

# Dječji prsti kao didaktičko sredstvo u učenju matematičkih sadržaja

---

**Vučko, Paula**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Teacher Education / Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:147:289382>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-28**

*Repository / Repozitorij:*

[University of Zagreb Faculty of Teacher Education - Digital repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**UČITELJSKI FAKULTET**  
**ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE**

**Paula Vučko**

**DJEČJI PRSTI KAO DIDAKTIČKO SREDSTVO U UČENJU**  
**MATEMATIČKIH SADRŽAJA**

**Diplomski rad**

**Zagreb, srpanj 2022.**

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**UČITELJSKI FAKULTET**  
**ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE**

**Paula Vučko**

**DJEČJI PRSTI KAO DIDAKTIČKO SREDSTVO U UČENJU**  
**MATEMATIČKIH SADRŽAJA**

**Diplomski rad**

**Mentorica rada:**

**izv. prof. dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin**

**Zagreb, srpanj 2022.**

# DJEČJI PRSTI KAO DIDAKTIČKO SREDSTVO U UČENJU MATEMATIČKIH SADRŽAJA

Sažetak:

Odrasli, ali i djeca aktivni su izvoditelji matematičkih radnji, a da toga često nisu niti svjesni. Zato se od početka učenja matematičkih sadržaja djeci treba pristupiti na primjeren način, čime se i bavi ovaj rad. U radu se opisuje psihološki aspekt matematičke edukacije, kao i matematička tranzicija koja podrazumijeva kontinuirani razvoj predmatematičkih vještina uz redovito korištenje konkretnog materijala. Pregled literature pokazuje da je korištenje didaktičkoga materijala benefit za daljnji razvoj djeteta, a u radu se daju primjeri za rad u praksi. Također, u sklopu ovoga rada provedeno je kvalitativno istraživanje koje se fokusira na aktivnosti koje uključuju prste kao didaktičko sredstvo za učenje pojma broja, brojanja te zbrajanja i oduzimanja. Cilj istraživanja bio je odgovoriti na pitanja za koje didaktičke materijale s upotrebom prstiju ispitani učenici pokazuju poseban interes te kako ih koriste. Rezultati su pokazali da materijali mogu biti korišteni u različite matematičke svrhe. Uviđa se i da učenici prvih razreda najveći interes pokazuju za aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za učenje pojma broja, a uz korištenje konkretnih materijala matematiku percipiraju kao igru. Ovaj rad pokazuje da su potrebni volja i kreativnost učitelja i odgojitelja da se djeci približe apstraktni matematički sadržaji te da se osvijesti važnost matematike u svakidašnjici.

Ključne riječi: matematika, tranzicija, didaktički materijal, dječji prsti kao didaktičko sredstvo

# **CHILDREN'S FINGERS AS A DIDACTIC TOOL IN LEARNING MATHEMATICAL CONTENT**

Abstract:

Both adults and children are active performers in mathematical activities, without often even being aware of it. That is why we have to find an appropriate way to approach children from the beginning of learning mathematical contents, which is the topic of this paper. The paper describes the psychological aspect of mathematical education, as well as the mathematical transition, which includes the continuous development of pre-mathematical skills with the regular use of concrete materials. A review of literature shows that the use of didactic materials is a benefit for further development of the child, and the paper gives examples of how this works in practice. Additionally, qualitative research was conducted as a part of this paper, with a focus on activities that involve using fingers as a didactic tool for learning the concept of numbers, counting, and addition and subtraction. The aim of the research was to answer the question which didactic materials that involve using fingers students showed special interest in, and how they used them. The results showed that the materials can be used for various mathematical purposes. Furthermore, first grade students showed the greatest interest in activities that include fingers as a means of learning the concept of numbers. In addition, with the use of specific materials, they perceived mathematics as play. This paper shows the importance of teachers' and educators' willingness and creativity in making abstract mathematical contents more understandable to children, and in raising the awareness about the importance of mathematics in everyday life.

Key words: mathematics, transition, didactic material, children's fingers as a didactic tool

## Sadržaj:

1. Uvod .....	1
2. Matematička edukacija .....	3
2.1 Psihološke osnove matematičke edukacije .....	3
2.1.1 Razvojne faze prema Piagetu .....	3
2.1.2 Stupnjevi poznavanja matematike prema Sharmi.....	9
2.1.3 Rano usvajanje matematičkih pojmova .....	10
2.2 Specifičnosti nastave matematike.....	12
2.3 Tranzicija iz predškole u razrednu nastavu.....	15
2.3.1 Tranzicija kao prijelaz i promjena identiteta.....	16
2.3.2 Tranzicija kao odgovornost i dužnost roditelja, odgojitelja i učitelja.....	18
2.3.3 Matematička tranzicija .....	19
2.3.4 Predmatematičke vještine.....	22
3. Dječji prsti kao didaktičko sredstvo .....	26
3.1 Didaktički materijali .....	26
3.1.1 Vrste i upotreba didaktičkih materijala u matematici .....	27
3.1.2 IGSZ model u usvajanju matematičkih pojmova .....	28
3.1.3 Prikazi didaktičkih materijala za učenje matematike .....	31
3.1.4 Korištenje didaktičkog materijala u nastavnoj praksi .....	36
3.2 Dječji prsti kao podloga za učenje.....	37
3.2.1 Dječji prsti i matematika u praksi .....	38
3.2.2 Računanje na prste .....	42
3.3 Aktivnosti .....	44
3.3.1 Prsti kao sredstvo za učenje pojma broja .....	44
3.3.2 Prsti kao sredstvo za brojanje i prebrojavanje .....	48
3.3.3 Prsti kao sredstvo za zbrajanje i oduzimanje.....	50
3.3.4 Prsti kao sredstvo za množenje .....	52
4. Istraživanje .....	55
4.1 Cilj i istraživačka pitanja .....	55
4.2 Metodologija i provedba istraživanja .....	55
4.2.1 Priprema istraživanja i odabir sudionika .....	56
4.2.2 Provedba istraživanja .....	58

4.3 Rezultati.....	61
4.3.1 Interes za materijale .....	61
4.3.2 Korištenje materijala .....	62
4.3.3. Odgovori na dodatna pitanja iz individualnih intervjua .....	68
4.4 Diskusija i zaključci istraživanja .....	69
5. Zaključak.....	72
6. Prilozi.....	74
7. Literatura.....	79

## 1. Uvod

„Matematika je u tvom svakodnevnom životu od trenutka kada se probudiš do trenutka kada ideš spavati“ (Kanter, 1994, str. 2). Iako to nekim ljudima zvuči nemoguće, matematika doista jest znanost koja svakodnevno okružuje ljude i s kojom se susreću a da toga često nisu niti svjesni. Primjerice, to je očito u postavljanju budilice, kupovanju namirnica, pravljenju bočice djetetu, praćenju vremena i rezultata na utakmicama, postavljanju tapeta te pakiranju darova koje navodi Kanter (1994). Autorica također navodi da su matematičke vještine potrebne svima, nevezano čime se tko bavi, gdje tko živi ili što je po struci. Zato je, prema Kanter (1994), važno ohrabrivati i poticati djecu da sebe smatraju matematičarima koji mogu postavljati i uspješno rješavati probleme.

Ipak, „matematiku mnogi opisuju kao težak predmet, ali možda bi primjereniji opis bio da je matematika kontroverzan predmet, jer nju učenici ili izrazito vole ili izrazito ne vole, malo je onih potpuno ravnodušnih prema matematici“ (Glasnović Gracin, 2010, str. 200). Autorica vjeruje da je tome često tako zbog osjećaja uspjeha ili neuspjeha pri savladavanju matematičkog sadržaja. To je važan faktor koji utječe na učenje matematike i stavove koje djeca razvijaju prilikom odrastanja. Matematički sadržaj je sam po sebi specifičan i razlikuje se od ostalih školskih predmeta upravo zato što zahtijeva kontinuirano razumijevanje i shvaćanje matematičkih pojmova, a ne učenje činjenica i gotovih informacija napamet. Zbog toga je potrebno od samog početka kognitivnog razvoja djece omogućiti postepen i temeljit rad koji se temelji na iskustvu, radu s konkretnim materijalom, iznošenju doživljaja i usmenom prenošenju konkretnih sadržaja u apstraktne matematičke pojmove.

Upravo je manipulacija konkretnim materijalima siguran put do usvajanja novih matematičkih pojmova, kao i siguran prijelaz unutar matematičke tranzicije. Dijete tijekom života prolazi kroz nekoliko osjetljivih razdoblja tranzicije, no pri svakom tom prijelazu moguće je prilagoditi sadržaj, materijal i pristup ovisno o fazi djetetova razvoja. Tako je rad s didaktičkim materijalom i razvoj predmatematičkih vještina siguran put i prijelaz u tom zahtjevnom i neizbježnom procesu tranzicije iz predškolskih ustanova u osnovnu školu.

Tijekom tog procesa prsti mogu biti važno sredstvo za učenje. Prije svega, ljudima prsti svakodnevno služe kao sredstvo za obavljanje brojnih nematematičkih aktivnosti. No, ako se prisjetimo da smo izloženi matematičkim sadržajima od jutra pa do mraka, to znači da se



prstima nesvjesno koristimo i kao matematičkim sredstvom. Tu se postavlja pitanje: ako je korištenje prstiju u matematičke svrhe nešto što je svim ljudima prirodno, zašto se učenici sve manje koriste prstima, ali i drugim konkretnim materijalom prilikom usvajanja matematičkih sadržaja te kako prsti uopće mogu biti u službi didaktičkog sredstva na nastavi matematike? Odgovor na ovo pitanje podudara se s ciljem ovoga rada, a za bolje razumijevanje, potrebno je biti upućen i u teorijsku pozadinu, odnosno cjelovitu matematičku edukaciju. Također, iz ovog područja nedostaje istraživanja koja bi potkrijepila teorijski aspekt.

U drugom poglavlju ovog rada bit će riječi i o specifičnostima nastave matematike, posebice u osjetljivim razdobljima djetetova osnovnog obrazovanja – razdobljima tranzicije. Također, govorit će se o važnostima primjene konkretnih materijala i razvoja predmatematičkih vještina tijekom tranzicije iz predškolskih ustanova u osnovnu školu. Treće poglavlje donosi brojne aktivnosti koje uključuju izradu i primjenu didaktičkih materijala u praksi. Aktivnosti su raznolike i s jasno postavljenim matematičkim ciljevima, a njihova svrha i upotreba tumače se uz teorijsku podlogu matematike kao znanosti i didaktike kao grane pedagogije. Četvrto poglavlje se odnosi na kvalitativno istraživanje o upotrebi prstiju za učenje matematičkih sadržaja. Detaljnom analizom i zaključcima istraživanja, prilikom kojega se promatra korištenje prstiju kao didaktičkog sredstva u praksi, nastoji se prikazati važnost korištenja konkretnih materijala u nastavi matematike kao i potaknuti na planiranje djelotvornijeg poučavanja.

## 2. Matematička edukacija

### 2.1 Psihološke osnove matematičke edukacije

„Vrijeme ‘ velikih ljudi ’ , koji su u značajnoj mjeri obilježili neko znanstveno područje, čini se da i u psihologiji prolazi. Jeana Piageta zasigurno valja promatrati kao jednog od posljednjih koji zaslužuju da budu svrstani u tu skupinu“ (Bugge, 2002, str. 13). Upravo ovim riječima, autor Franz Bugge započinje djelo „Razvojna psihologija Jeana Piageta“ o razvojnoj psihologiji iz perspektive i prema istraživanjima ovog iznimno važnog znanstvenika. Unatoč svim kritikama Piagetove teorije (Ballargeon, Luo, Brueckner i Munakata, 2003; Blank, Rose i Berlin, 1978, i dr.) valja imati na umu da je ona dala detaljan uvid u kognitivni proces i sposobnosti kojima dijete raspolaže u određenoj dobi. Budući da su odgojno-obrazovne ustanove mjesto direktnog susreta razvojne psihologije i pedagogije s djecom u različitim fazama intelektualne i psihičke razvijenosti, čini se sasvim primjereno govoriti o Piagetovim teorijama, istraživanjima i podjelama. Te faze su važne i primjenjive u edukaciji mnogih disciplina, no ona koja je u interesu ovoga rada je upravo – edukacija matematike. Valja istaknuti da Markovac (2001) navodi da je kognitivna razvijenost od iznimne važnosti za učenje u početnoj nastavi matematike, a s obzirom na to da Piaget argumentirano objašnjava razvoj kognitivnih sposobnosti u određenoj životnoj dobi, u ovom radu koristit će se neki aspekti njegove teorije koji su relevantni za formiranje osnovnih matematičkih pojmova. Razdoblja koja slijede jedno za drugim prema određenim zakonitostima i koja se opisuju na temelju kvalitativnih različitosti kognitivnih struktura, Piaget imenuje kao razdoblje senzomotoričke inteligencije, razdoblje predoperacijskog mišljenja, razdoblje konkretnih operacija te razdoblje formalnih operacija (Bugge, 2002).

#### 2.1.1 Razvojne faze prema Piagetu

Prvo razdoblje kognitivnog razvoja prema Piagetu započinje rođenjem, a završava oko druge godine života. Djeca u ovoj fazi shvaćaju svijet kroz osjete i motoriku, a kompleksnost same faze pokazuju podfaze od kojih se ovo razdoblje sastoji te prilagodbe kroz koje dijete prolazi tijekom rasta i razvoja. Bugge (2002) navodi da bebe iz urođenih refleksa poput sisanja i hvatanja, razvijaju spoznajne „organe“ kojima se služe kako bi one poznate radnje i reflekse mogli generalizirati na nove predmete. U tom dijelu ovog razdoblja, dijete spoznaje i panti sličnosti i razlike među predmetima kojima je izloženo u vanjskom svijetu.

Nadalje, u senzomotoričkoj fazi, dojenčad i mala djeca prvi put koordiniraju različitim aktivnostima istovremeno, primjerice, gledanjem i hvatanjem. Upravo su te sposobnosti i spoznaje, koje dijete stječe tijekom određenih radnji, osobito važan korak za daljnji razvoj dječje spoznaje (Bugle, 2002). Primjerice, u trećoj podfazi, koja se najčešće pojavljuje od četvrtog do osmog mjeseca djetetova života, javlja se povećana zainteresiranost za vanjski svijet, što uzrokuje i neka intencionalna ponašanja koja se kroz daljnji razvoj sve više mijenjaju, razvijaju i razdvajaju. Tako, na primjer, djeca pokušavaju produljiti neke nove i zanimljive radnje pomoću već usvojenih radnji koje im se čine primjenjive i učinkovite u danoj situaciji. Upravo tu „namjernost“ činjenja nečega tj. intencionalnost, Piaget smatra kao jednim od najvažnijih kriterija inteligentnog ponašanja i iznimno je važna osobina ove početne faze (Bugle, 2002).

Kada se u četvrtoj podfazi intencionalna ponašanja sasvim razviju i koordiniraju u cjelovito složeno ponašanje, dijete prelazi u sljedeći stupanj ove faze za koji je karakteristično aktivno traženje i otkrivanje novih shema. One ga ponovo dovode do novih situacija, okolnosti i radnji koje dijete želi akomodirati i ustaliti, no više ne toliko zbog utjecaja okoline, koliko zbog samostalne težnje istome.

Sva ta iskustva i podražaji prirodno usmjeravaju dijete prema novoj fazi, no značenje i važnost senzomotoričke faze nije samo u konkretnom djelovanju te koordinaciji percepcije i djelovanja. Senzomotorička faza smatra se temeljem logičkog razmišljanja jer se iz „vrlo konkretnog 'shvaćanja' razvija unutarnje, spoznajno shvaćanje na kasnijim stupnjevima“ (Bugle, 2002, str. 57), što je vidljivo već u sljedećoj fazi.

Druga, predoperacijska faza, mogla bi se sažeti u ovoj mnogima poznatoj rečenici iz popularne dječje humoristično-dramske TV serije „Smogovci“: „Oni su mali, ali su veliki, odnosno, hoću reći, nisu više mali, ali su dosta veliki da ne budu mali“ (Kanižaj, 1982, S1E1, 00:13). Razlog tome je taj što se ona proteže od druge pa sve do sedme godine djetetova života. To znači da je za sve odgojitelje, ali i učitelje važno poznavati svaki dio ovog razdoblja te svaku njegovu karakteristiku jer nije rijedak slučaj da su učenici u prvom razredu i dalje u ovoj fazi ili na samom prijelazu u sljedeću.

U ovoj fazi dijete uči prikazati objekte i radnje slikama, riječima i crtežima. Osim toga, razvija svoje mentalne sposobnosti u kojima i dalje postoje određena ograničenja unatoč rapidnom razvoju intelekta u odnosu na prethodnu fazu.

Prije svega, u ovoj se fazi veliki naglasak stavlja na ulogu simbola „koja je u skladu s novim postignućem i koja predstavlja sposobnost istodobnog razlikovanja i povezivanja onoga što se označava (slika, simbol, znak) od onoga što je označeno (realni objekti ili veze)“ (Buggle, 2002, str. 71). Osim toga, Piaget spominje i igru oponašanja, tj. igru uloga te simboličku igru. Buggle (2002) te igre navodi kao način funkcionalnog usavršavanja tog temeljnog procesa kognitivnog razvoja jer s vremenskim odmakom to slikovito i simbolično predstavljanje nečega dovodi do sve veće distanciranosti i neovisnosti o onome što se u početku simbolično predstavljalo i oponašalo. Uz to, u ovoj fazi dolazi do razvoja jezika, za što Buggle (2002) govori da se kroz stalnu socijalnu razmjenu djetete potiče na sažimanje i simboličko mišljenje kojima može stvarati sve složenije i stvarne reprezentacije, koje sve više potiču dva važna obilježja ove faze – procese generalizacije i apstrakcije.

Ako se ova faza usporedi s prethodnom, moglo bi se reći da su „senzomotoričke spoznaje koje su stečene kroz provedbu posve konkretnih radnji uglavnom privatno-individualne i jedva da se mogu priopćiti“ (Buggle, 2002, str. 74-75) dok se kroz stvaranje simbola u ovoj fazi, točnije, kroz sposobnost izražavanja nečega nečim drugim „potencira mogućnost da se stvarna stanja socijalno prenesu“ (Buggle, 2002, str. 75). Svakako, razdoblje predoperacijskog mišljenja valja promatrati i u odnosu na sljedeće dvije faze jer se njena potpuna slika ne može vidjeti samo usporedbom sa senzomotoričkom fazom. To je vrlo korisno upravo zbog toga što se u osnovnoj školi učitelji najčešće susreću s učenicima koji su na samom kraju predoperacijske faze ili na početku faze konkretnih operacija u kojoj prevladava zrelije mišljenje. Imajući to na umu, važno je spomenuti nekoliko pojmova. To su konkretnost, animizam, centriranje, ireverzibilnost, egocentrizam, zorno mišljenje te konfiguracije.

Pojam konkretnosti zapravo ističe „vrlo izraženu povezanost između predoperacijskog razmišljanja i vanjskih radnji“ (Buggle, 2002, str. 76). Drugim riječima, djetetova razina razmišljanja i realnost određenih radnji se sudaraju te djetete nema mogućnost shvaćanja pravog značenja nekog izraza ili radnje. Kao primjer se može reći da je to djetetovo neshvaćanje metafora, na koje starija djeca i odrasli ni ne obraćaju pozornost jer ne shvate tu radnju doslovnom. Primjerice, *vani pada mrak* je izraz i radnja koju djetete u ovoj fazi sa svojim mogućnostima razmišljanja ne može shvatiti.

Nadalje, ovu fazu karakterizira i animizam, odnosno „vjerovanje da sve stvari, biljke i životinje imaju dušu“ (Hrvatski jezični portal, 2021). Ova karakteristika je odraslima često zabavna i smiješna, ali i korisna za rješavanje brojnih dječjih problema. Primjerice, djetete se

udari o stol, pa udara stol kako bi mu se osvetilo ili ne dira bakinu skupocjenu vazu zato što je mama rekla da vaza spava.

Centriranje je pojam kojemu Piaget posvećuje mnogo pažnje i smatra ga iznimno važnim pokazateljem faze kojoj dijete pripada. „Pod centriranjem Piaget podrazumijeva koncentraciju dječje pozornosti na pojedine posebno istaknute značajke objekta ili stanja koje dijete opaža te zanemarivanje drugih, također važnih osobina“ (Bugge, 2002, str. 77). Piaget centriranje pojašnjava na primjeru petogodišnjaka ili nešto starije djece uz pomoć pokusa prelijevanja. Za vrijeme pokusa, djetetu su prikazane dvije jednake čaše napunjene jednakom količinom tekućine. Naziva ih se čaša A1 i čaša A2. Djetetu se zatim postavlja pitanje: „U kojoj čaši ima više tekućine?“ na što dijete najčešće sasvim sigurno točno odgovara. Nakon toga se iz jedne od tih čaša voda izlije u drugu koja je niža i šira. Nju se naziva čaša B. Sada čaša A1 s tekućinom služi za usporedbu količine tekućine u čaši B jer ponovno slijedi isto pitanje: „U kojoj čaši ima više tekućine?“. Djeca u ovoj fazi najčešće tvrde da u čaši B ima manje tekućine jer je niža. Piaget je ovaj pokus koristio kako bi mogao prosuditi u kojoj fazi se dijete nalazi jer je smatrao da je dijete još uvijek u predoperacijskoj fazi, ako padne na ovom eksperimentu.

Spominjući ovaj eksperiment, potrebno je istaknuti i značajku ireverzibilnosti jer ona razlikuje ovu fazu od kasnijih. „Starije dijete, mladi ili odrasli mogli bi spoznati ekvivalentnost količina u čašama A1 i B ne samo preko decentrirajuće pozornosti, (...) nego i tako što će u predodžbama, 'u mislima' vratiti proces prelijevanja“ (Bugge, 2002, str. 77). Piaget smatra da dijete koje je u ovoj fazi ne posjeduje značajku reverzibilnosti, točnije, sposobnost vraćanja određenih procesa na početnu točku te da je zbog toga njihovo mišljenje još uvijek ireverzibilno.

Egocentrizam je značajka koja se može vrlo lako primijetiti kod djece te dobi iako se često pogrešno shvaća. Primjerice, djeci od druge do pete godine vrlo je teško dijeliti svoje igračke, ali im je sasvim normalno da ih uzimaju od drugih. Mnogi odrasli ovu radnju pripisuju dječjoj sebičnosti, no dijete u toj dobi još nije sposobno biti sebično jer ne zna manipulirati drugima. Ono zapravo teško shvaća da postoji razlika između želje i realnosti, odnosno da oko njega postoje različite individue s individualnom vizijom svijeta i situacije (psichiatria.org, 2021). Piaget egocentrizam opisuje situacijom gdje su djetetu prikazane tri slike s različitim pogledom na planinu. Kada ga upitaju što bi se vidjelo s određene točke na planini, dijete odgovara ono što ono vidi, a ne što bi se vidjelo sa zadane točke.

Zorno mišljenje je zapravo naziv za drugi dio ovog razdoblja gdje dijete ima četiri do sedam godina pa se može smatrati određenim međustupnjem. Buggle (2002) govori da se u tom dijelu pojavljuju neke misaone strukture koje se nalaze između dvije krajnosti, primjerice, prethodno spomenutog centriranog i ireverzibilnog načina razmišljanja te posve suprotnog decentriranog i reverzibilnog razmišljanja iz nadolazećeg razvojnog stupnja. Unutar ovog međupodručja pojavljuje se značajka konfiguracije ili raščlanjenog mišljenja. To znači da se struktura djetetova mišljenja više ne odnosi na jedan tipični objekt, nego na veći broj elemenata koji su povezani zajedničkim rasporedom. „Takva konfiguracija predstavlja svrstanu količinu određenih predmeta u određenom obliku i odgovarajuće postignuće koje uistinu površno podsjeća na operacionalna misaona postignuća“ (Buggle, 2002, str. 82-83). Piaget zorno mišljenje prikazuje situacijom u kojoj postavlja šest crvenih žetona na stol, a djetetu daje veću količinu plavih žetona i traži da na stol stavi jednaku količinu plavih žetona. U ovoj fazi dijete će jednostavno uz svaki crveni žeton poredati jedan plavi. Tom radnjom nije dosegnuta velika razina operacijskog mišljenja, što se u daljnjim fazama bitno razlikuje, no kao što je Buggle naveo, ono zaista podsjeća na isto.

Faza konkretnih operacija, donosi mnogo novih pojava i značajki u intelektualni razvoj djeteta. Razdoblje se proteže od djetetove sedme pa do otprilike jedanaeste godine života. S obzirom na to da je riječ o životnom periodu u kojem su djeca učenici razredne nastave, od velike je važnosti da svaki učitelj jako dobro poznaje ovu fazu. Osim toga, u ovom periodu nastaju i dalje se razvijaju sposobnosti logičkog razmišljanja, učenik nastavlja baratati konkretnim materijalom te postupno uvoditi apstraktne pojmove, što je još jedan razlog zašto je važno dobro poznavati ovu fazu.

Buggle (2002) posebno ističe kako je riječ „operacija“, u nazivu same faze, novost za kognitivnu razvojnu psihologiju te kako taj pojam zapravo „odražava Piagetovo temeljno shvaćanje spoznavanja i inteligencije kao djelatnosti“ (Buggle, 2002, str. 85) u kojoj se konstantno napreduje i kontinuirano razvija iz promatrane konkretne radnje koja je kao podloga za razvoj same inteligencije. U ovoj fazi učenici mogu mentalno manipulirati unutrašnjim reprezentacijama konkretnih objekata i tvari, odnosno javlja se logičko razmišljanje uz manipulaciju i promatranje već poznatih materijala. Ako se u ovoj fazi ponovo uzme za primjer eksperiment s tekućinom i čašama, dijete će najčešće moći samostalno procijeniti da je količina tekućine u čašama jednaka. Posjeduje tu sposobnost zato što se u ovoj fazi pojavljuje značajka reverzibilnosti, odnosno vraćanja radnje na početnu

točku. Upravo taj proces vraćanja jest mentalno manipuliranje reprezentacijama konkretnih objekata, što u prethodnim fazama dijete nije bilo u mogućnosti (Bugge, 2002).

Dakle, u ovoj fazi učenici mogu shvatiti i trebaju raditi na značajkama iz prethodne faze kako bi ih polarizirali ili iskorijenili te tako intelektualno napredovali jer je pojava logičkog razmišljanja veliki korak unaprijed u djetetovom kognitivnom razvoju (Bugge, 2002). Ono tada razvija interpersonalnu i intrapersonalnu inteligenciju te je sposobno percipirati sebe u odnosu na druge, ali i razumijeti postupke drugih. Sukladno tome, dijete može ispravno reagirati i dolaziti do rješenja raznovrsnih problema.

Posljednja Piagetova faza, faza formalnih operacija, odvija se od jedanaeste godine života pa nadalje. Već je spomenuto da se u toj fazi razvija sposobnost apstraktnog mišljenja, a osim toga, učenici bi trebali moći postavljati hipoteze u danim situacijama kao i razumjeti uzročno-posljedične veze. Kroz ovu fazu trebaju dobro planirati svoj rad i misli tijekom pristupanja matematičkom problemu zbog daljnjih operacija i kompleksnih zadataka s kojima će se susretati.

Najjednostavnije je opisati važnost ove faze kroz spomenuti pokus prelijevanja tekućine. Značajna razlika u operacijskom mišljenju i spoznajama unutar prethodne faze i faze formalnih operacija je upravo u tome što je u fazi konkretnih operacija ta radnja postala jasna za taj konkretan primjer. Dakle, u prethodnoj fazi dijete je znalo točno odgovoriti na pitanje u kojoj čaši ima više tekućine i time je, prema Piagetu, prošlo zadani pokus. No, tu spoznaju o stalnosti količine je dijete moglo primijeniti isključivo na taj jedan primjer i eventualno još pokoji u slučaju detaljne obrade, postavljanja mogućnosti i rezultata. No, u ovoj je fazi učenik sposoban tu spoznaju generalizirati i samostalno proširiti na druga sadržajna područja, primjerice, mase ili obujma (Bugge, 2002).

Iz svega navedenog moglo bi se pogrešno shvatiti da je faza formalnih operacija poput nekakvog proširenja prethodnih faza ili da su neke karakteristike ovog razdoblja zapravo prisutne i u ranijim fazama, no važno je razlikovati okolnosti i „dubinu apstraktnog“. Tako bi se mogao dati primjer ranijih kognitivnih faza u kojima je karakteristično da djeca imaju bujno razvijenu maštu i da se ipak mogu izražavati putem onoga što nije stvarno, no Bugge (2002) navodi da je važno znati da se ono što nije stvarno ne može izjednačiti s mogućim u razdoblju formalnih operacija. To smatra upravo zbog toga što se u dječjem nestašluku, mašti i neobuzdanosti može vidjeti razlika između dječjeg, nezrelog, „nestvarnog“ i, s druge strane, onog „mogućeg“ u okviru formalnih operacija (Bugge, 2002). „Moguće na stupnju formalnih

operacija puno se više odlikuje logičko-objektivnim postavljanjem cilja i podvrgavanju logičkoj nužnosti“ (Bugge, 2002, str. 100).

Također, Piaget objašnjava da je za potpuno ostvarenje kognitivnog razvoja do kraja ove faze i za tu razinu formalno-operacionalnog djelovanja potreban i čimbenik kulture koji utječe na svakog pojedinca. Važni su zahtjevi koje postavlja okolina kao i ostali socijalni i neurološki činitelji. „U kojoj se dakle mjeri ostvaruje stupanj formalnih operacija u različitim sociokulturalnim sredinama, kod različitih pojedinaca te na posebnim područjima spoznaje, mora se utvrditi samo u pojedinačnom slučaju“ (Bugge, 2002, str. 108).

### *2.1.2 Stupnjevi poznavanja matematike prema Sharmi*

Profesor Mahesh Sharma je s navedenim Piagetovim fazama uspio povezati i učenje matematike, pa je na temelju ovih razvojnih faza definirao šest stupnjeva poznavanja matematike: intuitivni, konkretni, slikovni, apstraktni, primjenu znanja i komunikacijski stupanj (Sharma, 2001). Po spomenutoj podjeli može se promatrati na koji su način ove faze i stupnjevi povezani te kako se matematika kao znanost uopće uklapa i razvija u svakom pojedincu.

Stupnjevi se mogu promatrati generalno i primijeniti pravilnim redoslijedom unutar svake Piagetove faze ili pak u praksi tijekom svake nastavne cjeline, no mogu se i razvrstati prema fazama ovisno o svojim karakteristikama.

Prva dva stupnja su intuitivni i konkretni. Intuitivni, kako i sam naziv kaže, povezuje se s nečim prirodnim, ustaljenim, već poznatim od prije. U tom stupnju, učenici, odnosno bebe i mala djeca, stvaraju nove veze s njihovim prethodnim znanjima. Kada povežu stara i nova znanja, prelaze na drugi stupanj gdje trebaju konkretne primjere i materijal uz pomoću kojega vide konkretan model tog novog koncepta i uz čiju manipulaciju dolaze do novih saznanja (Sharma, 2001).

Treći stupanj je slikovni i u njemu dominiraju slikovni prikazi, grafički crteži, ilustracije i manipulativni materijali. Važno je da dijete samo crta i iskusi kako prikazati ono što je prikazano na slici. Upravo zato profesor Sharma tvrdi da „živa imaginacija, jasna vizualizacija i dojmljiv slikovni prikaz mnogo puta mogu učiniti isto što i konkretni manipulativni materijal“ (Sharma, 2001, str. 83).



Ostali stupnjevi su karakteristični za treću i četvrtu Piagetovu fazu. Stupnjevi imaju prirodan slijed i prate razvoj djeteta te se međusobno upotpunjuju i nadograđuju. Četvrti stupanj je apstraktni, gdje se „informacija apstrahira od predmeta i slika i prevodi se na jezik simbola i formula“ (Sharma, 2001, str. 83). Zatim, slijede praktična primjena znanja i komunikacijski stupanj. No, ono što Sharma (2001) posebno ističe za četvrti stupanj jest da je prethodno izrazito važno raditi s konkretnim modelima jer je on osnova apstraktnog mišljenja. Apstraktni stupanj u prijašnjim Piagetovim fazama nije bio moguć jer učenik postepeno iz svijeta konkretnih materijala i stvari prelazi u apstraktni svijet gdje je tek u potpunosti moguće shvatiti određene matematičke pojmove. No, razvijanje sposobnosti apstraktnog mišljenja je karakteristika posljednje Piagetove faze, a učenici prethodno rješavaju samo probleme s konkretnim objektima, iako njihov razvoj teži i ide ka tim apstraktnim matematičkim idejama i pojmovima.

Nadalje, dolazi peti stupanj, praktična primjena znanja, koji se dijeli na tri podstupnja: intramatematički, interdisciplinarni i izvannastavni stupanj. To bi značilo da u tom stupnju učenik može primijeniti svoja znanja iz jednog područja matematike u drugo područje matematike, kao i iz jedne znanosti u drugu ili, bolje rečeno, iz jednog nastavnog predmeta u drugi. Jednako tako, to podrazumijeva i primjenu matematičkih znanja i spoznaja u svakidašnjem životu i neškolskom okruženju. Nakon primjene znanja, slijedi šesti, komunikacijski stupanj gdje je učenik sposoban objasniti svoje postupke i razmišljanja te podučiti druge onome što je sam spoznao (Sharma, 2001). Tako se zatvara krug povezanosti Piagetovih faza i Sharminih stupnjeva. Pritom je važno naglasiti da se Sharmini stupnjevi mogu primjenjivati tijekom svakog nastavnog sata prilikom usvajanja novih nastavnih sadržaja.

### *2.1.3 Rano usvajanje matematičkih pojmova*

Wynn (1998) navodi da postoje brojna istraživanja koja pokazuju da dojenčad od samog rođenja ima izraženu mogućnost razlikovanja brojeva, točnije, da imaju izraženu osnovu za stvaranje pojma broja. Jedno od njih je istraživanje koje je temeljeno na pojmu habituacije. Bebe imaju sklonost zadržavanja pogleda na neočekivanim stvarima i radnjama, a ono što im je već poznato i „dosadno“ promatraju kraće jer su navikli, tj. habituirali na taj predmet ili radnju. Zato njihov pogled može biti svojevrsan način komunikacije s odraslima, što je dokazano i u eksperimentu o pojmu broja. Vlahović-Štetić (2005) opisuje istraživanje koje

provjerava razlikuju li bebe skupove različitog broja elemenata. Tako su se bebama prikazivale slike sa skupovima od, primjerice, tri elementa koji su se razlikovali po veličini elemenata, obliku, međusobnoj udaljenosti, teksturi i svjetlini. Nakon nekog vremena, bebe su sve kraće gledale u nove slike jer su im one postale poznate, točnije, dogodila se habituacija. No, kada bi se u taj slijed slika dodale slike sa skupovima od dva ili četiri elementa, bebe bi dulje zadržale pogled. Time su, u skladu sa svojim mogućnostima, jasno dale do znanja da uočavaju razliku između novih i onih već prikazanih slika.

Još jedna važna stvar koju Vlahović-Štetić (2005) navodi jest da je potrebno razlikovati numeričke reprezentacije od numeričkih znanja. Odnosno, „da su dječje numeričke reprezentacije dovoljno apstraktne i primjenjive za različite uzorke podražaja – ne ovise o specifičnosti situacije ni o perceptivnim faktorima. Ali numerička znanja više su od razlikovanja količina“ (Vlahović-Štetić, 2005, str. 18). Tako samo sposobnost razlikovanja skupova, odnosno količine elemenata u skupu, ne znači da bebe znaju da je dva veće od tri ili da su dva i dva četiri. Nastavno, to ne znači ni da bebe znaju brojati niti da imaju usvojen pojam broja od samog rođenja.

Ono što valja spomenuti jesu predmatematičke vještine, čiji razvoj prije i tijekom učenja matematike uvelike utječe na uspješnost svladavanja matematičkih pojmova i koncepata. Profesor Sharma smatra da je „učenje matematike bez razvijenih predmatematičkih vještina poput pokušaja hvatanja balona bez vezice: kada balon nije zavezan, on će odletjeti. Kada su predmatematičke vještine prisutne, uz njih čvrsto vežemo matematičke koncepte. Tako, matematički koncepti ne mogu odletjeti“ (Sharma, 2001, str. 66). Prema Glasnović Gracin (2010), predmatematičke vještine trebaju se vježbati u nematematičkom okruženju. To bi značilo da se dijete ne mora nužno baviti tematikom matematičkih pojmova i manipulirati matematičkim sredstvima, već se koristiti predmetima i igračkama koje su djeci drage i bliske, ali provoditi matematičke aktivnosti. „Aktivnosti vezane uz predmatematičke vještine u sebi kriju pripremu za shvaćanje određenih ciljanih matematičkih sadržaja“ (Glasnović Gracin, 2013, str. 149) i pritom je važno da se započinje s već poznatim i utvrđenim sadržajima prema novim i apstraktnim dijelovima. Druga faza Piagetove podjele dječjeg intelektualnog razvoja je zbog svoje opsežnosti, dugotrajnosti te dječje percepcije i mogućnosti najprimjerenija za početak razvijanja predmatematičkih vještina i provedbu početnih matematičkih aktivnosti.

Nastavno na razvoj predmatematičkih vještina, potrebno je ponovo spomenuti decentriranje i reverzibilnost jer s daljnjim razvojem dijete je sposobno sve više s razumijevanjem usvajati

pojmove nepromjenjivosti (masa, obujam i dr.) Također, reverzibilnost karakterizira misaonu operaciju izvođenja neke radnje i aktivnosti u oba smjera te svjesno vraćanje radnje na početak što omogućuje spoznaju stalnosti ili nepromjenjivosti količine (Bugge, 2002). Nadalje, dijete bi trebalo biti sposobno imenovati i prepoznati određene objekte prema nekom njegovom svojstvu, kao i sortirati objekte prema zadanom svojstvu (veličina, boja, oblik, tekstura i dr.)

Matematika u razrednoj nastavi mnogim učenicima ponekad može biti dosadna i jednolična. Najčešće djeca misle da znaju puno više nego što zapravo znaju u početku, a sam njihov stav ovisi i o tome na koji se način nastava izvodi. No, matematika može biti izrazito zabavna, a djeca od početka mogu vidjeti koju životnu korist imaju od nje. Iako učenici toga ponekad nisu sami svjesni, važno je da učitelji imaju na umu da su „matematičke aktivnosti važne za budućnost svakog djeteta“ (Kneclin, 2011) jer se na matematičkim znanjima grade brojne daljnje spoznaje, radnje, aktivnosti i zanimanja.

## *2. 2 Specifičnosti nastave matematike*

„Uloga matematike u suvremenom životu bitno određuje i njezin položaj u sustavu općeg odgoja i obrazovanja u osnovnoj školi“ (Markovac, 2001, str. 17). S obzirom na to da je matematika itekako važna i potrebna suvremenom društvu, može se reći da zbog toga zauzima i značajno mjesto u hrvatskom odgojno-obrazovnom sustavu. Matematika je kao nastavni predmet zastupljena u svim razredima osnovne škole i zauzima velik broj školskih sati tjedno, što omogućuje stalnu izloženost učenika istoj te njihov kontinuirani napredak.

Markovac (2001) napominje da matematika u razrednoj nastavi može imati dvojaku funkciju, a to bi bilo opće i formalno obrazovanje. Opće obrazovanje podrazumijeva usvajanje „onih matematičkih sadržaja koji su sastavnim dijelom obrazovanja svakog člana društvene zajednice“ (Markovac, 2001, str. 19). Drugim riječima, to su matematičke osnove potrebne svakom čovjeku za svakodnevno funkcioniranje i rad. Formalno obrazovanje pak podrazumijeva profesionalno ili stručno obrazovanje u kojem se „učenjem matematike usvajaju sadržaji kojima se učenici osposobljavaju za posve određena zanimanja“ (Markovac, 2001, str. 19).

U razrednoj je nastavi položaj matematike određen njenom odgojno-obrazovnom funkcijom koja teži k općoj funkciji obrazovanja. No, osim te funkcije, matematika ima i važnu

propedeutičku funkciju koja učenicima omogućuje kvalitetnu i postepenu pripremu za matematičko odgajanje i obrazovanje, kako u višim razredima osnovne škole, tako i u srednjoj školi (Markovac, 2001). To dovodi i do dva temeljna obilježja početne nastave matematike – apstraktnosti i hijerarhijsko-logičkog rasporeda. Apstraktnost je važna karakteristika matematike zbog činjenice da se temelji na misaonim proizvodima koji su izvedeni iz „kvantitativnih odnosa i prostornih oblika objektivnog svijeta. Nisu, dakle, realno egzistirajući objekti kao u nekim nastavnim predmetima, već su apstrahiranjem i generaliziranjem dobiveni elementi logičkog mišljenja“ (Markovac, 2001, str. 21). Primjerice, pojam broja je apstraktan pojam koji nije ovisan o vizualnom podražaju i podlozi. Ono što se zapisuje je brojka ili brojeva riječ, tj. pisani trag koji označava određeni broj. No, gledajući u brojku i dalje se ne vidi broj, upravo zato što je broj apstraktan pojam. Tako, primjerice, kada se zapiše brojka 3, ona označava neki skup od tri elementa i tada tri ponovno nije konkretna stvar ili podražaj koji se može zapaziti vanjskim osjetilima (Markovac, 2001). Nadalje, „kad upotrebljavamo znamenke, upotrebljavamo brojeve u apstraktnom obliku. Šest mačića se vide i mogu se prebrojati, ali '6' je znamenka koja se ne odnosi na šest mačića ili šest ičega. Mala djeca ne razmišljaju o apstraktnom broju 'šest', nego o fizičkom pojmu 'šest mačića'“ (Liebeck, 1995, str. 32). Drugo važno obilježje matematike je hijerarhijsko-logički raspored sadržaja programa početne nastave matematike. To se prema Markovcu (2001) očituje u nadređenosti i podređenosti jednog sadržaja drugome. Tako se do složenih matematičkih pojmova i operacija dolazi tek kada su usvojeni oni jednostavniji i osnovni pojmovi. Primjerice, pojam dužine se ne može u potpunosti usvojiti, dok nije usvojen osnovni pojam točke. Budući da složeni sadržaji programa sadrže jednostavnije sadržaje, može se reći da među njima postoje neki zajednički elementi koji će kasnije biti veza za matematičko-logičke operacije. Primjerice, za znanje i razumijevanje množenja prirodnih brojeva, potrebno je razumjeti i primjenjivati općenito znanje o brojevima i zbrajanju. Tu je vidljiva hijerarhija sadržaja, ali i njen logičan raspored unutar programa početne nastave matematike.

Osim korištenja različitih metoda i oblika rada, ono što treba uvijek imati na umu tijekom poučavanja matematike u razrednoj nastavi jest da se svakom učeniku treba pristupiti individualno i na njemu dostupnoj kognitivnoj razini. Pred učiteljem ili učiteljicom je cijeli razred, zato Sharma (2001) tvrdi da se oni redovito susreću s velikim rasponom kognitivnih sposobnosti. Dok je jedan dio učenika spreman na usvajanje novih matematičkih koncepata, drugi dio nije – zato je važno svakom učeniku pristupati na njemu dostupnoj kognitivnoj razini. Osim toga, Vlahović-Štetić (2005) podsjeća na različite značajke Piagetovih faza. Sve

one, kako je već spomenuto, odlikuju značajnim intelektualnim promjenama za svakog pojedinca. Zbog toga je također važno napomenuti da „podučavanje matematike mora biti tako organizirano da od djece traži ono što ona mogu s obzirom na svoj kognitivni razvoj, ali i da istodobno potiče taj razvoj u okviru mogućih granica“ (Vlahović-Štetić, 2005, str. 22).

Jedan od načina kako pristupiti tom izazovu i generalnom obrazovnom cilju nastave matematike je omogućiti učenicima da vide matematiku u svojoj svakidašnjici i da dobrovoljno uđu u svijet matematike. U tome, prema Glasnović Gracin (2015), najveći zadatak imaju učitelji, a najvažniju ulogu predstavlja upravo njihova osobnost. U nastavi matematike je čest slučaj čuti nastavnike kako govore da imaju obvezu pa i opterećenost sustavom te da im je cilj realizirati propisani program. Takve, koji nastavu matematike doživljavaju kao obvezu i opterećenje sustavom, profesor Matijević opisuje na sljedeći način:

„To bi za nastavu matematike značilo da je nastavnik pokazivao na ploči kako se rješavaju određeni matematički zadaci, a učenici su to pažljivo pratili, ponekad simultano zapisivali i pratili nastavnikovo govorenje i pisanje, a ponekad čekali da nastavnik završi svoje govorenje (objašnjavanje) te nakon toga prepisali sve napisano na ploči. Za domaću zadaću (za samostalni rad kod kuće) učenici su obično trebali naučiti (ako su razumjeli!) sve što je nastavnik rekao i zapisao na ploču te, prema načelu egzemplarne nastave, još riješiti nekoliko zadataka iz udžbenika ili priručne zbirke zadataka.“ (Matijević, 2011, str. 32)

Za razliku od ovog tradicionalnog pristupa nastavi matematike, suvremeni pristup te novije teorije nastave i učenja u prvi plan stavljaju aktivnost učenika, a od nastavnika se očekuje da će jasno postaviti i opisati cilj nastavnoga sata te načine kojima će učenici doći do zadanih ishoda (Matijević, 2011). Uz to, početna nastava matematike prema Markovcu (2001) svoju odgojno-obrazovnu funkciju kao i suvremeniji pristup istoj ostvaruje i u uskoj povezanosti matematičkih sadržaja s ostalim nastavnim predmetima i odgojno-obrazovnim područjima. To je svakako i dobar način za odmicanje od vremenskog okvira od četrdeset i pet minuta te provođenje integrirane nastave koju Skupnjak (2009) opisuje kao metodički model koji najviše odgovara djeci za cjelovito usvajanje nastavnog sadržaja. Matematički se sadržaji mogu, primjerice, uspješno korelirati sa sadržajima iz nastave Prirode i društva. Tako se nastava Prirode i društva koristi nekim matematičkim podacima i pojmovima koji su korisni za razumijevanje određenog nastavnog sadržaja Prirode i društva, a početna nastava Matematike koristi se nekim pojmovima iz Prirode i društva koji unaprjeđuju kvalitetu sata Matematike (Markovac, 2001). „Osim što sjedinjuje sadržaje poučavanja, posebnost takve

nastave jest i organizacija aktivnosti učenika kroz nastavne situacije različitog trajanja, čime se u potpunosti odstupa od predmetno-satnog sustava“ (Skupnjak, 2009, str. 263).

Tako se međupredmetna povezanost i integrirana nastava mogu odvijati i tijekom nekoliko školskih sati, neovisno o spomenutom „realiziranju programa“ jer ono što je najvažnije realizirati jest kvalitetan nastavni sat u kojem će učenici biti motivirani i naučiti mnogo toga što će kasnije ponijeti u život.

### *2.3 Tranzicija iz predškole u razrednu nastavu*

Riječ tranzicija dolazi od latinske riječi *transitio* što znači prijelaz (Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021a). Ovaj se termin koristi u mnogim područjima, no ono koje je od posebne važnosti za djecu i učenike tijekom odrastanja upravo jest tranzicija u odgoju i obrazovanju.

Ako se put formalnog obrazovanja prikaže pomoću stepenica koje simboliziraju napredak, odrastanje i korak dalje na tom putu, termin tranzicije se može uklopiti na samim prijelazima s jedne stepenice na drugu. Dakle, to zapravo podrazumijeva one periode u životu gdje osoba iz neke sigurne, ustaljene i poznate okoline odlazi u nešto novo, drugačije i nepoznato što je ključno za daljnje napredovanje. Taj proces se odvija od ranih godina djetetova života pa sve do odrasle dobi jer se tijekom života uvijek očekuje „jedna stepenica dalje“, bilo to od vrtića do osnovne škole, od osnovne škole do srednje škole, od srednje škole do fakulteta ili pak od fakulteta do radnog mjesta ili promjene istog. Dakle, tranzicija u odgoju i obrazovanju predstavlja proces, vrijeme i promjenu koja se događa u tim važnim životnim trenucima (Višnjić Jevtić, 2021).

„Treba li pridavati posebnu važnost tim periodima?“, „Kako djeca prihvaćaju promjene?“, „Tko je odgovoran za uspješan proces tranzicije?“... Sve su to pitanja čiji bi odgovor svaki odgojitelj i učitelj trebao znati upravo zato što uspješna tranzicija rezultira i boljim radom i uspjehom u daljnjem školovanju (Višnjić Jevtić, 2021).

Prvi prijelaz u odgoju i obrazovanju događa se kada dijete iz obiteljske sigurnosti i okoline kreće pohađati predškolsku ustanovu. Višnjić Jevtić (2021) navodi da je danas čest slučaj da se u ovom periodu događaju brojne prilagodbe putem informiranja o svim promjenama za dijete i obitelj te putem razgovora i stečenih iskustava. Tako su česti roditeljski sastanci gdje

se dobivaju konkretne upute i savjeti kako pristupiti djetetu kako bi se taj prijelaz iz ranog predškolskog odgoja što više olakšao djetetu, ali i njegovoj okolini.

S druge pak strane, Višnjić Jevtić (2021) spominje kako se stječe dojam da se za vrijeme druge tranzicije u odgoju i obrazovanju, kada dijete prelazi iz vrtića u školu, pruža manje podrške od strane zajednice, što može imati negativne ishode za dijete. Naime, polazak u školu je velik događaj za svako dijete pa tome treba tako i pristupiti. Djeca se pripremaju za ovaj prijelaz dulji niz godina jer smatraju da polaskom u školu postaju „velika“. Zasiurno imaju i nekoga tko im je model i primjer u tome, poput starijeg brata ili sestre ili pak nekog prijatelja iz ulice koji je to iskustvo već prošao. No, osim toga, djeca tijekom tog prijelaza imaju brojne brige i mnoga pitanja na koja često ne dobiju odgovor zato što se odraslima te njihove zabrinutosti čine kao nešto posve bezazleno. Uz sve to, rijetko koje škole surađuju s vrtićima i obrnuto, tako da nastoje spajati aktivnosti budućih prvašića s onima koji to iskustvo trenutno proživljavaju. Djeca zapravo najviše nauče kroz iskustva vršnjaka, a korist dijeljenja iskustva škole je obostrana. Iako se ove aktivnosti i suradnja najviše ostvaruju u manjim sredinama gdje se točno zna koja djeca dolaze u koji razred, to je za veća naselja i gradove znatno teže, no to ne znači da se ne treba raditi na ublažavanju tog, djeci stresnog i teškog perioda. Zato Dunlop i Fabian (2007) navode da edukacija o tranziciji kao i razgovor o istoj posebice s budućim školarcima može prevenirati potencijalne zapreke na početku osnovnoškolskog obrazovanja te riješiti neke postojeće probleme i zabrinutosti, što znatno pomaže u stvaranju pozitivnog početka nastave svoj djeci.

O trećoj tranziciji unutar osnovnoškolskog obrazovanja, iz četvrtog razreda u peti, zaista se malo govori, no to je razdoblje kada su djeca već u Piagetovoj fazi formalnih operacija ili na njenom prijelazu i kada su kognitivno znatno sposobnija od djece u ranijim razdobljima tranzicije. Ta „odraslost“ ne znači da i oni nemaju svoje brige zbog brojnih promjena i novosti koje im školski kurikulum donosi u petom razredu, za razliku od one sigurnosti pod okriljem razredne učiteljice u četvrtom razredu. S obzirom na to da se tu govori o tranziciji unutar škole, razloga i prilika za suradnju razredne i predmetne nastave je mnogo, a primaran razlog je upravo olakšavanje još jednog perioda tranzicije s ciljem što boljeg napretka i daljnjeg rada.

### *2.3.1 Tranzicija kao prijelaz i promjena identiteta*

Višnjić Jevtić (2021) govori o tranziciji kao o već spomenutom prijelazu, ali i promjeni identiteta. To objašnjava kroz tumačenje okolnosti u kojima se dijete nalazi u, primjerice,

vrtiću, a onda i u školi. Djeca u najstarijim grupama su, može se reći, „glavna“. Upućena su u rad vrtića, raspored prostorija, vremensku satnicu i njihove obaveze, znaju i što smiju, a što ne, poznaju sve djelatnike predškolske ustanove i imaju dojam da su na „sigurnom“. Iz takvih okolnosti u kojima se nalaze prije ljeta i ljeti, već na jesen te iste godine dolaze u sasvim nepoznat sustav i prostorije koje su im nepoznate, viđaju nove djelatnike škole, na hodnicima susreću i starije učenike kojima je to sve poznato. Sada su iz one sigurnosti naglo došli u mjesto gdje im je vrijeme igre drugačije, gdje postoji primjereno vrijeme za odlazak u toalet, gdje imaju nove obaveze i osobne stvari o kojima moraju voditi brigu (Višnjić Jevtić, 2021). Ove iste pojave Holmes, McClelland i Morrison (2000) objašnjavaju kroz dvije vrste socijalnih vještina koje su povezane s učenjem. To su međuljudske vještine i vještine povezane s radom. Za međuljudske vještine karakteristično je ponašanje djece u predškolskim ustanovama. One uključuju pozitivnu interakciju s vršnjacima, zajedničku igru, dijeljenje stvari te poštivanje ostale djece. S druge strane, vještine povezane s radom obuhvaćaju ponašanja poput slijeđenja uputa, odgovaranje na pitanja, sudjelovanje u radu u skupinama, zadržavanje pažnje na jednom zadatku, organiziranje vlastitog radnog materijala i slično. Općenito, sve vještine povezane s konkretnim radom utječu na domene neovisnosti, odgovornosti, samoregulacije te suradnje (Holmes i ostali, 2000), a sve se to očekuje od djece u osnovnoj školi.

Iako se te razlike u radnjama i dječje brige odraslima čine kao nešto beznačajno, za šestogodišnjake su to velike promjene, promjene identiteta. Upravo zato suradnja vrtića i osnovnih škola, pa nadalje i srednjih škola te fakulteta, ne smije ovisiti o osobnim poznavanjima odgojitelja i nastavnika, već treba biti prisutna neovisno o zaposlenicima. Također, roditelji trebaju biti aktivni sudionici ovog procesa, a glavni akteri su djeca koja ne smiju biti samo pasivni promatrači i sudionici nečega što su odrasli isplanirali. Najmanje što se može napraviti je razgovarati s djecom, upitati ih koje su njihove zabrinutosti te imaju li pitanja prije tog velikog koraka. Nije nužno odmah dati odgovore, već dogovoren susret sa sljedećom odgojno-obrazovnom ustanovom ostvariti u okviru njihovih briga kako bi sami stekli iskustvo i znanje potrebno za daljnji napredak.



### 2.3.2 *Tranzicija kao odgovornost i dužnost roditelja, odgojitelja i učitelja*

Osim prirodne potrebe za pomoći i olakšavanjem ovih prijelaznih razdoblja svakom djetetu, to je i odgovornost te dužnost odraslih koji čine djetetovu svakidašnju zajednicu. Prije svega roditelja, a zatim i odgojitelja te učitelja.

„Istraživanja su jasno pokazala da djetetov uspjeh ili neuspjeh u školi umnogome ovisi o učenju kod kuće i o tome u kojoj su mjeri roditelji uključeni u proces djetetova školovanja. Roditelji su prvi i najutjecajniji učitelji svoje djece. To što roditelji čine da bi pomogli svojoj djeci u učenju mnogo je važnije od obiteljskoga blagostanja. To naravno ne znači da škola nema važnu ulogu u djetetovoj akademskoj uspješnosti, ali znači da postoji važna veza između djetetova učenja i uključenosti roditelja u taj proces. Svaki roditelj, bez obzira na njegovo obrazovanje i ekonomski položaj, može smisleno sudjelovati u djetetovom učenju“ (Sharma, 2001, str. 119).

Iz Sharminih (2001) riječi je posve vidljivo da roditelji imaju nezamjenjivu ulogu u svakodnevnom životu djeteta po pitanju njihove uključenosti u školske sadržaje. U odgojno-obrazovnoj tranziciji tim više su potrebne njihova angažiranost, pažnja i uključenost. Nije dovoljno poslati dijete u školu, očekivati da će učitelji odraditi sve što trebaju i da će jednoga dana dobiti adekvatno obrazovano dijete. Tu, naravno, roditelji nemaju potpunu odgovornost, ali valja naglasiti da nisu lišeni iste. „Svaki roditelj treba preuzeti osobnu odgovornost za obrazovanje svojega vlastitog djeteta“ (Sharma, 2001, str. 120). Pri tome se ne misli da radi nastavne sadržaje i domaće zadaće umjesto djeteta, već da bude primjeren usmjeravatelj, strpljivi slušatelj i jasan učitelj u svom domu te dobar u komunikaciji i suradnji sa školom.

Osim osobite odgovornosti koju roditelji imaju, valja naglasiti da je proces tranzicije nov te emotivno snažan i za njih. Zato nije rijedak slučaj da odgojitelji i učitelji u procesu tranzicije češće umiruju i usmjeravaju uzbuđene roditelje nego učenike. Dunlop i Fabian (2007) u svom radu navode primjer istraživanja provedenog s nekoliko roditelja u različitim zemljama čija su djeca prolazila kroz proces tranzicije. Spominju kako je primijećeno da su u Škotskoj među roditeljima najviše izraženi snažni osjećaji i velika zabrinutost oko toga što se događa s njihovim djetetom u školi. Jedan roditelj je čak izjavio da bi volio biti muha na zidu u djetetovoj učionici, s čime je većina mogla suosjećati (Dunlop i Fabian, 2007). Zato i za roditelje treba imati puno strpljenja i razumijevanja, jer iako su oni svojevremeno ovu tranziciju već proživjeli, sada ju možda jednako snažno ponovo proživljavaju sa svojim djetetom, posebice ako njima taj proces nije bio ugodno iskustvo.

Za razliku od roditelja, odgojiteljima i učiteljima osjetljivost na prijelazno razdoblje u obrazovanju nije samo u prirodi, već je i službeno propisana kao njihova dužnost i zadatak. Ministarstvo znanosti i obrazovanja (2017) u Nacionalnom kurikulumu za osnovnoškolski odgoj i obrazovanje naglašava „da bi se u trenutku polaska u školu svim učenicima osigurale jednake odgojno-obrazovne mogućnosti i olakšala prilagodba na školski sustav, važno je uspostaviti partnerstvo između predškolskoga i osnovnoškolskoga odgoja i obrazovanja“ (Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2017, str. 21). Osim toga, prema Višnjić Jevtić (2021) odgojitelji i učitelji trebaju steći i neke kompetencije za osiguravanje kvalitetne tranzicije iz djetinjstva u odraslost. Prije svega, potrebno je znanje o postupcima svakog prijelaza, zatim dobre komunikacijske i suradničke vještine, afirmativan stav prema svim dionicima tranzicije, dakle, djeci i roditeljima, ali i međusobno te je potrebno znati vješto iskoristiti svoje osobne kvalitete u svrhu poboljšanja cijelog procesa.

Učitelj je, dakle, kao i odgojitelj, dužan uspostaviti kontakt i suradnju s predškolskom ustanovom, odnosno osnovnom školom s ciljem unaprjeđenja nastave i rada svakog pojedinca. Na učitelju je da upozna dijete koje odgojitelj već poznaje, a odgojitelj treba biti upućen u nastavni sadržaj i materijal kojim se učitelj koristi kako bi se prije polaska u školu izgradio temelj za rad na određenim sadržajima i s pojedinim sredstvima.

### *2.3.3 Matematička tranzicija*

Kako je već spomenuto, tranzicija u obrazovanju označava svojevrstan prijelaz gdje učenika dočekuju novi izazovi, spoznaje i zadatci. U matematičkom smislu, tranzicija se također odvija u fazama, iz predškole u školu, iz nižih razreda osnovne škole u više te iz osnovne škole u srednju školu, no osim toga matematička tranzicija se događa puno češće i unutar tih faza, ali i prilikom dolaska u svaki viši razred i prilikom svake nove nastavne jedinice. Glasnović Gracin (2021) navodi da se djeca i odrasli kroz matematiku, učenje matematike i matematičku edukaciju stalno susreću s izazovima tranzicije na svim razinama, jer čim se iz matematike uči nešto novo, već dolazi do nove tranzicije, odnosno, misaone prepreke koju učenik mora savladati kako bi stvorio predznanje za nadolazeći nastavni sadržaj. Primjeri nekih matematičkih tranzicija koje Glasnović Gracin (2021) navodi su prijelaz iz konkretnog u apstraktno, odnosno usvajanje apstraktnih matematičkih pojmova uz pomoć konkretnog materijala. Zatim, prijelaz iz pojedinačnog u opće, primjerice, kada se određene tvrdnje generaliziraju, osim toga, prijelaz iz konačnog u beskonačno s čim se učenici osnovne škole

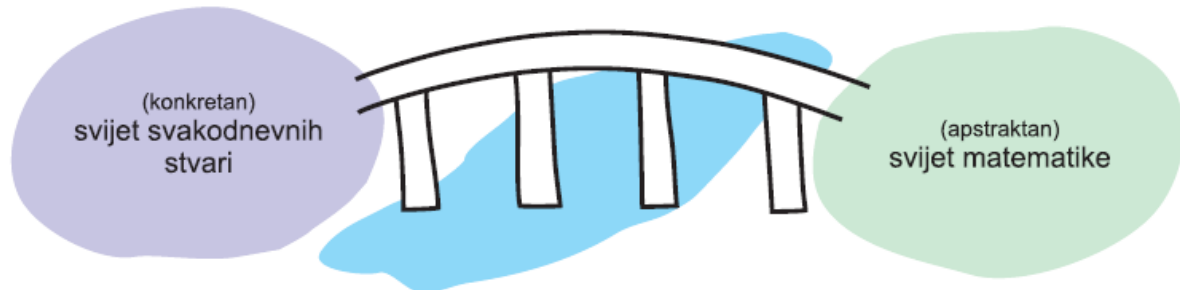
susreću već u nižim razredima prilikom učenja geometrijskih pojmova poput ravnine i pravca. Također, prijelaz iz podskupa u nadskup, a najbolji primjer za to je prelazak iz četvrtoga razreda u peti kada se iz skupa prirodnih brojeva prelazi na usvajanje skupa racionalnih brojeva gdje učenici usvajaju pojmove razlomka i decimalnog broja. Ipak, tranzicija koja je u matematici osobito važna i koja je posebno osjetljiva za učenike jest tranzicija iz predškole u školu, odnosno, u matematičkom smislu, tranzicija iz konkretnog u apstraktno te iz predmatematičkog u matematičko.

Iako dijete formalno prisustvuje nastavi matematike tek kada krene pohađati školu, ono je puno ranije izloženo matematičkim sadržajima. U predškolskom uzrastu djeca se susreću s raznim matematičkim pojmovima poput pojma broja, likova, tijela, ali i aktivnostima kao što su nizanje, razvrstavanje, igranje različitih igara, čitanje matematičkih slikovnica i mnoge druge. No, za razliku od škole, u predškoli se ne spominje riječ matematika, unatoč tome što je prisutna kroz razne aktivnosti. Prema Peter-Koop i Scherer (2012), te aktivnosti trebaju biti konstruktivan i individualan proces za svako dijete jer istraživanja provedena u Njemačkoj i Austriji navode da takav, Piagetov, konstruktivan i individualan proces matematičkih aktivnosti u ranoj dobi dovodi do razvoja matematičkih ideja i spoznaja koje kasnije čine temelj za buduće osnovnoškolske matematičke sadržaje. Takve aktivnosti trebale bi se koristiti na satima matematike u nižim razredima osnovne škole jer, kako Glasnović Gracin (2021) navodi, djeca nastavni sadržaj najbolje usvajaju na temelju vlastitog iskustva, točnije, kroz učenje otkrivanjem, matematičkim eksperimentima, raznim aktivnostima uz poticanje govora, kao i uz upotrebu konkretnih materijala poput računске gusjenice, brojevnih kartica, dinamičkog brojevnog pravca, Stern blokova, ali i dječjih prstiju.

Glasnović Gracin (2021) najviše opisuje matematičku tranziciju na spomenutom primjeru prijelaza iz konkretnog u apstraktno. Američka pedagoginja, Nancy Hoenisch (prema Glasnović Gracin, 2015) tu tranziciju opisuje uz pomoć mosta kojeg dijete treba uspješno prijeći (Slika 1).

### Slika 1.

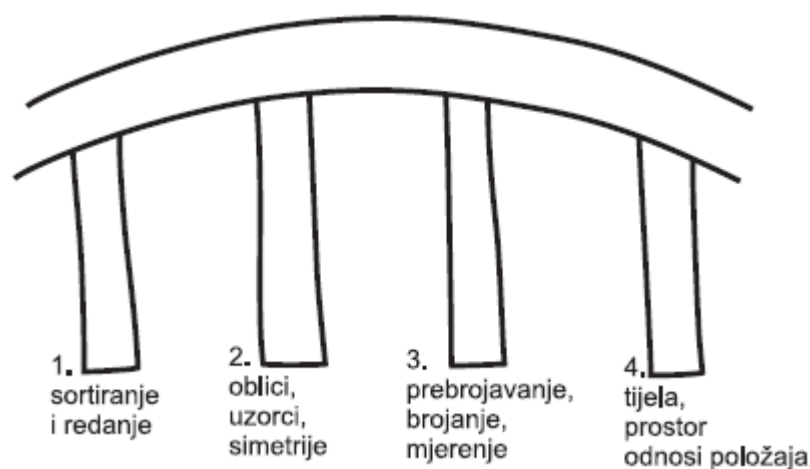
*Prikaz tranzicije iz svijeta konkretnih i svakodnevnih stvari u apstraktan svijet matematike (Glasnović Gracin, 2013, str. 149)*



S jedne strane mosta je svijet svakodnevnih stvari iz kojeg dijete treba ući u apstraktan svijet matematike. Glasnović Gracin (2013) naglašava da svako dijete gradi vlastiti most te da uspješnost tranzicije ovisi o čvrstoći i sigurnosti tog mosta. Zadatak roditelja, odgojitelja i učitelja jest upravo rad na čvrstoći i sigurnosti mosta. Može se reći da Hoenischin most (prema Glasnović Gracin, 2013) stoji na stupovima kojeg izgrađuju određena matematička područja i predmatematičke vještine na kojima treba inzistirati za što uspješniju i bezbolniju tranziciju (Slika 2).

### Slika 2.

*Prikaz stupova mosta koji predstavljaju osnovna matematička iskustvena područja (Glasnović Gracin, 2013, str. 150)*



Jedan stup mosta čini predmatematička vještina sortiranja i redanja. Drugi stup čine matematički koncepti, oblici, uzorci i simetrije. Treći stup se odnosi na pojam broja te prebrojavanje, brojenje i mjerenje, a četvrti stup se odnosi na geometriju, točnije na pojmove prostora, tijela i odnosa položaja. Sve navedeno se, prema Glasnović Gracin (2021), može svrstati u osam osnovnih predmatematičkih vještina. One su: razvrstavanje predmeta, uspoređivanje, nizanje, slijeđenje niza uputa, orijentiranje u prostoru, vizualno grupiranje predmeta, prepoznavanje obrazaca te procjenjivanje. Za njih profesor Sharma (2001) navodi da su iznimno važne za uspješno učenje matematike i da imaju dugotrajan stupnjeviti razvoj koji se ne završava u predškolskoj dobi, nego se nastavlja usavršavati još godinama. Također, Sharma (2001) govori i da učitelji trebaju „detaljno poznavati zakonitosti razvoja tih vještina i na odgovarajući način stimulirati njihovo usavršavanje tijekom procesa školovanja u svakoga djeteta“ (Sharma, 2001, str. 153).

#### 2.3.4 Predmatematičke vještine

Prva predmatematička vještina koju Glasnović Gracin (2021) spominje jest *razvrstavanje* predmeta. To podrazumijeva razvrstavanje prema jednom ili više obilježja, primjerice, boji, obliku, vrsti predmeta, materijalu itd. Razvrstavanje je, u matematičkom smislu, predradnja za apstraktan pojam broja. Tako se primjerice, kod obrade broja četiri, prikazuje skup od četiri olovke, četiri jabuke ili četiri ovce. Pri tome dijete apstrahira, odnosno, od nekoliko obilježja u tome skupu izuzima onu informaciju koja mu je potrebna, dakle, broj elemenata u skupu, a ne njihov položaj, boju ili oblik. Također, u daljnjim razredima ova vještina utječe na sposobnost fokusiranja na bitno u zadatku, posebice tekstualnom, zatim na prepoznavanje nepoznanice u zadatku ili pak na formiranje i sortiranje podataka u tablice i dijagrame. Osim toga, predmatematička vještina razvrstavanja je važna i za ostala znanstvena područja i svakodnevne situacije. Tako Sharma (2001) izlaže zanimljivu usporedbu. „Dijete koje slaže svoje igračke zajedno i znanstvenik koji npr. identificira virus prema zadanom kriteriju sudjeluju u istoj aktivnosti, iako su na različitim razinama složenosti i sofisticiranosti. Dijete koristi jednostavnu kategorizaciju na temelju konkretnih obilježja, dok znanstvenik koristi apstraktan kriterij“ (Sharma, 2001, str. 153).

Druga važna predmatematička vještina prema Glasnović Gracin (2021) jest *uspoređivanje* predmeta i posebno se odnosi na pronalaženje odnosa između dvaju skupova i na poticanje govora. Kroz ovu predmatematičku aktivnost dijete se koristi izrazima „veći“, „manji“,

„jednak“, „viši“, „niži“, „teži“, „lakši“ i slično, što je ključno za mnoge matematičke koncepte. Prije svega, za uspoređivanje brojeva, kasnije i za uspoređivanje razlomaka, a zatim za jednakobrojnost skupova ili pak za utvrđivanje stalnosti broja elemenata u skupu u slučaju promjene mjesta. Osim toga, Sharma (2001) navodi i da prilikom usvajanja pojma broja važnu ulogu ima i djetetova sposobnost ujednačavanja jednoga skupa s drugim jer je spoznaja da je moguće ujednačiti dva skupa koji imaju jednak broj objekata ključ za apstrahiranje broja.

Nadalje, predmatematičku vještinu *nizanja* i održavanja redoslijeda je posebno potrebno nastaviti njegovati i na nastavi matematike. Nizanje je sposobnost sastavljanja elemenata u niz prema određenome kriteriju ili više njih. To može, primjerice, biti ponavljajući uzorak prema boji predmeta, obliku, vrsti, materijalu, veličini, obliku i veličini, boji i obliku itd. Nizanje „podrazumijeva razumijevanje logičkoga slijeda koji postoji među objektima ili pojavama“ (Sharma, 2001, str. 156). Temelj je za usvajanje koncepta rednih brojeva i predradnji za snalaženje na brojevnom pravcu. Pri tome se dijete potiče na govor uz pitanja poput: „Koje je boje kuglica između crvene i plave?“, „Što se nalazi ispred kruga?“, „Koji oblik je prvi u nizu?“ itd. Također, nizanje se ne mora prakticirati isključivo na primjeru i nizanju predmeta, već se može korelirati i s drugim područjima. Tako se nizanje, održavanje redoslijeda i prepoznavanje uzorka može vidjeti i u likovnoj umjetnosti, primjerice, na djelima poznatog umjetnika Victora Vasarelyja koji je posebnu pažnju posvetio pravilnoj izmjeni i nizanju geometrijskih likova određenih boja. Osim toga, nizanje se može vidjeti i u arhitekturi, ali i u glazbi, kako klasičnoj, tako i suvremenoj. Primjerice, sviranje početnog ritma pjesme „We Will Rock You“ poznate britanske rock skupine Queen je nizanje nekog ritamskog uzorka kao i nizanje teške, lake i lake dobe u poznatoj skladbi Johanna Straussa, „Na lijepom plavom Dunavu“. Neovisno o vrsti i načinu kriterija nizanja, važno je da dijete prepozna o kojemu je uzorku i kriteriju riječ te da ga uspješno ponavlja i nadograđuje.

Sljedeća predmatematička vještina koju ističe Glasnović Gracin (2021) jest *rad s obrascima* gdje učenik treba prepoznati neki lik, oblik ili princip te ga reproducirati i proširiti prema viđenom. Mnogi će reći da je ovakav princip razvijanja bilo kakvih sposobnosti i vještina već gotova struktura kojom se učenika stavlja u pripremljen kalup jer mora reproducirati točno jedan oblik onoga što se traži. No, zapravo Huzjak (2008) govori da pojam kreativnosti ima dva oblika. Prvi oblik kreativnosti imaju djeca koja „samostalno otkrivaju pravila i tehničke vještine određenog područja, uz minimalno vodstvo odraslih, i izmišljaju neobične strategije za rješavanje problema“ (Huzjak, 2008, str. 31), a drugi oblik kreativnosti podrazumijeva

„istezanje, mijenjanje ili čak transformiranje područja“ (Huzjak, 2008, str. 31), što podrazumijeva opsežno znanje i iskustvo te se smatra da djeca ne mogu biti kreativna na taj način. No, kako bi se ta kreativnost razvila potrebno ju je njegovati i u djetinjstvu, osim redovitim stvaralaštvom i samostalnim otkrivanjem pravila i zakonitosti, što upravo rad s obrascima omogućuje. Osim toga, rad s obrascima je u matematici važan za kasnije prepoznavanje obrazaca apstraktnih modela i dijagrama kao i za usvajanje pojmova parnih i neparnih brojeva te za određivanje mjesnih vrijednosti neke znamenke.

*Slijedenje niza uputa u više koraka* je sljedeća predmatematička vještina koju ističe Glasnović Gracin (2021). Ovdje se također mogu primijeniti brojne aktivnosti u nematematičkom okruženju. Primjerice, pospremanje sobe, dnevni raspored aktivnosti, prepričavanje priče prema slikama ili objašnjavanje pravila neke igre su sve matematičke aktivnosti u kojima se dijete mora fokusirati na važne informacije, radnje i upute te ih objašnjavati i raditi pravilnim redoslijedom. Te radnje su priprema za mnoge aktivnosti u nastavi matematike, a između ostalog su i priprema za pisano računanje u kojem jedan korak strogo slijedi drugi, što učenicima zna biti izrazito teško i izazovno.

Sljedeća predmatematička vještina jest *orijentacija u prostoru* gdje je prije svega važno da učenik uoči položaj predmeta u prostoru u odnosu na vlastito tijelo i u odnosu na druge predmete. Prilikom tih aktivnosti učenik se koristi izrazima gore-dolje, ispred-iza, lijevo-desno itd., što mu kasnije omogućuje bolje razumijevanje i orijentaciju u prostoru, ali i u ravnini. Primjerice, nije cilj da učenik prepozna trokut u jednom položaju i obliku, i to najčešće pravilno postavljenom sa svim stranicama jednake duljine. Trokut može biti tupokutan i šiljastokutan, ranostraničan i jednakokrčan te u raznim položajima u ravnini, a ova predmatematička vještina omogućuje da se učenik s time i upozna. Također, orijentacija u ravnini je važna i tijekom pisanog računanja zbog potpisivanja brojeva kao i za snalaženje i smještanje vrijednosti na brojevnju crtu prilikom čega je važno koristiti se spomenutim terminima ispred-iza, lijevo-desno itd.

Sedma predmatematička vještina prema Glasnović Gracin (2021) je *vizualno grupiranje predmeta* koje računanje čini mnogo efikasnijim. Kada dijete vidi niz objekata raspoređenih na točno određen način, ono će bez prebrojavanja znati prepoznati o kojoj je količini riječ. „Kada učenik vidi pred sobom niz od tri ili četiri predmeta, njegovo oko odmah obuhvaća 'trojnost' ili 'četvornost'. To se zove vizualno skeniranje“ (Sharma, 2001, str. 159). Putem te sposobnosti učenik može odmah percipirati i prepoznati da se radi o skupu od točno

određenog broja elemenata. Ova vještina pomaže za kasnije usvajanje pojma broja, a najefikasnije ju je vježbati kroz različite društvene igre.

Posljednja, ali ne i manje važna predmatematička vještina jest *procjenjivanje*. Glasnović Gracin (2021) navodi da bi se ova vještina trebala uvježbavati nakon usvajanja barem nekih brojeva, ali prije računskih operacija jer je za sposobnost procjene potreban osjećaj o broju i količini. Iako su kod zadataka procjene česte učeničke pogreške, važno je prihvatiti učeničke odgovore te ih usmjeriti na provjeru i dodatno samostalno istraživanje kako bi na kraju došli do ispravne spoznaje. Ove neformalne procjene i vježbanje istih su izrazito važne za kasniju matematičku sposobnost procjene točnosti aritmetičkih rezultata. Primjerice, ako učenik procijeni neko rješenje, a prilikom računanja dobije rezultat koji se ne podudara s njegovom procjenom, to mu može biti znak da je negdje pogriješio u koracima te će se imati priliku ispraviti, dok netko tko nema razvijenu ovu vještinu, neće uočiti nepravilnosti jer prethodno neće ni promisliti o mogućem rješenju.

Zbog svega navedenog, nesumnjivo je da korištenje predmatematičkih vještina utječe na daljnji razvoj i interes djeteta za matematiku te da predmatematičke vještine obuhvaćaju korištenje raznih konkretnih materijala. Upravo zato važno je da učitelji, odgojitelji, ali i roditelji budu upoznati s načinima korištenja i prednostima koje didaktički materijal donosi u učenju matematike.



### 3. Dječji prsti kao didaktičko sredstvo

#### 3.1 Didaktički materijali

Didaktika je „grana pedagogije koja se bavi teorijom odgojno-obrazovnog procesa“ (Bognar i Matijević, 2002, str. 28), a didaktički materijali su njena važna komponenta. Zato se može reći da se i didaktički materijal prije svega proučava teorijski, a zatim se promatraju i njegova svrha te korisnost u praksi. S matematičkog gledišta, Sharma (2001) tvrdi da početna matematička iskustva trebaju biti vrlo konkretna te u skladu s njegovim razvojnim stupnjem. Matematika se odnosi na apstraktnan znanstveno-logički sustav kojem treba pristupati postepeno i s razumijevanjem. Zato Sharma (2001) objašnjava da ne treba prisiljavati dječji razvoj i kognitivni napredak prije nego što li je dijete na to spremno. Odnosno, ne treba brzo i naglo prelaziti na apstraktan matematički sadržaj, već treba pustiti dijete da manipulira konkretnim materijalom. Nastavnim sredstvima i pomagalicama treba rukovati onoliko koliko je to njemu potrebno jer u trenutku kada će ono biti spremno prijeći na višu razinu spoznaje, konkretan materijal mu prirodno više neće biti toliko zanimljiv.

„Terminom nastavna sredstva i pomagala označavaju se najrazličitiji materijalni objekti koji se koriste pri učenju u pojedinom nastavnom predmetu. U različitim nastavnim predmetima i različitim etapama školovanja koriste se različita nastavna sredstva i pomagala. I u istom nastavnom predmetu, s obzirom na dob učenika, koriste se različita nastavna sredstva i pomagala“ (Markovac, 2001, str. 81). Cilj i svrha tih didaktičkih materijala je da potiču i unaprijeđuju učenikovo mišljenje te da mu pomažu u usvajanju novih nastavnih sadržaja, a ne da pružaju gotove informacije koje zamjenjuju rad učenika. Nastavna sredstva u toj svrsi „služe za neposredno usvajanje znanja“ (Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021c) i to su, primjerice, knjige, modeli, filmovi, slike i mnogi drugi. S druge strane, nastavna pomagala služe kao „pribor za rad i pomoćna tehnika u nastavi kojom se posreduju sadržaji u nastavi“ (Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021d) i koji olakšavaju rad na satu te tijekom istoga. To su, primjerice, pribor za pisanje, ploča, kreda, crtački pribor, projektor i mnogi drugi. No, što god i kad god se koristi, važno je imati na umu da su „nastavna sredstva i pomagala samo nužna pomoć koja se koristi dok je potrebna“ (Markovac, 2001, str. 82).

### *3.1.1 Vrste i upotreba didaktičkih materijala u matematici*

Markovac (2001) navodi da upotreba didaktičkih materijala počiva na psihološkoj činjenici da je učenje uspješnije ako se ostvaruje s više komponenata i podražaja na koje učenik može reagirati. Zato Markovac (2001) ističe da je za učenje u školi važno imati vizualnu i auditivnu komponentu, a početna nastava matematike te činjenice i podatke drži kao osnovu prilikom korištenja i odabira primjerenih didaktičkih materijala. „Vizualna se ostvaruje upotrebom materijalnih sredstava i pomagala, a auditivna najčešće izlaganjem učitelja, učenika ili nastavnih pomagala. Ipak, nastavna sredstva u početnoj nastavi matematike pretežno su usmjerena na intenziviranje vizualne komponente, vizualizirajući sadržaje koji se uče“ (Markovac, 2001, str. 81-82). Upravo je to potrebno na samim počecima učenja matematičkih pojmova jer učenici još uvijek nisu dovoljno razvili sposobnost apstraktnog shvaćanja i razmišljanja.

U nastavi matematike koriste se brojni didaktički materijali koji omogućuju lakše shvaćanje apstraktnih matematičkih sadržaja. Korištenje didaktičkog materijala je, dakako, povećano tijekom učenja i poučavanja početne nastave matematike kao i ranog učenja matematike. Način korištenja didaktičkih materijala u matematici može biti različit. Markovac (2001) objašnjava da njime može rukovati učitelj tijekom demonstracije određenih radnji ili, pak, ono što se preferira i savjetuje jest da učenici budu ti koji manipuliraju konkretnim materijalom radi usvajanja sadržaja i pojmova koje tek formiraju. U tom slučaju, posebice prilikom korištenja materijala za potrebe početne nastave matematike, materijal treba biti manipulativan. Drugim riječima, učenici trebaju moći lako i sigurno upravljati materijalom. Također, važno je i od čega je didaktički materijal napravljen kao i količina istih koja se koristi na nastavnom satu. Valja imati na umu da ako učitelj raspolaže s malom količinom određenog didaktičkog materijala, on treba prilagoditi oblike i metode rada kako bi svaki učenik došao u doticaj s didaktičkim materijalom. U suprotnom, učenik će zanemariti ostale zadatke te će mu se smanjiti koncentracija jer će glavni fokus biti na konkretnu kojem nije izravno izloženo. S druge pak strane, ako učitelj ima previše didaktičkog materijala, ponekad je mudro i ne iskoristiti ga u toj količini. Razlog tome je upravo to što „veća količina otežava manipuliranje i smanjuje preglednost kvantitativnih odnosa te stoga otežava učenje“ (Markovac, 2001, str. 83).

Markovac (2001) navodi da za početnu nastavu matematike postoje dvije vrste nastavnih sredstava i pomagala koja se dijele na prirodna i umjetna. Prirodna su ona koja se mogu pronaći u neposrednoj okolini i koja se neznatnom promjenom prilagođavaju nastavnim

potrebama i situacijama. Markovac (2001) tu ponajprije ističe predmete u učionici poput stolca, klupe ili krede, a zatim i predmete koje učenici posjeduju kao što su olovke, bojice, sličice, knjige, kuglice i mnogi drugi. „Svi ti predmeti u određenim situacijama mogu se koristiti u početnoj nastavi matematike, dakako, uz odgovarajuće metodičko oblikovanje njihove potrebe“ (Markovac, 2001, str. 82). Umjetna nastavna sredstva i pomagala su ona koja su posebno napravljena u svrhu učenja. Markovac (2001) u tu skupinu uvrštava razne plastične pločice poput trokuta, kvadrata ili krugova, žetone različitih boja i oblika, modele geometrijskih tijela i likova, razna mjerila, grafička sredstva, logičke blokove, razne računaljke i mnoge druge.

„Osnovna je funkcija didaktičkog materijala konkretizirati kvantitativne odnose, a bogatstvo kvalitativnih obilježja nije pogodno jer otežava koncentraciju na kvantitativne odnose“ (Markovac, 2001, str. 83). Ono što autor želi reći navedenom rečenicom jest da je prilikom odabira primjerenih didaktičkih materijala izričito važno da je on kvalitativno neutralan. Drugim riječima, važno je da ima što manje kvalitativnih obilježja kao što su boja, oblik, veličina, materijal od kojega su izrađeni i drugi, kako nevažni detalji prilikom učenja aritmetike tj. pojma broja ne bi odvrćali učenikovu pozornost s onog bitnog – kvantitativnog obilježja.

Konačno, ono što je važnije od vrste, količine i izgleda didaktičkog materijala na nastavi matematike jest upravo činjenica da se upotreba istog „ne smije svesti na puko fizičko manipuliranje što nije rijetkost u početnoj nastavi matematike“ (Markovac, 2001, str. 83). Rad s konkretnim materijalom učeniku tako ne donosi nove spoznaje o fizičkim svojstvima tog predmeta, već o njegovim kvantitativnim odnosima. Zato je posebno važno da je učenik aktivan sudionik tijekom korištenja didaktičkih sredstava te da njegov rad s materijalom bude praćen govornom reprodukcijom.

### *3.1.2 IGSZ model u usvajanju matematičkih pojmova*

„Ništa ne smije biti mehanički naučeno i mehanički ponavljano. Svaki korak treba biti u cijelosti osmišljen na svim razinama, sve do komunikativne“ (Sharma, 2001, str. 139). Iz navedenog citata se može uočiti kako Sharma (2001) smislenu verbalizaciju naučenog postavlja kao vrhunac shvaćanja određene matematičke pojave, a apstraktan znak tek kao pomoć u potpunjavanju shvaćenog. Zbog toga Sharma (2001) ističe da je od iznimne važnosti da učitelji svakodnevno podučavaju učenike verbalizaciji ideja i postupaka. Tako se

učenike potiče na komentiranje i objašnjavanje vlastitih postupaka, ali i na izražavanje cjelovitom rečenicom što im je i tijekom kasnijeg obrazovanja iznimno korisno. Markovac (2001) ističe da „govorno izvođenje oslobađa od manipuliranja konkretnim objektima i usmjerava prema misaonim radnjama. Vrijednost govornog izvođenja je u misaonom rekonstruiranju materijalne radnje i u stjecanju slijeda misli o njoj. Obrazlaganje materijalne radnje govorom omogućuje ispravno shvaćanje riječi koje dobivaju pravo značenje i postaju osnovom misaonog rada“ (Markovac, 2001, str. 29-30). Osim toga, verbalizacija ideja i postupaka doprinosi i kvaliteti rada učitelja jer dobiva uvid u način učenikova promišljanja uz pomoć kojeg može ispitati djetetov stupanj poznavanja matematike ili, pak, individualizirati sadržaj.

Brojni stručnjaci, među kojima je i Sharma (2001), smatraju da ima mnogo puteva od konkretnog prema apstraktnome te da oni ovise o mnogim čimbenicima. Tako Liebeck (1995) spominje poznati „IGSZ model“ kojeg brojni učitelji nastoje primjenjivati tijekom poučavanja matematičkih sadržaja. Liebeck (1995) daje svoje viđenje o tome kako dijete razvija apstraktno mišljenje te tumači da malo dijete, prije svega, vidi, osjeća i ispituje fizičke predmete. Kasnije počinje prepoznavati riječi kojima se ti predmeti označavaju, što je prvi korak apstrakcije jer je „izgovorena riječ apstrakcija stvarnosti“ (Liebeck, 1995, str. 11). Zatim je dijete sposobno prepoznati slike tih predmeta, što je još jedna apstrakcija jer dijete povezuje obilježja i iskustvo fizičkog predmeta sa slikom koja ima dovoljno zajedničkih obilježja kao i predmet. Na samom kraju slijedi povezivanje slika s pismenim znakom, čime se završava niz apstrahiranja prema Liebeck (1995). Naziv „IGSZ model“ proizlazi upravo iz ovog tumačenja gdje „I“ označava iskustvo fizičkih predmeta, „G“ stoji za govorni jezik koji opisuje to iskustvo, „S“ za slike koje prikazuju to iskustvo, a „Z“ za pisani znak koji generalizira to iskustvo. Problem s kojim se matematika često suočava, pa i u suvremenoj nastavi, jest upravo čest izostanak prvih dvaju elemenata „IGSZ“ modela. Sharma (2001) također tvrdi da „mnogi učitelji/nastavnici nerijetko prebrzo prelaze na apstraktnu razinu nastave – pružaju djeci nekoliko konkretnih iskustava i misle da je to dovoljno, da je konkretna razina zadovoljena“ (Sharma, 2001, str. 126). Ipak, jedan od važnijih razloga i argumenata zašto je važno i potrebno koristiti konkretan materijal prilikom poučavanja matematičkih sadržaja jest upravo činjenica da su osjet dodira i stečeno iskustvo temelj za uopćavanje i apstrahiranje. „Prema Piagetu, čak i kada se nalazi u formalnoj operacijskoj fazi, u susretu s novim složenim konceptom ili postupkom dijete se ponovo nakratko vraća na strategije prethodnih faza. A u tu su mu svrhu potrebna konkretna pomagala i modeli“

(Sharma, 2001, str. 130), kao i govorna reprodukcija kojom izražava vlastite ideje te pokazuje razinu razumijevanja i način promišljanja.

Ono što je usko povezano s verbalnom matematikom te „IGSZ“ modelom jest matematički jezik. Iako se isprva na matematiku ne gleda kao na jezik, ona to zapravo jest jer se komuniciranje odvija putem simbola. „Ona ima svoju abecedu, simboliku, vokabular i gramatiku“ (Sharma, 2001, str. 66). Nakon osnovnih pravila i proširivanja znanja o materinskom jeziku, djetetov novi jezik koji se gotovo paralelno razvija jest matematički jezik. Ono što je posebno zanimljivo jest način kako se ova dva jezika međusobno nadopunjuju. Sharma (2001) navodi da su oba jezika, djetetov materinski i matematički jezik, izrazito važni prilikom usvajanja novih matematičkih sadržaja. Primjerice, „da bi mogli uspješno rješavati matematičke problemske zadatke, a osobito verbalne problemske zadatke, trebamo poznavati i razumjeti matematički vokabular i matematičku gramatiku, a također biti u stanju prevoditi simboliku i izraze s matematičkog jezika na svoj materinski jezik i obrnuto“ (Sharma, 2001, str. 67). Zato Sharma (2001) dijeli matematički koncept na tri komponente: lingvističku, konceptualnu i proceduralnu. Upravo je lingvistička komponenta ta bez koje se prema Sharmi (2001) niti jedan matematički postupak ili ideja ne mogu realizirati. Odnosno, do njih uopće neće doći ako osoba nema razvijen matematički vokabular i sintaksu te ako nije upućena u pravila prevođenja s matematičkog jezika na materinski i obrnuto. Iako praksa pokazuje da djeca spontano usvoje matematički jezik uz dugotrajan rad na posljednjoj, proceduralnoj komponenti, Sharma (2001) smatra da postupak poučavanja treba biti obrnut. „U početnoj fazi usvajanja matematičkog koncepta učitelj treba staviti naglasak na konceptualni razvoj i jezik. Učenje je interaktivno: konceptualni modeli pomažu u usvajanju jezika, a jezik ima važnu ulogu u matematičkoj konceptualizaciji“ (Sharma, 2001, str. 67). Sharma (2001) daje primjer pojma najmanjeg zajedničkog višekratnika. Umjesto naglog uvođenja novog matematičkog pojma i korištenja istog na primjerima, Sharma primjećuje da učenici percipiraju taj pojam prema redoslijedu riječi koje su ispisane. Dakle, prvo uočavaju riječ „najmanji“, zatim „zajednički“, a onda „višekratnik“. Zato se, za potpuno razumijevanje novog matematičkog jezičnog pojma, Sharma koristi jezičnim primjerom njihovog materinskog jezika, koji je djeci puno bliži i s kojim se može povezati važnost značenja svake riječi u pojmu „najmanji zajednički višekratnik“. U rečenici „Ivan je dječak“ Sharma s učenicima promatra Ivanov odnos s ostalom skupinom dječaka. Zatim nadodaje riječ „visok“, koja ograničava skup dječaka, odnosno izdvaja ga u podskup „visokih dječaka“. Nadalje, nadodaje riječ „zgodan“ koja još više ograničava Ivanov položaj. Iz ovog primjera je lako

prijeći na matematički pojam. Ključna je riječ „višekratnik“, kao što je u prethodnom primjeru to bila riječ „dječak“. K tome, riječi „zajednički“ i „najmanji“ ograničavaju taj skup višekratnika u onaj podskup koji je potreban u određenoj matematičkoj situaciji. Zato Sharma (2001) zaključuje da „nije dovoljno davati samo proceduralne recepte i definicije. Ako u djeteta želimo razviti matematičko mišljenje, dijete treba potpuno istražiti jezik koji stoji iza terminologije“ (Sharma, 2001, str. 69).

### *3.1.3 Prikazi didaktičkih materijala za učenje matematike*

Markovac (2001) ističe da učenik na nastavi matematike prijeđe dug spoznajni put čiji je početak u realnom, a završetak u mentalnom, misaonom svijetu. Iz toga se zaključuje da je osnova svakog procesa formiranja misaonih operacija upravo rad s konkretnim materijalom. „Materijalno izvođenje omogućuje da se shvati osnovni sadržaj misaone radnje čemu pridonosi to što su u materijalnoj radnji elementi misaone operacije dostupni osjetilnoj spoznaji. Materijalno izvođenje povezuje misaonu radnju s fizičkim iskustvom što u novu radnju unosi smisao i olakšava razumijevanje“ (Markovac, 2001, str. 29). Iz navedenog je vidljiva važnost korištenja didaktičkog materijala kao sredstva u učenju matematike, no brojni učitelji, prema Sharma (2001) to i dalje ne implementiraju u praksi. Sharma (2001) tumači da ljudi mogu imati kvantitativnu ili kvalitativnu matematičku osobnost. Ako je učitelj, odgojitelj ili autor udžbenika i ostalih matematičkih sadržaja za djecu kvantitativno usmjeren, tada se njegova kvantitativna osobnost odražava na izbor didaktičkih sredstava kojima se koristi na satima matematike. Primjerice, Sharma (2001) tvrdi da će takav učitelj na nastavi iz aritmetike koristiti zasebna, i može se reći, sigurna didaktička sredstva poput brojevne crte ili kocke za brojanje. Njegov rad i pristup prema razredu će biti izrazito stručan i organiziran. Često će inzistirati na jednom načinu rješavanja određenog zadatka i pritom će za svaki korak u pojedinom zadatku davati detaljne upute. Djeca će u takvom razredu dobro napredovati, no problem je što će svaki matematički koncept shvaćati izolirano, a ne kao dio izrazito povezane cjeline. „To je opis jednog tipičnog razreda, jer većina učitelja ima kvantitativnu matematičku osobnost, njihovo viđenje matematike je kvantitativno, deduktivno i metodično“ (Sharma, 2001, str. 144). S druge strane, ako je učitelj, odgojitelj ili autor udžbenika i ostalih matematičkih sadržaja za djecu kvalitativno usmjeren, tada će birati i didaktičke materijale s kvalitativnim obilježjima. Takav će učitelj na nastavi aritmetike radije koristiti štapiće, drvene blokove te materijal iz neposredne okoline kao i didaktički materijal napravljen posebno za taj nastavni sat. Učionica kvalitativno usmjerenih učitelja obiluje matematičkim posterima i

plakatima, a odgovori koji se od učenika očekuju trebaju biti raznoliki, dobro osmišljeni i kreativni, bez prethodno prezentiranih uputa za rad i promišljanje. Učenici takvoga razreda također mogu razviti određene teškoće vezane uz proceduralne aspekte matematike, ali će zato rado sudjelovati na satu i lakše usvajati nove matematičke koncepte. Zato Sharma (2001) zaključuje da je u razredu u kojem će se naći i kvalitativno i kvantitativno orijentirani učenici „potrebno integrirati oba načina, odnosno unijeti u nastavni proces više kvalitativno orijentiranih materijala i metoda i na taj način zadovoljiti potrebe cijeloga razreda“ (Sharma, 2001, str. 145), a ne rabiti isključivo kvantitativan i deduktivan način poučavanja kojeg koristi većina učitelja.

Glasnović Gracin (2013) opisuje situaciju u kojoj četverogodišnje dijete, upitano što je to matematika, odgovara da je čulo za taj pojam i da je to neka igra za odrasle. Očito je da je dijete od rane dobi izloženo matematici, ali i reakcijama odraslih na određene matematičke situacije i probleme. Zbog toga je vrlo važno postepeno i polako uvoditi matematičke sadržaje u poučavanje u predškolskoj dobi, kako bi djeca uvijek imala osjećaj da se igraju. Aktivnost igre mala djeca shvaćaju vrlo ozbiljno, to im je najprirodnija i najčešća radnja, zato je najbolji način za poučavanje matematičkih sadržaja upravo – igra. I to posebice igra koja uključuje didaktičke materijale. „Također, djeca kroz igru, koja im je prirodna i primarna aktivnost, istražuju svijet oko sebe pa tako i pojam količine. Predškolska i početna nastava matematike trebale bi biti ispunjene igrolikim aktivnostima s konkretnim materijalima jer je manipulacija i učenje uz pomoć konkretnih materijala preduvjet uspješnom razumijevanju apstraktnih matematičkih sadržaja“ (Glasnović Gracin i Stepanić, 2019). Glasnović Gracin i Stepanić (2019) detaljno opisuju nekoliko aktivnosti koje se mogu provoditi tijekom poučavanja matematičkih sadržaja u predškolskoj dobi i u prvome razredu, a za koje se koriste samostalno izrađeni didaktički materijali. Jedna od aktivnosti je popularna „školica“ za čiju je izvedbu potrebno svega nekoliko papira s brojkama koji predstavljaju polja (Slika 3). Osim što je dijete fizički aktivno, odnosno skaćući, brojeći i vizualizirajući izgovorenu količinu, ono uključuje cijelo svoje tijelo u izvedbu ove aktivnosti. Iz matematičke perspektive najvažnije jest da se spajaju brojka i govorno iskustvo brojenja.

### Slika 3.

*Prikaz didaktičkog sredstva u poučavanju matematike na primjeru igre „školica“ (Glasnović Gracin i Stepanić, 2019, str. 121)*



Osim školice, autorice predstavljaju i aktivnost koja uključuje rollice s brojevima (Slika 4). Cilj aktivnosti jest da učenici umeću štapiće u rollice na kojima je brojkom i skupom prikazana količina te da pritom paze da boja i količina odgovaraju zadanom broju na rolici. „Kroz ovakvu aktivnost dijete vizualizira pojam broja kao količine, kao skupa predmeta i kao grafičkog zapisa (Glasnović Gracin i Stepanić, 2019, str. 121).

### Slika 4.

*Prikaz didaktičkog sredstva u poučavanju matematike na primjeru aktivnosti rollica s brojevima (Glasnović Gracin i Stepanić, 2019, str. 122)*





Aktivnost s rolicama čiji se dijelovi okreću (Slika 5), koju autorice predstavljaju, u praksi može biti iznimno korisna i zanimljiva. Zadatak učenika je, koristeći se ovim samostalno izrađenim didaktičkim sredstvom, spojiti prikazanu količinu s odgovarajućom brojevnom riječi i brojkom.

### **Slika 5.**

*Prikaz didaktičkog sredstva u poučavanju matematike na primjeru aktivnosti s rolicama čiji se dijelovi okreću (Glasnović Gracin i Stepanić, 2019, str. 123)*



Autorice navode brojne kreativne primjere didaktičkih materijala i njihove upotrebe u praksi, no najvažnije je da svaki učitelj osmisli i prilagodi matematičke aktivnosti i didaktički materijal učeničkim interesima i mogućnostima. Tako se mogu provoditi razne aktivnosti u koje može biti uključeno više predmatematičkih vještina. Primjerice, u aktivnosti s igraćim kockama (Slika 6), učenici nakon bačene kocke vizualnim grupiranjem prepoznaju o kojem je broju riječ, verbaliziraju ga, a zatim vizualno grupirani skup povezuju s brojkom i bojom tako da bačenu kocku postavljaju na kartonski predložak koji prikazuje dobiveni broj. Osim toga, učenici mogu postavljati kocke u niz prema zadanoj boji i položaju točaka nacrtanih na predlošku. Iako se ovaj dio aktivnosti može činiti beznačajnim, dijete na taj način osvještava da položaj točaka na kocki ne utječe na količinu istih. Primjerice, točke koje na kocki označavaju broj šest će uvijek prikazivati skup od šest točaka, neovisno o tome je li njihov položaj vodoravan ili vertikalni.

## Slika 6.

*Prikaz didaktičkog sredstva u poučavanju matematike na primjeru aktivnosti s kockama i kartonskim predlošcima (autorski rad)*



Nadalje, aktivnost koja izrazito okupira pažnju djece predškolskog uzrasta je upravo razvrstavanje predmeta prema zadanom kriteriju (Slika 7). Za ovu je aktivnost korištena prazna kutija unutar koje su pričvršćene papirnate čaše. Dobiveni materijali se trebaju razvrstati prema određenom kriteriju koji je napisan unutar kutije. Nakon prvog kriterija, slijedi drugi pa treći i tako sve do zadnjeg koji je ujedno i najzahtjevniji. Djeca uz rad s ovim didaktičkim materijalom koriste predmatematičku vještinu razvrstavanja kojom razvijaju apstrahiranje i izdvajanje bitnog od nebitnog što će im kasnije poslužiti za brojne apstraktne matematičke sadržaje.

## Slika 7.

*Prikaz didaktičkog sredstva u poučavanju matematike na primjeru aktivnosti s kutijom i predmetima za razvrstavanje prema određenom kriteriju (autorski rad)*



Iako upotreba didaktičkog materijala ima jednostavnu ulogu i cilj – olakšati usvajanje apstraktnih sadržaja te činiti osnovu za daljnje stvaranje misaonih operacija, njegova upotreba i mogućnost izrade je zaista raznolika. Već se u navedenim primjerima te prethodno spomenutim matematičkim didaktičkim materijalima poput Stern blokova, Cuisenaire stupića, unifix kocki ili osnovnih računaljki moglo uočiti da su didaktička sredstva primjerena uzrastu djece koja ih koriste, da se mogu koristiti na razne načine i u razne svrhe te da se mogu napraviti od najrazličitijih materijala ili uzeti iz okoline i svakodnevnog života. Stoga se u didaktička sredstva mogu uvrstiti i dječji prsti.

### *3.1.4 Korištenje didaktičkog materijala u nastavnoj praksi*

Žokalj (2021) navodi da je upotreba konkretnih materijala u praksi najčešća u prvom i drugom razredu dok u trećem i četvrtom već izostaje. Jedan od glavnih razloga njihovog nekorištenja, kako navodi Žokalj (2021), jest loša opremljenost škola didaktičkim materijalom, stoga upotreba često ovisi isključivo o kreativnosti i mašti učitelja. Osim toga, taj materijal često treba dijeliti s ostalim razredima pa se stoga ne nalazi uvijek na istom mjestu u razredu i nije u svakom trenutku dostupan učenicima. Također, Žokalj (2021) kao jedan od razloga nekorištenja konkretnih materijala u praksi navodi i vrijeme koje je potrebno uložiti u planiranje i pripremu. Tumači kako je znatno izazovnije planirati takav oblik nastave,

ali i da se to vrijeme planiranja može skratiti. K tome, vrijeme koje učitelj ulaže u planiranje ovakvog oblika nastave je učenicima zaista dragocjeno, a najbolja nagrada za uloženo vrijeme i trud su reakcija i povratne informacije učenika. Nadalje, autorica navodi da neki učitelji strahuju od uvođenja konkretnog materijala u nastavu zbog ograničenosti vremena i mogućeg nereda koji može nastati takvim oblikom rada te potencijalnog prelaska nereda u nerad i zabavu, a ne iskustveno učenje. Unatoč svemu navedenom, autorica naglašava da su konkretni materijali velika pomoć u učenju i poučavanju s ciljem ostvarenja zadanih ishoda te da je njihov veliki plus što je dijete stavljeno u centar, čime se i uloga učitelja mijenja. Ono što je posebno karakteristično za nastavu matematike i korištenje didaktičkog materijala jest to što se njegovo korištenje može implementirati u bilo koju nastavnu domenu. No, iako to u teoriji zvuči jednostavno u praksi je situacija nešto drugačija. Kako bi se izbjegli potencijalni nered i zabava, autorica govori da je potrebno zadovoljiti tri uvjeta. Prije svega, treba znati koji je cilj i što se želi postići korištenjem didaktičkog materijala, zatim je važno poznavati proces i način korištenja materijala s čime i sami učenici trebaju biti upoznati, a na kraju procesa je očekivanje, odnosno, znanje koje bi učenici trebali imati nakon korištenja određenog didaktičkog materijala. Još jedna važna karakteristika upotrebe didaktičkog materijala u nastavi matematike jest da je konkretan materijal prilagođen oblikom, veličinom i bojom, ali i interesima učenika. Primjerice, ako učitelj primijeti da korištenje vlastitih prstiju učenicima olakšava usvajanje pojedinih matematičkih sadržaja te da su im prsti neki oblik oslonca i sigurnosti, dobro je nastaviti koristiti prste kao didaktičko sredstvo i u mnogim drugim aktivnostima, kao i započeti njihovo korištenje u raznim oblicima i prije pojave aritmetičkih zadataka.

### *3.2 Dječji prsti kao podloga za učenje*

Već od najranije dobi djeca koriste prste kao didaktičko sredstvo. Tako su već od samih početaka izložena matematici, ali i manipulativnom materijalu. Baš kao što Glasnović Gracin (2021) navodi da se u predškolskoj dobi riječ matematika ne spominje, ali da je dijete izloženo matematičkim radnjama i sadržajima, tako se može reći i da se dijete koristi prstima kao didaktičkim sredstvom, a da toga nije ni svjesno. Upravo ta spoznaja potiče učenike da se i tijekom kasnijeg razvoja oslanjaju na prste prilikom prikazivanja brojeva, prebrojavanja, zbrajanja, množenja itd.

### 3.2.1 Dječji prsti i matematika u praksi

Ako se započne od najranijeg djetinjstva, može se primjetiti da skoro svaki roditelj ima nekoliko osnovnih pitanja koje postavlja svojoj djeci i čiji su odgovori svima simpatični. To su pitanja poput: „kako se zoveš?“, „tko si ti?“, „gdje je pametna glava?“ i, među ostalim, „koliko imaš godina?“. Kao odgovor na to pitanje djeca najčešće, posebice u trenucima sramežljivosti, odgovaraju prikazivanjem određenog broja pomoću prstiju. To je već prva, ne tako rijetka, situacija gdje se dijete oslanja na prste kao sredstvo za prikazivanje određene količine, no ono toga u tom trenutku nije svjesno. Osim toga, ono čemu su djeca tijekom odrastanja najviše izložena su pjesme, slikovnice i brojalice. Postoji zaista velik broj brojalice koje uključuju brojeve do deset pa djeca spontano tijekom brojanja prstima prikazuju broj koji verbaliziraju uz prilagođen, najčešće rimom popraćen, stih. Odlični primjeri za to su brojalice „Od 1 do 10“ i „Učimo brojati“.

#### **Od 1 do 10**

jedan – budi uvijek vrijedan  
dva – vrijedna sam i ja  
tri – bit će sretni svi  
četiri – sobu ćemo spremiti  
pet – staviti ćemo i cvijet  
šest – kad tata čuje vijest  
sedam – da si bio vrijedan  
osam – bit će jako ponosan  
devet – spremit ću i krevet  
deset – hajmo sad na nogomet!

#### **Učimo brojiti**

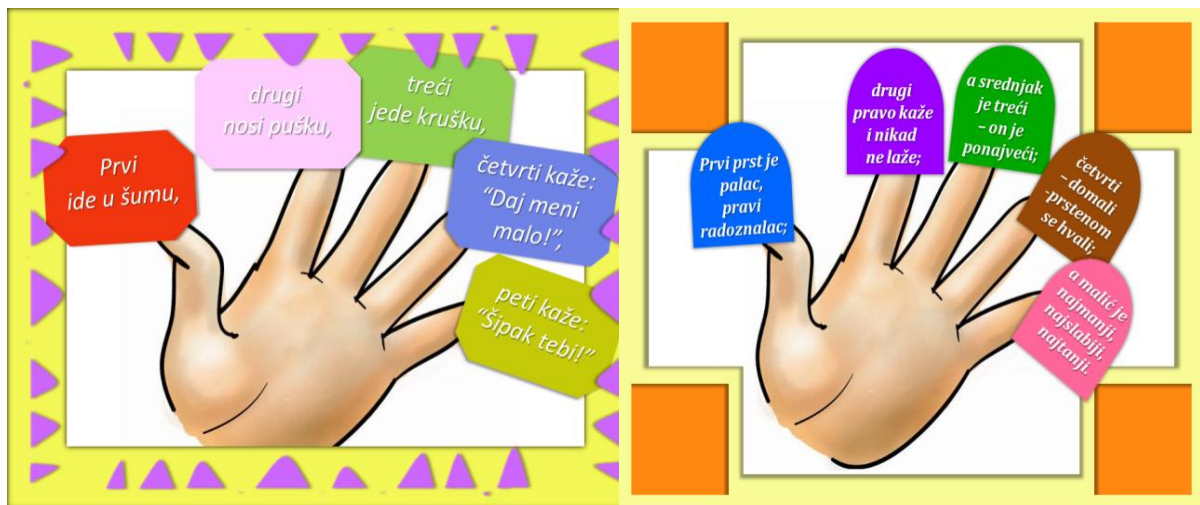
On je sam i jako vrijedan  
ime mu je JEDAN  
hop hop hopsa sa  
evo ide DVA  
brojite sada samnom svi  
jer na redu je broj TRI  
a došli su i ČETIRI i PET  
da svakom đaku uljepšaju svijet  
sad vam nosim dobru vijest  
stiže nama brojka ŠEST  
stati sad vam ne dam  
na redu je broj SEDAM  
OSAM već nas vreba  
a i DEVET- izgovoriti treba  
tu na kraju DESET nas čeka  
i čuje se brojeva jeka:  
JEDAN, DVA, TRI, ČETIRI, PET  
tu se krije učenički svijet  
ŠEST, SEDAM, OSAM, DEVET,  
DESET brojevi su svi  
to je to- naučili smo brojiti!

*Napomena.* Preuzeto iz „Brojalice“, Društvo Naša djeca „Osmijeh“ Rajić, 2021.

Osim navedenog tipa brojalice, dosta je i onih koje izravno uključuju dječje prste prilikom brojanja ili imenovanja brojeva uz pripadajući stih (Slika 8). U takvim brojalicama, svakom je prstu dodijeljen neki redni ili glavni broj uz stih koji opisuje radnju pojedinog prsta.

### Slika 8.

Primjeri brojalice na prste (Zlatna djeca, 2012.)



Brojalice su, nevezano o temi, djeci izrazito drage i zabavne. Slušanjem i ponavljanjem istih djeca razvijaju pažnju i govor, a izrazi kojima se koriste u brojalicama postaju dio njihova vokabulara.

Osim pjesama, brojalice i raznovrsnih igara koje uključuju prste, svakako je potrebno spomenuti i razne vježbenice i časopise za djecu koji često uključuju matematičke zadatke s prstima kao didaktičkim sredstvom. Jedan od primjera je časopis „Škrinjica“ (Slika 9).

## Slika 9.

Matematički zadatak u dječjem časopisu koji uključuje prste kao didaktičko sredstvo (ABC zabava, 2018, Škrinjica: časopis za djecu, 58, str.16)



Također, valja spomenuti i slikovnice. Unatoč tome što je broj matematičkih slikovnica pozamašan, posebice onih koje potiču korištenje konkretnih materijala prilikom čitanja, slikovnica koje pozivaju na korištenje dječjih prstiju ima neobično malo. Jedan od tih malobrojnih primjera jest slikovnica „Životinjska brojilica“ u kojoj se učenici imaju priliku susresti sa zabavnim stihovima u rimi koji opisuju neku vrstu životinje. Sa svakim sljedećim brojem dolazi nova vrsta, a količina prikazanih životinja na ilustracijama odgovara napisanoj brojci. Na samom kraju slikovnice nalazi se tablica uz pomoć koje učenici imaju priliku ponoviti sve vrste životinja s kojima su se susreli tijekom čitanja, koliko ih je bilo te skup životinja iste vrste povezati s brojkom, brojevnom riječi i prikazom prstiju (Slika 10).

## Slika 10.

Tablica s brojkom, brojevnom riječi, skupom i prstiju koji prikazuju isti broj na kraju slikovnice „Životinjska brojalica“ (Borovac i Mrčela, 2017, str. 11-12)

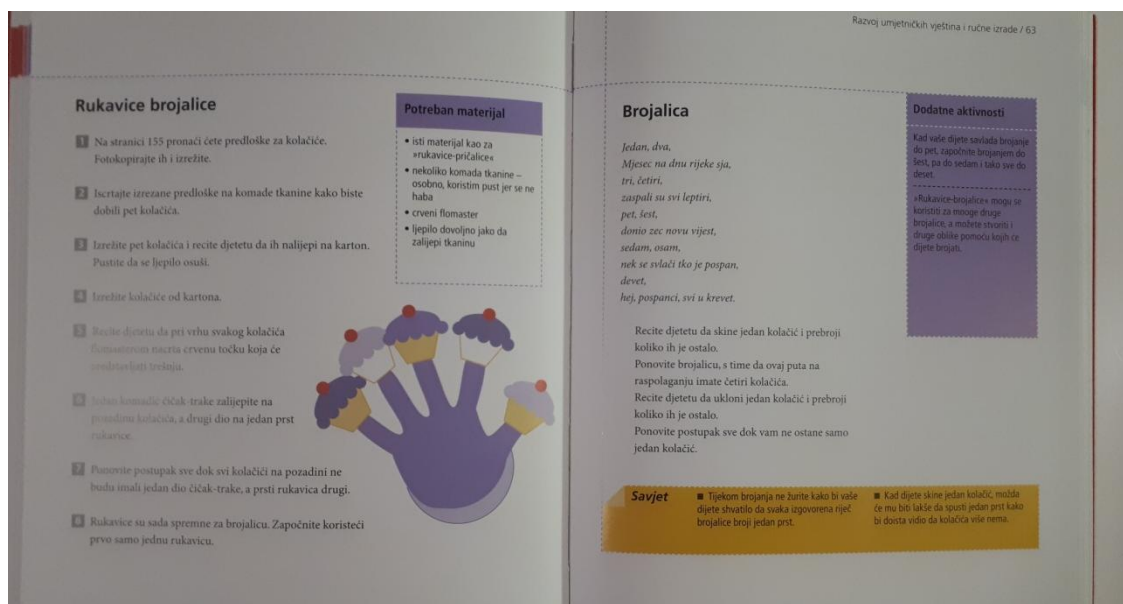


Osim navedenih primjera, navodimo i aktivnosti vezane uz neke alternativne škole. Primjerice, Montessori pedagogija je poznata po raznolikom i brojnom didaktičkom materijalu koji je organiziran i dizajniran prema potrebi djeteta. Načelo Montessori pedagogije jest „pomozi mi da to učinim sam“ i to je „pristup koji omogućava djetetu da iskusi zadovoljstvo učenja vlastitim izborom i tempom, a u čijoj je osnovi jedinstven pristup tehnici učenja – onoj koja vodi do samopoučavanja djeteta“ (Privatna predškolska ustanova "Planet Montessori" Mostar, 2021). Već iz samog načela i temeljnog pristupa Montessori pedagogije vidljivo je da se velik naglasak stavlja na rad s konkretnim materijalom kako bi djeca što više koristila ruke. Jedan od primjera aktivnosti s prstima koje potječu iz Montessori pedagogije jest igra „Rukavice brojalice“. Umjesto klasičnog brojanja brojalice, dijete se koristi rukavicom i papirnatim kolačićima na prstima rukavice, koje je prethodno samo napravilo. Tada započinje brojalicu, a nakon nekoliko ponavljanja jedan se kolačić može maknuti. Tako igra može biti izmijenjena i nekoliko puta, dokle god je dijete za nju zainteresirano (Slika 11).



## Slika 11.

Montessori aktivnost „Rukavice brojalice“ (Pitamic, 2013, str. 62-63.)



Osim Montessori pedagogije, od alternativnih škola se može spomenuti i Waldorfska pedagogija čiji je osnivač Rudolf Steiner. On je u svojoj pedagogiji naglašavao „važnost postizanja ravnoteže u trima različitim načinima na koje se osoba odnosi prema svijetu – kroz fizičke aktivnosti, život emocija i područje mišljenja. Također je pokazao djelovanje tih triju sfera kako na ljudsku fiziologiju, tako i međusobno jedne na drugu“ (Waldorfska škola u Zagrebu, 2021). Dakle, osim isticanja važnosti razvoja mišljenja i emocija, stavlja se naglasak na fizičke aktivnosti i konkretno iskustvo. Te tri komponente – glava, srce i ruke, u Waldorfskoj se pedagogiji smatraju jednako važnim za razvoj djeteta za razliku od tradicionalnog pristupa u školama gdje je često naglasak isključivo na razvoju mišljenja i kognitivnih sposobnosti. Iako je ovaj konstruktivistički pristup djetetu primarno prisutan u alternativnim školama, Žokalj (2021) ističe kako i ostale škole više nemaju taj tvrdi tradicionalni pristup već da je suvremena nastava usmjerena na dijete. To opet pokazuje potrebu i važnost korištenja konkretnih materijala u početnom učenju, ali i u najranijoj dobi kako bi se postavili temelji za daljnji rast i napredak.

### 3.2.2 Računanje na prste

„Smije li se računati na prste?“ pitanje je koje Žokalj (2021) postavlja tijekom svog izlaganja, ali i kojeg je postavljala prilikom poučavanja određenih matematičkih sadržaja na samom

početku karijere. Zanimljivo je da autorica tijekom cijelog svog izlaganja ne nudi gotov odgovor na ovo, naizgled nevažno pitanje, već usmjerava pažnju na općenito korištenje didaktičkog materijala u nastavi matematike, a u to ubraja i prste. Osim toga, Žokalj (2021) prepričava i odgovore učenika na njeno pitanje o tome smiju li se prsti koristiti za brojanje, računanje i prebrojavanje. Autorica navodi da su učenici uglavnom odgovorili da im korištenje prstiju tijekom računanja ulijeva dodatnu sigurnost te da im je takva vrsta računanja znatno lakša. S druge strane, Sharma (2001) ne želi diskutirati je li model rada s prstima koristan ili ne, ali ono što ističe jest da su prsti jedan od konkretnih modela „koji djeca nastavljaju koristiti čak i kada to više nije efikasno“ (Sharma, 2001, str. 127). Tu dolazi do pitanja „koliko dugo se prsti smiju koristiti u nastavi?“ na kojeg nema točnog odgovora. No, velik broj stručnjaka se slaže da korištenje prstiju prilikom rješavanja matematičkih zadataka, i to na način da dijete kriomice vrti prste držeći ruke iza leđa ili ispod stola, znači da dijete nije doseglo potreban stupanj poznavanja koncepta i postupaka te da su za nastavak rada i dalje potrebni raznovrsni konkretni materijali.

„Mnogi učitelji se također žale da u njihovim razredima ima velik broj djece koja imaju teškoća u računanju bez vanjskih manipulativnih pomagala – kocaka, štapića itd. U trećem i četvrtom razredu osnovne škole obično nije omogućeno korištenje manipulativnih materijala, pa djeca koja ih nisu prerasla imaju teškoće u svim zadacima koji se temelje na računanju“ (Sharma, 2001, str. 128). Iz ovoga se zaključuje da ne postoji određen period ili prag kojeg se mora prijeći kako bi se u matematičkom svijetu prešlo u drugu fazu s manje konkretnog materijala, već da treba oslušivati i prilagoditi se razredu. Ono što je sasvim sigurno jest da se konkretan materijal nipošto ne smije naglo ukinuti iz nastave matematike jer onda dolazi do situacije da djeca nastave potajice koristiti prste i računati na njih do petnaeste ili šesnaeste godine života, a možda i dulje. Sharma (2001) navodi da ustrajnost donosi pozitivne promjene iako je izrazito teško neku automatiziranu neefikasnu strategiju u brzom roku mijenjati za efikasnu. U pravilu, nakon što su dovoljno dugo izložena konkretnom materijalu i manipulativnim aktivnostima, „djeca ovladavaju efikasnijim strategijama i potreba brojanja na prste automatski nestaje. Nemoguće je na silu zabraniti računanje na prste. Sve dok ne ponudimo efikasnije metode, dijete se neće odreći prstiju“ (Sharma, 2001, str. 128) ili bilo kojeg drugog konkretnog materijala.

### *3.3 Aktivnosti*

Većina ljudi u nekom periodu života koristi prste kao didaktičko sredstvo u matematici, a najčešće je to u prvom susretu s aritmetikom. No, kako je navedeno, prsti se jednako efikasno mogu koristiti i u drugim područjima matematike. Osim prstiju, konkretni matematički zadaci mogu se uspješno riješiti i, primjerice, uz pomoć dlanova izrađenih od različitih materijala (slika 19 i slika 20) uz pomoć kojih dijete i dalje manipulira prstima kao sredstvom, ali ne vlastitima već onima prikazanim od drugih materijala. Također, osim što prsti mogu služiti kao didaktičko sredstvo u usvajanju matematičkih sadržaja, oni mogu biti i vrlo korisno pomagalo, no u svim tim aktivnostima gdje se prsti koriste kao konkretan materijal važno je da dijete prijeđe iz svijeta konkretnih stvari u svijet apstraktnih sadržaja te da je sposobno provoditi misaone operacije jednako efikasno i razumljivo kao i u fazi rada s konkretnim materijalom. No, za taj proces i prijelaz je, kako Sharma (2001) navodi, potrebno izložiti djecu raznolikim aktivnostima i sadržajima.

#### *3.3.1 Prsti kao sredstvo za učenje pojma broja*

Pojam broja i količine smatraju se temeljnim matematičkim konceptom u predškolskoj dobi jer njihovo usvajanje nije samo temelj za pojedine matematičke koncepte kao što su, primjerice, mjerenje ili raspored dekadskih jedinica, već je i priprema za daljnje rješavanje složenijih matematičkih problema s razumijevanjem (Jung i sur., 2013). Zato se za uspješnu „gradnju temelja“ učenike može izložiti konkretnim materijalima koji ih potiču na rad, razmišljanje i razumijevanje pojma broja i količine. Primjera je mnogo, a onih koji uključuju prste može biti mnogo uz malo mašte i kreativnosti. Neke zanimljive aktivnosti koje se mogu provoditi s tim ciljem su rad s didaktičkim vrećicama, slagalicama u obliku dlanova ili dramatizacija uz pomoć naprstaka.

Slika 12 prikazuje didaktičke vrećice koje su učenicima izrazito zanimljive, a njihov cilj se postiže pomoću prstiju. Uz pomoć prve vrećice dijete prstom ispisuje određenu brojku te tako vježba pisanje te smjer poteza pri pisanju određene brojke prije nego li krene zapisivati olovkom. Pri korištenju druge didaktičke vrećice, dijete treba smjestiti brojke i pripadajuću količinu kuglica u za to predviđena polja. Tako vježba prepoznavanje brojki i povezuje količinu koju ta brojka predstavlja s određenim skupom brojeva. Posljednja didaktička vrećica prikazuje kuglice i špage određenih boja. Potrebno je sve kuglice smjestiti unutar špage oblika elipse te primijetiti da svaki skup različite boje prikazuje skup od različitog broja elemenata u njemu, točnije, da se broj elemenata u skupu, ovisno o boji povećava za jedan.

## Slika 12.

*Didaktičke vrećice za usvajanje i uvježbavanje pojma broja i količine (autorski rad)*



Osim didaktičkih vrećica, mnogoj djeci omiljena aktivnost su slagalice. Djeca vole slagalice različite tematike, a ako je poznato da će se u nekom trenutku upoznavanja s matematičkim sadržajima koristiti prstima, tema slagalice kojoj mogu biti izloženi od rane predškolske dobi, mogu biti upravo prsti. Tijekom slaganja slagalice prikazane na slici 13, učenici ponavljaju boje, nazive prstiju, lijevu i desnu stranu te povezuju količinu s pripadajućom brojkom i brojevnom riječi. Tako jedna naizgled obična slagalica djetetu nudi brojne mogućnosti, sadržaje i dugotrajan rad s istom.

## Slika 13.

*Slagalica „prsti“ (autorski rad)*



Jedna od aktivnosti koje su spomenute kod rada u alternativnim školama jest aktivnost s naprstcima. Uz jednu staru rukavicu i brojke koje mogu biti napravljene od različitih materijala, naprstci mogu biti brzo gotovi, a zanimljiv su i efikasan izvor dugotrajne zabave (slika 14). Primjerice, svako dijete može utjeloviti jedan broj i govoriti njegove značajke poput količine koju prikazuje, naziv prethodnika i sljedbenika te njegov odnos s njima, od kojeg zbroja brojeva može nastati itd. Također, postoje razni igrokazi i priče koje djeca mogu dramatizirati uz pomoć naprstaka, poput pjesme „Nula“ (slika 15) autorice Dubravke Glasnović Gracin u kojoj nula predstavlja svoje karakteristike, odnos s drugim znamenkama i njen značaj u matematičkim operacijama, a odlična je i prilika o raspravi je li nula uopće broj. Upravo tijekom takvih razgovora u obliku igre učenici dolaze do novih spoznaja i važnih značajki o brojevima.

#### **Slika 14.**

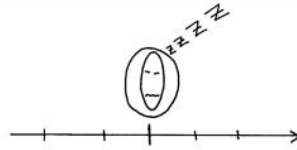
*Naprstci (autorski rad)*



**Slika 15.**

Pjesma „Nula“ autorice Dubravke Glasnović Gracin (Glasnović Gracin, 2000, str. 216-217)

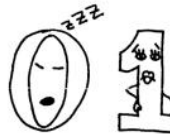
Ja sam jedna mala Nula  
svake laži ja sam čula:  
Da ja ništa baš ne vrijedim,  
samo da na pravcu sjedim.



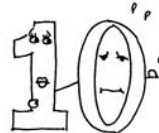
Zato slušaj što ću reći:  
Moj je značaj puno veći!  
Iako baš nisam snažna,  
u računu ja sam važna!



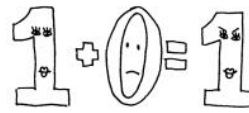
Jedinica ima jedna,  
misli da je jako vrijedna.  
Ako njoj me slijeva staviš,  
vel'ku mudrost ne napraviš.



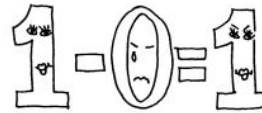
Ali kad joj zdesna stanem,  
vel'ku snagu ja joj dadnem:  
Zajedno nam vrijednost znači  
– deset puta sad smo jači!



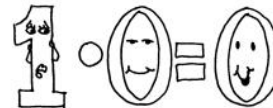
Zbrojiš li me broju Jedan,  
ja se vrlo lako predam.  
U toj igri bez pardona  
pobjednik je uvijek ona.



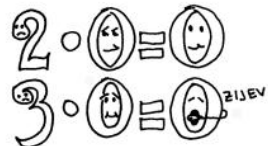
Oduzimanje – to je isto  
glupa igra skroz na čisto.  
Oduzmeš li me od Jedan,  
rezultat je isto vrijedan.



Množenjem se, blago meni,  
cijeli rezultat promijeni.  
Jedinica sada gubi,  
pa da varam, svima trubi.



Probale su Dvica, Trica,  
al' su prošle tužna lica.  
Jer kad množiš brojem Nula,  
rezultat je opet: NULA!



Kad sa Jedan dijeliš mene,  
rezultat se ne okrene.  
Nula podijeljeno s osam  
Nulu daje, a ja to sam!



Ali sada savjet slušaj:  
NIKADA ni ne pokušaj  
s Nulom neki broj podijelit'  
jer se nećeš baš veselit'.



Evo, to je sa mnom tako,  
vidiš da je sve to lako.  
Ako imaš to u glavi,  
matematičar ti si pravi!



### 3.3.2 Prsti kao sredstvo za brojanje i prebrojavanje

Osim u službi boljeg razumijevanja pojma broja i količine (skupovni model), prsti mogu služiti i kao sredstvo za brojanje i prebrojavanje. Liebeck (1995) definira brojanje kao izuzetno složen proces, opisuje ga kroz nekoliko koraka poput učenja brojeva po redu, stvaranja veze između rednog i glavnog broja, prepoznavanja glavnog broja bez brojenja, odnosa „za jedan više“, grafičkog prikaza razvrstavanja te održavanja broja. S obzirom na to, tijekom svakog koraka, moguće je i potrebno koristiti se konkretnim materijalom. Aktivnosti s prstima koje tome mogu pridonijeti su: „vesela rukavica“, „gusjenica“ te aktivnost s drvenim blokovima.

Za „veselu rukavicu“ (slika 16) potrebna je samo jedna rukavica te skup predmeta različitih obilježja i količine koje je potrebno razvrstati. Na svaki prst rukavice se zapiše određena brojka, a dijete treba među pomiješanim predmetima pronaći onoliko istih koliko je prikazano na prstu te ih postaviti na ili u prst rukavice. Tom aktivnošću vježba se predmatematička vještina razvrstavanja, ali i učenje brojeva po redu te veza rednog i glavnog broja koje Liebeck (1995) spominje. Učenje brojeva po redu zbog dodjeljivanja određenog broja pojedinom prstu, a veza rednog i glavnog broja zbog govorne reprodukcije koja se koristi prilikom razvrstavanja, primjerice „dva predmeta na drugi prst“.

#### **Slika 16.**

*Vesela rukavica* (autorski rad)

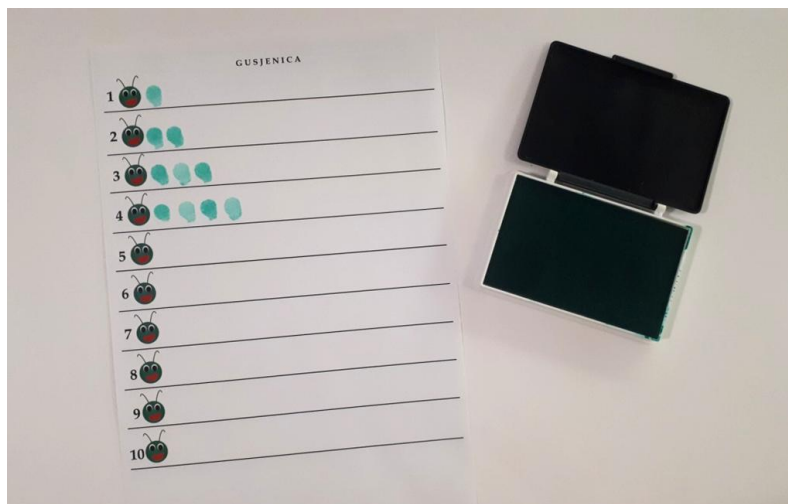


„Gusjenica“ (slika 17) je aktivnost koja uključuje slikanje prstima. Učenicima je dodijeljen nastavni listić sa zapisanim brojkama po redu i glavom gusjenice pokraj svake brojke. Zadatak učenika je prstom naslikati tijelo gusjenice ovisno o broju koji je zadan na početku

reda. Osim što djeca tako, prema Liebeck (1995) uviđaju da tri nečega čini skup od tri elementa koji označava broj tri, uče i da je skup od tri „za jedan više“ od skupa dva predmeta. Tako se nastavlja proširenje „za jedan više“ gdje učenik prema duljini oslikane gusjenice ima priliku prebrojati i povezivati koji broj je za koliko veći.

### Slika 17.

*Gusjenica* (autorski rad)



Posljednja aktivnost može biti iskorištena za brojanje i prebrojavanje, ali i za zbrajanje i oduzimanje. Također, osim drvenih blokova mogu se koristiti i Lego kocke. Potrebno je da dijete prepozna količinu na zadanoj kartici te istu količinu prikaže koristeći se drvenim blokovima. Tako dijete razvrstava drvene blokove prema količini, povezuje količinu blokova s istom količinom podignutih prstiju, ponavlja boje, ali i prikazuje povezanost brojeva promatrajući visinu blokova. To je prilika gdje se dijete može zapitati „koliko drvenih blokova od jedne kocke stane u ovaj veliki drveni blok?“, a uspoređujući visinu, odnos i broj razvrstanih blokova djeca su „dok broje, vrlo blizu zbrajanju“ (Liebeck, 1995, str. 27). Također, Sharma (2001) koristi prste i kocke prilikom poučavanja dekadskih jedinica. Tako palac predstavlja jedinice, kažiprst desetice, srednji prst stotice itd. Postavljanjem kocaka na pravilan prst tijekom rješavanja zadatka olakšava učenicima postavljanje zadatka i razumijevanje da, primjerice, tri desetice označavaju trideset jedinica. Također, promatrajući drvene blokove složene na dlanu redom „za jedan više“ „djeca mogu naučiti slagati skup znamenaka, kao što su 4, 1, 3 i napisati 1, 3, 4 te pročitati naglas što su napisali“ (Liebeck, 1995, str. 37).



## Slika 18.

*Drveni blokovi (autorski rad)*



### *3.3.3 Prsti kao sredstvo za zbrajanje i oduzimanje*

„Da bi razumjela brojevni izraz  $3 + 2 = 5$ , djecu valja upoznati s mnogo stvarnih situacija kada se vidi da je tri predmeta i još dva predmeta pet predmeta“ (Liebeck, 1995, str. 41). Odličan didaktički materijal, posebice za zbrajanje i oduzimanje do 10 su upravo prsti.

Aktivnost koja to pokazuje jesu dlanovi napravljeni od filca (slika 19), čiji su prsti savitljivi i koje na lijevi i desni dlan dijeli računaska gusjenica. Tako dijete ima priliku podići tri prsta lijeve ruke i dva prsta desne ruke te ih zbrojiti kako bi došlo do točnog rješenja, ali i isto prikazati pomoću računске gusjenice gdje prebacuje tri pa dvije kuglice s jednog kraja na drugi.

**Slika 19.**

*Dlanovi od filca s računskom gusjenicom (autorski rad)*



Nešto jednostavnija verzija dlanova jesu rukavice napunjene rižom (slika 20). Tijekom ove aktivnosti djeca mogu bacati dvije igraće kockice i prstima prikazivati brojeve koje treba zbrojiti ili oduzeti te njihov konačan zbroj ili razliku.

**Slika 20.**

*Riža i rukavice kao didaktičko sredstvo (autorski rad)*



Treća aktivnost je rad s već spomenutim drvenim blokovima (slika 21). Zadaci na karticama

prvotno mogu biti zadani u obliku skupa od određenog broja elemenata, zatim u obliku dlanova koji prikazuju brojeve koje treba zbrojiti, a zatim i kao izraz brojkama. Tako učenik ima priliku postupno prelaziti od različitih vrsta konkretnog prema apstraktnom, dok u jednom trenutku ne odbaci sve konkretne materijale i nastavi računati isključivo prikazivanjem brojki.

### **Slika 21.**

*Zbrajanje i oduzimanje pomoću drvenih blokova (autorski rad)*



#### *3.3.4 Prsti kao sredstvo za množenje*

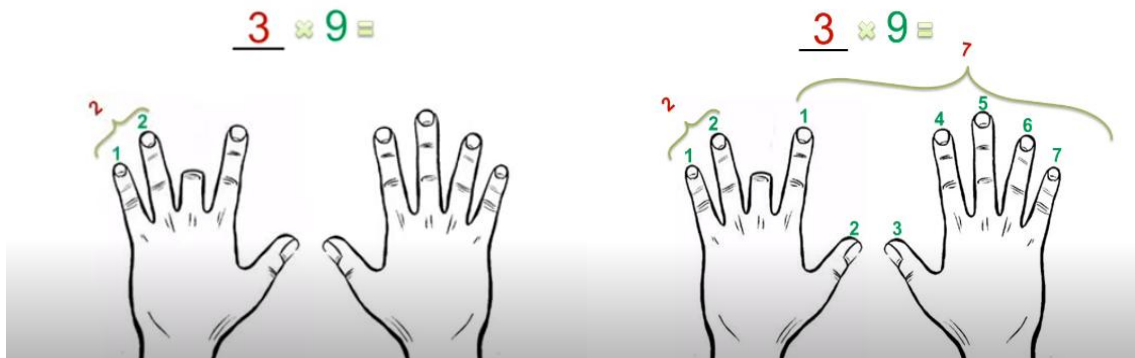
Množenje je kompleksna matematička operacija koja je učenicima često izvor problema sve dok ne automatiziraju tablicu množenja. Problem nastaje kada učitelji prerano inzistiraju u učenju tablice napamet bez razumijevanja, točnije, bez da dijete povezuje zbrajanje i množenje. U tim početnim fazama poučavanja množenja, učenicima se može pokazati kako prste koristiti kao sredstvo za množenje. Učenici će u tim aktivnostima ponovo osjetiti neku sigurnost, koju će s vremenom odbaciti. Velik broj učenika u slobodnom razgovoru iznosi da im najčešći problemi tijekom množenja brojeva dolaze prilikom množenja brojem devet te tijekom množenja brojevima od šest do deset.

Korištenje prstiju kao sredstva za množenje brojem devet učenicima može biti korisno te zabavno. Učenicima se objasni da se svakom prstu po redu dodijeli jedan broj, promatrajući ih tako da su dlanovi okrenuti prema dolje. Ovisno o tome koji broj se množi brojem devet, taj prst se treba spustiti, a rješenje prikazuju preostali prsti. Oni koji su s lijeve strane od

spuštenog, prikazuju prvu znamenku rješenja, a oni koji su s desne strane od spuštene, prikazuju drugu znamenku rješenja (slika 22).

### Slika 22.

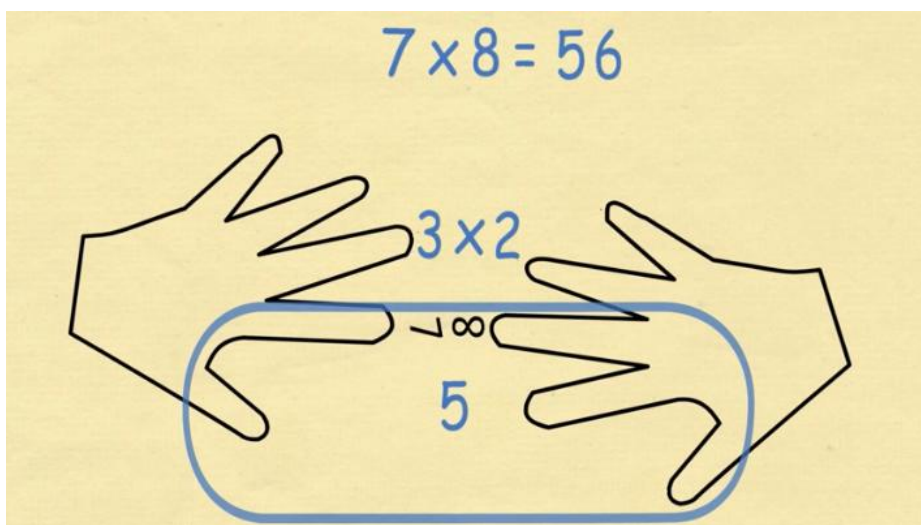
*Prsti kao sredstvo za množenje brojem devet (e-kako portal, 2011)*



Množenje brojevima od šest do deset je nešto zahtjevnije, ali kada se usvoje osnovna pravila, prsti su zasigurno dobar oslonac i konkretan materijal za još neautomatiziranu matematičku operaciju. Prstima se, kao i u prethodnom primjeru, mora dodijeliti određeni broj tako da mali prsti obje ruke predstavljaju broj deset i redom na obje ruke sve do palčeva koji predstavljaju broj 6. Dlanovi su također okrenuti prema dolje. Zatim se spoje oni prsti koje se brojeve želi množiti. Primjerice, 7 i 8, što znači da se spaja lijevi kažiprst i desni srednji prst. Prsti koji su ispod spojenih, uključujući i spojene, se zbrajaju i time se dobiva prva znamenka rješenja. S obzirom na to da ta znamenka predstavlja desetice, može se reći i da se ti prsti zbrajaju te da se njihov zbroj množi s 10. Zatim se zbroj prstiju lijeve ruke, iznad spojenih prstiju, množi sa zbrojem prstiju desne ruke, iznad spojenih prstiju, a njihov umnožak čini drugu znamenku rješenja (slika 23).

### Slika 23.

*Prsti kao sredstvo za množenje brojevima od 6 do 10 (Mind Your Decisions, 2015)*



Iz svih navedenih primjera vidljivo je da korištenje didaktičkog materijala na nastavi matematike, točnije, prstiju kao konkretnog materijala, učenicima može biti korisno i izrazito zabavno. Materijali mogu biti korišteni u različite matematičke svrhe te biti oslonac tijekom rasta i spoznajnog procesa svakog djeteta. Stvari koje su potrebne za izradu materijala široko su dostupne, a priprema istih uglavnom ne zahtijeva mnogo vremena. Kao što je ranije opisano u poglavlju 3.1.4 koje se bavi korištenjem didaktičkog materijala u nastavnoj praksi, loša opremljenost škola didaktičkim materijalom, vrijeme potrebno za pripremu i izradu materijala kao i strah učitelja od ograničenosti vremena te mogućeg nerada i nereda, koje detaljnije opisuje Žokalj (2021) - nije nikakva izlika za neimplemeniranje konkretnog materijala u nastavu matematike. Ovaj rad dokazuje da je potrebno samo malo volje i kreativnosti od strane učitelja i odgojitelja kako bi se djeci približili apstraktni matematički sadržaji te kako bi se osvijestila važnost matematike u svakidašnjim situacijama. To je u nastavku rada prikazano i u praksi provođenjem matematičkih aktivnosti koje uključuju prste kao didaktičko sredstvo.

## 4. Istraživanje

Nakon teorijskog prikaza upotrebe konkretnih materijala u svrhu učenja matematičkih pojmova te posebice uporabom prstiju na nastavi matematike, provedeno je istraživanje kojim se još jasnije pokušala razumjeti ova problematika.

### 4.1 Cilj i istraživačka pitanja

Cilj ispitivanja prikazanog u ovom poglavlju diplomskog rada jest dobivanje uvida u načine učeničkog korištenja nastavnih sredstava koji uključuju prste kao didaktičko sredstvo za učenje pojma broja, brojanja te zbrajanja i oduzimanja. Ideja ispitivanja je pred učenike postaviti različite manipulativne materijale u kojima se koriste prsti kao didaktičko sredstvo za učenje matematičkih pojmova, opservirati spontane i vođene učeničke aktivnosti te kroz razgovor pokušati dobiti dublji uvid u interakciju djeteta i didaktičkog materijala. U sklopu istraživanja postavljena su stoga dva pitanja:

1. Za koje od ponuđenih materijala ispitani učenici pokazuju poseban interes i zašto?
2. Kako ispitanici koriste odabrane manipulativne materijale?

### 4.2 Metodologija i provedba istraživanja

Prije same provedbe određeno je da će se istraživanje provoditi kvalitativno sa šest ispitanika koji su učenici prvih razreda jedne zagrebačke osnovne škole. Odabrano je da ispitanici budu učenici prvog razreda upravo zbog tranzicije u obrazovanju (iz predškolske ustanove u školu) koju su neposredno prošli te velike potrebe učenika prvih razreda za manipulacijom s konkretnim materijalom. Također, kako je spomenuto u radu, učenici se u toj dobi još uvijek mogu nalaziti u predoperacijskoj fazi kognitivnog razvoja prema Piagetu, u fazi konkretnih operacija ili na prijelazu tih dviju faza te na prva tri stupnja poznavanja matematike prema Sharmi (2001) i zbog toga su oni pogodna grupa ispitanika za ovo istraživanje. Odabranih učenika je šest zato što je planirano da u kvalitativnoj studiji istovremeno rade u parovima na tri radne stanice. S obzirom na to da je riječ o kvalitativnom istraživanju, korištene metode prikupljanja podataka su su opservacija, pojedinačni intervjui s učenicima te upitnik.

#### *4.2.1 Priprema istraživanja i odabir sudionika*

Na samom početku bilo je potrebno uputiti molbu službenoj osobi odgojno-obrazovne ustanove za provedbu istraživanja (Prilog 1). Nakon potvrdnog odgovora ravnateljice odabrane škole, uslijedilo je odabiranje ispitanika istraživanja. Svi ispitanici su iz istog razrednog odjeljenja, a odabrala ih je učiteljica tog razrednog odjeljenja. Kriteriji koji su postavljeni prilikom odabira sudionika jest da učenici pohađaju redoviti program i da su, prema opažanjima učiteljice, različitih matematičkih sposobnosti kako bi se dobio uvid u individualno razumijevanje poznatih matematičkih sadržaja prilikom korištenja konkretnim materijalom te svrhovito korištenje istoga. Učiteljica ih je grupirala u tri skupine po dva učenika, a prilikom formiranja i rada u skupinama bilo je važno da se učenici osjećaju ugodno i neugroženo kako bi mogli nesmetano raditi. To znači da ih je učiteljica raspodijelila u parove prema njihovim prijateljskim odnosima, a ne prema matematičkim sposobnostima. Odabranim učenicima učiteljica je dala unaprijed pripremljene suglasnosti koje su roditelji potpisali (Prilog 2). Važno je naglasiti da je roditeljima odabranih učenika detaljno objašnjen i tijek istraživanja, vremenski okvir unutar kojeg će se odviti te namjera provođenja istoga za vrijeme nastave kako učenici ne bi morali izdvajati dodatno vrijeme za sudjelovanje u istraživanju. Jedan od dva propuštena sata nastave jest i dopunski sat iz matematike koji je u te svrhe i iskorišten.

Kako je već spomenuto, sudionike istraživanja odabrala je učiteljica koja je u kratkom razdoblju, od početka školske godine u rujnu do veljače 2022. godine kada je istraživanje provedeno, dobila uvid u njihove osobnosti i matematičke sposobnosti. Sudionici istraživanja bile su dvije djevojčice i četiri dječaka, no u daljnjem tekstu će ih se spominjati kao učenike. Prije provedbe kvalitativnog istraživanja razredna učiteljica objasnila je zašto je odabrala točno tih šest učenika i kako ih je odlučila spojiti u parove. Opisala je to na sljedeći način:

Učenik 1 lijepo zaključuje i brzo usvaja novi nastavni sadržaj. Ponekad je povučen, a često se boji svega što je nepoznato pa tako i ovog istraživanja. Trebao je nekoliko dana promišljati želi li sudjelovati ili ne, a na kraju je ipak odlučio da želi jer je riječ o matematičkim sadržajima koji su mu jasni i poznati. Izrazito se trudi, no treba poraditi na samopouzdanju. Teško prihvaća kritiku, ali ubrzo zaboravi na istu te se trudi poboljšati svoj rad i aktivnost na satu.

Učenik 2 je izrazito otvoren i komunikativan. Matematičke sadržaje usvaja brzo i jasno, no često je nesiguran u svoje odgovore. Vidi se kontinuiranost u radu kod kuće i u školi kao i

znatan napredak u odnosu na početak školske godine i prve sate matematike. Tijekom rada i interakcije s drugima je izrazito uzbuđen što često prelazi u brz i neprecizan rad koji ga ponekad dovodi do pogrešnih rješenja i zaključaka. To često i sam primijeti te staloženo prihvati.

Učenik 1 i učenik 2 su spojeni u prvu skupinu radi svoje otvorenosti i komunikativnosti. Učiteljica ih prema matematičkim sposobnostima i izražavanju smatra sličnima, a dodatna prednost je to što su izrazito dobri prijatelji koji lako dolaze do zajedničkih rješenja.

Učenik 3 je jasan i konkretan u radu. Rijetko čini propuste i pogreške, no kada ih i napravi prihvati ih s osmjehom. Brzo zaključuje, odlučan je i nudi drugačije ideje za rješavanje matematičkih problema od ostalih učenika. Svjestan je svog uspjeha i izrazito je siguran u svoje odgovore i odluke.

Učenik 4 ponekad pokazuje interes za nastavu matematike, no najugodnije se osjeća kada nije u prvom planu i kada ne mora komunicirati i objašnjavati svoje ideje i rješenja. Nedostaju mu redovitost i kontinuitet u radu. Siguran je u sebe tek onda kada svjesno vlada matematičkim sadržajem i tek će tada imati potrebu biti aktivan sudionik na satu. Kada bude suočen s pogreškom ne pokazuje emocije i ne daje konkretne reakcije. Reagira osmjehom i nešto većom aktivnošću tek kada bude pohvaljen.

Učenik 3 i učenik 4 su spojeni u drugu skupinu jer se unatoč svojim matematičkim različitostima izrazito dobro slažu. Često se zajedno igraju i komuniciraju u slobodno vrijeme te za vrijeme školskih odmora.

Učenik 5 je izrazito otvoren, aktivan i ne boji se tuđih reakcija ili komentara. Voli da je sve uredno i točno što se posebice primijeti na nastavi matematike. Ima potrebu biti najbolji i najbrži pa se zbog te brzine ponekad potkradu pogreške koje prihvati staloženo uz dozu oštrine i ljutnje. Izrazito se trudi i nastoji napredovati, a taj napredak se jasno vidi, posebice prilikom uspoređivanja rada i brzopletosti na početku školske godine i sada.

Učenik 6 pokazuje veliki napredak, trud, upornost i zalaganje na nastavi matematike. Razumije nastavni sadržaj, ali je izrazito nesiguran i povučen. Kao cilj postavlja riješiti zadatke što brže i što točnije, a u brzini često zamijeni minus za plus ili krivo pročita određenu riječ. U tim situacijama ga poteškoće čitanja naljute i rastuže što ga često odvede daleko od stjecanja novih matematičkih sposobnosti. Teško podnosi činjenicu da ponekad pogriješi, no to ga ne sprječava da se i dalje trudi te da napreduje iz dana u dan.



Učenik 5 i učenik 6 su spojeni u treću skupinu jer među njima postoji i obiteljska poveznica, a osim toga su jako dobri prijatelji. Iako su tek u prvom razredu, od prvoga dana zajedno s još nekoliko učenika odlaze i dolaze samostalno u školu, a radi blizine obiteljskih domova dijele svoju svakidašnjicu i u školi i izvan nje.

#### *4.2.2 Provedba istraživanja*

Na sam dan istraživanja istraživačica i njena pratnja su došle do razreda po učenike i uputile su se u prostoriju rezerviranu za istraživanje. Radne stanice bile su raspoređene u tri skupine ovisno o aktivnostima za koje su bile namijenjene. Tako su prve tri stanice sadržavale materijale za provedbu aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za učenje pojma broja. To su: a) tri didaktičke vrećice, b) slagalica „Prsti“ te c) naprstci koje su opisane u poglavlju 3.3.1. Cilj ovih aktivnosti jest da učenici utvrđuju pojam broja te koriste materijale svrhovito, odnosno da spajaju količinu s brojkom i brojevnim riječi, imenuju brojke i njihova matematička obilježja, vježbaju pisanje brojki te da prilikom korištenja svih navedenih materijala ne koriste i ostali školski pribor, već isključivo vlastite prste. Nakon izmjene rada na navedene tri stanice, slijedi promjena materijala i provedba aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za brojanje i prebrojavanje. Materijali koji se koriste na tri nove stanice jesu: a) „Vesela rukavica“, b) „Gusjenica“ te c) drveni blokovi koji su opisani u poglavlju 3.3.2. Cilj korištenja ovih materijala jest da učenici uspješno prikazuju količinu prstima na različite načine, broje i nižu brojke pravilnim redosljedom te da svakoj brojki dodijele ispravnu količinu danih predmeta. Nakon dvostruke rotacije i rada parova na svim stanicama slijedi posljednja izmjena stanica te postavljanje materijala za provedbu aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za zbrajanje i oduzimanje. Posljednje tri stanice sadrže: a) dlanove od filca s računskom gusjenicom, b) rižu i rukavice kao didaktičko sredstvo te c) drvene blokove. Ti su materijali opisani u poglavlju 3.3.3. Cilj tih aktivnosti jest da učenici prikazuju računske operacije zbrajanja i oduzimanja jednoznamenastih brojeva koristeći se danim materijalom.

Istraživačici je pratnja pomagala prilikom izmjene didaktičkih materijala na tri postavljene stanice i prilikom intervjuiranja jednog učenika je animirala ostale u odvojenoj prostoriji. Na samom početku provedbe istraživanja bilo je potrebno stvoriti ugodnu radnu atmosferu te učenicima najaviti cilj ovog istraživanja na njima primjeren način. Zato je za početak bio predviđen kratak razgovor gdje su se istraživačica, njena pratnja i učenici predstavljali te razgovarali o omiljenim školskim predmetima, igrama i željama o njihovim budućim zanimanjima i profesijama. Potom je uslijedilo čitanje slikovnice „Životinjska brojalica“

autorice Ivanke Borovac uz pomoć koje se najavio matematički sadržaj istraživanja i potrebitost korištenja prstiju. Učenici su podijeljeni u tri skupine, prema uputama učiteljice, i svakoj skupini je određena početna radna stanica s unaprijed pripremljenim didaktičkim materijalom. Na kraju rada na jednoj stanici, učenici su mijenjali mjesta na znak istraživačice kako bi dobili priliku koristiti se i ostalim izloženim materijalom, a kada su svi parovi izmanipulirali sa sva tri izložena materijala, došlo je do prelaska u novu kategoriju aktivnosti te novih rotacija parova na radnim stanicama.

Tijekom istraživanja podaci su se prikupljali promatranjem te primjenom individualnih intervjua i anonimnog upitnika. Zbog navedenih metoda prikupljanja podataka osmišljeni su i razvijeni: predložak za promatranje, predložak s pitanjima za intervju te upitnik o dojmovima o radu s konkretnim materijalom.

Cilj metode promatranja jest bio dobiti uvid u način i svrhovitost korištenja didaktičkog materijala te slušati učenički govor prilikom služenja materijalom kao i pratiti aktivnosti ili eventualne dominantnosti pojedinog učenika u paru. Predložak za promatranje (Prilog 3) je osmišljen u obliku triju tablica od kojih se svaka odnosi na jedan učenički par. Tablice su formirane u tri skupine koje se temelje na vrsti aktivnosti kojom su se učenici bavili, a to su: aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za učenje pojma broja, aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za brojanje i prebrojavanje te aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za zbrajanje i oduzimanje. Dok se jedan par koristio didaktičkim vrećicama, drugi par se istovremeno koristio naprstcima, a treći slagalicom „Prsti“. Istraživačica je za to vrijeme popunjavala prvi dio svih triju tablica ovisno o materijalu kojim se određeni par koristio. Popunjavala ih je tako da je odgovarala na prvu tvrdnju oblikovanu u DA-NE obliku. Ako je odgovor na postavljenu tvrdnju: „Učenik se bez danih uputa koristi didaktičkim materijalom svrhovito i s ciljem kako je aktivnost i zamišljena“ bio negativan, istraživačica je nakon nekog vremena upućivala učenike u pravilno korištenje didaktičkog materijala. Nakon toga promatrala je izmjenu radnji u njihovu korištenju te je ispunjavala drugi dio tablice pod tvrdnjom: „Učenik se nakon danih uputa koristi didaktičkim materijalom onako kako je predviđeno“, odnosno kako je detaljno opisano na početku ovog poglavlja.

Nakon manipulacije didaktičkim materijalom, učenici su ispunjavali anonimni upitnik. Ciljevi primjene upitnika su bili dobiti uvid u učenička razmišljanja o uspješnosti rada s danim materijalom kao i uvidjeti koji je njihov osvrt na vlastito sudjelovanje, aktivnost i zalaganje tijekom rada s didaktičkim materijalima. Anonimni upitnik je konstruiran u obliku tablice.

Svaki učenik je dobio tablicu (Prilog 4) s praznim poljima i rednim brojevima od 1 do 5 koji označavaju broj izjavne rečenice koju je istraživačica čitala. Učenici su u prazna polja crtali jednu od tri vrste osjećajnika ovisno o razini slaganja, odnosno neslaganja s izrečenom izjavom. Ako se učenik slagao s izjavom, u za to predviđeno polje nacrtao je osjećajnika s ustima koja se smiju, ako se učenik djelomično slagao s izjavom, crtao je osjećajnika s neutralnim položajem usta, a ako se nije slagao s izjavom crtao je osjećajnika s ustima usmjerenim prema dolje. Izjave koje je istraživačica čitala jesu:

1. Slušao/la sam i slijedio/la upute prilikom rada s materijalima.
2. Tijekom aktivnosti sam sa svojim parom razgovarao/la i komentirao/la što radim.
3. Aktivno sam sudjelovao/la u aktivnostima.
4. Uspješno sam se koristio/la sa svim materijalima.
5. Svidjelo mi se koristiti prste u matematici.

Kada su učenici ispunili dani upitnik, napustili su učionicu i slijedilo je individualno intervjuiranje svakog učenika.

Sav didaktički materijal je tijekom intervjua bio postavljen ispred učenika kako bi se mogli prisjetiti rada s istima. Pitanja koja su se postavljala ispitanicima jesu:

1. Voliš li matematiku? Je li matematika težak školski predmet?
2. Jesi li uspješno radio/la s ovim materijalima?
3. Koje bi dvije aktivnosti htio/la raditi ponovo? Zašto baš te aktivnosti? Što bi točno radio/la s njima?
4. Misliš li da bi bilo lakše učiti matematiku da ove materijale imate uvijek u razredu? Zašto?
5. Koristiš li se nekako prstima na satima matematike? Zašto?
6. Smije li se koristiti prstima na nastavi matematike? (Ako da: do kada?, Ako ne: zašto?)

Polustrukturirani intervjui sastojao se od šest pitanja otvorenog i zatvorenog tipa. Cilj primjene intervjua bio je ispitati stav učenika o korištenju prstiju kao didaktičkog sredstva u nastavi matematike te dobiti odgovor na prvo istraživačko pitanje o iskazivanju interesa za određeni ponuđeni materijal. Koristeći se predloškom s pitanjima za intervjui i predviđenim prostorom za bilježenje, istraživačica je svakom učeniku individualno postavljala ista pitanja, snimala audiozapise i bilježila njihove odgovore.

### 4.3 Rezultati

Kvalitativno istraživanje provedeno za potrebe ovog rada bavi se s dva ključna istraživačka pitanja. Prvim pitanjem želi se utvrditi za koje od ponuđenih materijala ispitani učenici pokazuju poseban interes i zašto, a promatranjem rada učenika utvđivalo se kako točno koriste odabrane manipulativne materijale što daje odgovor na drugo istraživačko pitanje.

#### 4.3.1 Interes za materijale

Direktnom komunikacijom s ispitanicima kroz intervju te navođenjem dviju aktivnosti koje bi htjeli raditi ponovo, dobiveni su rezultati vezani uz prvo istraživačko pitanje. Tablica 1 prikazuje popis svih materijala kojima su se učenici služili te broj učenika koji je istaknuo poseban interes za pojedini materijal.

**Tablica 1.**

*Prikaz materijala za koje su ispitani učenici pokazali poseban interes*

<b>MATERIJALI ZA KOJE SU UČENICI POKAZALI POSEBAN INTERES</b>		Broj učenika koji su iskazali poseban interes za materijal
Aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za učenje pojma broja	Didaktička vrećica – pisanje prstom	3
	Didaktička vrećica – brojka, brojevná riječ i količina	1
	Slagalice „Prsti“	3
	Naprstci	1
Aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za brojanje i prebrojavanje	Vesela rukavica	1
	Gusjenica	1
Aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za zbrajanje i oduzimanje	Riža i rukavica kao didaktičko sredstvo	2

Rezultati pokazuju da je najveći interes pokazan za aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za učenje pojma broja, posebice za didaktičku vrećicu koja je služila za pisanje brojki prstom po neobičnoj površini te za slagalicu „Prsti“ koja objedinjuje matematički sadržaj sa svakidašnjim pojmovima i područjima poput imena prstiju ili boja s kojima se dijete susreće. S obzirom na to da su ispitanici učenici prvog razreda i da su još uvijek u razdoblju upoznavanja i usvajanja apstraktnog pojma broja, uočeno je da im je korištenje konkretna potrebno i zanimljivo. Učenici prve skupine rekli su da bi se ponovno koristili

slagalicom „Prsti“ jer im je to, uz naprstke i gusjenicu, bila najzanimljivija aktivnost. Kao razlog tome, učenik 2 navodi da su u početku samo nepovezano slagali dijelove slagalice te da su pokušali okretati prste, boje i dijelove dlana na sve moguće načine, no uspješno su je složili tek kada su počeli pratiti matematičke simbole, a svako ponovo slaganje im je bilo puno brže i jednostavnije. Učenik 3, iz druge skupine je kao dvije posebno zanimljive aktivnosti izdvojio dvije didaktičke vrećice zbog osjećaja pod prstima koji je imao prilikom pomicanja njihova sadržaja. Unatoč tom ugodnom osjećaju, kada bi se mogao ponovno koristiti istim materijalima, koristio bi ga na isti način, s danim ciljem i u matematičke svrhe. Učenik 4, iz iste skupine, također je uz aktivnost „Vesele rukavice“, koja je prema njegovom mišljenju najzabavnija jer traje najdulje od svih ponuđenih, izdvojio i spomenutu didaktičku vrećicu čijim korištenjem učenici vježbaju pisanje brojki prstom. Kao razlog izdvajanja baš te didaktičke vrećice također je naveden subjektivan osjećaj ugodnosti pod prstima prilikom pomicanja sadržaja vrećice. Učenici treće skupine su isto tako naveli tri posebno zanimljiva materijala, a to su ponovno slagalica „Prsti“ i didaktička vrećica za vježbanje pisanja brojki, a materijal koji su oboje spomenuli jesu rukavice napunjene rižom. Učenik 5 je kao razlog izdvajanja ovog materijala naveo aktivnost zbrajanja i oduzimanja koja mu je bila posebno zabavna, no kada bi se mogao ponovo koristiti tim materijalom, prvo bi samo stiskao te rukavice bez matematičkog cilja jer mu se svidio osjećaj dodirivanja riže preko nekog drugog materijala. Za isti materijal učenik 6 rekao je da bi ga ponovno koristio kako bi mogao vježbati zbrajanje i oduzimanje jer mu je lakše kada ima nešto konkretno pred sobom osim samog zadatka.

Iz navedenih opisa učeničkih odgovora, može se vidjeti da je svaki učenik imao po jedan materijal koji se podudara s materijalom koji je naveo njegov par. Iz toga se može naslutiti da su učenici izdvojili jednu aktivnost prema vlastitim preferencijama, a da je na odabir druge utjecala i suradnja te interakcija s učenikom iz skupine. To ukazuje na važnost upotrebe govora i komunikacije prilikom korištenja didaktičkih materijala kao i općenite upotrebe konkretnih materijala u nastavi. Na taj način učenici postaju aktivni sudionici i izvoditelji matematičkih radnji, a da toga često nisu ni svjesni.

#### *4.3.2 Korištenje materijala*

Prva tri materijala kojima su se učenici koristili bila su namijenjena za aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za učenje pojma broja. Ako se promatraju rezultati prikazani u

tablici 2, može se vidjeti da su se sve tri skupine na kraju uspješno koristile didaktičkim vrećicama. Učenici iz treće skupine na samom početku rada nisu shvaćali koja je svrha vrećica, no međusobnim razgovorom i prijedlozima su samostalno došli do zaključka i sukladno tome su se svrhovito koristili danim materijalom. Zanimljivo je kako se niti jedna skupina nije svrhovito koristila didaktičkom vrećicom koja uključuje pisanje brojki prstom. U početku je svaki učenik samo dodirivao vrećicu i pomicao njen sadržaj, no ubrzo bi pozvali istraživačicu i pitali što točno trebaju s danim materijalom. Nakon toga su druge dvije vrećice pale u drugi plan jer im se izrazito svidjelo pisanje prstom i osjećaj koji je prouzročilo pomicanje sadržaja vrećice.

Slagalice „Prsti“ je prvi materijal kojim su se sve tri skupine isprva koristile svrhovito te onako kako je aktivnost i zamišljena. U danom vremenu složili su ju čak dva ili tri puta, a na pitanje zašto prste slažu baš tako, svi su imali jednak odgovor „jer broj treba staviti na točkice koje ga prikazuju“ što je nematematičkim jezikom, točan ishod i cilj aktivnosti.

Za sve učenike naprstci su bili nešto sasvim novo. Učenici iz treće skupine samo su posložili brojeve na stol pravilnim redoslijedom ne povezujući da se materijal zapravo postavlja na prste, dok su prve dvije skupine imale istu reakciju. Učenici su postavljali materijal na prste i to tako da su nastojali poredati naprstke po redu ovisno o broju kojeg prikazuju. Na kraju su podigli i svoje dlanove kao znak da su izvršili aktivnost. Nakon toga ih je istraživačica uputila u korištenje materijala onako kako je predviđeno - da učenik uđe u ulogu nekog broja i razgovara s drugim brojevima o svojim karakteristikama. Učenici su izrazito pozitivno reagirali na tu ideju, a najveće razočaranje je uslijedilo kada je rečeno da slijedi zamjena aktivnosti i da se naprstci moraju odložiti. Ipak, ono što je najviše došlo do izražaja u ovoj aktivnosti jest naprstak nule prilikom pokušaja redanja brojeva na prstima. Kako postaviti nulu na prvi prst ako prvi prst simbolizira broj jedan? To su si pitanje postavljali učenici iz druge skupine, što je bilo posebno zanimljivo s obzirom na karakterizaciju i opise učenika 3 i učenika 4 koje je dala učiteljica.

**Tablica 2.**

*Rezultati promatranja korištenja didaktičkog materijala koji uključuje prste kao sredstvo za učenje pojma broja*

REZULTATI		Učenik se bez danih uputa koristi didaktičkim materijalom svrhovito i s ciljem kako je aktivnost i zamišljena. – DA / NE			Učenik se nakon danih uputa koristi didaktičkim materijalom onako kako je predviđeno. – DA / NE		
		1. skupina	2. skupina	3. skupina	1. skupina	2. skupina	3. skupina
Aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za učenje pojma broja	Didaktička vrećica – pisanje prstom	NE	NE	NE	DA	DA	DA
	Didaktička vrećica – brojka, brojeva riječ i količina	DA	DA	DA			
	Didaktička vrećica – količina i boje	DA	DA	NE			DA
	Slagalica „Prsti“	DA	DA	DA			
	Naprstci	NE	NE	NE	DA	DA	DA

Aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za brojanje i prebrojavanje ostavile su poseban utisak na učenike. Aktivnost „Vesela rukavica“, kako je vidljivo u tablici 3, u svim skupinama u početku nije bila uspješno realizirana. Učenici prve skupine su postavili rukavice na dlanove potpuno ignorirajući materijal koji je prema količini potrebno razvrstati. Učenici druge skupine su nakon dužeg promatranja materijala odlučili zatražiti pomoć istraživačice, a učenici treće skupine su razvrstavali materijale po broju, odnosno svakom prstu su dodijelili materijal pripadajuće količine, ali nisu razmišljali o vrsti materijala i da je zapravo potrebno razvrstati svaku vrstu predmeta, prebrojati ju i onda dodijeliti ispravnom prstu. Ipak, nakon danih uputa, sve skupine su se uspješno koristile materijalom, a pojedini su tijekom rada isticali da im je to do sada najzabavnija aktivnost što potvrđuje spomenute teze o važnosti razvijanja predmatematičkih vještina kod djece tijekom ranog učenja i poučavanja matematike.

Aktivnost „Gusjenica“, odnosno slikanje prstima bila je potpuna novost za učenike, no ipak neki su se odmah svrhovito koristili materijalom, a neki ne, iako intervencije i usmjeravanja tijekom rada nisu bile potrebne. Učenici prve skupine su odmah sve prste pritisnuli o tintu i

pokraj svake brojke ostavili potrebnu količinu otisaka prstiju. Pri tome su međusobno komentirali kako je to zapravo lako te da ne moraju uopće brojati broj otisaka nego u svakom redu ostavljaju jedan otisak više jer se tako i zadane brojke povećavaju. Učenici druge skupine su se fokusirali na ilustracije gusjenice i zapisanu brojku pa je učenik 3 htio koristiti olovku kako bi nacrtao odgovarajući broj krugova, no učenik 4 ga je zaustavio i predložio da koriste tintu i pritisnu na papir onoliko puta koliko piše u svakom redu. Učenici treće skupine su u jednom trenutku zastali s korištenjem materijala na svojoj stanici i vidjeli što rade učenici koji su tada slikali prstima. Kada je došao njihov red za rad na stanici već su znali što trebaju i zašto, tako da se njihov rad i promišljanje ne mogu uzeti kao relevantni za ovu aktivnost.

Posljednja aktivnost u ovoj kategoriji jest manipuliranje drvenim blokovima i karticama s prstima koje prikazuju količinu. Učenici u prvoj skupini su na trenutke prestali surađivati pa je učenik 1 samo slagao kocke jedne na drugu bez ikakvoga cilja, a učenik 2 je okrenuo sve kartice i svakoj pokušao dodijeliti pripadajuću količinu kocki. Ubrzo su shvatili da kartica ima više nego kocki pa su zatražili pomoć. Tada je istraživačica objasnila da je potrebno složiti kartice jednu na drugu tako da se njihov sadržaj ne vidi i onda prikazivati kockama prikazanu količinu. Druga skupina je odmah materijale koristila svrhovito i onako kako je aktivnost zamišljena, samo što su jedan drugome birali i zadavali kartice koje moraju prikazati, a učenici treće skupine su samo posložili drvene blokove po veličini potpuno ignorirajući kartice i ono što one prikazuju. No, nakon danih uputa sve su skupine koristile materijal onako kako je predviđeno i uspješno sudjelovale u aktivnosti.

### Tablica 3.

*Rezultati promatranja korištenja didaktičkog materijala koji uključuje prste kao sredstvo za brojanje i prebrojavanje*

REZULTATI		Učenik se bez danih uputa koristi didaktičkim materijalom svrhovito i s ciljem kako je aktivnost i zamišljena. – DA / NE			Učenik se nakon danih uputa koristi didaktičkim materijalom onako kako je predviđeno. – DA / NE		
		1. skupina	2. skupina	3. skupina	1. skupina	2. skupina	3. skupina
Aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za brojanje i prebrojavanje	Vesela rukavica	NE	NE	NE	DA	DA	DA
	Gusjenica	DA	DA	/			/
	Drveni blokovi	NE	DA	NE	DA		DA



Treći ciklus aktivnosti uključuje dlanove od filca s računskom gusjenicom, rižu i rukavice kao didaktičko sredstvo te zbrajanje i oduzimanje pomoću drvenih blokova. Tablica 4 prikazuje uspješnost korištenja navedenim materijalima, a na samom početku tablice vidljivo je da je samo prva skupina dlanove od filca s računskom gusjenicom koristila onako kako je predviđeno i bez danih uputa. Učenici u drugoj skupini su u početku samo pomicali kuglice na računskoj gusjenici te su ubrzo zatražili pomoć, a učenici treće skupine nisu mogli povezati prste i računsku gusjenicu te uopće svrhu korištenja ovog materijala. Nakon danih uputa, učenici u drugoj skupini su uspješno koristili dani materijal, a učenici u trećoj skupini su prilikom prikazivanja zbroja ili razlike zadana dva broja spuštali prste od filca kako bi prikazali rješenje umjesto da su spustili višak prstiju kako bi podignuti prsti prikazivali rješenje. Ipak, zanimljivo je da su prilikom korištenja vlastitih prstiju rješenje prikazali podignutim prstima, a isto su primijenili i na prste od filca tek kada im se ukazalo na razliku.

Rukavice napunjene rižom kao didaktičko sredstvo su u svim skupinama u početku bile jednako korištene, a nakon danih uputa svaka je grupa teško prestajala s igrom. Naime, u svakoj skupini je jedan učenik bacio jednu kockicu i na rukavici ostavio podignuto onoliko prstiju koliko je iščitao na kockici. Dakle, sve skupine su na rukavicama prikazivale određen broj umjesto bacanja dviju kockica istovremeno, zbrajanja i oduzimanja brojeva na njima te prikazivanja rezultata pomoću rukavica napunjenih rižom. Jedina razlika je što su učenici u trećoj skupini, točnije učenik 6, ponovo prikazivali rezultat spuštanjem prstiju na rukavicama umjesto podizanjem istih.

Posljednja aktivnost je bila vrlo brzo usvojena u svim skupinama što je bilo i za očekivati s obzirom na to da su se u prethodnom ciklusu koristili istim blokovima. Prva i druga skupina su drvenim blokovima prikazivale isključivo rezultat koji kartica prikazuje, dok su učenici treće skupine prikazivali sve članove u računu, što im je pomalo otežavalo prikaz oduzimanja brojeva.

**Tablica 4.**

*Rezultati promatranja korištenja didaktičkog materijala koji uključuje prste kao sredstvo za zbrajanje i oduzimanje*

REZULTATI		Učenik se bez danih uputa koristi didaktičkim materijalom svrhovito i s ciljem kako je aktivnost i zamišljena. – <b>DA / NE</b>			Učenik se nakon danih uputa koristi didaktičkim materijalom onako kako je predviđeno. – <b>DA / NE</b>		
		1. skupina	2. skupina	3. skupina	1. skupina	2. skupina	3. skupina
Aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za zbrajanje i oduzimanje	Dlanovi od filca s računskom gusjenicom	DA	NE	NE		DA	DA
	Riža i rukavica kao didaktičko sredstvo	NE	NE	NE	DA	DA	DA
	Zbrajanje i oduzimanje pomoću drvenih blokova	DA	DA	DA			

Zbog navedene analize podataka prikupljenih promatranjem učenika može se zaključiti da je učenicima izrazito zabavno, ali i potrebno korištenje didaktičkih materijala. Prije svega, oni su cijelo vrijeme naglašavali da zbog brzih izmjena aktivnosti moraju prekidati igru. Dakle, u njihovim očima, ovo nije bio rad i učenje, već igra, a zapravo su, možda i nesvjesno, cijelo vrijeme bili izloženi matematičkom sadržaju. Također, može se zaključiti da će učenici često materijale koristiti bez određene svrhe, već isključivo kao sredstvo za zabavu, no uz pravilno i pravovremeno usmjerenje ta zabava može postati i svrhovita.

Anonimni upitnik spomenut u prethodnom poglavlju, koji učenici ispunjavaju crtanjem odgovarajućeg osjećajnika, daje uvid u njihovu percepciju uspješnosti služenja ponuđenim materijalima te u pozornost i zalaganje koje su uložili tijekom rada. Kako je i prikazano u tablici 5, svih šest učenika se u potpunosti složilo s navedenim izjavama. Samo je jedan učenik drugačije reagirao na četvrtu izjavu o uspješnosti korištenja materijalom jer smatra da se nije svim materijalima koristio potpuno uspješno i svrhovito.

**Tablica 5.***Podatci prikupljeni anonimnim upitnikom*

<b>REZULTATI ANONIMNOG UPITNIKA</b>	<b>: )</b>	<b>: I</b>	<b>: (</b>
Slušao/la sam i slijedio/la upute prilikom rada s materijalima.	6	/	/
Tijekom aktivnosti sam sa svojim parom razgovarao/la i komentirao/la što radim.	6	/	/
Aktivno sam sudjelovao/la u aktivnostima.	6	/	/
Uspješno sam se koristio/la sa svim materijalima.	5	1	/
Svidjelo mi se koristiti prste u matematici.	6	/	/

Ovim upitnikom učenici su na neki način napravili i samovrednovanje, što istraživačima daje priliku usporediti učeničko kritičko promišljanje o njihovom radu i zalaganju te opažanja istraživačice tijekom njihova manipuliranja materijalima. Također, iz navedenog upitnika je vidljivo da se učenicima svidjelo koristiti prste u matematičke svrhe, a isto su potvrdili i u individualnim intervjuima.

#### *4.3.3. Odgovori na dodatna pitanja iz individualnih intervjuja*

Individualni intervjui sadržavali su i neka dodatna pitanja o stavovima ispitanih učenika prema matematici kao nastavnom predmetu te o kontekstu rada s konkretnim materijalima u praksi iz perspektive učenika. Ta pitanja i učenički odgovori na njih mogu doprinijeti boljem razumijevanju važnosti tematike kojom se bavi ovaj rad – korištenja prstiju kao didaktičkog sredstva u matematici.

Predložak s pitanjima za intervju je bio unaprijed pripremljen, a svim učenicima su individualno postavljena ista pitanja. Prvo pitanje je zatvorenog tipa gdje su učenici trebali izraziti jasan stav o matematici kao školskom predmetu. Unatoč razlikama u njihovim osobnostima i matematičkim sposobnostima, svi ispitanici su rekli da vole učiti matematiku te da ona nije težak školski predmet. Na pitanje o uspješnosti rada s danim materijalima ispitanici su također odgovarali jednako. Svi su smatrali da su uspješno manipulirali svim

izloženim materijalima, jedino su učenici prve skupine bili nešto kritičniji te su opisali da su do uspješnog korištenja ipak došli zajedno kroz veći broj pokušaja izvođenja aktivnosti.

Na pitanje o korištenju didaktičkih materijala u razredu te bi li učenje matematike bilo lakše uz konstantnu dostupnost ovakvih materijala u razredu pet je učenika odgovorilo potvrdno. Za obrazloženje svojih odgovora svi su kratko i jasno rekli „tako mi je lakše“ ili „tako bih mogao češće vježbati“, a samo je učenik 2 rekao da bi mu korištenje konkretna bilo zamaranje te da više preferira rad s knjigama i prikazivanje rezultata na brojevnoj crti. Isti učenik naveo je da se on nikada ne koristi prstima na satima matematike, a s njime se složio i učenik 5. Ostali su rekli da se vrlo često koriste prstima, a da je to najčešće prilikom rješavanja težih zadataka zbrajanja i oduzimanja. Učenik 6 iznio je jednu zanimljivu situaciju – rekao je da je pokušao ostaviti prste „po strani“, ali da se ponekad dogodi da u glavi izračuna krivo rješenje nekog zadatka, a kada se služi prstima rezultat uvijek bude točan. To potvrđuje i teze da su u počecima nastave matematike prsti zaista konkretan oslonac i izvor sigurnosti za učenike.

Iako je većina ispitanika rekla da se koristi prstima na satima matematike, pet ispitanika smatra da je to dopušteno, no do neke određene dobi. Prema nekima, prstima se ne smije koristiti već u drugom polugodištu, a prema drugima tek u drugom pa čak i petom razredu. Ipak, ono što su svi istaknuli jest da nastavni sadržaj matematike postaje sve teži i da ga postaje sve teže prikazivati prstima. Zbog toga znaju da mora doći trenutak kada se prstima više neće smjeti koristiti, ali ne znaju kada će to točno biti.

#### *4.4 Diskusija i zaključci istraživanja*

Rezultati istraživanja pokazuju da materijali mogu biti korišteni u različite matematičke svrhe te da ispitani učenici prvih razreda najveći interes pokazuju za aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za učenje pojma broja, a uz korištenje konkretnih materijala matematiku percipiraju kao igru.

U početku istraživanja je postojao određen strah da će učenicima biti vremenski teško izdržati do kraja istraživanja te ostati na istoj razini koncentriranosti i aktivnosti. No, zapravo dogodilo se upravo suprotno. Svojim komentarima i reakcijama dali su do znanja da im je žao što je igra prekinuta i što se istraživanje privodi kraju. Dakle, oni su rad s konkretima percipirali kao igru koju u toj dobi zapravo doživljavaju vrlo ozbiljno. Njihova reakcija potvrđuje činjenice o razvoju predmatematičkih vještina koje navodi Glasnović Gracin

(2010). Autorica spominje da se dijete ne mora nužno baviti tematikom matematičkih pojmova i manipulirati matematičkim sredstvima, već se koristiti predmetima i igračkama koje su djeci drage i bliske, poput slagalica, drvenih blokova, rukavica i drugih materijala kojim su se ispitanici koristili u svrhu provođenja matematičkih aktivnosti, a kojih oni možda nisu bili niti svjesni u trenutku manipulacije.

Osim toga, učenici su jasno izrekli kako bi im konstantno korištenje i dostupnost didaktičkog materijala bilo znatno olakšanje na nastavi matematike. Upravo se to podudara s tumačenjem Glasnović Gracin (2021) kako djeca nastavni sadržaj najbolje usvajaju na temelju vlastitog iskustva, točnije, kroz učenje otkrivanjem, matematičkim eksperimentima, raznim aktivnostima uz poticanje govora, kao i uz upotrebu konkretnih materijala poput računске gusjenice, brojevnih kartica, dinamičkog brojevnog pravca, Stern blokova, ali i dječjih prstiju.

Višnjić Jevtić (2021), pak, spominje vještine i kompetencije koje odgojitelji i učitelji trebaju steći za osiguravanje kvalitetne tranzicije iz djetinjstva u odraslost. Kako je već spomenuto, tranzicija u obrazovanju označava svojevrsan prijelaz gdje učenika dočekuju novi izazovi, spoznaje i zadatci, a isto su objasnili i učenici tijekom intervjua, ne znajući da se referiraju na pojam tranzicije. Rekli su da im je matematika lagan i zanimljiv školski predmet iako su svjesni da na svakom satu uče nešto novo i nešto teže od prethodnog te da se neće zauvijek moći oslanjati na konkretan materijal, odnosno – prste. Rečeno je da se matematička tranzicija događa puno češće i unutar osnovnih faza tranzicije. Glasnović Gracin (2021) objašnjava da do nove tranzicije dolazi čim se iz matematike uči nešto novo, odnosno, dolazi se do misaone prepreke koju učenik mora savladati kako bi stvorio predznanje za nadolazeći nastavni sadržaj, a najsigurniji put za prelazak preko te prepreke jest upravo korištenje konkretnog materijala.

Isto navodi i Liebeck (1995) koja ističe važnost „IGSZ“ modela. Liebeck (1995) tumači da malo dijete, prije svega, vidi, osjeća i ispituje fizičke predmete. Kasnije tek počinje prepoznavati riječi kojima se ti predmeti označavaju pa prepoznaje slike tih predmeta i na kraju povezuje sliku s pismenim znakom. Zaključno, sve počinje od iskustva fizičkih predmeta, odnosno manipulacije konkretnim materijalom. S obzirom na ovo tumačenje, ali i spoznaje do kojih nas je ovo istraživanje dovelo, može se zaključiti da je vrijeme koje učitelji i odgojitelji ulažu u stvaranje konkretnog materijala i konkretnih matematičkih situacija zaista kvalitetno uloženo vrijeme. Iako se isprva može učiniti da se učenici „samo“ igraju i da je njihovo korištenje materijalom beskorisno, plodove korištenja istog, a posebice prstiju kao

najdostupnijeg, najsigurnijeg i najjednostavnijeg didaktičkog sredstva, uvidjet će zapravo tek kasnije prilikom poučavanja novog matematičkog sadržaja. Ispitanici su već sada svjesni da im konkretan materijal neće uvijek biti dostupan niti potreban pa možda je samo potrebno povjerenje učitelja da će djeca znati prepoznati pravi trenutak kada ostaviti didaktički materijal i otići korak dalje.

## 5. Zaključak

Matematika je kompleksan nastavni predmet kojeg učenici ili izrazito vole ili zbog određenih poteškoća izrazito ne vole. Rijetki su oni koji pokazuju nekakav interes unatoč neuspješnosti. Zbog takvih podijeljenih stavova djeci je već u obiteljskom domu potrebno naglašavati kolika je važnost matematike u svakidašnjem životu te komentirati razne matematičke situacije u kojima se djeca nalaze i izvan školskog okruženja. Odgojno-obrazovne ustanove, pak, imaju zadatak surađivati i učiniti matematičku tranziciju što bezbolnijom za svakog pojedinca. To uključuje temeljit rad s didaktičkim materijalom, kao i razvijanje predmatematičkih vještina koje čine osnovu za daljnje matematičke spoznaje. Osim toga, i brojni stručnjaci poput Sharpe, Markovca, Glasnović Gracin i drugih smatraju korištenje didaktičkog materijala velikim benefitom za daljnji razvoj djeteta te daju brojne primjere kako ostvariti konkretan rad u praksi. Ključna ideja korištenja konkretna prilikom poučavanja matematičkih sadržaja jest da se učenici ne stavljaju u već određene okvire kroz koje ih se prisiljava učiti matematički sadržaj u svrhu ispunjavanja postavljenih očekivanja. Cilj je da učenici imaju slobodu prilikom usvajanja sadržaja kako bi mogli razvijati svoje potencijale i razumjeti početne apstraktne matematičke pojmove te kasnije usvajati one kompleksnije.

Prsti se u današnje vrijeme često smatraju „smetnjom“ prilikom učenja matematičkih sadržaja, a ne sredstvom za učenje istih. Ovaj rad pokazuje da prsti mogu biti sredstvo u brojnim matematičkim radnjama i usvajanju matematičkih pojmova te da je korištenje istih u praksi izuzetno zabavno i korisno za daljnji rad i nadogradnju. Tako se, primjerice, prilikom poučavanja pojma broja mogu koristiti razne didaktičke vrećice čija je svrha povezivanje količine s brojkom i brojevnom riječi ili, pak, naprstci uz koje učenici ulaze u ulogu broja te navode sve njegove matematičke karakteristike poput njegova prethodnika, sljedbenika, brojeva čiji zbroj ili razlika čine taj broj itd. Osim toga, u svrhu brojanja i prebrojavanja može se koristiti slikanje prstima koje se danas rijetko koristi na satima matematike, a aktivnosti koje uključuju prste u svrhu zbrajanja i oduzimanja su brojne. Gumene rukavice napunjene rižom, rukavice od filca s računskom gusjenicom te rad s drvenim blokovima ili kakvim drugim kockama su samo neki od primjera. Smatram da je rad s konkretnim materijalom prijeko potreban, posebice na nastavi matematike gdje je IGSZ model često zanemaren, posebice u današnje vrijeme kada su svi zanimljivi i djeci privlačni materijali često dostupni putem tehnologije i raznih aplikacija. U takvim okolnostima učenici ne koriste svoje ruke za rad pa se tako ni ne razvijaju u potpunosti jer dolazi do značajnog zanemarivanja afektivnih i

motoričkih sposobnosti djeteta zbog čijeg čestog nedostatka učenici ne uspijevaju ostvariti svoj potpuni potencijal.

Nakon detaljnog teorijskog pregleda koji ističe važnost i nužnost korištenja prstiju kao konkretnog materijala u nastavi matematike provedeno je kvalitativno istraživanje sa šest ispitanika, odnosno učenika prvog razreda osnovne škole. Primjenom metode opservacije, individualnih intervjua te anonimnog upitnika dobiveni su odgovori na dva istraživačka pitanja koji su ključni dio istraživačkog dijela ovog rada. Zaključuje se da uz korištenje konkretnih materijala ispitanici matematiku percipiraju kao igru, a zapravo su cijelo vrijeme bili izloženi matematičkom sadržaju. Također, ispitanici su često materijale koristili bez određenog cilja, kao sredstvo za zabavu, ali uz pravilno usmjeravanje i postavljanje pravila ta zabava može postati i konstruktivna što se učenicima svidjelo. Osim toga, uvidjelo se da su ispitanici najveći interes pokazali za aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za učenje pojma broja, što se moglo i naslutiti s obzirom na to da su tek na početku svog formalnog obrazovanja. Posebice ih se dojmila didaktička vrećica koja je služila za vježbanje pisanja brojki prstom te slagalica „Prsti“ koja objedinjuje matematički sadržaj sa svakidašnjim pojmovima i područjima s kojima se dijete susreće.

Ispitani učenici su se izjasnili da im korištenje prstiju i ostalih uključenih materijala daje određenu sigurnost i samopouzdanje prilikom rješavanja matematičkih zadataka. Njihovo korištenje materijalom je uz strpljivost te pravilno i pravovremeno usmjeravanje dobilo smisao i cilj, samo im je bilo potrebno dovoljno vremena kako bi se upoznali s materijalom te prilika da se uopće koriste konkretima u matematičke svrhe. Baš zbog potrebe i težnje za stvaranjem takvih prilika, ovim radom želi se privući pažnja studenata, metodičara, didaktičara, roditelja i odgojno-obrazovnih djelatnika kako bi njihovo usmjeravanje i poučavanje postalo djelotvornije i usmjerenije na samog učenika.



## 6. Prilozi

### Prilog 1. - Molba za provedbu istraživanja

Sveučilište u  
Zagrebu Učiteljski  
fakultet Savska  
cesta 77  
10000 Zagreb

n/r ravnateljice  
Osnovna škola Sesvetska  
Sopnica Sopnička ulica 69  
10360, Sesvete

U Zagrebu, 10. veljače 2022.

#### **Predmet: Zamolba za pomoć pri provedbi istraživanja**

Poštovana ravnateljice,

Molim Vas da nam pomognete pri realizaciji istraživanja u okviru kojeg želimo dobiti uvid u načine učeničkog korištenja nastavnih sredstava koja uključuju prste kao didaktičko sredstvo za učenje brojanja. Očekujemo da će spoznaje koje ćemo dobiti ovim istraživanjem moći iskoristiti u planiranju djelotvornijeg poučavanja, kao i pri pomaganju učenicima kojima je potrebno korištenje konkretnih materijala u nastavi matematike. Ovo istraživanje provest će Paula Vučko, studentica završne godine učiteljskog studija na Učiteljskom fakultetu u Zagrebu, pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Dubravke Glasnović Gracin, u svrhu izrade svog diplomskog rada.

Kao sudionici ovog istraživanja predviđeni su učenici 1. razreda, a uz suglasnosti roditelja ispitivanje će biti provedeno prema dogovoru s učiteljicom za vrijeme nastave. Potrebni podaci prikupili bi se promatranjem učenika tijekom manipulacije didaktičkim materijalom te primjenom intervjua i upitnika posebno konstruiranog za ovu svrhu. Svi prikupljeni podaci iz ovog istraživanja u potpunosti su povjerljivi i bit će dostupni samo istraživačima.

Nadam se razumijevanju i pomoći pri realizaciji istraživanja te unaprijed zahvaljujem na suradnji!

S poštovanjem,

  
izv. prof. dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin

## **Prilog 2. - Suglasnosti za sudjelovanje u istraživanju**

Sveučilište u Zagrebu  
Učiteljski fakultet  
Odsjek za učiteljske studije  
Savska cesta 77, 10000 Zagreb

OŠ Sesevetska Sopnica  
Sopnička ulica 69, 10360 Sesevete

### **Pristanak na sudjelovanje u istraživanju – suglasnost roditelja**

Poštovani roditelji,

moje ime je Paula Vučko i studentica sam Učiteljskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. U svrhu izrade diplomskog rada provodim istraživanje na temu „Dječji prsti kao didaktičko sredstvo u učenju matematičkih sadržaja“ pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Dubravke Glasnović Gracin. Cilj je ispitati stav učenika o korištenju prstiju kao didaktičkog sredstva, promatrati manipulaciju didaktičkim materijalima u praksi te dobiti uvid u zalaganje i interes učenika za matematički sadržaj prilikom korištenja konkretnih materijala, kao i u popraćenost rada s materijalima govorom. Za potrebe istraživanja za diplomski rad bih u veljači ove godine u prostorijama OŠ Sesevetska Sopnica provela matematičke radionice u trajanju od otprilike 45 minuta te evaluaciju korištenja didaktičkih materijala pomoću kratkog upitnika i individualnih intervju s učenicima u trajanju od otprilike 45 minuta. O točnom terminu provedbe istraživanja bit ćete obaviješteni od strane učiteljice razrednog odjeljenja. Za istraživanje je potrebno osam učenika prvog razreda, a svi sudionici će biti iz istog razreda. Prilikom obrade rezultata podatci bi bili u potpunosti anonimni i povjerljivi te dostupni samo istraživačima. Vjerujem da učenicima neće biti problem koristiti se matematičkim materijalom i podijeliti svoja razmišljanja sa mnom, a ako bi neko dijete pokazalo eventualnu nelagodu tijekom provođenja testiranja, ono će se odmah prekinuti. Vaš eventualni pristanak moguće je u svakom trenutku povući. Također, Vaše dijete može u svakom trenutku odustati od sudjelovanja bez ikakvog objašnjenja ili posljedica.

Ako imate kakvih pitanja, molim Vas, budete slobodni kontaktirati me.

Unaprijed zahvaljujem na Vašem vremenu.

S poštovanjem,

Paula Vučko (mail: 



## SUGLASNOST

Suglasan/na sam da moje dijete \_\_\_\_\_

(prezime i ime, razred)

sudjeluje u istraživanju

(molim, zaokružite DA ukoliko ste suglasni da dijete sudjeluje u istraživanju, a NE ukoliko to ne želite).

DA

NE

Datum: \_\_\_\_\_

Potpis roditelja: \_\_\_\_\_

**Prilog 3. - Mjerni instrument za prikupljanje podataka metodom promatranja – primjer jedne tablice**

<b>PRVA SKUPINA</b>		Učenik se bez danih uputa koristi didaktičkim materijalom svrhovito i s ciljem kako je aktivnost i zamišljena. – <b>DA / NE</b>	Učenik se nakon danih uputa koristi didaktičkim materijalom onako kako je predviđeno. – <b>DA / NE</b>
Aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za učenje pojma broja	Didaktička vrećica – pisanje prstom		
	Didaktička vrećica – brojka, brojevnica riječ i količina		
	Didaktička vrećica – količina i boje		
	Slagalica „Prsti“		
	Naprstci		
Aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za brojanje i prebrojavanje	Vesela rukavica		
	Gusjenica		
	Drveni blokovi		
Aktivnosti koje uključuju prste kao sredstvo za zbrajanje i oduzimanje	Dlanovi od filca s računskom gusjenicom		
	Riža i rukavica kao didaktičko sredstvo		
	Zbrajanje i oduzimanje pomoću drvenih blokova		

**Prilog 4. - Anonimni upitnik u obliku tablice**

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

## 7. Literatura

1. ABC zabava. (2018). Brojevi. *Škrinjica* (ABC zabava) 58.
2. Ballargeon R., Luo Y., Brueckner L. i Munakata Y. (2003). Reasoning about a hidden object after a delay: Evidence for robust representations in 5-month-old infants. *Cognition*, 88 (3), 23–35.
3. Blank, M., Rose, S. A. i Berlin, L. J. (1978). *The language of learning : the preschool years*. Grune & Stratton.
4. Bognar, L. i Matijević, M. (2002). *Didaktika*. Školska knjiga.
5. Borovac, I. i Mrčela, H. P. (2017). *Životinjska brojalica*. Turistička naklada d.o.o.
6. Buggle, F. (2002). *Razvojna psihologija Jeana Piageta*. Naklada Slap.
7. Društvo Naša djeca „Osmijeh“ Rajić. (2021). *Društvo Naša djeca „Osmijeh“ Rajić*. <https://sites.google.com/site/dndosmijehrajic/zabavni-kutak-1/brojalice> (pristupljeno: prosinac 2021).
8. Dunlop, A-W, i Hilary F. (2007). *Outcomes of Good Practice in Transition Processes for Children Entering Primary School*. Working Papers in Early Childhood Development, Bernard van Leer Foundation, 1–27.
9. e-kako portal. (2011). *Kako množiti pomoću prstiju s brojem 9?* <https://www.youtube.com/watch?v=u1srdQRhtTc> (pristupljeno: prosinac 2021).
10. Glasnović Gracin, D. (2000). Raspjevani matematičari: „Nula“. *Matematika i škola*, 5(6), 216–217.
11. Glasnović Gracin, Dubravka. (2010). Predmatematičke vještine. *Matematika i škola*, 55(3), 200–205.
12. Glasnović Gracin, Dubravka. (2013). Predškolsko dijete i matematika. *Matematika i škola*, 69(2), 148–152.
13. Glasnović Gracin, Dubravka. (2015) Matematika je očita nakon što je vidiš. *Matematika i škola*, 79(1), 146.
14. Glasnović Gracin, D. (2021). *Predmatematičke i matematičke vještine - spremnost djece za školu iz matematičke perspektive*. Studentski zbor UFZG. Zagreb. <https://www.youtube.com/watch?v=m935GarCfHs> (pristupljeno: prosinac 2021).
15. Glasnović Gracin, D. i Stepanić, L. (2019). Pojam broja - aktivnosti u predškoli i prvom razredu. *Matematika i škola*, 98(8), 120–124.

16. Holmes, D. L., McClelland, M. M. i Morrison, F. J. (2000). Children at risk for early academic problems: The role of learning-related social skills. *Early Childhood Research Quarterly*, 15(3), 307–329.
17. Huzjak, M. (2008). *Učimo gledati 1-4 - priručnik za nastavnike razredne nastave*. Školska knjiga.
18. Jung, M., Hartman, P., Smith, T. i Wallace, S. (2013). The Effectiveness of Teaching Number Relationships in Preschool. *International Journal of Instruction*, 6(1), 165–178.
19. Kanter, P. F. (1994). *Helping Your Child Learn Math*. Heath and Company.
20. Knekin, M. (2011). Zabavna matematika u razrednoj nastavi. *Matematika i škola*. 58(3), 108–113.
21. Leksikografski zavod Miroslav Krleža. (2021a). *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. <https://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=62072> (pristupljeno: 4. prosinca 2021).
22. Leksikografski zavod Miroslav Krleža. (2021b). *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. <https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=67351> (pristupljeno: 5. listopada 2021).
23. Leksikografski zavod Miroslav Krleža. (2021c) *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. <https://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=43055> (pristupljeno: prosinac 2021).
24. Leksikografski zavod Miroslav Krleža. (2021d) *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. <https://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=43054> (pristupljeno: prosinac 2021).
25. Hrvatski jezični portal. *Hrvatski jezični portal*. [https://hjp.znanje.hr/index.php?show=search\\_by\\_id&id=fV1nWg%3D%3D](https://hjp.znanje.hr/index.php?show=search_by_id&id=fV1nWg%3D%3D) (pristupljeno: prosinac 2021).
26. Liebeck, P. (1995). *Kako djeca uče matematiku*. Educa.
27. Markovac, J. (2001). *Metodika početne nastave matematike*. Školska knjiga.
28. Matijević, M. (2011). (Na)učiti kako se uči (matematika). *Poučak*. 12(45), 30–38.
29. Mind Your Decisions. (2015). *Always Remember Your Times Table (6 to 10) Using Finger Multiplication*. <https://www.youtube.com/watch?v=x2Nr-f02AUY> (pristupljeno: prosinac 2021).
30. Ministarstvo znanosti i obrazovanja. (2017). *Nacionalni kurikulum na osnovnoškolski odgoj i obrazovanje*. Ministarstvo znanosti i obrazovanja.

31. Peter-Koop, A., i Scherer, P. (2012). Early Childhood Mathematics Teaching and Learning. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(2), 175–179.
32. Pitamic, M. (2013). *Montessori igre i aktivnosti za bebe i djecu u ranoj dobi*. Mozaik knjiga.
33. Privatna predškolska ustanova "Planet Montessori". (2021). *Planet Montessori*. <http://www.planet-montessori.ba/index.php/hr/program/montessori-pedagogija> (pristupljeno: prosinac 2021).
34. psichiatria.org. (2021). *Psihologija odnosa*. <https://hr.psichiatria.org/egocentrizma/> (pristupljeno: rujan 2021).
35. Sharma, M. (2001). *Matematika bez suza*. Ostvarenje d. o. o..
36. Skupnjak, D. (2009). Integrirana nastava — prijedlog integracije u početnoj nastavi matematike. *Napredak*. 150(2), 260–270.
37. Višnjić Jevtić, A. (2021). *Tranzicija kao proces: Je li važnije putovati ili stići?* Studentski zbor UFZG. Zagreb. <https://www.youtube.com/watch?v=qnfwbuiutYc8> (pristupljeno: prosinac 2021).
38. Vlahović-Štetić, V. (2005). Primjerenost nastave matematike dobi učenika. *Poučak*. 6(24), 17–24.
39. Waldorfska škola u Zagrebu. (2021). *Waldorfska škola u Zagrebu*. <https://www.waldorfska-skola.com/hr/pedagogija/o-waldorfskoj-pedagogiji> (pristupljeno: prosinac 2021).
40. Wynn, K. (1998). Psychological foundations of number: numerical competence in human infants. *Trends in Cognitive Sciences*, 2(8), 296–303.
41. Zlatna djeca. (2012). *Zlatna djeca*. <http://www.zlatnadjeca.com/2012/02/brojalice-na-prste.html> (pristupljeno: prosinac 2021).
42. Žokalj, G. (2021). *Smije li se računati na prste?* Alfa edukacija. [https://alfa-hr.zoom.us/rec/play/Ro-Iw2nDIbQ9uHfzWic2LGaNnPX2cCfpb9sgxCcOFQnzeVd7O97EugKUvAyXpc7jmsAeGKhFml6RD6H7.M5Y98IY-0Vf8EKAG?continueMode=true&\\_x\\_zm\\_rtaid=JHiR6LoOTRqFfAIXSTLczQ.1621434649322.2b199e38d40f1ffc7608dd560cfedeba&\\_x\\_zm\\_rhtaid=166](https://alfa-hr.zoom.us/rec/play/Ro-Iw2nDIbQ9uHfzWic2LGaNnPX2cCfpb9sgxCcOFQnzeVd7O97EugKUvAyXpc7jmsAeGKhFml6RD6H7.M5Y98IY-0Vf8EKAG?continueMode=true&_x_zm_rtaid=JHiR6LoOTRqFfAIXSTLczQ.1621434649322.2b199e38d40f1ffc7608dd560cfedeba&_x_zm_rhtaid=166) (pristupljeno: prosinac 2021).



### **Izjava o izvornosti diplomskog rada**

Izjavljujem da je moj diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristila drugim izvorima osim onih koji su u njemu navedeni.

---

studentica: Paula Vučko