

# Ponceletov teorem

---

Mesar, Mia

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:524645>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-09**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Mia Mesar

**PONCELETOV TEOREM**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv. prof. dr. sc.  
Matija Kazalicki

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 O zatvaranju u trokut</b>	<b>3</b>
<b>2 Eulerov teorem</b>	<b>7</b>
<b>3 Specijalni slučajevi Ponceletovog teorema</b>	<b>10</b>
3.1 Ponceletov teorem za kružnice i trokut . . . . .	10
3.2 Ponceletov teorem za kružnice i četverokut . . . . .	13
<b>4 Ponceletov teorem zatvaranja</b>	<b>16</b>
4.1 Uvod u dokaz teorema . . . . .	16
4.2 Uvod u dio algebre potrebne za dokaz teorema . . . . .	21
4.3 Dokaz teorema . . . . .	24
<b>5 Mehanička interpretacija</b>	<b>28</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>32</b>

# Uvod

Još od davnina, od nastanka prvih civilizacija, čovjek teži pravilnosti, simetričnosti, skladu. Geometrija je najstarija matematička disciplina koja se bavi proučavanjem oblika u ravnini, odnosno prostoru, njihovih svojstava i odnosa. Gotovo svaka stvar u našoj okolini vidljiva ljudskim okom ima svoju geometrijsku formulaciju, te je upravo geometrija matematička disciplina koja na sebi svojstven način proučava i opisuje taj sklad.

Još od osnovne škole upoznati smo s činjenicom da se svakom trokutu može upisati i opisati kružnica. Pitanje koje nam se prirodno nameće razmišljajući malo apstraktnije jest postoje li četverokuti, peterokuti i bilo koji drugi mnogokuti kojima je moguće istovremeno upisati i opisati kružnicu. Ovom problemu možemo pristupiti na drugačiji način promatrajući dvije kružnice koje se nalaze u istoj ravnini, jedna unutar druge. Pitanje koje si u ovom slučaju postavljamo jest postoji li trokut, četverokut, peterokut odnosno bilo koji drugi mnogokut kojemu je istovremeno unutarnja kružnica upisana, a vanjska kružnica opisana. Također razmišljajući još apstraktnije umjesto kružnica možemo promatrati dvije elipse, jednu unutar druge.

Ovom problematikom bavio se francuski matematičar i vojni inženjer Jean Victor Poncelet koji je najveći doprinos imao na području projektivne geometrije. Rođen je u Metz 1788. godine, a umro je u Parizu 1867. godine. Studirao je na prestižnoj tehničkoj školi École Polytechnique u Parizu, a učitelj mu je bio Gaspard Monge, utemeljitelj nacrtne geometrije. Početkom 19. stoljeća Poncelet se pridružio francuskoj vojsci te ga je 1812. godine zarobila ruska vojska. Sljedeće dvije godine proveo je kao ratni zarobljenik u ruskom gradu Saratovu i to vrijeme posvetio je proučavanju projektivnih svojstva geometrijskih likova ne služeći se pritom nikakvom literaturom. Također, zasnovao je fundamentalne ideje projektivne geometrije. Upravo se gore navedena problematika naziva Ponceletov teorem, koji je Poncelet dokazao 1813. godine. Njegov rad objavljen je 1822. godine u njegovom djelu *Traité des propriétés projectives de figures*.

Ponceletov teorem jedan je od najviše proučavanih teorema u projektivnoj geometriji jer ukazuje na poseban oblik pravilnosti između dviju konika i poligona koji je istovremeno

upisan jednoj, a opisan drugoj konici. Ako se dokaže da postoji poligon koji je istovremeno upisan jednoj, a opisan drugoj konici, tada takvih poligona ima beskonačno mnogo.

Poncelet nije bio jedini matematičar koji je dokazao Ponceletov teorem. Teorem je privukao pažnju brojnih matematičara i dokazan je u nekoliko različitih područja matematike. Primjerice Jacobi je slijedeći Ponceletov dokaz dokazao teorem koristeći eliptičke integrale. Halbeisen i Hungerbühler poznati su po kombinatornom dokazu teorema koji se temelji na klasičnom Pascal-Brianchonovom teoremu iz projektivne geometrije. U novije doba Griffiths i Harris dali su moderan algebarsko-geometrijski dokaz.

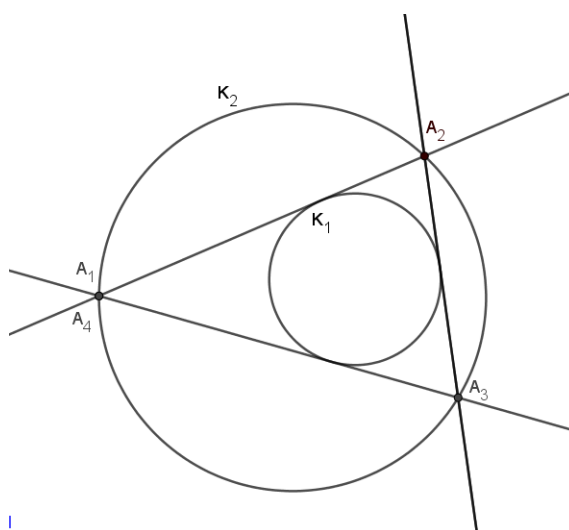
Cilj ovog diplomskog rada je dokazati Ponceletov teorem i ukazati na njegove primjene, s tim da se posebna važnost pridaje specijalnom slučaju Ponceletovog teorema, odnosno Ponceletovom teoremu za kružnice i trokut.

# Poglavlje 1

## O zatvaranju u trokut

Općenito, Ponceletov teorem govori o tome da ako postoji mnogokut koji je upisan vanjskoj konici i upisan unutarnjoj konici, tada postoji beskonačno mnogo takvih mnogokuta. U ovom poglavlju za spomenuti mnogokut odabrat ćemo najmanji mnogokut odnosno trokut, a za spomenute konike odabrat ćemo kružnice. Zapravo, ograničit ćemo se na specijalni slučaj Ponceletovog teorema, a to je Ponceletov teorem za kružnice i trokut.

Neka su dane dvije kružnice  $K_1$  i  $K_2$  različitih polumjera, gdje kružnice nemaju zajedničkih točaka, a kružnica  $K_1$  nalazi se unutar kružnice  $K_2$ . Ako želimo konstruirati mnogokut koji je istovremeno upisan vanjskoj kružnici  $K_2$  i opisan unutarnjoj kružnici  $K_1$ , u konstrukciji je potrebno slijediti iduće korake. Na kružnici  $K_2$  odaberemo proizvoljnu točku  $A_1$  i iz te točke konstruiramo tangentu  $t_1$  na unutarnju kružnicu  $K_1$ . Sjecište te tangente i kružnice  $K_2$  označimo s  $A_2$ . Analogno, iz točke  $A_2$  konstruiramo tangentu  $t_2$ , te sjecište tangente  $t_2$  i kružnice  $K_1$  označimo s  $A_3$ . Pretpostavimo da tangenta  $t_3$  konstruirana iz točke  $A_3$  na kružnicu  $K_2$  siječe kružnicu  $K_2$  u početnoj točki  $A_1$ . Promotrimo sliku 1.1 Uočimo da smo konstruirali trokut  $\triangle A_1A_2A_3$ .



Slika 1.1: Zatvaranje u trokut

Uočimo da smo u gore navedenom postupku konstrukcije pretpostavili da tangenta  $t_3$  konstruirana iz točke  $A_2$  na kružnicu  $K_1$  siječe kružnicu  $K_2$  u početnoj točki  $A_1$ . Naravno, postoji mogućnost da tangenta  $t_3$  konstruirana iz točke  $A_2$  na kružnicu  $K_1$  siječe kružnicu  $K_2$  u nekoj drugoj točki. Tada prateći dane korake konstrukcije ne bismo dobili zatvaranje u trokut kao što je prikazano na slici 1.2

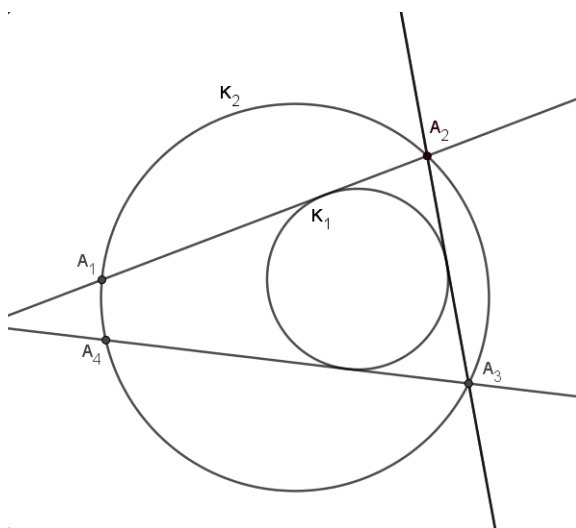
Da bi sadržaj koji slijedi bio što jednostavniji i razumljiviji uvodimo naziv trostrane tetivno-tangencijalne izlomljene crte.

**Definicija 1.0.1.** *Neka su dane dvije kružnice  $K_1$  i  $K_2$  različitih polumjera, gdje kružnice nemaju zajedničkih točaka, a kružnica  $K_1$  nalazi se unutar kružnice  $K_2$ . Za svaku točku  $A_1$  na kružnici  $K_2$  postoje točke  $A_2$ ,  $A_3$  i  $A_4$  takve da su dužine  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$  i  $\overline{A_3A_4}$  tetive kružnice  $K_2$  i da su pravci koji sadrže te tetive tangente kružnice  $K_1$ . Kažemo da je  $A_1A_2A_3A_4$  trostrana tetivno-tangencijalna izlomljena crta u odnosu na kružnice  $K_1$  i  $K_2$ . Kraće kažemo da je  $A_1A_2A_3A_4$  tetivno-tangencijalna crta u odnosu na kružnice  $K_1$  i  $K_2$ . Točka  $A_1$  naziva se početna točka, a točka  $A_4$  naziva se završna točka tetivno-tangencijalne crte.*

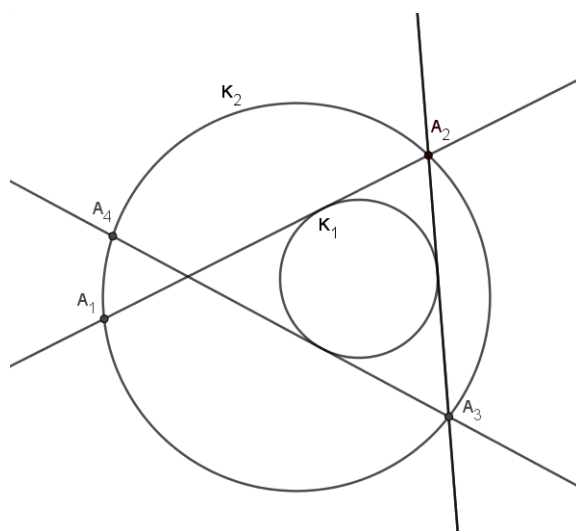
Tetivno-tangencijalna crta u odnosu na kružnice  $K_1$  i  $K_2$  može biti otvorena i zatvorena. Otvorena je ako je  $A_4 \neq A_1$  kao što je prikazano na slici 1.2, a zatvorena je ako je  $A_4 = A_1$  kao što je prikazano na slici 1.1

Intuitivno, promatrajući sliku 1.1 i sliku 1.2 možemo zaključiti da ako imamo konstruiranu





Slika 1.2: Ne dolazi do zatvaranja u trokut (1. slučaj)



Slika 1.3: Ne dolazi do zatvaranja u trokut (2. slučaj)

otvorenu tetivno-tangencijalnu crtu, smanjujući radijus unutarnje kružnice s vremenom će točka  $A_4$  pasti u točku  $A_1$ . Tada će tetivno-tangencijalna crta biti zatvorena. Ponavljajući postupak smanjivanja radijusa kružnice  $K_1$  dolazimo do slučaja prikazanog na slici 1.3

**Teorem 1.0.2.** *Neka je  $K_2$  bilo koja kružnica i neka je  $M$  bilo koja točka unutar te kružnice. Tada za svaku točku  $A_1$  na kružnici  $K_2$  postoji kružnica  $K_1$  sa središtem u točki  $M$  tako da tetivno-tangencijalna crta  $A_1A_2A_3A_4$  bude zatvorena, odnosno da imamo zatvaranje u trokut.*

*Dokaz.* Zamislimo da se polumjer kružnice  $K_1$  na slici 1.2 smanjuje dok ne postane jednak onom na slici 1.1 Točka  $A_4$  tada bi se približavala točki  $A_1$  sve dok ne bi pala u točku  $A_1$ . Ako je situacija kao na slici 1.3, polumjer kružnice  $K_1$  trebao bi se povećavati sve dok ne postane jednak onom na slici 1.1 Tada bi se točka  $A_4$  također približavala točki  $A_1$  sve dok ne bi pala u točku  $A_1$ .  $\square$

Prije dokaza sljedećeg teorema potrebno je iskazati lemu koju ovdje nećemo dokazivati. Za dokaz navedenog teorema potrebno je izraziti vezu između polumjera kružnica  $K_1$  i  $K_2$  te udaljenosti središta tih dviju kružnica. Upravo veza tih triju veličina naziva se Eulerova relacija, a o tome ćemo više govoriti u Poglavlju 2.

**Lema 1.0.3.** *Neka je  $\triangle A_1A_2A_3$  bilo koji trokut. Neka je  $K_1$  kružnica upisana tom trokutu, polumjera  $r$ . Neka je  $K_2$  kružnica opisana tom trokutu polumjera  $R$ . Udaljenost središta tih dviju kružnica označimo s  $d$ . Tada vrijedi jednakost*

$$R^2 - d^2 = 2Rr.$$

**Teorem 1.0.4.** *Neka su  $K_1(M, r)$  i  $K_2(O, R)$  dvije kružnice u istoj ravnini, tako da se kružnica  $K_1$  nalazi unutar kružnice  $K_2$  i da kružnice nemaju zajedničkih točaka. Ako postoji točka  $A_1$  na kružnici  $K_2$  takva da je tetivno-tangencijalna crta  $A_1A_2A_3A_4$  zatvorena, tada za svaku točku  $X_1$  na kružnici  $K_2$  vrijedi da je tetivno tangencijalna crta  $X_1X_2X_3X_4$  zatvorena.*

*Dokaz.* Prema Teoremu 1.0.2 za svaku točku  $X_1$  na kružnici  $K_2$  postoji kružnica  $K'_1$  sa središtem u točki  $M$  polumjera  $r'$  tako da tetivno-tangencijalna crta  $X_1X_2X_3X_4$  bude zatvorena. Prema Lemi 1.0.3 za kružnice  $K_1$  i  $K_2$  vrijedi  $R^2 - d^2 = 2Rr$ , a za kružnice  $K'_1$  i  $K_2$  vrijedi  $R^2 - d^2 = 2Rr'$ . Uočavamo da su jednakosti moguće ako i samo ako je  $r = r'$ . Dakle, kružnica  $K'_1$  jednaka je kružnici  $K_1$ .  $\square$

Nakon dokaza Teorema 1.0.4 zaključujemo da vrijedi sljedeće. Ako su  $K_1$  i  $K_2$  bilo koje dvije kružnice različitih polumjera takve da se  $K_1$  nalazi unutar  $K_2$  i da nemaju zajedničkih točaka tada postoje dvije mogućnosti:

- tetivno-tangencijalna crta zatvorena je za svaku točku na kružnici  $K_2$
- tetivno-tangencijalna crta nije zatvorena niti za jednu točku na kružnici  $K_2$ .

Uočimo da je upravo to drugačija formulacija Ponceletovog teorema iz uvoda ovog poglavlja.

## Poglavlje 2

### Eulerov teorem

U prethodnom poglavlju bavili smo se zatvaranjem u trokut kada su zadane dvije kružnice u istoj ravnini, različitih polumjera tako da se jedna kružnica nalazi unutar druge i da kružnice nemaju zajedničkih točaka. Moguće je konstruirati trokut koji je istovremeno upisan vanjskoj kružnici i opisan unutarnjoj ako je zadovoljena jednakost  $R^2 - d^2 = 2Rr$ , gdje je  $r$  radijus unutarnje kružnice,  $R$  radijus vanjske kružnice a  $d$  je udaljenost središta tih dviju kružnica. Gornja jednakost poznata je pod nazivom Eulerova relacija.

Leonhard Euler (1707.-1783.) bio je njemački matematičar koji je prvi otkrio vezu između triju veličina  $r$ ,  $R$  i  $d$  te dokazao jednakost koristeći geometriju ravnine. No, Euler nije bio jedini matematičar koji se u to vrijeme bavio ovom tematikom. Neovisno o njemu, engleski matematičar Chapple jednakost je dokazao 1746. godine. Smatra se kako je Poncelet svoj teorem izveo upravo iz Eulerovog teorema koji slijedi u nastavku. Također, Eulerov teorem bit će od velike važnosti za dokaz Ponceletovog teorema za kružnice i trokut.

**Teorem 2.0.1.** *[Eulerov teorem] Neka je  $K_2$  kružnica opisana trokutu  $\triangle ABC$  i  $K_1$  kružnica upisana tom trokutu. Neka je  $R$  radijus opisane, a  $r$  radijus upisane kružnice trokutu  $\triangle ABC$ . Ako s  $d$  označimo udaljenost središta kružnica  $K_1$  i  $K_2$ , tada vrijedi:*

$$R^2 - d^2 = 2Rr. \quad (2.1)$$

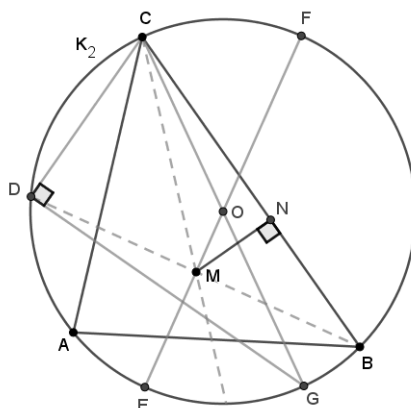
*Posebno, ako je uvjet 2.1 zadovoljen, tada za svaku točku  $X_1$  na kružnici  $K_2$  postoji trokut kojemu je  $K_2$  opisana, a  $K_1$  upisana kružnica.*

Za razumijevanje dokaza Eulerovog teorema potreban je iskaz sljedeće leme koju ovdje nećemo dokazivati.

**Lema 2.0.2.** *Neka je  $k$  kružnica, a  $T$  točka ravnine. Neka je  $p$  bilo koji pravac koji prolazi točkom  $T$  i siječe kružnicu  $k$  u točkama  $A$  i  $B$ . Tada je vrijednost izraza  $|TA| \cdot |TB|$  kons-*

tantna, to jest ne ovisi o izboru pravca  $p$ . Vrijednost izraza  $|TA| \cdot |TB|$  naziva se potencija točke  $T$  u odnosu na kružnicu  $k$ .

Sada možemo dokazati Eulerov teorem.



Slika 2.1:

*Dokaz.* Uvedimo potrebne oznake. Neka je  $O$  središte trokutu opisane kružnice, a  $M$  središte trokutu upisane kružnice. Neka je  $D$  sjecište pravca  $BM$  i kružnice  $K_2$ . Pravac  $BM$  je simetrala kuta  $\beta$ , a pravac  $CM$  je simetrala kuta  $\gamma$ . Neka su  $E$  i  $F$  sjecišta pravca  $OM$  i kružnice  $K_2$ . Primjenom Leme 2.0.2 imamo:

$$|BM| \cdot |MD| = |EM| \cdot |MF| = (R - |OM|)(R + |OM|) = R^2 - |OM|^2.$$

Iz toga slijedi da je  $|OM|^2 = R^2 - |BM| \cdot |MD|$ , odnosno  $R^2 - d^2 = |BM| \cdot |MD|$ . Preostaje dokazati da je  $|BM| \cdot |MD| = 2Rr$ . Promotrimo sliku 2.1 S obzirom na to da su kutovi  $\angle DCA$  i  $\angle DBA$  obodni kutovi nad kružnim lukom  $\widehat{DA}$  vrijedi  $|\angle DCA| = |\angle DBA|$ . Pravac  $DB$  je simetrala kuta  $\beta$  pa je  $|\angle DBA| = |\angle DBC| = \frac{\beta}{2}$ , a pravac  $CM$  je simetrala kuta  $\gamma$  pa je  $|\angle ACM| = |\angle BCM| = \frac{\gamma}{2}$ . Sada je  $|\angle DCM| = |\angle DCA| + |\angle ACM| = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ . Uočimo da je  $\angle DMC$  vanjski kut trokuta  $\triangle BCM$ , pa je  $|\angle DMC| = |\angle DBC| + |\angle BCM| = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ .

Dakle,  $|\angle DCM| = |\angle DMC|$ . S obzirom na to da su kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta sukladni, možemo zaključiti da je trokut  $\triangle DMC$  jednakokračan pa je  $|DM| = |CD|$ .

Neka je  $N$  nožište okomice iz  $M$  na stranicu  $\overline{BC}$ . Neka je  $G$  sjecište pravca  $CO$  i kružnice  $K_2$ . Prema Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice, kut  $\angle CDG$  je pravi, odnosno  $|\angle CDG| = 90^\circ$ . Također,  $|\angle CDG| = |\angle MNB|$ . Kako su kutovi  $\angle DCG$  i  $\angle DBC$  obodni kutovi nad kružnim lukom  $\widehat{CD}$  vrijedi  $|\angle DGC| = |\angle DBC|$ .

Dakle, prema K-K teoremu o sličnosti trokuta trokutu  $\triangle BNM$  i  $\triangle GDC$  su slični. Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti slijedi:

$$\frac{|BM|}{|CG|} = \frac{|MN|}{|CD|},$$

odnosno

$$\frac{|BM|}{2R} = \frac{r}{|MD|},$$

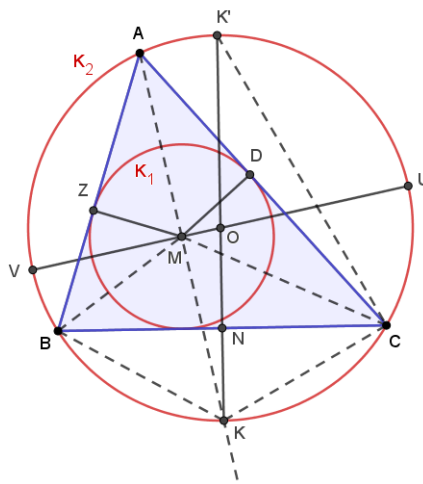
pa je  $|BM| \cdot |MD| = 2Rr$  što je i trebalo dokazati. □

## Poglavlje 3

# Specijalni slučajevi Ponceletovog teorema

### 3.1 Ponceletov teorem za kružnice i trokut

**Teorem 3.1.1.** [Ponceletov teorem za kružnice i trokut] Neka su  $K_1$  i  $K_2$  dvije kružnice u istoj ravnini različitih polumjera, jedna unutar druge, bez zajedničkih točaka. Ako postoji trokut koji je istovremeno upisan kružnici  $K_2$  i opisan kružnici  $K_1$ , tada postoji beskonačno mnogo takvih trokuta. Svaka točka kružnice  $K_2$  vrh je jednog takvog trokuta.



Slika 3.1:

*Dokaz.* Zadane su dvije kružnice  $K_1$  i  $K_2$  koje zadovoljavaju Eulerovu relaciju  $R^2 - d^2 = 2Rr$ . Neka je  $A$  proizvoljna točka na kružnici  $K_2$ . Konstruirajući dvije tangente iz točke  $A$  na kružnicu  $K_1$  dobivamo sjecišta tih tangenti s kružnicom  $K_2$  koja označavamo s  $B$  i  $C$ . Želimo dokazati da je pravac  $BC$  ujedno i tangenta kružnice  $K_1$ , odnosno da je točka  $M$  središte upisane kružnice trokutu  $\triangle ABC$ .

Unutarnje kutove trokuta  $\triangle ABC$  označimo s  $\alpha, \beta, \gamma$  uz pripadajuće vrhove trokuta  $A, B$  i  $C$ . Neka je  $K$  sjecište pravca  $AM$  i kružnice  $K_2$ . U točki  $M$  konstruirajmo okomice na stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  te sjecišta okomica i stranica trokuta označimo točkama  $Z$  i  $D$ . Promotrimo  $\triangle AMZ$  i  $\triangle AMD$ . Uočimo da su ti trokuti sukladni prema S-S-K<sup>></sup> teoremu o sukladnosti trokuta jer je  $|MZ| = |MD| = r$ ,  $\overline{AM}$  je zajednička stranica,  $|\angle AZM| = |\angle ADM| = 90^\circ$ . Iz toga slijedi:  $|\angle ZAM| = |\angle DAM| = \frac{\alpha}{2}$ , odnosno pravac  $AM$  je simetrala kuta  $\alpha$ .

Nacrtajmo pravce  $BK, CK, BM$  i  $CM$ . Konstruirajmo simetralu stranice  $\overline{BC}$ . Za daljnje razumijevanje dokaza potrebna je sljedeća propozicija.

**Propozicija 3.1.2.** *Simetrala unutarnjeg kuta trokuta iz jednog njegovog vrha i simetrala stranice trokuta nasuprot tog vrha sijeku se na kružnici opisanoj tom trokutu.*

Prema Propoziciji 3.1.2 možemo zaključiti da je sjecište simetrale stranice  $\overline{BC}$  i kružnice  $K_2$  upravo točka  $K$ . Sjecište simetrale stranice  $\overline{BC}$  i stranice  $\overline{BC}$  označimo sa  $N$ , a sjecište simetrale stranice  $\overline{BC}$  i kružnice  $K_2$  označimo sa  $K'$ . Uočimo da su trokuti  $\triangle BNK$  i  $\triangle CNK$  sukladni prema S-K-S teoremu o sukladnosti trokuta ( $|BN| = |CN|$ ,  $|\angle BNK| = |\angle CNK| = 90^\circ$  jer je  $KK'$  simetrala stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{NK}$  je zajednička stranica). Iz toga slijedi:

$$|BK| = |CK|.$$

Sjecišta pravca  $OM$  i kružnice  $K_2$  označimo sa  $U$  i  $V$ . Primjenom Leme 2.0.2 koja nam je bila potrebna za dokaz Eulerovog teorema imamo:

$$|AM| \cdot |MK| = |UM| \cdot |MV| = (R + d) \cdot (R - d) = R^2 - d^2.$$

Također, znamo da vrijedi  $2Rr = R^2 - d^2$ , pa je:

$$|AM| \cdot |MK| = 2Rr. \quad (3.1)$$

Nacrtajmo pravac  $CK'$ . Promotrimo  $\triangle AMZ$  i  $\triangle CKK'$ . Kako je  $\angle CKK'$  kut nad promjerom kružnice  $K_2$ , prema Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice vrijedi da je  $|\angle KCK'| = 90^\circ$ . Znamo da je  $|\angle KCK'| = |\angle AZM| = 90^\circ$ . Kako su  $\angle KK'C$  i  $\angle KAC$  obodni kutovi nad kružnim lukom vrijedi  $|\angle KK'C| = |\angle KAC| = \frac{\alpha}{2}$ , pa je i  $|\angle ZAM| = |\angle KK'C| = \frac{\alpha}{2}$ . Uočimo da su trokuti  $\triangle AMZ$  i  $\triangle CKK'$  slični prema K-K teoremu o sličnosti trokuta ( $|\angle K'CK| = |\angle AZM| = 90^\circ$ ,  $|\angle ZAM| = |\angle KK'C| = \frac{\alpha}{2}$ ). Iz toga slijedi:

$$|AM| : |KK'| = |MZ| : |CK| \implies |AM| \cdot |CK| = |MZ| \cdot |KK'|.$$

Kako je  $|MZ| = r$ , a  $|KK'| = |KO| + |OK'| = R + R = 2R$ , slijedi:

$$|MZ| \cdot |KK'| = 2Rr \implies |AM| \cdot |CK| = 2Rr. \quad (3.2)$$

Iz tvrdnje 3.1 i 3.2 zaključujemo da je  $|CK| = |MK|$ . Teorem o obodnim kutovima nad istim kružnim lukom daje sljedeće jednakosti:

$$\bullet |\angle CBK| = |\angle CAK| = \frac{\alpha}{2} \text{ (nad } \widehat{CK}), \quad \bullet |\angle BCK| = |\angle BAK| = \frac{\alpha}{2} \text{ (nad } \widehat{BK})$$

$$\bullet |\angle ABC| = |\angle AKC| = |\angle CKM| = \beta \text{ (nad } \widehat{AC}), \quad (3.3)$$

Zbog  $|CK| = |MK|$  vrijedi:

$$|\angle KMC| = |\angle KCM|. \quad (3.4)$$

S obzirom na to je zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta jednak  $180^\circ$ , promatrajući  $\triangle KCM$  imamo  $|\angle KMC| + |\angle KCM| + |\angle CKM| = 180^\circ$ .

Zbog 3.3 i 3.4 imamo:

$$2 \cdot |\angle KCM| = 180^\circ - \beta \implies |\angle KCM| = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Ako umjesto  $\beta$  uvrstimo  $180^\circ - \alpha - \gamma$  (zbroj kutova u trokutu jednak je  $180^\circ$ ) dobivamo:

$$|\angle KCM| = 90^\circ - \frac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Sada imamo:

$$|\angle BCM| = |\angle KCM| - |\angle BCK| = \frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Zbog  $|\angle ACB| = \gamma$  i  $|\angle BCM| = \frac{\gamma}{2}$  vrijedi:

$$|\angle ACM| = |\angle ACB| - |\angle BCM| = \gamma - \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Sada znamo da je  $|\angle ACM| = |\angle BCM| = \frac{\gamma}{2}$ , pa možemo zaključiti da je pravac  $CM$  simetrala kuta  $\angle ACB$ . Simetrala kuta  $\angle ACB$  i simetrala kuta  $\angle BAC$  sijeku se u točki  $M$ . S obzirom na to da se simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku u jednoj točki, možemo zaključiti da je  $M$  središte upisane kružnice trokuta  $\triangle ABC$ .

□



## 3.2 Ponceletov teorem za kružnice i četverokut

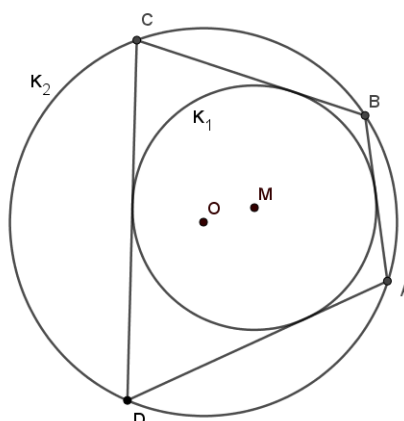
Općenito, ako je dani mnogokut proizvoljan četverokut, tom četverokutu najvjerojatnije se ne može upisati i opisati kružnica. Da bi četverokutu bilo moguće upisati i opisati kružnicu potrebno je ograničiti se na posebnu vrstu četverokuta.

**Definicija 3.2.1.** Četverokut kojemu se može upisati kružnica naziva se *tangencijalni četverokut*.

**Definicija 3.2.2.** Četverokut kojemu se može opisati kružnica naziva se *tetivni četverokut*.

**Definicija 3.2.3.** Četverokut koji je ujedno i tetivni i tangencijalni naziva se *bicentrični četverokut*.

**Teorem 3.2.4.** Zbroj dvaju nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta je  $180^\circ$ .



Slika 3.2: Bicentrični četverokut  $ABCD$

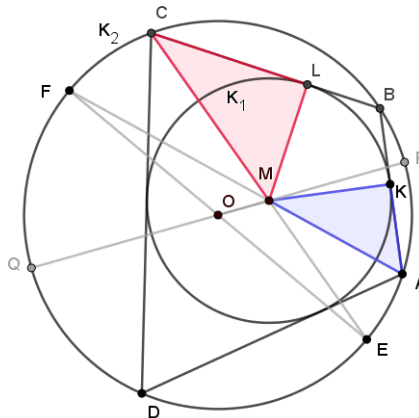
U Poglavlju 1 bavili smo se zatvaranjem u trokut te došli do zaključka da ako su zadane dvije kružnice različitih polumjera, jedna unutar druge do zatvaranja u trokut će doći ako i samo ako vrijedi Eulerova relacija  $R^2 - d^2 = 2Rr$ , gdje je  $r$  radijus unutarnje kružnice,  $R$  radijus vanjske kružnice, a  $d$  je udaljenost središta tih dviju kružnica. Analogno tome, želimo uvjet za postojanje četverokuta koji je istovremeno upisan vanjskoj kružnici i opisan unutarnjoj kružnici ako su zadane dvije kružnice različitih polumjera, jedna unutar druge. Formulu za postojanje bicentričnog četverokuta objavio je švicarski matematičar Nicolas Fuss (1755.-1826.) koji je djelovao kao asistent na Akademiji znanosti i umjetnosti u Sankt Petersburgu za vrijeme Eulerova života i kasnije.

**Teorem 3.2.5.** [Fussov teorem] Neka je  $K_2$  kružnica opisana četverokutu  $ABCD$  i  $K_1$  kružnica upisana tom četverokutu. Neka je  $R$  radijus opisane, a  $r$  radijus upisane kružnice četverokutu  $ABCD$ . Ako  $s$  označimo udaljenost središta kružnica  $K_1$  i  $K_2$ , tada vrijedi:

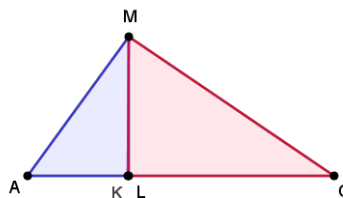
$$\frac{1}{(R + d)^2} + \frac{1}{(R - d)^2} = \frac{1}{r^2}. \quad (3.5)$$

Posebno, ako je uvjet 3.5 zadovoljen, tada za svaku točku  $X_1$  na kružnici  $K_2$  postoji četverokut kojemu je  $K_2$  opisana, a  $K_1$  upisana kružnica.

Dokaz koji slijedi u nastavku prvi je pronašao J. C. Salazar.



Slika 3.3:



Slika 3.4: Pravokutni trokut  $\triangle AMC$

*Dokaz.* Točke u kojima kružnica  $K_1$  dira stranice četverokuta  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$  označimo s  $K$  i  $L$  kao na slici 3.3 S obzirom na činjenicu da je zbroj nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta jednak  $180^\circ$  (Teorem 3.2.4) i činjenicu da je središte upisane kružnice četverokutu sjecište simetrala kutova slijedi da je:

$$|\angle BAM| + |\angle MCB| = 90^\circ.$$

Promatrajući trokute  $\triangle AKM$  i  $\triangle MLC$  uočavamo da je  $|ML| = |MK| = r$ ,  $|\angle AKM| = |\angle MLC| = 90^\circ$  pa je  $|\angle AMK| + |\angle KMC| = 90^\circ$ . Spajanjem trokuta  $\triangle AKM$  i  $\triangle MLC$  kao na slici 3.4 dobivamo pravokutni trokut  $\triangle AMC$ . Uočimo da se točke  $K$  i  $L$  poklapaju. Primjenom formula za površinu pravokutnog trokuta dobivamo:

$$r \cdot (|AK| + |CL|) = |AM| \cdot |CM|, \quad (3.6)$$

a primjenom Pitagorinog poučka dobivamo:

$$(|AK| + |CL|)^2 = |AM|^2 + |CM|^2. \quad (3.7)$$

Iz 3.6 i 3.7 slijedi  $r^2 \cdot (|AM|^2 + |CM|^2) = |AM|^2 \cdot |CM|^2$ , odnosno

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|CM|^2}. \quad (3.8)$$

Točke u kojima pravci  $CM$  i  $AM$  sijeku kružnicu  $K_2$  označimo s  $E$  i  $F$ . Prema teoremu o središnjem i obodnom kutu i teoremu o simetrali kuta, zaključujemo da je  $|\angle DOF| + |\angle DOE| = 2 \cdot (|\angle DAF| + |\angle DCE|) = |\angle BAD| + |\angle BCD| = 180^\circ$ , pa je dužina  $\overline{EF}$  promjer kružnice  $K_2$ . Primjenom formule za duljinu težišnice imamo  $2 \cdot |OM| = \sqrt{2 \cdot (|EM|^2 + |FM|^2)}$  iz čega slijedi:

$$|EM|^2 + |FM|^2 = 2 \cdot (d^2 + R^2). \quad (3.9)$$

Sjecišta pravca  $OM$  s kružnicom  $K_2$  označimo s  $P$  i  $Q$ . Primjenom Leme 2.0.2 imamo

$$|AM| \cdot |FM| = |CM| \cdot |EM| = |PM| \cdot |QM| = (R - d) \cdot (R + d) = R^2 - d^2. \quad (3.10)$$

Iz 3.9 i 3.10 slijedi:

$$\frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|CM|^2} = \frac{|FM|^2}{(R^2 - d^2)^2} + \frac{|EM|^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{2 \cdot (R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2}. \quad (3.11)$$

Konačno, iz 3.8 i 3.11 slijedi:

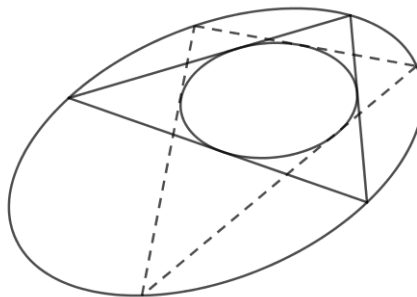
$$\frac{1}{r^2} = \frac{2 \cdot (R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{(R + d)^2 + (R - d)^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{1}{(R + d)^2} + \frac{1}{(R - d)^2}.$$

□

## Poglavlje 4

# Ponceletov teorem zatvaranja

### 4.1 Uvod u dokaz teorema



Slika 4.1: Ponceletov teorem

Proširujući dosad promatrane specijalne slučajeve Ponceletovog teorema dolazimo do općeg slučaja u kojem umjesto kružnica promatramo elipse, a umjesto trokuta i četverokuta bilo koji mnogokut.

**Teorem 4.1.1.** [Ponceletov teorem zatvaranja I] *Pretpostavimo da je moguće konstruirati mnogokut koji je istovremeno upisan elipsi  $E_2$  i opisan elipsi  $E_1$ . Tada za svaku točku  $P$  na elipsi  $E_2$  postoji mnogokut istovremeno upisan elipsi  $E_2$  i opisan elipsi  $E_1$  kojemu je  $P$  jedan od vrhova.*

Teorem 4.1.1 drugačije možemo iskazati na sljedeći način.

**Teorem 4.1.2.** [Ponceletov teorem zatvaranja II] *Dane su dvije elipse  $E_1$  i  $E_2$ , jedna unutar druge bez zajedničkih točaka. Neka je  $P_1$  bilo koja točka na elipsi  $E_2$ . Tangenta  $t_1$  konstruirana iz točke  $P_1$  na unutarnju elipsu  $E_1$  siječe elipsu  $E_2$  u točki  $P_2$ . Analogno, tangenta*

$t_2$  konstruirana iz točke  $P_2$  na unutarnju elipsu  $E_1$  siječe elipsu  $E_2$  u točki  $P_3$ . Nastavljamo postupak konstruiranja tangenti na unutarnju elipsu  $E_1$ . Neka je  $P_n$  posljednja točka na elipsi  $E_2$  dobivena ovim postupkom. Ako je  $P_1 = P_n$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ) tada za svaku točku  $P$  na elipsi  $E_2$  vrijedi da je posljednja točka dobivena postupkom konstruiranja tangenti na elipsu  $E_1$  jednaka točki  $P$ .

Za specijalne slučajeve Ponceletovog teorema kada su promatrane konike kružnice postoji lako izvediv elementarni dokaz kao što smo mogli vidjeti u Poglavlju 3. Kada umjesto kružnica promatramo elipse, postojanje elementarnog dokaza teorema postaje upitno. U ovom radu Ponceletov teorem dokazat ćemo koristeći algebarsko-geometrijski dokaz. Također, vidjet ćemo koliko su algebra i geometrija kao matematičke discipline povezane. Prvo ćemo problem izraziti u četiri koraka koja slijede u nastavku koristeći metode analitičke geometrije i time odnose između geometrijskih likova izraziti pomoću njihovih jednadžbi.

### Jednadžbe elipsi $E_1$ i $E_2$

Uvedimo koordinatni sustav  $xy$  takav da se središte elipse  $E_2$  nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, velika os elipse leži na osi apscisa, a mala os elipse leži na osi ordinata. Tada jednadžba elipse  $E_2$  glasi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (0 < b \leq a).$$

Elipsa  $E_1$  iz Teorema 4.1.2 nalazi se unutar elipse  $E_2$ . Pritom su elipse  $E_1$  i  $E_2$  različitih duljina velike i male osi i središta su im različite točke u ravnini. Općenito, nije moguće dobiti jednostavnu jednadžbu elipse  $E_1$  koristeći isti koordinatni sustav. No moguće je elipsu  $E_1$  dobiti kompozicijom rotacije i translacije elipse  $E'_1$ . Elipsu  $E'_1$  smjestimo u isti koordinatni sustav sa središtem u ishodištu i tada njezina jednadžba glasi:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

gdje je  $a'$  duljina velike poluosi elipse, a  $b'$  duljina male poluosi elipse. Rotacijom  $x$ -osi i  $y$ -osi oko ishodišta koordinatnog sustava, te translacijom ishodišta u novu točku  $(\beta, \gamma)$  dobivamo novi koordinatni sustav  $x'y'$ . Za dokaz teorema od velike je važnosti opća jednadžba za krivulje drugog reda. Za svaku točku  $(x, y)$  krivulje drugog reda vrijedi  $\Phi(x, y) = 0$ .

$$\Phi(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (4.1)$$

Ako je  $4AC - B^2 > 0$  tada ova jednadžba predstavlja jednadžbu elipse. Kako se iz točke izvan elipse mogu konstruirati dvije tangente na elipsu, a elipsa  $E_1$  nalazi se unutar elipse  $E_2$ , za svaku točku na elipsi  $E_2$  moguće je konstruirati dvije tangente na elipsu  $E_1$ . Ta činjenica bit će ključna za dokaz teorema.

### Parametarska jednadžba elipse $E_2$

Jednadžbe elipsi  $E_1$  i  $E_2$  potrebno je napisati u parametarskom obliku. Elipsa  $E_2$  je skup svih točaka ravnine čije su koordinate dane uređenim parom  $(x, y)$ . Ako je  $x = a \cos \theta$  i  $y = b \sin \theta$  za  $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$  dobivamo uređeni par  $(a \cos \theta, b \sin \theta)$  koji predstavlja točku elipse  $E_2$  s parametrom  $\theta$ . Pritom se jednadžbe  $x = a \cos \theta$  i  $y = b \sin \theta$  nazivaju parametarskim oblikom jednadžbe elipse  $E_2$ .

Parametar  $\theta$  potrebno je zamijeniti nekim drugim parametrom. Koristeći formulu za dvostruki kut funkcija sinus i kosinus dobivamo jednadžbe:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

koje možemo zapisati u obliku:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \\ \cos \theta &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Uvedimo supstituciju  $s = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ .

Iz  $0 \leq \theta < 2\pi$  slijedi da je  $0 \leq \frac{\theta}{2} < \pi$ . S obzirom na to da funkcija tangens nije definirana u  $\frac{\pi}{2}$ , promatrat ćemo slučaj samo za  $\theta \neq \pi$ . Na brojevnoj kružnici, približavajući se točki  $\frac{\pi}{2}$  u pozitivnom smjeru,  $s$  teži u  $+\infty$ , a približavajući se točki  $\frac{\pi}{2}$  u negativnom smjeru,  $s$  teži u  $-\infty$ , odnosno  $-\infty < s < +\infty$ . Sada uređeni par možemo zapisati u obliku:

$$\left( \frac{a(1-s^2)}{1+s^2}, \frac{2bs}{1+s^2} \right), \quad (-\infty < s < +\infty).$$

To je parametarski oblik jednadžbe elipse  $E_2$ . Za  $\theta = \pi$  dobivamo točku elipse  $(-a, 0)$  koja je izniman slučaj. Parametarska jednadžba vrijedi za svaku točku elipse osim za  $(-a, 0)$ .

Neka je

$$\begin{aligned}x &= f_1(s) = \frac{a(1-s^2)}{1+s^2} \\ y &= f_2(s) = \frac{2bs}{1+s^2}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Tada su koordinate točaka koje pripadaju elipsi  $E_2$  dane uređenim parom  $(f_1(s), f_2(s))$ .

### Parametarska jednadžba elipse $E_1$

Analogno tome kako smo dobili parametarsku jednadžbu elipse  $E_2$  možemo dobiti parametarsku jednadžbu elipse  $E'_1$  uvodeći supstituciju  $t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ . Tada parametarska jednadžba elipse  $E'_1$  glasi:

$$\left( \frac{a'(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2b't}{1+t^2} \right), \quad (-\infty < t < +\infty)$$

osim za točku  $(-a', 0)$ . Svaka točka elipse  $E_1$  može se zapisati u obliku:

$$\left( \frac{\tilde{g}_1(t)}{1+t^2}, \frac{\tilde{g}_2(t)}{1+t^2} \right), \quad (-\infty < t < +\infty)$$

za parametar  $t$ . S obzirom na to da je elipsa  $E_1$  dobivena kompozicijom rotacije i translacije elipse  $E'_1$  slijedi da su  $\tilde{g}_1(t)$  i  $\tilde{g}_2(t)$  polinomi drugog stupnja.

Neka je

$$\begin{aligned} x &= g_1(t) = \frac{\tilde{g}_1(t)}{1+t^2} \\ y &= g_2(t) = \frac{\tilde{g}_2(t)}{1+t^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tada su koordinate točkaka koje pripadaju elipsi  $E_1$  dane uređenim parom  $(g_1(t), g_2(t))$ , odnosno vrijedi

$$\Phi(x, y) = \Phi(g_1(t), g_2(t)) = 0. \quad (4.4)$$

### Jednadžbe tangenti na elipsu $E_1$

Tangenta na elipsu je pravac koji ima svoju jednadžbu. Ukoliko se točka iz koje želimo konstruirati tangentu na elipsu nalazi izvan elipse, postoje dva rješenja odnosno možemo konstruirati dvije tangente. No, ukoliko se točka nalazi na elipsi, tada je u toj točki moguće konstruirati samo jednu tangentu. Ako je elipsa dana standardnom jednadžbom:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0 \quad (4.5)$$

tada je jednadžba tangente na tu elipsu u točki elipse  $(x_1, y_1)$  dana jednadžbom:

$$\frac{xx_1}{A^2} + \frac{yy_1}{B^2} = 1. \quad (4.6)$$

Jednadžba 4.6 naziva se segmentni oblik jednadžbe tangente u točki elipse. Može se dobiti derivacijom jednadžbe elipse 4.5 po varijabli  $x$  kao što je:

$$\frac{2x}{A^2} + \frac{2y}{B^2} \cdot y' = 0.$$

Rješavanjem ove jednadžbe po  $y'$  dobivamo jednadžbu 4.6. S obzirom na to da točka  $(x_1, y_1)$  pripada elipsi, jednadžbu tangente možemo zapisati kao:

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} = 1,$$

odnosno za daljnje korake jednadžbu tangente potrebno je zapisati u sljedećem obliku:

$$\frac{2x_1}{A^2}(x - x_1) + \frac{2y_1}{B^2}(y - y_1) = 0.$$

Koeficijent  $\frac{2x_1}{A^2}$  uz  $(x - x_1)$  dobiva se deriviranjem funkcije  $F(x, y)$  po varijabli  $x$  gdje varijablu  $y$  tretiramo kao konstantu. Nakon deriviranja uvodimo supstituciju  $x = x_1$ . To je zapravo parcijalna derivacija funkcije  $F(x, y)$  po varijabli  $x$  te možemo pisati  $F_x(x, y)$ . Koristeći se ovakvim zapisom, koeficijent  $\frac{2x_1}{A^2}$  uz  $(x - x_1)$  možemo zapisati kao

$$F_x(x_1, y_1) = \frac{2x_1}{A^2}.$$

Analogno tome, deriviranjem funkcije  $F(x, y)$  po varijabli  $y$  gdje varijablu  $x$  tretiramo kao konstantu dobivamo parcijalnu derivaciju funkcije  $F(x, y)$  po varijabli  $y$  te analogno prethodnom zapisu pišemo  $F_y(x, y)$ . Uvođenjem supstitucije  $y = y_1$  koeficijent  $\frac{2y_1}{B^2}$  uz  $(y - y_1)$  možemo zapisati kao

$$F_y(x_1, y_1) = \frac{2y_1}{B^2}.$$

Sada se jednadžba tangente u točki elipse  $(x_1, y_1)$  može zapisati u obliku:

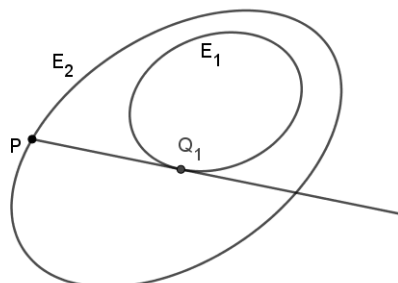
$$F_x(x_1, y_1)(x - x_1) + F_y(x_1, y_1)(y - y_1) = 0.$$

Moguće je da je elipsa dana jednadžbom 4.1  $\Phi(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Tada je jednadžba tangente u točki elipse  $(x_1, y_1)$  istog oblika kao kada je elipsa zadana standardnom jednadžbom, odnosno jednadžba tangente tada glasi:

$$\Phi_x(x_1, y_1)(x - x_1) + \Phi_y(x_1, y_1)(y - y_1) = 0. \quad (4.7)$$

Ovime smo postavili temelje za razmatranje elipsi i tangenti s algebarske točke gledišta. Potrebno je odnose među promatranim konikama i tangentama izraziti algebarski. Neka su 4.2 i 4.3 koordinate točaka na elipsama  $E_1$  i  $E_2$ . Neka je za točku  $P(f_1(s_0), f_2(s_0))$





Slika 4.2:

točka  $Q_1(g_1(t_1), g_2(t_1))$  sjecište elipse  $E_1$  i tangente konstruirane iz točke  $P$  na elipsu  $E_1$ . Promotrimo sliku 4.2 S obzirom na to da imamo tangentu u točki elipse  $Q_1(g_1(t_1), g_2(t_1))$  i 4.7 vrijedi:

$$\Phi_x(g_1(t_1), g_2(t_1))(x - g_1(t_1)) + \Phi_y(g_1(t_1), g_2(t_1))(y - g_2(t_1)) = 0.$$

Parcijalnom derivacijom funkcije 4.1, uvrštavanjem  $Q_1(g_1(t_1), g_2(t_1))$  te sređivanjem izraza dobivamo:

$$(2Ag_1(t_1) + Bg_2(t_1) + D)(x - g_1(t_1)) + (Bg_1(t_1) + 2Cg_2(t_1) + E)(y - g_2(t_1)) = 0.$$

Kako tangenta prolazi točkom  $P(f_1(s_0), f_2(s_0))$  imamo:

$$(2Ag_1(t_1) + Bg_2(t_1) + D)(f_1(s_0) - g_1(t_1)) + (Bg_1(t_1) + 2Cg_2(t_1) + E)(f_2(s_0) - g_2(t_1)) = 0, \quad (4.8)$$

što je ekvivalentno

$$(2Ag_1(t_1) + Bg_2(t_1) + D)f_1(s_0) + (Bg_1(t_1) + 2Cg_2(t_1) + E)f_2(s_0) - 2\Phi(g_1(t_1), g_2(t_1)) + Dg_1(t_1) + Eg_2(t_1) + 2F = 0.$$

Zbog 4.4 imamo  $\Phi(g_1(t_1), g_2(t_1)) = 0$  te uvrštavanjem u gornji izraz vidimo da taj član nestaje. Zbog toga jednačba 4.8 nema kvadratnih članova poput  $g_1(t_1)^2$ ,  $g_2(t_1)^2$  ili  $g_1(t_1)g_2(t_1)$ .

## 4.2 Uvod u dio algebre potrebne za dokaz teorema

Nadalje, neka  $P(s_0)$  predstavlja točku  $P(f_1(s_0), f_2(s_0))$  na  $E_2$  i neka  $Q(t_1)$  predstavlja točku  $Q(g_1(t_1), g_2(t_1))$  na  $E_1$ . Generalizacijom 4.2 i 4.3 imamo:

$$\bullet f_i(s) = \frac{\text{polinom drugog stupnja po } s}{1 + s^2}, \quad (i = 1, 2)$$

$$\bullet g_i(t) = \frac{\text{polinom drugog stupnja po } t}{1 + t^2}, \quad (i = 1, 2).$$

Ako je vodeći koeficijent jednak nuli, tada imamo polinom prvog stupnja.

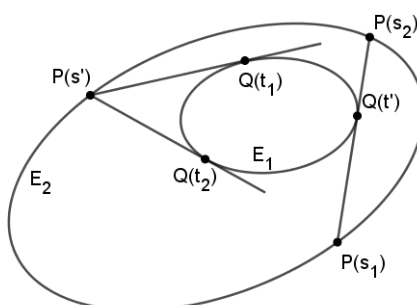
Svođenjem 4.8 na zajednički nazivnik dobivamo:

$$\frac{Q(s_0, t_1)}{(1 + s_0^2)(1 + t_1^2)},$$

gdje je  $Q(s_0, t_1)$  polinom drugog stupnja s varijablama  $s_0$  i  $t_1$ .

Kako je  $P(f_1(s_0), f_2(s_0))$  proizvoljna točka na elipsi  $E_2$ ,  $s_0$  i  $t_1$  možemo zamijeniti sa  $s$  i  $t$ . Sada imamo polinom drugog stupnja  $Q(s, t)$ .

Za  $Q(s, t) = 0$  dobivamo algebarsku vezu između  $s$  i  $t$  kojom se izražava postojanje tangente na  $E_1$ .



Slika 4.3:

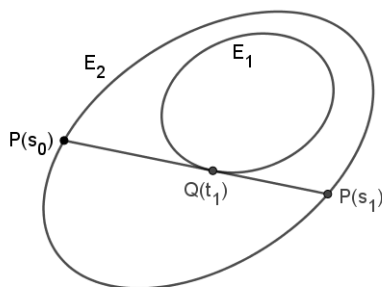
Promotrimo sliku 4.3. Na slici je prikazana veza između točaka na  $E_1$  i  $E_2$ . Naprimjer, ako odaberemo parametar  $s'$  koji odgovara točki  $P(s')$  tada su  $t_1$  i  $t_2$  rješenja kvadratne jednadžbe  $Q(s', t) = 0$  i odgovaraju točkama  $Q(t_1)$  i  $Q(t_2)$  na  $E_1$ . Postoji i druga mogućnost, a to je da odaberemo parametar  $t'$  koji odgovara točki  $Q(t')$  na  $E_1$ . Tada su  $s_1$  i  $s_2$  rješenja kvadratne jednadžbe  $Q(s, t') = 0$  i odgovaraju točkama  $P(s_1)$  i  $P(s_2)$  na  $E_2$ .

Ako  $Q(s, t) = 0$  gledamo kao kvadratnu jednadžbu s nepoznicom  $s$ , tada je jedno od rješenja te jednažbe upravo  $s_0$ . Drugo rješenje je  $s_1$  i ono odgovara točki  $P(s_1)$  na  $E_2$  koja

je sjecište elipse  $E_2$  i tangente konstruirane u  $Q(t_1)$  kroz  $P(s_0)$ . Tu vezu između dviju točaka  $P(s_0)$  i  $P(s_1)$  možemo predočiti slikom 4.4, a algebarski je zapisujemo kao

$$Q(s_0, t_1) = 0, \quad Q(s_1, t_1) = 0.$$

Kao što možemo vidjeti na slici 4.4 kada su poznati  $s_0$  i  $s_1$  poznati je i  $t_1$ . Zbog toga je



Slika 4.4:

veza između  $s_0$  i  $s_1$  dana jednadžbama

$$Q(s_0, t) = 0 \quad \text{i} \quad Q(s_1, t) = 0.$$

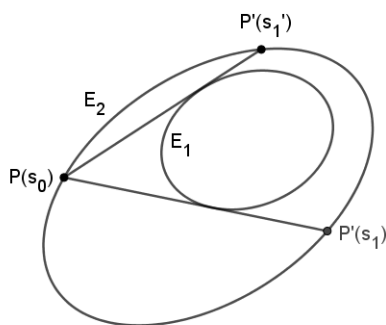
Eliminacijom parametra  $t$  dobivamo jednadžbu:

$$H(s_0, s_1) = 0$$

koja izražava vezu između  $s_0$  i  $s_1$ .

$H(s_0, s_1)$  je također polinom drugog stupnja u  $s_1$  zato što jednadžba  $H(s_0, s) = 0$  po varijabli  $s$  uvijek ima dva rješenja, a to su  $s_1$  i  $s'_1$ . U primjeru prikazanom na slici 4.5,  $s'_1$  je vrijednost parametra koji odgovara drugoj točki sjecišta tangente kroz  $P(s_0)$  i elipse  $E_2$ . Analogno tome,  $H(s_0, s_1)$  je polinom drugog stupnja po  $s_0$ .

Kao što smo već naveli,  $H(s_0, s_1)$  je polinom drugog stupnja s varijablama  $s_0$  i  $s_1$ . Ova činjenica sugerira nam točku gledišta iz koje da promatramo Ponceletov teorem. Ako od točke  $P(s_0)$  krenemo konstruirati tangente na  $E_1$  dobivamo drugu točku sjecišta na  $E_2$ , a to je točka  $P(s_1)$ . Imamo vezu između točaka  $P(s_0)$  i  $P(s_1)$  i uočavamo da ta veza ovisi o položaju unutarnje elipse  $E_1$ . Ta veza izražena je upravo pomoću jednadžbe  $H(s_0, s_1) = 0$



Slika 4.5:

i to je algebarska veza između dviju vrijednosti parametra  $s$ .

Promotrimo ponovno Teorem 4.1.2. U ovom teoremu postupak konstruiranja tangenti ponovljen je nekoliko puta. Pretpostavlja se da se odabere proizvoljna točka  $P$ , te se svakim idućim korakom (konstrukcijom tangente iz novo dobivene točke) na  $E_1$  dobiva nova točka sjecišta na  $E_2$ .

$$P \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_n.$$

Ako točku  $P_1$  odaberemo kao početnu točku, zadnja točka dobivena ovim postupkom  $P_n$  jednaka je početnoj točki  $P_1$  i to nakon  $n$  koraka. To nam daje za prvo odabrati bilo koju početnu točku  $P$  na  $E_2$  te vrijedi  $P = P_n$  za svaku točku  $P$  na  $E_2$ .

Već smo primjetili da teorem ima algebarsku konotaciju, a sada ćemo ga i dokazati.

### 4.3 Dokaz teorema

U ovom dijelu dokazat ćemo teorem algebarski kako je to učinio 1878. godine njemački matematičar Adolf Hurwitz (1859.-1919.).

Odaberimo točku  $P(s_0)$  na elipsi  $E_2$  i konstruirajmo tangentu u smjeru kazaljke na satu na elipsu  $E_1$ . Ta tangenta prolazi točkom  $P(s_0)$  i siječe elipsu  $E_2$  u novoj točki  $P(s_1)$ . Sada ponovno konstruirajmo tangentu na  $E_1$  iz točke  $P(s_1)$ . Ta tangenta siječe  $E_2$  u točki  $P(s_2)$  na  $E_2$ . Ovim postupkom dobivamo algebarsku formulaciju danu polinomima drugog stupnja u  $s_0$  i  $s_1$  te  $s_1$  i  $s_2$ :

$$H(s_0, s_1) = 0$$

$$H(s_1, s_2) = 0.$$

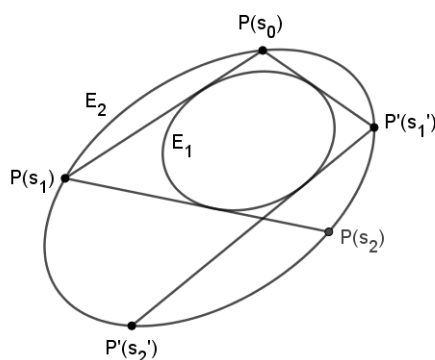
Eliminacijom  $s_1$  iz ovih dviju jednažbi dobivamo jednažbu četvrtog stupnja, te nakon eliminacije faktora  $(s_0 - s_1)^2$  dobivamo algebarsku vezu između  $s_0$  i  $s_2$ :

$$H^{(2)}(s_0, s_2) = 0.$$

To je također polinom drugog stupnja u  $s_0$  i  $s_2$ . Iz toga slijedi da kvadratna jednažba

$$H^{(2)}(s_0, s) = 0$$

po varijabli  $s$  ima samo dva rješenja. Promotrimo sliku 4.6 Imajući na umu vezu između



Slika 4.6:

dviju točaka na elipsi  $E_2$ ,

$$P(s_0) \rightarrow P(s_1)$$

imamo i vezu između svih točaka na elipsi  $E_2$  dobivenih postupkom konstruiranja tangenti na elipsu  $E_1$ :

$$P(s_0) \rightarrow P(s_1) \rightarrow P(s_2) \rightarrow P(s_3) \rightarrow \dots \rightarrow P(s_k) \rightarrow \dots$$

Algebarska veza između  $s_0$  i  $s_3$  dobiva se iz jednažbi

$$H^{(2)}(s_0, s_2) = 0$$

$$H(s_2, s_3) = 0$$

analogno kao što smo dobili vezu između  $s_0$  i  $s_2$ . Odnosno eliminacijom  $s_2$  iz ovih dviju jednažbi dobivamo jednažbu četvrtog stupnja gdje daljnjom eliminacijom određenog faktora dobivamo algebarsku vezu između  $s_0$  i  $s_3$ :

$$H^{(3)}(s_0, s_3) = 0.$$

Analogno tome, nastavljajući s ovim postupkom dobivamo algebarsku vezu između  $s_0$  i  $s_k$ :

$$H^{(k)}(s_0, s_k) = 0.$$

$H^{(k)}(s_0, s_k) = 0$  je polinom drugog stupnja u  $s_0$  i  $s_k$ .

Nadalje, koristit ćemo algebarsku vezu između točaka na elipsi  $E_2$  dobivenih postupkom konstruiranja tangenti na unutarnju elipsu  $E_1$ . Ta veza kao što smo već naveli ovisi o položaju elipse  $E_1$ . Pretpostavimo da kao početnu točku odaberemo  $P = P(s_0)$ . Konstruiranjem tangenti dobivamo točke ovim redosljedom

$$P(s_0) \rightarrow P(s_1) \rightarrow P(s_2) \rightarrow \cdots \rightarrow P(s_{n-1}) \rightarrow P = P(s_0),$$

gdje se zadnja točka podudara s početnom točkom nakon  $n$  koraka gdje je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . To možemo predočiti sa

$$H^{(n)}(s_0, s_0) = 0.$$

To je algebarska formulacija Teorema 4.1.2.

Uočavamo da je ovaj problem kružne prirode, odnosno ako krenemo od početne točke  $P(s_1)$  postupkom konstruiranja tangenti dobivamo točke na  $E_2$  ovim redosljedom:

$$P(s_1) \rightarrow P(s_2) \rightarrow P(s_0)(= P) \rightarrow P(s_1),$$

gdje se posljednja točka dobivena ovim postupkom podudara s početnom točkom nakon  $n$  koraka. Tada imamo algebarsku formulaciju

$$H^{(n)}(s_1, s_1) = 0.$$

Generalizacijom imamo:

$$H^{(n)}(s_i, s_i) = 0 \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Ako ove formulacije promatramo s algebarske točke gledišta, zapravo imamo kvadratnu jednadžbu

$$H^{(n)}(x, x) = 0$$

koja ima  $n$  rješenja  $s_0, s_1, \dots, s_{(n-1)}$ . Rješenja jednadžbe  $H^{(n)}(s_j, x) = 0$  dana su ovim slijedom:

$$P(s_j) \rightarrow P(s_{j+1}) \rightarrow \cdots \rightarrow P(s_{n-1}) \rightarrow P(s_1) \rightarrow \cdots \rightarrow P(s_j),$$

a ako tangente konstruiramo u smjeru obrnutom od kazaljke na satu ovime:

$$P(s_j) \rightarrow P(s_{j-1}) \rightarrow \cdots \rightarrow P(s_0) \rightarrow P(s_{n-1}) \rightarrow P(s_{n-2}) \rightarrow \cdots \rightarrow P(s_j).$$

Dakle, kvadratna jednažba  $H^{(n)}(x, x) = 0$  ima  $2n$  za  $(n \geq 6)$  rješenja. To može biti samo ako je  $H^{(n)}(x, x)$  jednako nuli. Tako za svaku točku  $\tilde{P}(\tilde{s})$  na  $E_2$  imamo

$$H^{(n)}(\tilde{s}, \tilde{s}) = 0.$$

Geometrijsku interpretaciju ove formulacije smo već objasnili, a to je da za svaku točku  $\tilde{P}$  na  $E_2$  postupkom konstruiranja tangenti na elipsu  $E_1$  posljednja točka dobivena tim postupkom jednaka je početnoj točki, odnosno točki  $\tilde{P}$ .

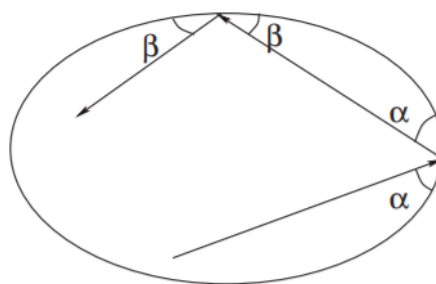
Ovime smo dokazali Ponceletov teorem zatvaranja.

## Poglavlje 5

# Mehanička interpretacija

U ovom poglavlju bavit ćemo se mehaničkom interpretacijom Ponceletovog teorema gdje ćemo promatrati putanju loptice po biljarskom stolu posebnog oblika koja se po njemu giba te uočiti primjenu Ponceletovog teorema.

”Matematički biljarski stol” koji promatramo u ovom poglavlju zapravo je eliptičnog oblika i analogon je vanjske elipse  $E_2$  kojom smo se čitavo vrijeme bavili. On podrazumijeva samo jednu lopticu koja se kreće unutar rubova stola na nekoliko zanimljivih načina. Loptica se uvijek kreće od ruba stola ravnom putanjom po pravcu sve dok ponovno ne dođe do ruba stola od kojeg se odbija pod jednakim kutom pod kojim je došla (prisjetimo se zakona refleksije gdje je upadni kut jednak kutu odbijanja) te se nastavlja gibati po pravcu. Na taj način loptica se nastavlja gibati u beskonačnost jer ovdje zanemarujemo otpor zraka i trenje, odnosno promatramo samo idealan slučaj gibanja poput gibanja u posebnim uvjetima.



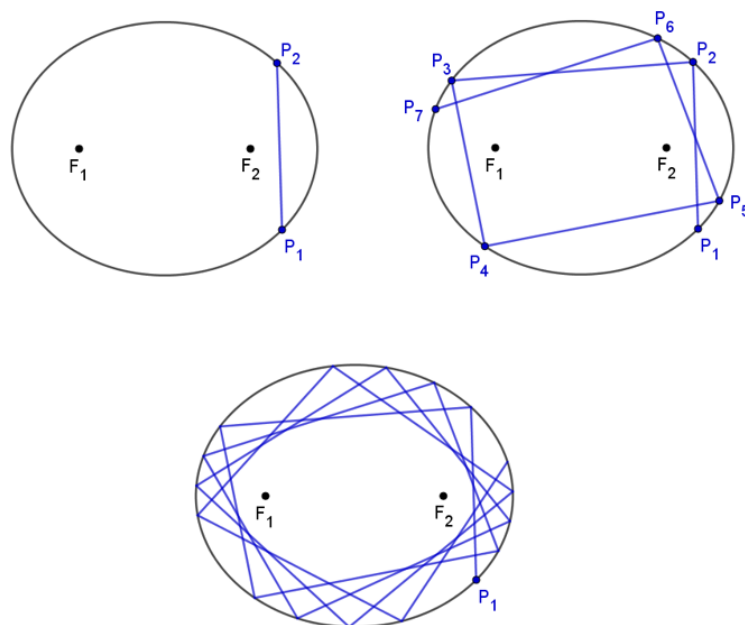
Slika 5.1: Zakon refleksije na eliptičkom biljarskom stolu



Postoje tri načina na koja možemo odabrati putanju kojom će se loptica gibati:

- smjer prvog gibanja loptice je po pravcu koji se nalazi između fokusa i tjemena elipse na velikoj osi
- smjer prvog gibanja loptice je po pravcu koji se nalazi između dva fokusa
- smjer prvog gibanja loptice je po pravcu koji sadrži jedan fokus elipse.

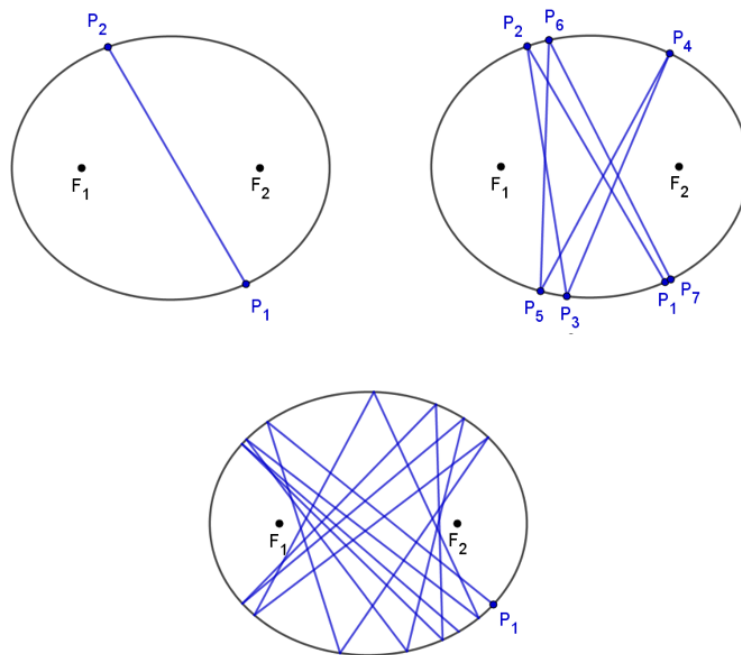
Prvi način prikazan je na sljedećem nizu slika s time da je na prvoj slici prikazan početak gibanja, na drugoj slici prikazana je putanja loptice nakon pet odbijanja, a na trećoj slici prikazana je putanja loptice nakon petnaest odbijanja. Primjetimo da što je veći broj odbijanja loptice, to se više uočava nova krivulja drugog reda, elipsa koja ima jednake fokuse kao i elipsa  $E_2$  te se nalazi unutar vanjske elipse. Također, primjetimo da su pravci kojima je prikazana putanja loptice zapravo tangente na novonastalu elipsu te se nikada ne nalaze između dva fokusa.



Slika 5.2: Pravci po kojima se loptica giba su tangente nove elipse

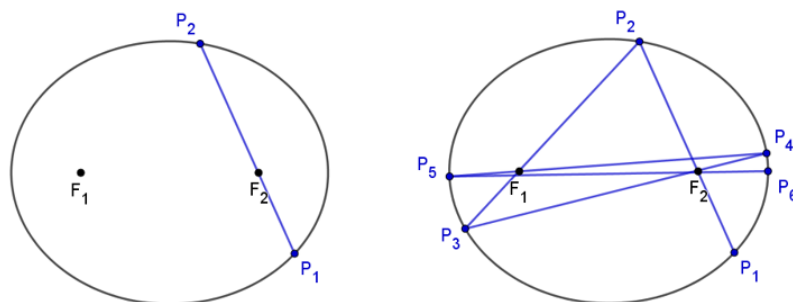
Dakle, svaki novi pravac dobiven na ovaj način, refleksijom, tangenta je iste krivulje, elipse koja ima jednake fokuse kao i elipsa koja čini okvir stola. Ako krenemo od bilo koje točke, nakon  $n$  refleksija svaka tetivno-tangencijalna crta postat će zatvorena, a iz Ponceletovog teorema slijedi da tada ima beskonačno mnogo mnogokuta s istim brojem strana.

Drugi način prikazan je na sljedećem nizu slika s time da je na prvoj slici prikazan početak gibanja, na drugoj slici prikazana je putanja loptice nakon pet odbijanja, a na trećoj slici prikazana je putanja loptice nakon petnaest odbijanja. Primjetimo da što je veći broj odbijanja loptice, to se više uočava nova krivulja drugog reda, hiperbola koja ima jednake fokuse kao i elipsa  $E_2$ . Također, primjetimo da su pravci kojima je prikazana putanja loptice zapravo tangente na hiperbolu  $H_1$  te se uvijek nalaze između dva fokusa. Ovdje imamo izniman slučaj kada je početna točka gibanja tjeme elipse koje se nalazi na maloj osi. Tada se loptica giba po maloj osi u beskonačnost.



Slika 5.3: Pravci po kojima se loptica giba su tangente hiperbole

Treći način je zapravo rijedak slučaj te je na sljedećoj slici prikazan početak gibanja i putanja loptice nakon četiri odbijanja. Možemo uočiti da što je veći broj odbijanja to je pravac po kojem se loptica giba sve sličnijeg položaja kao velika os elipse. Također, loptica nakon svakog odbijanja prolazi naizmjenično jednim pa drugim fokusom.



Slika 5.4: Pravci po kojima se loptica giba teže prema velikoj osi elipse

Postoji i teorem koji govori o zrcalnom (optičkom) svojstvu elipse.

**Teorem 5.0.1.** *Ako zraka svjetlosti izlazi iz jednog fokusa i reflektira se od elipse, tada reflektirana zraka prolazi drugim fokusom.*

Upravo iz optičkog svojstva elipse dolazi naziv za fokuse (žarišta) elipse.

# Bibliografija

- [1] M. Radić, *Eulerove relacije za trokut i Ponceletov teorem zatvaranja koji se odnosi na trokut*, Poučak 17 (2004.), 48-58.
- [2] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Elementarna geometrija*, skripta, Zagreb, 2007. <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf>, (travanj 2018.)
- [3] S. Morita, K. Shiga, K. Ueno, *A Mathematical Gift, II (Mathematical World)*, American Mathematical Society, Providence, 2004.
- [4] V. Dragović, M. Radnović, *Poncelet Porisms and Beyond: Integrable Billiards, Hyperelliptic Jacobians and Pencils of Quadrics*, Birkhäuser Basel, 2011.
- [5] Poncelet's Porism, dostupno na <http://mathworld.wolfram.com/PonceletsPorism.html>, (travanj 2018.)
- [6] Fuss' Theorem, dostupno na <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Fuss.shtml>, (svibanj 2018.)
- [7] Elliptical billiard tables, dostupno na <https://cage.ugent.be/~hs/billiards/index.html>, (lipanj 2018.)

# Sažetak

Ponceletov teorem, koji govori o postojanju mnogokuta istovremeno upisanog jednoj a opisanog drugoj konici, jedan je od najpoznatijih i najviše proučavanih teorema u projektivnoj geometriji. Kao što je izloženo u ovom radu, ako postoji mnogokut koji je upisan jednoj konici i opisan drugoj, tada postoji beskonačno mnogo mnogokuta s jednakim brojem strana. Upravo se zbog prirode postojanja rješenja ovaj teorem često naziva i Ponceletov porizam, gdje riječ porizam dolazi iz Stare Grčke iz koje dolaze brojni matematičari važni za razvoj matematike, posebno geometrije.

U prvom poglavlju riječ je o zatvaranju u trokut gdje smo stekli prvi dojam o Ponceletovom teoremu, odnosno stekli smo dojam da mora postojati nekakav uvjet da bi do zatvaranja u trokut uopće došlo ako su dane dvije kružnice u ravnini, različitih polumjera, jedna unutar druge. Postojanje uvjeta za konstrukciju trokuta koji je upisan jednoj, a opisan drugoj kružnici navodi na dokaz Eulerovog teorema kojim se pokazuje da se takav trokut može konstruirati ako je zadovoljena Eulerova relacija. Eulerov teorem zapravo je temelj dokaza specijalnog slučaja Ponceletovog teorema za kružnice i trokut koji se nalazi u Poglavlju 3, te navodi na analogan uvjet za postojanje četverokuta koji je upisan vanjskoj, a opisan unutarnjoj kružnici.

Najvažniji dio ovog rada zapravo je dokaz Ponceletovog teorema. Zbog kompleksnosti i dubine ovog teorema dokaz je vrlo zahtjevan, pogotovo zato što ne postoji elementarni dokaz. Teorem smo dokazali algebarsko-geometrijskim dokazom po uzoru na njemačkog matematičara Adolfa Hurwitza.

U završnom dijelu rada izložena je mehanička interpretacija Ponceletovog teorema.

# Summary

Poncelet theorem is one of the most important and most explored theorems of projective geometry. This is a theorem about closing property for a sequence of polygons inscribed in one and circumscribed about the other given conic in the same plane. If described polygon exists, then there are infinitely many polygons with the same number of sides, inscribed in one and circumscribed about the other conic. The Poncelet theorem is usually called the Poncelet porism, where porism originates from Ancient Greece, home of many famous mathematicians important for the development of mathematics, especially geometry.

First chapter is about special polygon, triangle. We have noticed that we need a special condition for it's existence if there are two given circles, one inside the other, in the same plane. That condition is well known as "Euler's formula" which is specified in Euler's theorem, proved in Chapter 2. Euler's theorem is very important for a special case of Poncelet theorem, Poncelet theorem for triangle and two given circles in Chapter 3. Using analogy and special condition for quadrilaterals, there exists a quadrilateral inscribed in one, and circumscribed about the other given circle.

The most important part is the proof of Poncelet theorem. Because of it's complexity, a proof is very difficult especially because there is no elementary proof. We use an algebraic-geometric method to prove the theorem like the German mathematician Adolf Hurwitz.

In the last chapter, we focus on the mechanical interpretation of Poncelet's theorem.

# Životopis

Rođena sam 13. siječnja 1993. godine u Zagrebu.

Nakon završene opće gimnazije, 2012. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu gdje sam u rujnu 2015. godine stekla diplomu prvostupnice edukacije matematike.

Nakon završenog preddiplomskog studija upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički na istom fakultetu. U organizaciji fakulteta, za vrijeme diplomskog studija odradila sam metodičku praksu nastave matematike u osnovnoj školi Augusta Šenoje i XV. Gimnaziji u Zagrebu. Za vrijeme trajanja metodičke prakse sudjelovala sam u organiziranju i provođenju Večeri matematike te međunarodnog učeničkog natjecanja Klokkan bez granica.

U ljetnom semestru 2015./2016. godine pohađala sam Program financijske edukacije studenata (Financial Literacy in Practice) na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Tijekom cijelog studija radila sam razne studentske poslove i aktivno držala individualne poduke učenicima osnovnih i srednjih škola te fakulteta. Time sam unaprijedila svoje komunikacijske i organizacijske vještine te stekla sposobnost rada u timu. Uz to, aktivno se služim engleskim jezikom, a pasivno francuskom jezikom.

Poznajem osnove rada na računalu, programski jezik u Python-u i  $\text{\LaTeX}$ u. Aktivno se služim programima dinamične geometrije kao što su GeoGebra i Geometers Sketchpad. Također, napredno poznajem MS Office paket, posebno Excel.

U veljači 2018. godine postala sam članicom Hrvatskog statističkog društva.