+(l^2)*m)*v;
69         0;
70         -m*l*v];
71
72     dist = 0;
73     x0 = [1 0 0 0 0];
```

```
74
75     p1 = [-1 -1 -1 -1];
76     p = 3.25*p1;
77 %     p = [2.75*p1 3.25*p1 3.75*p1];
78
79     duljina = size(p,2)/4;
80     prekl = 1;
81     precizno = 1;
82
83     elseif i == 3 % LQR
84
85         m = 0.23;
86         I = m*(l^2);
87         v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
88
89         A = [0 1 0 0;
90             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
91             0 0 0 1;
92             0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
93         B = [0;
94             (I+(l^2)*m)*v;
95             0;
96             -m*l*v];
97
98         dist = 0;
99         x0 = [1 0 0 0 0];
100
101         Q1 = [45 0 0 0;
102             0 0 0 0;
103             0 0 1000 0;
104             0 0 0 0];
105         Qall = 2*Q1;
106 %     Qall = [1*Q1 2*Q1 5*Q1];
107
108         Rall = 1*ones(1,size(Qall,2)/4);
109
110         duljina = size(Qall,2)/4;
111         prekl = 1;
112         precizno = 1;
```

```
113
114     elseif i == 4 % observer stanja s
115                 % metodom podesavanja polova
116         m = 0.23;
117         I = m*(l^2);
118         v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
119
120         A = [0 1 0 0;
121             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
122             0 0 0 1;
123             0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
124         B = [0;
125             (I+(l^2)*m)*v;
126             0;
127             -m*l*v];
128
129         dist = 0;
130         w = 0;
131         C = [1 0 1 0];
132         x0 = [1 0 0 0 1 0 0 0 0 0];
133
134         po = [-15; -14; -13; -12];
135
136         p1 = [-1 -1 -1 -1];
137         p = 3.25*p1;
138 %         p = [2.75*p1 3.25*p1 3.75*p1];
139
140         duljina = size(p,2)/4;
141         prekl = 1;
142
143     elseif i == 5 % observer stanja s LQR-om
144
145         m = 0.23;
146         I = m*(l^2);
147         v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
148
149         A = [0 1 0 0;
150             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
151             0 0 0 1;
```

```

152         0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
153     B = [0;
154         (I+(l^2)*m)*v;
155         0;
156         -m*l*v];
157
158     dist = 0;
159     w = 0;
160     C = [1 0 1 0];
161     x0 = [1 0 0 0 1 0 0 0 0 0];
162
163     Q1 = [45 0 0 0;
164          0 0 0 0;
165          0 0 1000 0;
166          0 0 0 0];
167     Qall = 2*Q1;
168 %     Qall = [1*Q1 2*Q1 5*Q1];
169
170     Rall = 1.*ones(1,size(Qall,2)/4);
171
172     duljina = size(Qall,2)/4;
173     prekl = 1;
174
175     elseif i == 6 % nelinearni robusni regulator
176
177         m = 0.23;
178         I = m*(l^2);
179         v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
180
181         A = [0 1 0 0;
182             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
183             0 0 0 1;
184             0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
185         B = [0;
186             (I+(l^2)*m)*v;
187             0;
188             -m*l*v];
189
190     eps = 0.001;

```

```

191     rho = 5;
192     dist = 1;
193     x0 = [1 0 0 0 0];
194
195     Q1 = [2 0 0 0;
196           0 0 0 0;
197           0 0 25 0;
198           0 0 0 0];
199     Qall = 1*Q1;
200 %     Qall = [1*Q1 2*Q1 4*Q1];
201
202     Rall = 1.*ones(1,size(Qall,2)/4);
203
204     p1 = [-1 -1 -1 -1];
205     p = 1.5*p1;
206 %     p = [1.5*p1 2*p1 2.5*p1];
207
208     duljina = size(p,2)/4;
209     prekl = 1;
210     precizno = 1;
211
212     elseif i == 7 % nelinearni robusni regulator
213         % s kliznim rezimom rada
214         m = 0.23;
215         I = m*(l^2);
216         v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
217
218         A = [0 1 0 0;
219              0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
220              0 0 0 1;
221              0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v -(M+m)*Do*v];
222         B = [0;
223              (I+(l^2)*m)*v;
224              0;
225              -m*l*v];
226
227     rho = 10;
228     dist = 1;
229     x0 = [1 0 0 0 0];

```

```
230
231     B1 = B(1:3);
232     B2 = B(4);
233
234     TT = [eye(3) -B1/B2;
235           zeros(1,3) 1/B2];
236
237     Atr = TT*A/TT;
238
239     A11 = Atr(1:3,1:3);
240     A12 = Atr(1:3,4);
241     A21 = Atr(4,1:3);
242     A22 = Atr(4,4);
243
244     p1 = [-1 -1 -1];
245     p = 6.3*p1;
246 %     p = [3*p1 3.5*p1 4*p1];
247
248     duljina = size(p,2)/3;
249     prekl = 1;
250     precizno = 1;
251
252     end
253
254     for j = 1:duljina
255
256         if i == 1
257
258             t = 0:0.01:10;
259             t1 = 0:0.01:9.99;
260             k = -0.2*10;
261             k1 = -0.2*9.99;
262
263         else
264
265             t = 0:0.01:T;
266             t1 = 0:0.01:Tu;
267             k = -0.2*T;
268             k1 = -0.2*Tu;
```

```
269
270     end
271
272     if i == 1
273
274         if rank(ctrb(A,B)) == size(A,2)
275
276             fprintf(['\n rank(ctrb(A,B)) = 4 -> '...
277                     'Sustav JE ' ...
278                     'upravljiv! \n'])
279
280         else
281
282             fprintf(['\n rank(ctrb(A,B)) ~= 4 -> ' ...
283                     'Sustav NIJE ' ...
284                     'upravljiv! \n'])
285
286         end
287
288         if rank(observ(A,C)) == size(A,2)
289
290             fprintf(['\n rank(observ(A,C)) = 4 -> '...
291                     'Sustav JE ' ...
292                     'mjerljiv! \n\n'])
293
294         else
295
296             fprintf(['\n rank(observ(A,C)) ~= 4 -> '...
297                     'Sustav NIJE ' ...
298                     'mjerljiv! \n\n'])
299
300         end
301
302     elseif i == 2
303
304         K = acker(A,B,p(1,(4*j-3:4*j)));
305
306         if precizno == 0
307
```



```
308         m = nep*m;
309         I = m*(l^2);
310         v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
311         A = [0 1 0 0;
312             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ...
313             ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
314             0 0 0 1;
315             0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v ...
316             -(M+m)*Do*v];
317         B = [0; (I+(l^2)*m)*v; 0; -m*l*v];
318
319         end
320
321     elseif i == 3
322
323         Q = Qall(1:4, (4*j-3:4*j));
324         R = Rall(j);
325         K = lqr(A,B,Q,R);
326
327         if precizno == 0
328
329             m = nep*m;
330             I = m*(l^2);
331             v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
332             A = [0 1 0 0;
333                 0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ...
334                 ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
335                 0 0 0 1;
336                 0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v ...
337                 -(M+m)*Do*v];
338             B = [0; (I+(l^2)*m)*v; 0; -m*l*v];
339
340             end
341
342     elseif i == 4
343
344         K = acker(A,B,p(1, (4*j-3:4*j)));
345         Acl = A-B*K;
346
```

```
347         LL = place(A',C',po')';
348
349     elseif i == 5
350
351         Q = Qall(1:4, (4*j-3:4*j));
352         R = Rall(j);
353         K = lqr(A,B,Q,R);
354         Acl = A-B*K;
355
356         RR = eye(size(C,1));
357         QQ = Q;
358         LL = lqr(A',C',QQ,RR)';
359
360     elseif i == 6
361
362         K = acker(A,B,p(1, (4*j-3:4*j)));
363         Acl = A-B*K;
364
365         Q = Qall(1:4, (4*j-3:4*j));
366         P = lyap(Acl',Q);
367
368         if precizno == 0
369
370             m = nep*m;
371             I = m*(1^2);
372             v = 1/(I*(M+m)+M*m*(1^2));
373             A = [0 1 0 0;
374                 0 -Dx*(I+m*(1^2))*v ...
375                 ((1*m)^2)*g*v 1*m*Do*v;
376                 0 0 0 1;
377                 0 1*m*Dx*v -1*m*g*(M+m)*v ...
378                 -(M+m)*Do*v];
379             B = [0; (I+(1^2)*m)*v; 0; -m*1*v];
380
381         end
382
383     elseif i == 7
384
385         K = acker(A11,A12,p(1, (3*j-2:3*j)));
```

```
386     Acl = A11-A12*K;
387
388     if precizno == 0
389
390         m = nep*m;
391         I = m*(l^2);
392         v = 1/(I*(M+m)+M*m*(l^2));
393         A = [0 1 0 0;
394             0 -Dx*(I+m*(l^2))*v ...
395             ((l*m)^2)*g*v l*m*Do*v;
396             0 0 0 1;
397             0 l*m*Dx*v -l*m*g*(M+m)*v ...
398             -(M+m)*Do*v];
399         B = [0; (I+(l^2)*m)*v; 0; -m*l*v];
400
401     end
402
403 end
404
405 if j == 1
406
407     odziv_lin = zeros(length(t),duljina*5);
408     odziv_nelin = zeros(length(t),duljina*5);
409
410 end
411
412 if i == 1 || i == 2 || i == 3
413
414     [t,x1] = ode15s('linearni_model',t,x0,options);
415     uk_lin = diff(x1(:,5))./diff(t);
416
417     [t,x2] = ode15s('nelinearni_model',t,x0,options);
418     uk_nelin = diff(x2(:,5))./diff(t);
419
420 elseif i == 4 || i == 5
421
422     [t,x1] = ode15s('observer_linearni',t,x0,options);
423     uk_lin = diff(x1(:,9))./diff(t);
424     uk_obs = diff(x1(:,10))./diff(t);
```

```
425
426 %           [t,x1] = ode15s('observer_nelinearni', ...
427 %                   t,x0,options);
428 %           uk_lin = diff(x1(:,9))./diff(t);
429 %           uk_obs = diff(x1(:,10))./diff(t);
430
431 elseif i == 6
432
433           [t,x1] = ode15s('robusni_linearni', ...
434                   t,x0,options);
435           uk_lin = diff(x1(:,5))./diff(t);
436
437           [t,x2] = ode15s('robusni_nelinearni',...
438                   t,x0,options);
439           uk_nelin = diff(x2(:,5))./diff(t);
440
441 elseif i == 7
442
443           [t,x1] = ode15s('sliding_mode_linearni', ...
444                   t,x0,options);
445           uk_lin = diff(x1(:,5))./diff(t);
446
447           [t,x2] = ode15s('sliding_mode_nelinearni', ...
448                   t,x0,options);
449           uk_nelin = diff(x2(:,5))./diff(t);
450
451 end
452
453 if i == 4 || i == 5
454
455           odziv_lin(:,(5*j-4:5*j-1)) = x1(:,1:4);
456           odziv_lin(1:length(t)-1,5*j) = ...
457           uk_lin(1:length(t)-1,1);
458
459           odziv_nelin(:,(5*j-4:5*j-1)) = x1(:,5:8);
460           odziv_nelin(1:length(t)-1,5*j) = ...
461           uk_obs(1:length(t)-1,1);
462
463 else
```

```
464
465     odziv_lin(:, (5*j-4:5*j-1)) = x1(:, 1:4);
466     odziv_lin(1:length(t)-1, 5*j) = ...
467         uk_lin(1:length(t)-1, 1);
468
469     odziv_nelin(:, (5*j-4:5*j-1)) = x2(:, 1:4);
470     odziv_nelin(1:length(t)-1, 5*j) = ...
471         uk_nelin(1:length(t)-1, 1);
472
473     end
474
475     if prekl == 0 || j == duljina
476
477         hFig = figure(j-j*prekl+prekl+vpoz);
478         set(hFig, ...
479             'Position', ...
480             [150+20*(j-j*prekl+prekl+vpoz+1) ...
481              205-20*(j-j*prekl+prekl+vpoz+1) 1425 825])
482
483         boje = [[0 0 1], [0 0.9 0.25], [0 0 0]];
484
485         pop_fiz = {'x \, (m)', '\dot{x} \, (m/s)', ...
486                 '\theta \, (^{\circ})', ...
487                 '\dot{\theta} \, (^{\circ}/s)', ...
488                 'u \, (N)'};
489         pop_stanja = {'x' '\dot{x}' '\theta' ...
490                     '\dot{\theta}', 'u'};
491
492         if i == 4 || i == 5
493
494             opis = {'obs'};
495
496         else
497
498             opis = {'nelin'};
499
500         end
501
502         for a = 1:5
```

```
503
504     if a == 1
505
506         b = 1;
507         leg_lok = 'northeast';
508
509     elseif a == 2
510
511         b = 1;
512
513         if i == 1
514
515             leg_lok = 'northeast';
516
517         else
518
519             leg_lok = 'southeast';
520
521         end
522
523     elseif a == 3
524
525         b = (180/pi);
526         leg_lok = 'northeast';
527
528     elseif a == 4
529
530         b = (180/pi);
531         leg_lok = 'northeast';
532
533     elseif a == 5
534
535         t = t1;
536         k = k1;
537         b = 1;
538
539         if i == 1
540
541             leg_lok = 'northeast';
```

```
542
543     else
544
545         leg_lok = 'southeast';
546
547     end
548
549 end
550
551 subplot(3,2,a),
552
553 if prekl == 0
554
555     plot(t, odziv_lin(1:length(t), ...
556         (5*j-5+a))*b, ...
557         'Color', [0 0 1], ...
558         'Linewidth', 3),
559     grid on,
560     set(gca, 'FontSize', 19, ...
561         'FontName', 'Times');
562     set(gca, 'Color', [1 1 0.8]');
563     hold on
564
565     plot(t, odziv_nelin(1:length(t), ...
566         (5*j-5+a))*b, '--', ...
567         'Color', [1 0 0], ...
568         'LineWidth', 2.15),
569     grid on,
570     set(gca, 'FontSize', 19, ...
571         'FontName', 'Times');
572     set(gca, 'Color', [1 1 0.8]');
573     hold on
574
575 else
576
577     for n = 1:j
578
579         plot(t, odziv_lin(1:length(t), ...
580             (5*n-5+a))*b, ...
```

```
581         'Color', boje((n*3-2):n*3), ...
582         'LineWidth', 3),
583     grid on,
584     set(gca, 'FontSize', 19, ...
585           'FontName', 'Times');
586     set(gca, 'Color', [1 1 0.8]);
587     hold on
588
589     if n ~= j
590
591         plot(t, ...
592             odziv_nelin(1:length(t), ...
593             (5*n-5+a))*b, '--', ...
594             'Color', [1 0 0], ...
595             'LineWidth', 2.15, ...
596             'HandleVisibility', 'Off'),
597         grid on
598
599     else
600
601         plot(t, ...
602             odziv_nelin(1:length(t), ...
603             (5*n-5+a))*b, '--', ...
604             'Color', [1 0 0], ...
605             'LineWidth', 2.15, ...
606             'HandleVisibility', 'On'),
607         grid on
608
609     end
610
611     grid on,
612     set(gca, 'FontSize', 19, ...
613           'FontName', 'Times');
614     set(gca, 'Color', [1 1 0.8]);
615     hold on
616
617     end
618
619     end
```



```
620
621     yl = ylabel('$'+string(pop_fiz(a))+'$', ...
622               'Interpreter','LaTeX', ...
623               'Rotation',0,'FontSize',19.5, ...
624               'FontName','Times');
625     yl.Position(1) = k;
626     xlabel('$t \, (s)$', ...
627           'Interpreter','LaTeX', ...
628           'FontSize',17.5, ...
629           'FontName','Times');
630
631     if prekl == 0
632
633         legenda = ...
634             legend('$'+string(pop_stanja(a))+ ...
635                   '_\mathrm{lin}$', ...
636                   '$'+string(pop_stanja(a))+ ...
637                   '_\mathrm{' + string(opis) + '}$');
638         set(legenda,'Interpreter','LaTeX', ...
639             'FontSize',19,'FontName','Times', ...
640             'Location',leg_lok);
641
642     else
643
644         legend_list = cell(1,j+1);
645
646         for r = 1:j
647
648             new_element = ...
649                 '$'+string(pop_stanja(a))+ ...
650                 '_{' + int2str(r) + ...
651                 '\, \mathrm{lin}}$';
652             legend_list{r} = new_element;
653
654         end
655
656         legend_list{r+1} = ...
657             '$'+string(pop_stanja(a))+ ...
658             '_\mathrm{...'
```

```
659         +string(opis)+'}$';
660     legenda = legend(legend_list);
661     set (legenda, 'Interpreter', 'LaTeX', ...
662         'FontSize',19, 'FontName', 'Times', ...
663         'Location', leg_lok),
664
665     end
666
667 end
668
669 if i == 1
670
671 %         suptitle(['\fontname{Times}' ...
672 %                 '\fontsize{20}\bf' ...
673 %                 'Sustav bez regulacije'])
674
675 elseif i == 2
676
677 %         if prekl == 0
678 %
679 %             suptitle(['\fontname{Times}' ...
680 %                     '\fontsize{20}\bf' ...
681 %                     'Pole placement; ' ...
682 %                     'p_1 = ', ...
683 %                     num2str(p(1,4*j-3)), ...
684 %                     ', p_2 = ', ...
685 %                     num2str(p(1,4*j-2)), ...
686 %                     ', p_3 = ', ...
687 %                     num2str(p(1,4*j-1)), ...
688 %                     ', p_4 = ', ...
689 %                     num2str(p(1,4*j-3))] );
690 %
691 %         else
692 %
693 %             suptitle(['\fontname{Times}' ...
694 %                     '\fontsize{20}\bf' ...
695 %                     'Pole placement'])
696 %
697 %         end
```

```
698
699     elseif i == 3
700
701     %         if prekl == 0
702     %
703     %             suptitle(['\fontname{Times}' ...
704     %                 '\fontsize{20}\bf' ...
705     %                 'LQR; ' ...
706     %                 'Q_{all} = ', ...
707     %                 num2str(j), ...
708     %                 '\cdot Q_1']);
709     %
710     %         else
711     %
712     %             suptitle(['\fontname{Times}' ...
713     %                 '\fontsize{20}\bf' ...
714     %                 'LQR']);
715     %
716     %         end
717
718     elseif i == 4
719
720     %         suptitle(['\fontname{Times}' ...
721     %                 '\fontsize{20}\bf' ...
722     %                 'Pole placement ' ...
723     %                 'sa observerom']);
724
725     elseif i == 5
726
727     %         suptitle(['\fontname{Times}' ...
728     %                 '\fontsize{20}\bf' ...
729     %                 'LQR sa observerom']);
730
731     elseif i == 6
732
733     %         suptitle(['\fontname{Times}' ...
734     %                 '\fontsize{20}\bf' ...
735     %                 'Nelinearni robusni regulator']);
736
```

```
737         elseif i == 7
738
739 %             suptitle(['\fontname{Times}' ...
740 %                 '\fontsize{20}\bf' ...
741 %                 'Nelinearni robusni ' ...
742 %                 'klizni regulator']);
743
744         end
745
746     end
747
748     if j == duljina
749
750         if prekl == 0
751
752             vpoz = vpoz + duljina;
753
754         elseif prekl == 1
755
756             vpoz = vpoz + 1;
757
758         end
759
760     end
761
762 end
763
764 end
```

```
1 function dx = linearni_model(t,x)
2
3 global A B K dist
4
5 dx = zeros(5,1);
6
7 x = x(1:4);
8
9 u = -K*x(1:4);
10 d = dist*sin(5*t);
11
12 dx(1:4) = A*x+B*(u+d);
13 dx(5) = u;
```

```
1 function dx = nelinearni_model(t,x)
2
3 global M m l I Dx Do K v g dist
4
5 dx = zeros(5,1);
6
7 x = x(1:4);
8
9 u = -K*x(1:4);
10 d = dist*sin(5*t);
11
12 dx(1) = x(2);
13 dx(2) = ((m*(l^2)+I)*(m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))-Dx*x(2))- ...
14         m*l*cos(x(3))*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
15         Do*x(4)))/((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
16         (m*l*cos(x(3)))^2)+(I+m*l^2)*v*(u + d);
17 dx(3) = x(4);
18 dx(4) = (-m*l*cos(x(3))* ...
19         (m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))- ...
20         Dx*x(2))+(M+m)*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
21         Do*x(4)))/ ...
22         ((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
23         (m*l*cos(x(3)))^2)+ ...
24         (-m*l)*v*(u + d);
25 dx(5) = u;
```

```
1 function dx = observer_linear(t,x)
2
3 global A Acl LL C w B K dist
4
5 dx = zeros(10,1);
6
7 x = x(1:8);
8
9 u1 = -K*x(1:4);
10 u2 = -K*x(5:8);
11
12 d = dist*sin(5*t);
13
14 dx(1:4) = A*x(1:4)+B*(-K*x(5:8)+d+w);
15 dx(5:8) = Acl*x(5:8)+B*(w+d)+LL*(C*x(1:4)-C*x(5:8));
16 dx(9) = u1;
17 dx(10) = u2;
```

```

1 function dx = observer_nelinearni(t,x)
2
3 global Acl LL C w B K dist M m l I Dx Do v g
4
5 dx = zeros(10,1);
6
7 x = x(1:8);
8
9 u1 = -K*x(1:4);
10 u2 = -K*x(5:8);
11
12 d = dist*sin(5*t);
13
14 dx(1) = x(2);
15 dx(2) = ((m*(l^2)+I)*(m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))-Dx*x(2))- ...
16         m*l*cos(x(3))*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
17         Do*x(4)))/((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
18         (m*l*cos(x(3)))^2)+(I+m*l^2)*v*(u2+d+w);
19 dx(3) = x(4);
20 dx(4) = (-m*l*cos(x(3))* ...
21         (m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))- ...
22         Dx*x(2))+(M+m)*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
23         Do*x(4)))/ ...
24         ((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
25         (m*l*cos(x(3)))^2)+ ...
26         (-m*l)*v*(u2+d+w);
27 dx(5:8) = Acl*x(5:8)+B*(w+d)+LL*(C*x(1:4)-C*x(5:8));
28 dx(9) = u1;
29 dx(10) = u2;

```



```
1 function dx = robusni_linearni(t,x)
2
3 global A B K P rho eps dist
4
5 dx = zeros(5,1);
6
7 x = x(1:4);
8
9 u1= -K*x(1:4);
10 u2= -rho*B'*P*x(1:4)/(abs(B'*P*x(1:4))+eps);
11
12 u = u1 + u2;
13 d = dist*sin(5*t);
14
15 dx(1:4) = A*x(1:4) + B*(u + d);
16 dx(5) = u;
```

```
1 function dx = robusni_nelinearni(t,x)
2
3 global M m l I Dx Do K v g B P rho eps dist
4
5 dx = zeros(5,1);
6
7 x = x(1:4);
8
9 u1= -K*x(1:4);
10 u2= -rho*B'*P*x(1:4)/(abs(B'*P*x(1:4))+eps);
11
12 u = u1 + u2;
13 d = dist*sin(5*t);
14
15 dx(1) = x(2);
16 dx(2) = ((m*(l^2)+I)*(m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))-Dx*x(2))- ...
17         m*l*cos(x(3))*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
18         Do*x(4)))/((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
19         (m*l*cos(x(3)))^2)+(I+m*l^2)*v*(u+d);
20 dx(3) = x(4);
21 dx(4) = (-m*l*cos(x(3)))* ...
22         (m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))- ...
23         Dx*x(2))+(M+m)*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
24         Do*x(4))/ ...
25         ((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
26         (m*l*cos(x(3)))^2)+ ...
27         (-m*l)*v*(u+d);
28 dx(5) = u;
```

```
1 function dx = sliding_mode_linearni(t,x)
2
3 global A B K Acl rho dist A21 A12 A22 TT
4
5 dx = zeros(5,1);
6
7 x = x(1:4);
8
9 xtr = TT*x;
10 x1 = xtr(1:3);
11 x2 = xtr(4);
12
13 s = x2 + K*x1;
14
15 u = -(A21+K*Acl)*x1-A22*x2-K*A12*s-rho*tanh(10*s);
16 d = dist*sin(5*t);
17
18 dx(1:4) = A*x + B*(u + d);
19 dx(5) = u;
```

```

1 function dx = sliding_mode_nelinearni(t,x)
2
3 global K Acl dist rho Dx M m Do g l I v A21 A12 A22 TT
4
5 dx = zeros(5,1);
6
7 x = x(1:4);
8
9 xtr = TT*x;
10 x1 = xtr(1:3);
11 x2 = xtr(4);
12
13 s = x2 + K*x1;
14
15 u = -(A21+K*Acl)*x1-A22*x2-K*A12*s-rho*tanh(10*s);
16 d = dist*sin(5*t);
17
18 dx(1) = x(2);
19 dx(2) = ((m*(l^2)+I)*(m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))-Dx*x(2))- ...
20          m*l*cos(x(3))*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
21          Do*x(4)))/((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
22          (m*l*cos(x(3)))^2)+(I+m*l^2)*v*(u+d);
23 dx(3) = x(4);
24 dx(4) = (-m*l*cos(x(3))* ...
25          (m*l*(x(4)^2)*sin(x(3))- ...
26          Dx*x(2))+(M+m)*(-m*g*l*sin(x(3))- ...
27          Do*x(4)))/ ...
28          ((M+m)*(m*(l^2)+I)- ...
29          (m*l*cos(x(3)))^2)+ ...
30          (-m*l)*v*(u+d);
31 dx(5) = u;

```