Pridruživanje radarskih podataka manevrirajućem cilju uz smetnje uzrokovane odjekom od mora

Vondra, Bojan

Doctoral thesis / Disertacija

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:168:822654

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-28**



Repository / Repozitorij:

FER Repository - University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing repozitory







Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Bojan Vondra

PRIDRUŽIVANJE RADARSKIH PODATAKA MANEVRIRAJUĆEM CILJU UZ SMETNJE UZROKOVANE ODJEKOM OD MORA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2021.



Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Bojan Vondra

PRIDRUŽIVANJE RADARSKIH PODATAKA MANEVRIRAJUĆEM CILJU UZ SMETNJE UZROKOVANE ODJEKOM OD MORA

DOKTORSKI RAD

Mentor: prof. dr. sc. Davor Bonefačić

Zagreb, 2021.



University of Zagreb

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMPUTING

Bojan Vondra

MANOEUVRING TARGET RADAR DATA ASSOCIATION IN PRESENCE OF SEA CLUTTER

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Professor Davor Bonefačić, PhD

Zagreb, 2021

Doktorski rad izrađen je na Sveučilištu u Zagrebu Fakultetu elektrotehnike i računarstva, na Zavodu za komunikacijske i svemirske tehnologije.

Mentor: prof. dr. sc. Davor Bonefačić

Doktorski rad ima: 456 stranica

Doktorski rad br.: _____

O mentoru

Davor Bonefačić diplomirao je 1993., magistrirao 1996., a doktorirao 2000. godine u području tehničkih znanost, polje elektrotehnika, na Sveučilištu u Zagrebu Fakultetu elektrotehnike i računarstva (FER). Na Fakultetu elektrotehnike i računarstva (FER) radi od 1993. godine, a danas je redoviti profesor u trajnom zvanju na Zavodu za komunikacijske i svemirske tehnologije FER-a.

Godine 1996. bio je gostujući istraživač na Università degli Studi Roma Tre u Rimu, Italija.

Bavi se znanstvenim istraživanjima u području aktivnih integriranih antena, malih i tekstilnih antena te radijskih komunikacija na ljudskom tijelu. Objavio je jedno poglavlje u znanstvenoj knjizi i više od 100 radova u međunarodnim časopisima i na konferencijama. Kao istraživač sudjelovao je na sedam europskih i šest domaćih istraživačkih projekata. Vodio je projekt o tekstilnim antenama koji je financirala Hrvatska zaklada za znanost i koordinirao dvije potpore istraživanjima.

Bio je član ili predsjednik tehničkog ili organizacijskog odbora više od 20 znanstvenih skupova te urednik 13 zbornika radova sa znanstvenih skupova. Recenzent je za više inozemnih znanstvenih časopisa.

Njegov nastavni rad na FER-u uključuje predmete na diplomskom i doktorskom studiju iz područja mikrovalne elektronike, antena te radiofrekvencijskih i radarskih sustava. Nastavnik je i na studiju Vojnog inženjerstva Sveučilišta u Zagrebu. Koautor je tri nastavna priručnika. Prof. Bonefačić bio je mentor više od 30 završnih i diplomskih radova te mentor dviju uspješno obranjenih doktorskih disertacija.

Stručni rad prof. Bonefačića uključuje elektromagnetsku kompatibilnost te procjenu i potiskivanje elektromagnetskih interferencija u radiofrekvencijskim sustavima. Osim toga bavi se procjenom i mjerenjem izloženosti ljudi elektromagnetskim poljima visokih frekvencija. Autor je i koautor više od 40 studija i elaborata iz ovih područja koje je izradio za potrebe privatnih tvrtki i državnih tijela.

Prof. Bonefačić je redoviti član Akademije tehničkih znanosti Hrvatske (HATZ) i tajnik je Odjela komunikacijskih sustava HATZ u dva mandatna razdoblja, 2013.-2017. i 2017.-2021.

Prof. Bonefačić je član (senior member) međunarodne udruge IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) i u nekoliko je navrata obnašao ili obnaša dužnosti predsjednika, dopredsjednika i blagajnika Odjela MTT i Zajedničkog odjela AES/GRS Hrvatske sekcije IEEE. Član je i društava KoREMA (Hrvatsko društvo za komunikacije, računarstvo, elektroniku, mjerenja i automatiku) i Elmar (Elektronika u pomorstvu). Osim toga član je i radne skupine za male antene u okviru EurAAP-a (European Association on Antennas and Propagation).

Nagrađen je brončanom i srebrnom plaketom „Josip Lončar" koje dodjeljuje FER (1993., odnosno 1996.) te godišnjom nagradom „Rikard Podhorsky" (2009.) koju dodjeljuje HATZ.

About the Supervisor

Davor Bonefačić received his Dipl.Ing., Mr.Sc. and Dr.Sc. degrees in Electrical Engineering from the University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing (FER), Zagreb, Croatia, in 1993, 1996 and 2000, respectively. In 1993 he joined the Department of Wireless Communications at the Faculty of Electrical Engineering and Computing in Zagreb. Today he is Full Professor at the Department of Communication and Space Technologies of the same Faculty.

In 1996 he was a visiting researcher at the Third University of Rome, Rome, Italy.

His research interests are in the field of small and integrated antennas, textile antennas and waveguiding structures, and on-body communications. He published one book chapter and more than 100 scientific papers in journals and conference proceedings. As a researcher, he participated on seven European and six national research projects. He was leading a national research project on textile antennas financed by the Croatian Science Foundation and coordinated two research grants.

Prof. Bonefačić participated as member or chair in more than 20 organizing or program committees of international conferences and was editor of 13 international conference proceedings in printed and electronic form. He serves as a reviewer for several international scientific journals.

His teaching activity includes several subjects on microwave engineering, RF systems, antennas and radars at undergraduate, graduate and doctoral studies at Faculty of Electrical Engineering and Computing in Zagreb and at Croatian Military Academy "Dr. Franjo Tuđman". He is co-author of three university textbooks. He was supervisor of more than 30 diploma theses and of two doctoral dissertations.

His professional activities are in the field of EMC, EMI estimation and suppression, EM field measurement and estimation of human exposure to RF EM fields. In these fields he authored and co-authored more than 40 professional and technical papers for government entities and companies.

He is a full member of the Croatian Academy of Engineering (HATZ) and was elected Secretary of the Department of Communication Systems of the Academy for the terms 2013-2017 and 2017-2021.

Prof. Bonefačić is a senior member of IEEE and has served and serves as chair, vice-chair and treasurer in the MTT chapter and AES/GRS joint chapter of the IEEE Croatia Section. He is member of Korema (Croatian Society for Communication, Computing, Electronics, Measurement and Control) and Elmar (Electronics in Marine) professional societies. Also, Prof. Bonefačić is member of the WG for small antennas within the EurAAP (European Association on Antennas and Propagation).

He received the bronze and silver plaques “J. Lončar” from FER for excellence in study and research in 1993 and 1996, respectively. In 2009 he received the “Rikard Podhorsky” award from the Croatian Academy of Engineering (HATZ) for excellence in scientific and professional achievements.

Na ovaj doktorski rad utjecalo je mnogo osoba. Svima njima dugujem zahvalnost.

Naročitu zahvalnost izražavam mom mentoru prof. dr. sc. Davoru Bonefačiću na vrijednim opaskama i savjetima koji su doprinijeli usredotočenom i jasnom oblikovanju rada. Također zahvaljujem svim članovima imenovanog Povjerenstva za obranu doktorskog rada, prof. dr. sc. Zvonimiru Šipušu, prof. dr. sc. Ivanu Petroviću, izv. prof. dr. sc. Biljani Juričić te izv. prof. dr. sc. Mariju Muštri, na njihovim pitanjima, komentarima i sugestijama. Zahvaljujem i doc. dr. sc. Mariju Bukalu na stručnim savjetima koji su mi pomogli u pisanju rada.

Posebnu zahvalnost dugujem kolegama iz Pomorskog centra za elektroniku u Splitu: mr. sc. Ivanu Brkoviću na zalaganju i odobrenju mog doktorskog studija te pristupu podatcima koji su obogatili sadržaj rada, prerano preminulom mr. sc. Mladenu Popoviću na sugestijama u odabiru teme rada, dipl. ing. Albertu Omahenu na zalaganju u nabavi tehničke opreme koja je omogućila da se u radu predloženi algoritmi mogu provjeriti i potvrditi primjenom stvarnih podataka, dipl. ing. Zdravku Koceiću na korisnim savjetima i kritičkim opservacijama rezultata te mag. ing. Harisu Hadžiću na kodiranju predloženih algoritama u programskom jeziku C++.

Naposljetku, želim izraziti zahvalnost Dunji na poticaju i ohrabrenju za upis doktorskog studija, razumijevanju i kontinuiranoj podršci pri neophodnom višegodišnjem odricanju, poglavito vremena, zbog stvaranja rada. Dunja, hvala ti za mnoge, gotovo lektorske, sugestije i ispravke te estetski sud u konačnom oblikovanju doktorskog rada.

Sažetak

Različitost Jadranskog mora u odnosu na otvoreno more, ocean, najviše se reflektira u specifičnoj gustoći valne energije, specifičnom odnosu brzine vjetra prema efektivnoj visini valova, malom privjetrištu, velikom broju otoka. U dostupnoj literaturi ne postoje zapisi o elektromagnetskom raspršenju od morske površine za specifične uvjete Jadrana, pa nije poznata razina točnosti klasičnih parametarskih modela, razvijenih na temelju mjerenja na otvorenom moru, oceanu. Alternativno se statistika odjeka smetnje (i cilja) može ekstrahirati iz estimirane razdiobe, isključivo na temelju uzoraka (otisaka) u okolici praćenog cilja. Tretiranje mjerenja otisaka kao bešumnih, otvara prostor estimaciji razdiobe primjenom neuronskih mreža, pri čemu se iskorištava svojstvo njihove univerzalne aproksimativnosti. U estimaciji amplitudne razdiobe, radijalne mreže pokazuju najpovoljniji omjer točnosti i računalnog opterećenja, važnog za stvarnovremensku aplikaciju. U scenariju praćenja male gumene brodice maskirane valovima, tradicionalni parametarski Swerlingov model ne opisuje dovoljno točno odjek cilja kontaminiran odjecima valova. Djelovanje neuronske mreže kao estimatora razdiobe u scenariju smetnje izrazito teškog repa, rezultira vjerojatnošću zadržavanja staze od 0,3, u odnosu na vjerojatnost 0,02 ostvarene primjenom parametarskog Swerlingovog modela. Minimalno 64 kvantizacijskih razina potrebno je za prijenos amplitudne informacije iz udaljenog radarskog senzora bez značajnih gubitaka.

Ključne riječi: Jadransko more, smetnja mora, Viterbijev algoritam, primjetljivost, višemodelna estimacija, neuronska mreža, IPIX, K-razdioba, Paretova razdioba, nekoherentni radarski senzor

Manoeuvring target radar data association in presence of sea clutter

Context of thesis is innovation in processing tracked target radar echoes that are contaminated by sea clutter returns, in specific application of surveillance of Croatian part of Adriatic basin that is inadequately covered by principle radars. For the Adriatic, it is specific that surface wind waves are limited by fetch and wind duration, so it is mostly immature sea and waves are for this reason steeper, with shorter wavelength than their counterparts in ocean. To the best of author's knowledge, for the Adriatic basin, measured clutter data and its statistics do not exist in open literature. Therefore, it can be assumed that the clutter statistics will be significantly different in comparison to one commonly observed for ocean. Thus, motivation for thesis is mitigation of effects of sea clutter of unknown statistics in application of tracking dim and highly maneuvering surface target that is possibly an illegal vessel, embedded in extensive sea clutter. Neural network employing online learning of unknown statistics is approach applied in thesis.

Thesis outline is as follows. Chapter 1 gives introduction to target tracking methods that are applicable in challenge of tracking dim and maneuvering target embedded in sea clutter, namely, basic methods of maneuvering target tracking, basic description of sea clutter and data association methods and finally, basics of multiple target tracking methods.

Chapter 2 is focused on motion models that well describe expected maneuver, based on observed paths of illegal vessels in Croatian part of Adriatic basin. In the remaining of this chapter, theoretical background of Kalman filtering, expanded with application of extended, unscented and cubature Kalman filtering, as well as particle filtering, is given. While cubature Kalman filtering is extensively used in thesis as nonlinear estimator implemented in interacting multiple models method, applied in problem of tracking a maneuvering target, extended and unscented Kalman filtering are applied as second-order optimization methods for feedforward neural network learning. Particle filtering method is also used in thesis for network learning. Some existing methods of tracking a maneuvering target, namely adaptive covariance, input estimation, variable state dimension and interacting multiple models are described in the remaining of this chapter and compared in practical example given in the last section. Results show that best position and velocity accuracy during maneuver is achieved with method of interacting multiple models. Hence, this method is used throughout thesis.

In Chapter 3, sea clutter is described in context of statistical properties and nonlinear stochastic process. Statistical properties include commonly used Georgia Institute of Technology (GIT) and hybrid models of normalized radar cross section for low grazing angles (up to approximately 10°) that can be expected in scenarios of radar operating on unmanned surface vehicle and Imaging Radar System Group (IRSG) model for high grazing angles (above 10°) that

can be expected in scenarios of radar operating on unmanned aerial vehicle. In the remaining of the chapter, models based on physical interpretation of clutter such as K- and KA-distribution of clutter amplitude and more heavy-tailed Pareto and KK-distribution, which were derived from numerous measurement data, are described. For scenarios of high grazing angles (from approximately 15° to approximately 45°), properties of Doppler spectra and time correlations, as well as entropy based decomposition, are described. Finally, last section of the chapter describes sea clutter viewed as nonlinear and hybrid amplitude and frequency modulated stochastic process. Example given in the last section of this chapter explores various clutter statistical properties that can be thought as clutter signature. In the last section of this chapter, normalized radar cross section of clutter, probability of its amplitude distribution, Doppler spectra and time correlations are analyzed for both horizontal and vertical polarization, using real data available from Intelligent Pixel Processing Radar (IPIX). Also, polarimetric properties are presented in the form of entropy based decomposition method. It is emphasized in the beginning of the chapter that dependency of significant wave height on wind velocity in Adriatic Sea is different than in ocean. Furthermore, dependency of significant wave height on significant wavelength is also different. Based on these findings, contribution of thesis in this chapter is:

- Modification of GIT and IRSG models, as well as models for Doppler spectrum width and time correlation under condition of high grazing angles (above approximately 10°), with dependency of significant wave height on wind velocity that is specific for Adriatic Sea.

Focus of Chapter 4 is data association process, necessarily in scenarios of tracking target embedded in clutter. In contrast to detection logic approach described in the beginning of the chapter, probabilistic and Viterbi data association approach, described thereafter, are not limited by number of measurements that fall inside validation gate of tracked target. It is generally known that tracking such a target is greatly improved by introduction of likelihood ratio into association process and, to some extent, parameter of clutter density. Some existing methods of estimating latter are given in the remaining of the chapter. Thesis contributions in this chapter are:

- Methodological derivation of traditional probabilistic and Viterbi data association algorithms employing measure of track quality, implemented in multiple models framework. Traditional Viterbi data association algorithm is modified by the concept of target perceivability, allowing, in contrast to probabilistic data association method, non-zero probability that target, which was not perceivable in previous observation time, can be perceivable in current time. In the proposed method, all nodes share common validation volume. Compared to probabilistic data association method, proposed method gains up to 4 dB in signal to clutter ratio, constrained to heavy-tailed clutter and probability of continuous tracking of maneuvering target through its lifetime (denoted by P_{TT}) greater than 0.4.

- Proposition of optimal kernel width in method of kernel density estimation, under assumption of Rayleigh distributed clutter. This method is used in estimation of clutter density parameter.

Analysis conducted in the example section of this chapter reveals significant gain in probability P_{TT} when target and sea clutter signature are applied in data association process and, to some extent, higher accuracy of position and velocity estimation. But, applying clutter density parameter mostly results in insignificant gain. These findings pose necessity of signature estimation, in which neural network is suitable choice due to its universal approximation property, provided that measurement noise is negligible.

Thus, in Chapter 5, two types of neural networks suitable for signature estimation are analyzed: first is radial basis function network and second is feedforward network with one hidden layer. Since there is no documented data of sea clutter statistics of Adriatic Sea, performance of these networks are evaluated using two sets of real radar data from IPIX radar. First set is taken under condition of sea state from 3 to 4 and second from 4 to 5. Hence, it is believed that unknown amplitude distribution of sea clutter in Adriatic Sea will have distribution tail ranging from moderate tail K-distribution to heavy-tailed Pareto distribution, as described by data from these sets. Performances of radial basis function network and feedforward network are analyzed in terms of estimation accuracy and computation time. It is found that accuracy of the radial basis function network is best when using maximization-expectation method of deriving network parameters. Smaller (up to 50 %) computation time is achieved using k-nearest neighbors method employing unbiased cross validation to determine scale parameter, which can be further adapted according to class statistic. As achieved accuracy is significantly worse compared to expectation-maximization method, the latter one is used throughout thesis. In contrast to maximization-expectation and k-nearest neighbors methods that are batch methods, sequential Kalman filtering methods, namely extended and unscented Kalman methods, are employed in estimation of weights of feedforward network with one hidden layer. In addition, accuracy and computation time is analyzed employing particle filtering method. Both radial basis function network and feedforward network are implemented in detection and association segment of Viterbi data association process. In latter, radial basis function network and expectation-maximization method is suitable for density estimation of clutter amplitude due to its batch oriented nature and moderate number of samples available at each observation time. Feedforward network is suitable for target amplitude density estimation due to sequential nature of weights estimation and fact that only one sample, at most, is available per observation time. Feasibility of network employment is tested by means of two null hypothesis:

H1 probability of continuous tracking of a maneuvering target through its entire lifetime by employing a neural network is not significantly worse compared to employment of parametric model that describes statistics of real clutter well

H2 probability of continuous tracking of a maneuvering target through its entire lifetime by employing a neural network is significantly better compared to employment of parametric model that does not describe statistics of real clutter well.

Hypotheses are tested employing radial function network only. It is found that, throughout expected signal to clutter ratios, hypothesis H1 is accepted for employment in detection process but not entirely in association process due to smaller number of target samples. While hypothesis H2 is not accepted for employment in detection process for expected signal to clutter ratios and moderate tail K-distribution of clutter, it is accepted for low signal to clutter ratios (below approximately 5 dB) for heavy-tailed Pareto distributed clutter. Regarding association process, hypothesis H2 is accepted in scenarios when tracked target is masked with waves and hence its amplitude distribution largely deviates from Swerling I model which is commonly used to describe amplitude fluctuations of sea surface targets. Thesis contributions in this chapter are:

- Analysis of neural networks that are suitable for clutter density estimation, in terms of their accuracy and with respect to number of neurons in hidden layer, constrained by limited number of clutter samples in vicinity of tracked target. Also, performances of radial basis function and feedforward network are analyzed in terms of computation time, depending on the learning algorithm (expectation-maximization, unbiased cross-validation, extended and unscented Kalman and particle filtering).
- Method of incremental smooth interpolation of cumulative is proposed. It is modification of Smooth Interpolation of Cumulative (SIC) method which employs batch learning. Proposed method employs sequential learning as it uses iterative extended Kalman filtering. It is shown that resulting estimation accuracy is not significantly worse compared to SIC method, in scenarios when samples are drawn from Rayleigh distribution, moderate tail K-distribution or heavy-tailed Pareto distribution. Estimation accuracy is significantly better compared to estimation employing radial basis function network and expectation-maximization method.
- Method of implementation of neural network in detection and association process. In the latter process, neural network is used as estimator of both the clutter and the target amplitude probability density.

In Chapter 6, effects of amplitude quantization are considered. Quantization is necessarily in order to transfer amplitude information (or radar video) from remote radar sensor as digital information through communication channel to some central location where tracking processing is performed. It is found that, with method of dithering applied, 64 quantization levels (or a 6-bits word) are enough to transfer, without significant losses in density estimation accuracy, radar video sampled from wide range of distributions, ranging from Rayleigh (model of target echo fluctuations) to moderate tail K-distribution and heavy-tailed Pareto distribution (models of clutter or wave masked target). Contribution of thesis in this chapter is:

- Estimation of minimum number of discrete quantization levels to transfer radar video as digital information through communication channel. Considered distributions are Rayleigh (model of target amplitude density), moderate tail K-distribution and heavy-tailed Pareto distribution (models of clutter that are expected in two thirds of time in Adriatic Sea).

In conclusion, proposed adaptation of traditional Viterbi data association method employs well known concept of perceivable target. It allows tracking of target that exists in surveillance volume but is temporarily undetectable, due to obstacles such as islands or other kinds of shadowing. Tracking is performed while the probability of target existence is above some threshold, design parameter which is throughout thesis set to approximately 0.15. It is found that, for detection probability $P_D \approx 0.8$ and Swerling I target model, proposed Viterbi method gains $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \lesssim 4$ dB in signal to clutter ratio $\mathcal{R}$, throughout expected range $-5 \text{ dB} \leq \mathcal{R} \leq 20$ dB, compared to traditional method of probability data association. While introduction of clutter density parameter into proposed method does not significantly increase probability of continuous tracking P_{TT}, introduction of likelihood ratio does, resulting in increase $\Delta P_{TT} \lesssim 0.4$.

In the context of real-time application, it is shown that employment of radial basis function network and expectation-maximization method exhibits favorable ratio of density estimation accuracy to computing time. In contrast to expectation-maximization method, unbiased cross validation method offers estimation accuracy one order of magnitude lower, for computation time of the same order of magnitude. For comparison, kernel density estimation method exhibits computation time two orders of magnitude higher, for the approximately same accuracy level.

Performance analysis of feedforward network with one hidden layer and quasi-Newton method of learning reveals that, in comparison to expectation-maximization method implemented in radial basis function network, same level of accuracy is reached with smaller number of neurons ($m = 3$ in comparison to $m = 8$ for the expectation-maximization method), and computation time is one order of magnitude higher. Convergence depends on number of samples N and is slightly lower ($o\left(N^{-0.9}\right)$ compared to $o\left(N^{-1}\right)$ for the expectation-maximization method). It is found that implementation of Kalman filtering sequential methods, namely iterative extended and unscented methods, yield approximately same level of estimation accuracy as batch quasi-Newton method. While the convergence is lower compared to expectation-maximization method, computation time is three times higher, under condition that total number of samples N is divided into batches of $n_z = 32$ samples. If batches are not used, computation time is approximately two orders of magnitude higher. In context of receiver operating characteristics, iterative extended Kalman filtering and quasi-Newton method achieve best match between estimated false detection probability $\hat{P}_{FA}$ and designed one. However, large deviation of estimate $\hat{P}_{FA}$ for designed values $P_{FA} \lesssim 10/N$ limit feasible range of design false detection probabilities to $P_{FA} \gtrsim 10/N$, in contrast to radial basis function network, where this range is $P_{FA} \gtrsim 1/N$.

Sequential learning of feedforward network by means of Kalman filtering is suitable for target amplitude probability density estimation due to fact that, for each observation, at most one sample of target return is available. Therefore, method of smooth interpolation of cumulative (essentially a batch method), is adapted into its incremental form. It is found that estimation accuracy of proposed method is not significantly worse than its batch version in scenario of estimating moderate tail K-distribution or heavy-tailed Pareto distribution, but is significantly better than expectation-maximization method in scenario of estimating Rayleigh distribution (which is actually a Swerling I target model, commonly used as amplitude distribution model for fluctuating sea surface targets). In context of computation time, it is found that for number of samples $N \gtrsim 200$, computation time is lower compared to expectation-maximization method. Above mentioned pros and cons of radial basis function and feedforward network suggest employment of former in estimation of both clutter and target probability density. Evidently, estimate using radial basis function network is always a probabilistic function, in contrast to feedforward network where forcing monotonicity into learning process is necessarily, as well as normalization of resulting transfer function $h\left(\zeta,\hat{\boldsymbol{W}}\right)$ into $h^{(*)}\left(\zeta,\hat{\boldsymbol{W}}\right)=\mathrm{b}+\mathrm{c}\,h\left(\zeta,\hat{\boldsymbol{W}}\right)$, where b is bias such that $\lim_{\zeta\to 0}\left(h\left(\zeta,\hat{\boldsymbol{W}}\right)\right)=0$ and c is scaling such that $\lim_{\zeta\to\infty}\left(\mathrm{b}+\mathrm{c}\,h\left(\zeta,\hat{\boldsymbol{W}}\right)\right)=1$. Learned network weights are denoted as $\hat{\boldsymbol{W}}$ and ζ is value of radar return amplitude.

In scenario of tracking dim and maneuvering sea surface target, typically a small rubber boat with radar cross section ranging from approximately 1 m^2 to approximately 5 m^2, probability density of amplitude returns largely deviates from commonly used Swerling I model due to effect of wave masking. Density estimation employing radial basis function network, implemented in Viterbi data association framework, yields significantly better probability of continuous tracking of this kind of target throughout its path, compared to parametric model approach employing Swerling I model. Resulting probabilities $P_{TT}=0.26$ for moderate tail K-distributed clutter and $P_{TT}=0.3$ for heavy-tailed Pareto distributed clutter are significantly higher than ones resulting from parametric approach, namely $P_{TT}=0.18$ and $P_{TT}=0.017$ for moderate tail K-distribution and heavy-tailed Pareto distribution of clutter respectively. These figures are obtained under condition of designed false detection probability $P_{FA}=0.5$ and target detection probability $P_D\approx 0.8$.

In scenario where actual probability density of target amplitude returns indeed obeys Swerling I model, probability of continuous tracking throughout target path is, for radial basis function network approach, significantly lower compared to reference parametric approach, under condition of moderate tail K-distribution and heavy-tailed Pareto distribution of clutter, constrained by parameters of false detection probability $P_{FA}\gtrsim 0.05$ and detection probability $P_D\approx 0.8$. Overall losses in signal to clutter ratio thus are $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}\lesssim 2$ dB. Primary reason for these losses lies in reduced accuracy of target and clutter amplitude density estimation due to significantly smaller number of samples compared to infinite number of samples used by reference parametric

method. It is worthwhile to mention that number of target amplitude samples is about one tenth of clutter samples, resulting in estimation accuracy one degree of magnitude lower compared to clutter density estimation. Secondary reason is that set of target samples can be corrupted by samples that actually originate from clutter. This can happen when association algorithm incorrectly decides that some measurement, which is actually a clutter return, originates from target. Mentioned phenomena is not pronounced for a set of clutter samples as there some few falsely classified returns will not decrease estimation accuracy significantly, due to large number of correctly classified samples. Nevertheless, it is found that employing radial basis function network for estimation of likelihood ratio still gains approximately 2 dB in signal to clutter ratio, compared to scenario without its employment, for moderate tail K-distribution of clutter and target return fluctuations according to Swerling I model. For heavy-tailed Pareto distribution of clutter, there is no significant gain for signal to clutter ratios $\mathcal{R} \lesssim 2$ dB.

It is found that sea clutter amplitude density estimation employing radial basis function network in detection process yields probability of continuous tracking of maneuvering target that is not significantly lower compared to reference parametric method, provided that clutter amplitude density is described well by the model. In scenarios where it is not, i.e. when (parametric) model overestimates or underestimates distribution tail (e.g. employing heavy-tailed Pareto distribution model when actual distribution of clutter is moderate tail K-distribution or vice versa), no significant difference in tracking probability is observed for real-world applications (e.g. only 0.2 dB gain in signal to clutter ratio in favor to radial basis function network method, under condition of moderate tail K-distributed clutter and probability detection of Swerling I target approximately 0.8).

In order to transfer radar video from remote sensor to some central location where tracking process is performed, quantization effects, resulting from digitized video transfer through communication channel, have to be considered. It is found that, for medium tail K-distribution and heavy-tailed Pareto distribution of clutter, employing minimum number of quantization levels $N_{Q_w} \approx 32$ results in amplitude density estimation (performed on central location) with accuracy that is not significantly lower than one which does not use quantized samples. This figure is constrained to method of dithering, which demands synchronization of dithering noise on both the remote sensor location and the central location. For Swerling I target model (amplitude density follows Rayleigh distribution), minimum number of quantization levels is $N_{Q_w} \gtrsim 64$. Consequently, a 6-bits quantization of radar video covers all expected amplitude distributions, employing method of dithering which results in probability of continuous tracking of dim and maneuvering target without significant loss.

In conclusion, specific physical properties of Adriatic basin demand conduction of large number of measurements in order to evaluate accurate parametric model of Adriatic Sea clutter that is constrained by expected sensor grazing angle, frequency and polarization, as well as by

location. Meanwhile, method of estimating clutter (and target) radar signature, implemented by employing neural network in detection and association process, can be used as replacement for this, currently unknown, parametric model.

Keywords: Adriatic Sea, sea clutter, Viterbi algorithm, perceivability, multimodel estimation, neural network, IPIX, K-distribution, Pareto distribution, non-coherent radar sensor

Sadržaj

1. Uvod 1
1.1. Tema i organizacija rada 8
1.2. Znanstveni doprinosi 10

2. Metode estimacije vektora stanja manevrirajućeg cilja 13
2.1. Opis gibanja cilja 13
2.1.1. Gibanje cilja kao stohastički proces 14
2.1.2. Model nemanevrirajućeg gibanja cilja 17
2.1.3. Model manevrirajućeg gibanja cilja 19
2.2. Model mjerenja 26
2.3. Estimacija 29
2.3.1. Okvir Kalmanovog filtriranja 31
2.3.2. Metoda čestičnog filtriranja 41
2.3.3. Metode estimacije vektora stanja manevrirajućeg cilja 52
2.4. Primjer 74
2.5. Zaključak 83

3. Interpretacija smetnje mora 85
3.1. Nastanak površinskih valova 86
3.2. Statističke značajke smetnje 88
3.2.1. Radarski presjek 88
3.2.2. Amplitudna razdioba 96
3.2.3. Dopplerov spektar 102
3.2.4. Vremenska korelacija 107
3.2.5. Polarimetrijske značajke 108
3.3. Smetnja mora kao stohastički proces 113
3.4. Primjer 116
3.5. Zaključak 125

4. Pridruživanje podataka uz izraženu smetnju mora 127

4.1. Uvod . . . 127
4.2. Inicijalizacija i potvrda staze detekcijskom logikom . . . 129
4.3. Održavanje staze pridruživanjem podataka . . . 138
4.3.1. Vjerojatnosna metoda s integriranom mjerom kvalitete praćenja . . . 139
4.3.2. Viterbijeva metoda s integriranom mjerom kvalitete praćenja . . . 152
4.4. Estimacija prostorne gustoće smetnje . . . 163
4.5. Primjer . . . 173
4.6. Zaključak . . . 194

5. Primjena neuronskih mreža u procesu pridruživanja . . . 197
5.1. Implementacija radijalne mreže . . . 203
5.1.1. Primjena u estimaciji amplitudne razdiobe . . . 205
5.1.2. Primjer primjene mreže RBF u procesu nekoherentne detekcije . . . 212
5.2. Implementacija acikličke slojevite mreže . . . 244
5.2.1. Primjena u estimaciji amplitudne razdiobe . . . 247
5.2.2. Primjer primjene u estimaciji amplitudne razdiobe . . . 265
5.3. Primjer estimacije omjera vjerodostojnosti . . . 277
5.4. Zaključak . . . 304

6. Utjecaj kvantizacije na točnost estimacije amplitudne razdiobe . . . 309
6.1. Kvantizacija razdiobe . . . 310
6.2. Primjer . . . 316
6.3. Zaključak . . . 331

Zaključak . . . 333

Literatura . . . 337

Popis oznaka . . . 369

Kazalo pojmova . . . 394

Popis slika . . . 395

Popis tablica . . . 405

Dodatak A. . . . 407
A.1. Jedinična, dijagonalna i nul-matrica . . . 407
A.2. Hadamardov produkt . . . 407

Dodatak B. . . . 409

B.1. Konzistentnost estimacije 409

Dodatak C. 413
C.1. Testiranje značajki metoda 413

Dodatak D. 415
D.1. Drugokorijenski kubaturni Kalmanov filtar 415

Dodatak E. 419
E.1. Demonstracija rada Viterbijeve metode pridruživanja 419
E.1.1. Praćenje testnog cilja 422
E.1.2. Praćenje testnog cilja fluktuirajućeg odjeka 427
E.1.3. Praćenje jahte u blizini obale 431
E.1.4. Praćenje izolirane brodice, varijanta 1 435
E.1.5. Praćenje izolirane brodice, varijanta 2 439
E.1.6. Praćenje brodice u blizini druge brodice 443
E.1.7. Praćenje izolirane brodice pri smetnji kiše 447

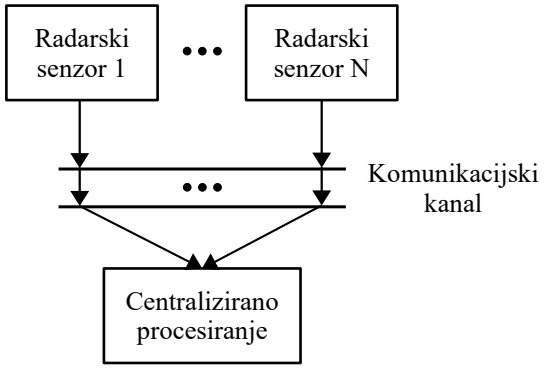
Životopis 453

Biography 455

Poglavlje 1

Uvod

Kontekst doktorskog rada je inovacija u procesiranju radarskih podataka kontaminiranih smetnjom mora, u aplikaciji nadzora dijela akvatorija koji se nalazi u radarskoj sjeni primarnih radara. U širem kontekstu centralizirane fuzije podataka, radarski se podaci kombiniraju na centralnoj lokaciji gdje se staza izoliranog cilja estimira na temelju podataka iz nekoliko radarskih senzora, instaliranih na udaljenim bespilotnim platformama (USV), kako je ilustrirano slikom 1.1. Adekvatni senzori za ovu primjenu su jeftini i komercijalno dostupni (COTS) radarski senzori u X-frekvencijskom području ($\approx$ 9,4 GHz). Uobičajeno se odlikuju mehanički rotirajućom antenom i prijemnikom visoke dinamike (logaritamski prijemnik) s dostupnom amplitudom odjeka, bez informacije o fazi. Očekivani ciljevi su izolirana (i moguće ilegalna i zlonamjerna) površinska plovila u ekstenzivnoj smetnji mora, malog radarskog presjeka i visokih manevarskih sposobnosti, gibanja koje prati obalnu liniju i koje se može aproksimirati kompozicijom skoro linearnih segmenata i polukružnih okreta kako je predloženo u [1].

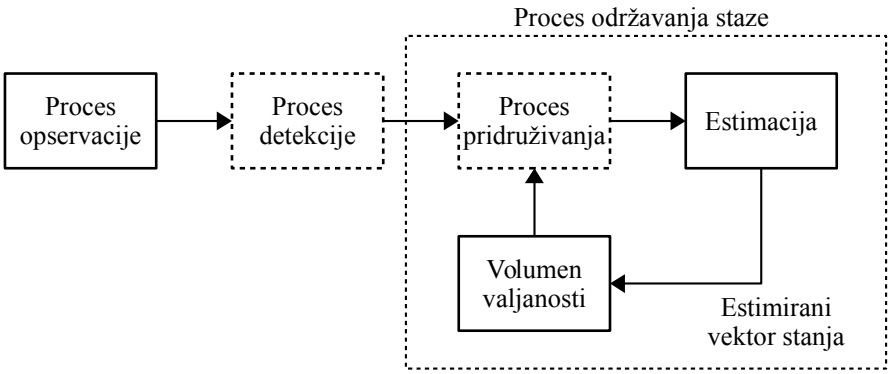


Slika 1.1. Koncept centralizirane fuzije podataka.

Učinkovito potiskivanje smetnje mora u procesu obrade radarskih odjeka ovisi o točnosti modela smetnje, odnosno točnosti opisa statističkih značajki raspršenja elektromagnetske energije od površine mora u ovisnosti o uvjetima okoline (brzina vjetra, stanje mora i sl.) te značajkama senzora poput frekvencije, polarizacije, upadnog kuta i razlučivosti, a dostupna literatura,

vidi npr. [2] za iscrpni popis recentnih i relevantnih publikacija vezano za ovu tematiku, pruža modele temeljene na rezultatima mjerenja koja su provedena na otvorenim morima odnosno oceanima. Po autorovom saznanju, za Jadransko more koje je specifično u odnosu na ocean, ne postoji takva literatura, ali nedavna mjerenja statističkih značajki amplitudne razdiobe i radarskog presjeka u uvjetima nepotpuno razvijenoga Sredozemnog mora [3, 4], pokazuju kvalitativno slaganje s mjerenjima na oceanu, vidi npr. [5, 6]. Navedeno sugerira jednaka očekivanja i za Jadran, premda nekritička primjena modela i rezultata mjerenja koja su provedena na otvorenim morima (oceanima) može rezultirati ozbiljnom degradacijom značajki cijelog sustava praćenja, npr. čestom gubljenju staze cilja u smetnji, niskom vjerojatnošću detekcije, prekomjernim brojem lažnih detekcija i sl. Kako je naglašeno u [7], statističke značajke raspršenja elektromagnetske energije od morske površine ovise i o uvjetima poput blizine obale, karakteru morskih struja, privjetrišta, dubine i uvjetima propagacije morskih valova (postojanje prepreka i sl.), što implicira potrebu velike količine mjerenja kako bi se formirao vjerodostojni model. Stoga nepoznavanje točnog modela smetnje specifične za Jadran sugerira potrebu stvarnovremenskog učenja na temelju prikupljenih mjerenja za vrijeme praćenja cilja, poluparametarskom estimacijom statističkih značajki smetnje primjenom neuronske mreže, pod uvjetom da je ovakva metoda dovoljno točna i proces praćenja učinkovit u zadovoljavajućoj mjeri.

Sama problematika praćenja manevrirajućeg cilja u smetnji mora fokus je istraživanja već nekoliko desetljeća. Proces praćenja, ilustriran za primjer jednog cilja slikom 1.2, zahtijeva proces održavanja staze koji mora biti robustan s obzirom na tri izazova: manevrirajućeg gibanja cilja, višestrukih mjerenja te male snage odjeka (intenziteta) cilja u odnosu na smetnju. Procesom opservacije, pored stanja cilja, mogu se izdvojiti i njegove karakteristične osobine (otisak, engl. *target signature*), poput statistike fluktuacije amplitude odjeka ili intenziteta, prostorne veličine, polarimetrijskih svojstava i sl. te proslijediti procesu pridruživanja kako bi se smanjio utjecaj eventualnih višestrukih mjerenja koja nastaju zbog smetnje [8–11]. Proces pridruživanja, usko povezan s estimacijom i opservacijom, zahtijeva opis smetnje koji se uobičajeno provodi parametrom njene volumne gustoće i amplitudne razdiobe, uz pomoć opisne statistike ili fizikalnog modela. A u ovisnosti o udaljenosti ciljeva u opservacijskoj domeni, proces pridruživanja je uklopljen unutar višestrukih kopija (jedne po cilju) metode za praćenje jednog cilja ako se pojedinačni volumeni valjanosti (prostor u opservacijskoj domeni gdje se s visokom sigurnošću, uobičajeno od 0,9 do 0,99, očekuje odjek cilja) ne preklapaju, odnosno u metodu za istovremeno praćenje više ciljeva ako vrijedi suprotno.



Slika 1.2. Ilustracija procesa praćenja manevrirajućeg cilja u smetnji za umjerene (od približno 10 dB do približno 15 dB) i visoke (iznad približno 15 dB) omjere snage odjeka cilja prema smetnji. Za niske omjere (približno 10 dB i manje), proces detekcije i pridruživanja implicitno se provodi estimacijom.

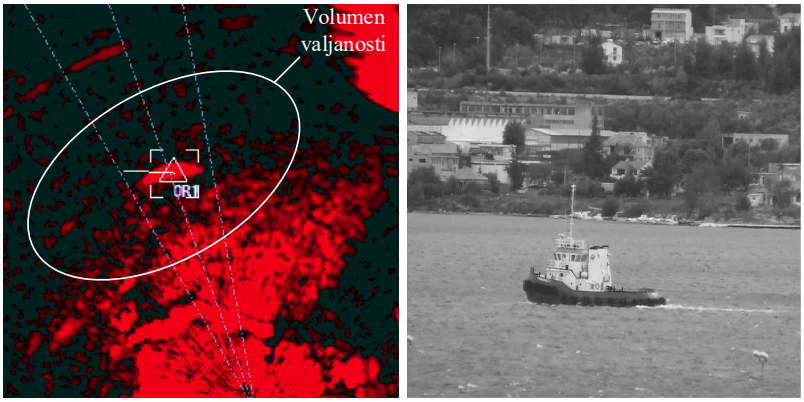
Povijesno gledajući, razvoj estimatora za praćenje manevrirajućeg cilja počinje jednomodelnim pristupom koji manevru pristupa kao stohastičkom procesu i akceleraciji, uzrok manevru, kao komponenti vektora stanja. Dok je dobra strana ovog pristupa jednostavnost izvedbe, loša strana je povećana kovarijanca greške estimacije za vrijeme nemanevrirajućeg gibanja cilja gdje bi model za skoro jednoliko gibanje, s vektorom stanja bez komponente akceleracije, bio prikladniji. Prirodno proširenje jednomodelnog pristupa je uvođenje hipoteze o postojanju manevra [12–14]. Hipoteza se testira nakon određenog broja opservacija, a ako je potvrđena, estimacija se provodi ili korištenjem odgovarajućeg modela za manevrirajući cilj ili na temelju izravne estimacije vrijednosti akceleracije [15]. U suprotnom, kada hipoteza nije potvrđena, koristi se model za skoro jednoliko gibanje. Nedostatak ovog pristupa je u tome što se odluka donosi isključivo, s potpunim vjerovanjem u točnost hipoteze iako u stvarnosti ne mora biti tako. Nadalje, odluka se donosi prije estimacije iako bi ona (estimacija) pružila korisne informacije za odluku [16]. Ovaj nedostatak prevladan je višemodelnim pristupom, ali uz cijenu povećane složenosti estimatora. Višemodelnim pristupom uspješno se rješava izazov praćenja manevrirajućeg cilja jer se estimacija istovremeno provodi pod različitim hipotezama o karakteru (modu) gibanja. Svaka hipoteza, npr. hipoteza o jednolikom gibanju, kružnom gibanju itd., u osnovi predstavlja model gibanja koji je matematička aproksimacija stvarnog moda gibanja. Krajnja estimacija rezultat je kombinacije pojedinačnih estimacija, s razinom vjerovanja (vjerojatnošću) da primijenjeni model odgovara stvarnom modu. U metodama prve generacije višemodelnog pristupa, pretpostavljen je vremenski nepromjenjivi mod gibanja. Međutim, u problematici praćenja manevrirajućih ciljeva, karakter i manevarske sposobnosti cilja često nisu poznati pa pretpostavka postojanja vremenski nepromjenjivog moda nije realna i stoga je odbačena u metodama druge generacije koje, za svaki trenutak opservacije, pretpostavljaju jedan, ali nepoznat, mod gibanja. Drugim riječima, mod gibanja cilja mijenja se tijekom vremena. Pri tome je broj modova konačan i vremenski nepromjenjiv. Naposljetku, metode posljednje generacije

odbacuju i pretpostavku vremenske nepromjenjivosti skupa modova te pretpostavljaju, za svaki trenutak opservacije, postojanje moda gibanja kao člana vremenski promjenljivog skupa [16].

Broj hipoteza u metodi optimalne višemodelne estimacije eksponencijalno raste tijekom vremena pa u svrhu smanjenja računalne složenosti postoje različite tehnike njihove redukcije, npr. poopćena prividno-Bayesova metoda (GPBN) koja sve jednake hipoteze u zadnjih N vremenskih uzoraka spaja u jednu [15], zadržavanje određenog broja najvjerojatnijih hipoteza [17, 18], Viterbijev algoritam kojim se u svakom trenutku određuje najvjerojatniji slijed promjene modela [19], a metoda s međudjelovanjem između modela (IMM), klasično je rješenje zbog optimalnog omjera učinkovitosti, mjerljive s metodom GPB2, i složenosti koja je jednaka metodi GPB1 [20, 21].

Kada u ćeliji razlučivosti senzora ne postoji dovoljan broj jednolikih reflektora morske površine odnosno valova, središnji granični teorem nije zadovoljen i odjek, za razliku od pozadinskog termičkog šuma, odstupa od Gaussovog procesa. Stoga razdioba amplituda nakon amplitudne detekcije nije uobičajeno Rayleighova i snaga pozadinske smetnje pokazuje veću izglednost pojave velikih vrijednosti, višu od očekivane, rezultirajući takozvanom razdiobom teškog repa [22, 23]. Modeliranje smetnje mora provodi se ili uz pomoć opisne statistike ili modelom koji pokušava objasniti njene fizikalne mehanizme. Modeliranje pomoću opisne statistike provodi se nalaženjem parametara razdiobe teškog repa poput Weibullove, logaritamski normalne i sl. ili, u slučaju visokorazlučivog senzora (radijalne razlučivosti reda veličine metra ili manje), Paretove razdiobe [24]. Pristup koji pokušava objasniti fizikalne mehanizme koji dovode do smetnje, pritom smatrajući da je broj odjeka unutar ćelije razlučivosti senzora konačan i raspodijeljen prema negativnoj binomnoj razdiobi, sa srednjom vrijednošću koja teži k beskonačnosti [23, 25], vodi široko prihvaćenom modelu K-razdiobe pri čemu analize pokazuju dobro poklapanje sa stvarnim podacima [26]. U njenoj fizikalnoj interpretaciji, smetnja se promatra kao složeni proces dugoročnih i kratkoročnih fluktuacija. Pri tome su dugoročne fluktuacije rezultat kolebanja strukture morske površine, vremenske korelacije (s obzirom na ćeliju razlučivosti) nekoliko sekundi, dok su kratkoročne posljedica velikog broja nezavisnih i unutar ćelije razlučivosti jednoliko raspodijeljenih reflektora, vremenske korelacije nekoliko milisekundi, ovisno o internim gibanjima reflektora i valnoj duljini emitirane elektromagnetske energije. Nejednolika raspodjela ili nekoliko izraženih reflektora unutar ćelije razlučivosti dovode do pojave tzv. igličastih odjeka, posebno ako je senzor visokorazlučiv i upadni kut veliki, tipično poviše 10°. Fizikalna interpretacija ove pojave rezultira KA-razdiobom, uopćenjem K-razdiobe [27], pri čemu je pojava igličastih odjeka modelirana kao Poissonov proces. Alternativno, smetnja igličastih odjeka može se opisati mješavinom dvaju K-razdioba od kojih prva odgovara razdiobi amplitude odjeka od kreste vala, dok je druga prilagođena pojavi igličastih odjeka i nema fizikalnu osnovu [5, 28].

Pridruživanje podataka stazi postojećeg cilja uz izraženu smetnju mora izazov je zbog višestrukih mjerenja jer, kako je ilustrirano slikom 1.3, nije sa sigurnošću poznato pripada li određeni odjek cilju ili smetnji. Metode pridruživanja poput najbližeg ili najjačeg susjeda prikladne su za praćenje nemanevrirajućeg cilja ili kada je snaga odjeka cilja visoka (približno 15 dB ili više) u odnosu na snagu smetnje. Pridruživanje se tada provodi uzimanjem u obzir samo najbližeg (u odnosu na apriornu estimaciju) ili najjačeg odjeka te odbacivanjem ostalih. Naprednije metode poput vjerojatnosnog pridruživanja, dijeljenja staze, implementacije Viterbijevog algoritma, neizrazitog (*fuzzy*) pridruživanja te kombinacije navedenih, razvijene su za scenarij praćenja manevrirajućeg cilja u jako izraženoj smetnji, kada se unutar volumena valjanosti očekuje nekoliko odjeka smetnje te kada je omjer snage signala prema smetnji umjeren ili malen, tipično od 10 dB do 15 dB. U metodi vjerojatnosnog pridruživanja podataka (PDA), sva mjerenja unutar volumena valjanosti uzimaju se u obzir te se za svako mjerenje posebno računa vjerojatnost, odnosno razina vjerovanja, da potječe od cilja i da sva ostala mjerenja potječu od smetnje. Tako se estimatoru privodi usrednjena vrijednost preko svih mjerenja pri čemu je razdioba vjerojatnosti aproksimirana Gaussovom razdiobom [8, 29]. U metodi dijeljenja staze [30], svaki put kada postoji više od jednog mjerenja unutar volumena valjanosti, postojeća staza se dijeli i svako se mjerenje posebno pridružuje segmentu podijeljene staze, a problem redukcije lažnih segmenata rješava se biranjem onog najvjerodostojnijeg. Viterbijevim se algoritmom u svakom trenutku određuje mjerenje za koje je slijed pridruživanja mjerenja stazi kroz rešetkasti dijagram najvjerodostojniji [31], dok u metodi neizrazitog pridruživanja [32], volumen valjanosti ovisi o snazi odjeka cilja pri čemu se pridruživanje provodi neizrazitim tehnikama odlučivanja. Uz izraženu smetnju, metode poput Viterbijevog algoritma i neizrazitog pridruživanja pokazuju bolje rezultate u pogledu vjerojatnosti zadržavanja i gubljenja staze. Tako je u [31] pokazano da se Viterbijevim algoritmom postiže manja vjerojatnost gubljenja staze stvarnog cilja u odnosu na višemodelnu metodu IPDA za niske omjere signala prema smetnji (tipično 4 dB i manje).



(a) Radarski odjek. (b) Slika s kamere.

Slika 1.3. Ilustracija višestrukih radarskih mjerenja zbog smetnje mora. Iako slika s kamere ne sugerira izraženu smetnju mora, ona (smetnja) je uzrok višestrukih radarskih odjeka unutar volumena valjanosti. Odjek cilja označen je simbolom R1 i dok se po intenzitetu ne ističe od smetnje, razlikuje se po geometrijskom otisku i statistici fluktuacije. Slika je nastala u okviru projekta integracije radarskih sustava [33].

Navedene metode pridruživanja često se kombiniraju s višemodelnom estimacijom, uz dodatno korištenje otiska cilja te uz proširenje mjerom kvalitete praćenja koja pomaže u održavanju staze. Npr. u okviru vjerojatnosnog pridruživanja razvijene su metode IMMPDA [34], i IPDA [35], a u okviru Viterbijevog algoritma pridruživanja, ST-VDA i MH-VDA [36]. Metodom IMMPDA, kvaliteta praćenja ocjenjuje se kroz vjerojatnost postojanja neprimjetljivog cilja, odnosno cilja s vjerojatnošću detekcije nula, cilja koji je nestao ili čija je estimacija provedena pod pogrešnom hipotezom, što omogućuje završetak staze ako je njegova (neprimjetljivog cilja) vjerojatnost značajna. Koncept modela postojanja cilja čija vjerojatnost propagira u skladu s Markovljevim svojstvom primijenjen je u metodi IPDA. U prvoj inačici modela, cilj ili ne postoji ili postoji, uz zamjetljivost koju određuje vjerojatnost detekcije. Druga inačica modela proširuje koncept s vjerojatnošću postojanja cilja koji nije zamjetljiv. U kontekstu primjene višemodelnih estimatora, s obzirom na vjerojatnost održavanja staze manevrirajućeg cilja, Viterbijev algoritam pridruživanja primjenom modela postojanja cilja pokazuje značajan dobitak u odnosu na metodu IPDA za omjer snage signala prema smetnji od tipično 15 dB [37].

Pored podataka o poziciji, dodatne informacije koje se ekstrahiraju iz odjeka cilja (npr. Dopplerova frekvencija, jakost amplitude odjeka, prostorni otisak, polarimetrijska svojstva), pomažu procesu pridruživanja u ostvarivanju manjeg broja lažnih staza (generiranih smetnjom), manje vjerojatnosti gubljenja i veće vjerojatnosti zadržavanja postojećih staza. U širem smislu, dodatne informacije smatraju se otiskom cilja pri čemu se za njegovu estimaciju, zbog nelinearne ovisnosti o vektoru stanja, sugerira korištenje nelinearnih estimatora. Tako je npr. primjena intenziteta odjeka važna u metodi praćenja prije detekcije (TBD), gdje se intenziteti primljenih odjeka unutar čitavog volumena motrenja smatraju mjerenjem. Za razliku od klasičnog pristupa pridruživanja podataka estimatoru, u ovoj se metodi pridruživanje i detekcija provode implicitno

unutar samog estimatora, najčešće čestičnog filtra [38–40]. Pri tome je volumen motrenja podijeljen u ćelije razlučivosti, a kinematički vektor stanja svake čestice, ovisan o lokaciji ćelije, proširen binarnom varijablom, modelom postojanja cilja na toj lokaciji, koja propagira u skladu s Markovljevim svojstvom. Težinski koeficijent svake čestice razmjeran je vjerodostojnosti mjerenja pod pretpostavkom da mjerenje u toj ćeliji potječe od cilja i sva ostala mjerenja potječu od smetnje. Na izlazu estimatora provodi se usrednjavanje preko svih čestica čija binarna varijabla ukazuje na postojanje cilja te se tako provodi numeričko traženje lokacije cilja. Budući da se metoda praćenja prije detekcije zasniva isključivo na statistici intenziteta odjeka, njene su radne značajke osjetljive na točnost implementiranog modela smetnje. U [41], ovaj nedostatak kompenziran je konzervativnim pristupom funkciji vjerodostojnosti, marginaliziranjem preko stvarnog, ali nepoznatog parametra smetnje.

U kontekstu estimacije vektora stanja pri istovremenom praćenju više ciljeva, klasične metode poput združenog vjerojatnosnog pristupa (JPDA), testiranja višestrukih hipoteza (MHT) te novijih metoda aproksimacije optimalnog generičkog multiobjektnog Bayesovog filtra [8, 42–44], pogodne su za implementaciju otiska cilja. Generički multiobjektni Bayesov filtar temelji se na statistici skupa s konačnim i slučajnim brojem članova (objekata) i propagira aposteriornu multiobjektnu razdiobu. Aproksimacija razdiobe prvim momentom, pod pretpostavkom Poissonove razdiobe broja ciljeva, rezultira metodom razdiobe vjerojatnosti hipoteze (PHD), odnosno metodom CPHD, ako se, pored prvog momenta, propagira i kardinalitet, odnosno očekivani broj ciljeva. Razdioba vjerojatnosti hipoteza prvi je moment (intenzitet) aposteriorne multiobjektne razdiobe te se može interpretirati i kao vjerojatnost hipoteze da određena točka područja promatranja sadrži cilj, a za razliku od funkcije razdiobe vjerojatnosti, integral intenziteta preko cjelokupnog prostora stanja nije jedan, već očekivani broj ciljeva čiji su estimirani vektori stanja određeni točkama maksimuma funkcije intenziteta [45, 46]. U odnosu na metodu MHT gdje se za svako mjerenje testiraju hipoteze da mjerenje pripada postojećoj stazi, da je novi cilj ili da je smetnja, metoda PHD ne primjenjuje pridruživanje podataka, računalno je jednostavnija, a prema [47] i bolja pri čemu su radne značajke uspoređene pomoću Wassersteinove udaljenosti skupa estimacija na izlazu filtra u odnosu na stvarni skup ciljeva. Pod pretpostavkom linearnog sustava i Gaussovih procesa, rješenje estimacije metodom GM-PHD može se naći analitički, aproksimacijom funkcije intenziteta mješavinom Gaussovih razdioba pri čemu vektor stanja evoluira kroz vrijeme za svaki cilj posebno, rezultirajući kontinuitetom identiteta staza [48]. U [49, 50], metoda GM-(C)PHD proširena je implementacijom statistike fluktuacije amplitude dok je problem nepoznatih omjera snaga signala prema smetnji i uz pretpostavljenu Rayleighovu razdiobu amplituda riješen marginalizacijom čime je postignuta stabilnija i točnija estimacija broja ciljeva. Zbog učinkovitije implementacije statistike fluktuacije amplitude, za visoke omjere snaga signala prema smetnji (iznad 20 dB), metoda GM-PHD, unatoč manjoj kompleksnosti, pokazuje bolje značajke u odnosu na metodu GM-CPHD dok za niske omjere

(od 10 dB do 15 dB) vrijedi suprotno. Naposljetku, umjesto propagacije prvog momenta aposteriorne razdiobe multiobjektnog vektora stanja, u multi-Bernoullijevom filtru alternativno se propagiraju parametri multi-Bernoullijeve razdiobe koja aproksimira stvarnu razdiobu [51]. Metodom koja je predložena u [52], propagacijom skupa parametara multi-Bernoullijeve razdiobe, smanjuje se pristranost kardinaliteta, međutim, aproksimacija je valjana samo u slučaju smetnje koja nije jaka (približno 20 odjeka smetnje po jednom okretu antene) i uz visoke vjerojatnosti detekcije (tipično iznad $0,98$). Budući da metode (C)PHD izvorno ne provode pridruživanje podataka, identifikacija staza može se provesti poopćenom multi-Bernoullijevom estimacijom s identitetom staza (GLMB) [53, 54], a proširenje ove metode na praćenje ciljeva koji se ne mogu opisati čestičnim modelom [55] (u domeni opservacije postoje višestruka mjerenja od istog cilja, odnosno odjek cilja je sadržan u nekoliko senzorskih ćelija razlučivosti [56]), provodi se metodom GGIW-GLMB [57], pri čemu je cilj opisan modelom čiji su elementi raspodijeljeni prema gama-Gaussovoj inverznoj Wishartovoj razdiobi.

Proces pridruživanja zahtijeva vrijednost parametra gustoće smetnje. Mapa smetnje, metoda najbližeg susjeda ili estimacija na temelju uzoraka prostornog intenziteta [8], poboljšana implementacijom odjeka cilja radi ostvarivanja nepristranosti [58], klasične su metode njegove estimacije. Novije metode primjenjuju multiobjektni pristup, poput metode λ-CPHD koja primjenjuje mogućnost metode CPHD za združenu estimaciju vektora stanja ciljeva i nepoznate, vremenski promjenjive, gustoće smetnje [59], međutim, značajke su osjetno slabije nego kada je statistika smetnje poznata jer nema načina dobivanja stvarnog broja ciljeva. Pri tome je određeno poboljšanje ostvareno metodom koja gustoću smetnje estimira λ-CPHD-filtrom i zatim privodi konvencionalnom CPHD-filtru gdje se provodi estimacija razdiobe vjerojatnosti hipoteza i kardinaliteta stvarnih ciljeva [60]. Klasične metode estimacije razdiobe poput metode jezgrene estimacije [61] koja je primijenjena za neparametarsku estimaciju prostorne gustoće smetnje [62] i koja je osjetljiva na izbor parametra estimatora (moguć je efekt „valovite" estimacije), za razliku od metoda mape smetnje ili najbližeg susjeda, jamče kontinuiranost estimirane razdiobe. Bolje radne značajke postižu se primjenom višeslojnih neuronskih mreža, poluparametarskom metodom estimacije razdiobe kao u [63], gdje je adaptivnom radijalnom mrežom provedena estimacija razdiobe intenziteta smetnje i cilja. Pri tome su za svaki trenutak opservacije, središta i parametri radijalnih funkcija određeni na temelju skupova prikupljenih uzoraka, kroz cijelo vrijeme trajanja staze.

U nastavku je poglavlja pružen opis teme i organizacije rada te popis znanstvenih doprinosa.

1.1. Tema i organizacija rada

Tema rada je razrada metode pridruživanja (implicitno i metode detekcije) koja nije ovisna o poznavanju točnog modela smetnje, u kontekstu praćenja jednog cilja (i u sklopu nadzora ak-

vatorija nekoherentnim radarskim senzorom bespilotne površinske platforme) te minimalnog broja kvantizacijskih razina potrebnih za prijenos informacije o amplitudi odjeka kroz komunikacijski kanal bez značajnih gubitaka. U kontekstu implementacije neuronske mreže u segmentima detekcije i pridruživanja, postavljene su i testirane dvije osnovne hipoteze:

- H1 vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena metodom neuronske mreže nije značajno lošija od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom ispravnog modela
- H2 vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena metodom neuronske mreže značajno je bolja od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom pogrešnog modela.

U kontekstu primjene radijalnih mreža u segmentu detekcije (pri čemu su parametri mreže određeni maksimiziranjem vjerodostojnosti uzoraka, primjenom metode maksimizacije očekivanja (EM)), hipoteze H1 i H2 modificirane su kao:

- $H1^{(*)}$ vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena metodom radijalne mreže EM nije značajno lošija od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom ispravnog modela smetnje
- $H2^{(*)}$ vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena metodom radijalne mreže EM značajno je bolja od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom pogrešnog modela smetnje.

A u kontekstu primjene omjera vjerodostojnosti koji dodatno diskriminira odjek smetnje od odjeka cilja u procesu pridruživanja, hipoteze H1 i H2 modificirane su kao:

- $H1^{(**)}$ vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena primjenom omjera vjerodostojnosti nije značajno lošija od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom ispravnog modela
- $H2^{(**)}$ vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena primjenom omjera vjerodostojnosti značajno je bolja od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom pogrešnog modela.

Organizacija rada je sljedeća. Poglavlja 2, 3 i 4 pružaju kontekst za primjenu poluparametarske metode estimacije otiska smetnje i cilja u procesu pridruživanja i detekcije. Tako su u poglavlju 2 opisani modeli nemanevrirajućeg i manevrirajućeg gibanja cilja te metode estimacije vektora stanja koje su primjenjive za praćenje manevrirajućeg cilja. Pri tome je pružen prikaz implementacije linearnih estimatora u jednomodelnim i višemodelnim metodama te opis nelinearnih estimatora koji su primjenjivi kako u procesu estimacije, tako i u procesu učenja neuronske mreže gdje su učinkovita zamjena za metode učenja drugoga reda. Opis modela smetnje koji se temelji na njenoj fizikalnoj interpretaciji pružen je u poglavlju 3. Pri tome je smetnja opisana statističkim značajkama radarskog presjeka, amplitudne razdiobe, radijalne i azimutne korelacije, Dopplerovog spektra te polarimetrije, uz uvažavanje specifičnosti Jadran-

skoga mora, gdje je to bilo moguće. Model K- i Paretove razdiobe primijenjen je u numeričkoj simulaciji praćenja manevrirajućeg cilja pri izraženoj smetnji mora koja je provedena radi verifikacije robusnosti predložene metode pridruživanja u poglavlju 5, testiranjem hipoteza $H1^{(*)}$, $H2^{(*)}$, $H1^{(**)}$ i $H2^{(**)}$. Dok su u poglavlju 4 opisane metode inicijalizacije staze te, u kontekstu praćenja jednog cilja, metode vjerojatnosnog i na Viterbijevom algoritmu zasnovanog pridruživanja podataka stazi (s posebnim osvrtom na model smetnje opisan K-razdiobom), poglavlje 5 je sinteza poglavlja 2, 3 i 4 u kontekstu poluparametarske estimacije otiska smetnje i cilja isključivo na temelju mjerenja. Opisana je implementacija radijalnih i acikličkih neuronskih mreža u procesu pridruživanja (implicitno i detekcije), u kontekstu estimacije amplitudne razdiobe odjeka te omjera vjerodostojnosti. Nadalje, opisana je implementacija nelinearnih estimatora u procesu učenja mreže, u kontekstu računalne složenosti i točnosti estimacije. U poglavlju 6, provedena je analiza utjecaja broja kvantizacijskih razina amplitude odjeka na točnost estimacije razdiobe. Naposljetku, u zaključnom je poglavlju pružen pregled predložene metode (u smislu prednosti i nedostataka) te su predložene smjernice budućeg istraživanja utjecaja smetnje elektromagnetskog raspršenja od morske površine u specifičnim uvjetima Jadranskog mora i radarskog senzora.

Razrada predložene metode provedena je skupom primjera, uobičajeno danih na kraju svakog poglavlja. Dok primjeri u poglavljima 2 i 4 daju odgovore na općenita pitanja, poput odabira metode estimacije i pridruživanja, primjeri u poglavljima 3, 5 i 6 daju odgovor na ona poput odabira referentnog modela smetnje mora koja se može očekivati u većini vremena za Jadran te odabira arhitekture neuronske mreže i broja kvantizacijskih razina u realnome scenariju logaritamskog prijemnika dinamike približno 100 dB (što je očekivana vrijednost za nekoherentne radarske senzore).

1.2. Znanstveni doprinosi

1. Uvažavajući za Jadran specifične ovisnosti brzine vjetra i značajne visine valova [64], u poglavlju 3 je predložena modifikacija, za frekvenciju 10 GHz te horizontalnu i vertikalnu polarizaciju, modela normiranog radarskog presjeka GIT [65] (za upadni kut do 10°) i IRSG [66] (za upadni kut veći od 10°), kao i modela širine Dopplerovog spektra i vremena korelacije koji se temelji na istraživanjima [67], provedenima pri visokim upadnim kutovima (poviše 10°, kakvi se mogu očekivati npr. u aplikaciji radarskog senzora na bespilotnoj letjelici).
2. U poglavlju 4, metodički izvod vjerojatnosne i Viterbijeve metode pridruživanja s integriranom mjerom kvalitete praćenja, u okviru višemodelne estimacije IMM, motiviran radovima [8, 9, 68, 69]. U predloženoj je inačici Viterbijeve metode pridruživanja primijenjen koncept povremene neprimjetljivosti cilja te koncept zajedničkog volumena promatranja

kao u [31, 70], jednakog za sve modele i sve čvorove (mjerenja) kurentne opservacije. Provedeno je testiranje značajnosti dobitka predložene inačice Viterbijevog algoritma u odnosu na vjerojatnosnu metodu IPDA, u kontekstu vjerojatnosti zadržavanja staze manevrirajućeg cilja u izraženoj smetnji mora.

3. Izvod optimalne širine jezgrene funkcije za metodu KDE [61] u poglavlju 4, pod pretpostavkom Rayleighove amplitudne razdiobe.
4. U poglavlju 5, analiza arhitekture neuronske mreže koja je prilagodljiva promjenama statistike smetnje. Uključuje ostvarenu točnost estimacije amplitudne razdiobe s obzirom na broj neurona u skrivenom sloju, u kontekstu ograničenog broja uzoraka koje radarski senzor prikuplja u okolici praćenog cilja. U sklopu analize točnosti, provedena je i analiza računalnog opterećenja ovisno o arhitekturi mreže i metodi učenja (metode maksimizacije vjerodostojnosti i nepristrane unakrsne provjere te slijedne metode implementacijom Kalmanovog i čestičnog filtriranja).
5. Predložena je metoda inkrementalnog stohastičkog izglađivanja kumulativa vjerojatnosti (ISIC) u poglavlju 5, motivirana metodom [71], ali implementacijom okvira iterativnog Kalmanovog filtriranja (IEKF) [72]. Provedeno je testiranje točnosti estimacije:
   i. K- i Paretove razdiobe smetnje u odnosu na referentnu metodu SIC
   ii. razdiobe odjeka cilja prema Swerlingovom modelu br. 1 [73] (uz pozadinsku smetnju K- i Paretove razdiobe) u odnosu na referentnu metodu maksimizacije vjerodostojnosti uzoraka provedenu radijalnom mrežom.
6. Metoda implementacije neuronske mreže u procesu detekcije i pridruživanja, predložena u poglavlju 5. Implementacija u procesu pridruživanja (koji je zasnovan na Viterbijevoj metodi predloženoj kao znanstveni doprinos br. 2), provedena je kroz estimaciju omjera vjerodostojnosti, dodatne mjere za diskriminaciju odjeka smetnje od cilja. Pri tome je učinkovitost implementacije neuronske mreže, u specifičnom scenariju manevrirajćeg cilja i nekoherentnog radarskog senzora, ispitana testiranjem hipoteza H1 i H2.
7. U poglavlju 6, procjena minimalnog broja kvantizacijskih razina za prijenos amplitude radarskih odjeka kao digitalnog signala kroz komunikacijski kanal. Minimalni broj kvantizacijskih razina je takav da točnost estimacije amplitudne razdiobe radarskih odjeka na prijemnoj strani kanala nije značajno lošija u odnosu na scenarij bez kvantizacije, za specifični model smetnje prema K- i Paretovoj razdiobi i s vrijednostima parametara koji se, u kontekstu opisa Jadranskoga mora (vidi poglavlje 3), očekuju u preko dvije trećine vremena u Jadranu (prema odjeljku 5.1.2), za partikularni scenarij estimacije razdiobe odjeka cilja prema Swerlingovom modelu br. 1 [73], kontaminiran smetnjom amplitudne K- i Paretove razdiobe.

Poglavlje 2

Metode estimacije vektora stanja manevrirajućeg cilja

Gibanje manevrirajućeg cilja hibridan je proces jer sadrži diskretnu komponentu karaktera (moda) gibanja i kontinuiranu komponentu kinematičkog vektora stanja. Budući da je dinamika cilja u segmentima nemanevrirajućeg i manevrirajućeg gibanja opisana različitim modelima te da su karakter, početak i trajanje manevra nepoznati, proces estimacije suočen je s izazovima nepoznatog moda gibanja, općenito nelinearnog filtriranja te nesigurnošću u izvor mjerenja ako postoji izražena smetnja [16]. Fokus ovog poglavlja postavljen je na metode koje pristupaju rješavanju prva dva izazova, dok su metode rješavanja trećeg obrađene u poglavlju 4.

U ovom poglavlju opisan je model nemanevrirajućeg i manevrirajućeg gibanja cilja, proces radarskih opservacija te Bayesov okvir optimalne rekurzivne estimacije Kalmanovim filtrom kao rješenjem rekurzije za linearne Gaussove sustave. Nadalje, pružen je opis metoda koje su primjenjive za nelinearnu estimaciju vektora stanja manevrirajućeg cilja: klasičnog proširenog Kalmanovog filtra (EKF), kubaturnog Kalmanovog filtra (CKF), filtra bez derivacije (UKF) te čestičnog filtra (PF) s inačicom UPF, hibrida čestičnog i bezderivacijskog filtra (bezderivacijsko-čestični filtar). Naposljetku je opisana suboptimalna višemodelna estimacija, primjenom poopćene prividno-Bayesove, Viterbijeve i metode s međudjelovanjem između modela u redukciji hipoteza, kao okvira u čiju se cjelinu uključuju navedene metode linearne i nelinearne estimacije za scenarij praćenja manevrirajućeg cilja.

2.1. Opis gibanja cilja

Većina razvijenih algoritama estimacije temelji se na modelu gibanja jer se time, ako model dobro opisuje stvarno gibanje (ili mod), postiže točnija estimacija nego ne uzimajući model u obzir (kao npr. u predikciji vremenskog slijeda oslanjajući se isključivo na mjerene podatke

kroz određenu povijest [74]) [16]. Pri tome je razvoj algoritama obuhvatio i razvoj modela, jer što točnije model opisuje stvarno gibanje, to je i estimacija točnija.

2.1.1. Gibanje cilja kao stohastički proces

Gibanje cilja uobičajeno je opisano u prostoru stanja sa stohastičkom diferencijalnom jednadžbom [72, 75]

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t), t)\,\boldsymbol{w}_x(t), \tag{2.1}$$

pri čemu je $\boldsymbol{x}(t)$ vektor stanja cilja i $\boldsymbol{u}(t)$ nepoznati deterministički ulaz koji je odgovoran za manevar cilja. Utjecaj faktora poput morske struje, vjetra, upravljačkog sustava i ostalih slučajnih poremećaja na gibanje cilja opisuje bijeli aditivni Gaussov proces $\{\boldsymbol{w}_x(t),\ t \geq t_0\}$. Funkcije sustava označene su s $\boldsymbol{f}(\cdot)$ i $\boldsymbol{G}(\cdot)$, dok t naglašava vremensku ovisnost. Smisao jednadžbe (2.1) je njen integralni oblik,

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau), \quad t \geq t_0, \tag{2.2}$$

pri čemu je s $\{\boldsymbol{\beta}_x(t),\ t \geq t_0\}$ označeno Brownovo gibanje. U posebnom slučaju, gibanje je opisano linearnom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{w}_x(t), \tag{2.3}$$

pri čemu su $\boldsymbol{F}(t)$ i $\boldsymbol{L}(t)$ matrice linearnog sustava. Šum procesa $\{\boldsymbol{w}_x(t),\ t \geq t_0\}$ je Gaussov proces koji nije Riemann integrabilan u srednjem, međutim, koristeći činjenicu da je Gaussov šum formalna derivacija Brownovog gibanja [72],

$$\boldsymbol{w}_x(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{2.4}$$

proizlazi da se (2.3) formalno može pisati u obliku

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{x}(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{u}(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{G}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(t),\ t \geq t_0, \tag{2.5}$$

ali je smisao jednadžbe (2.5) njen integralni oblik

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(\tau)\boldsymbol{x}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{L}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{G}(\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau). \tag{2.6}$$

Prvi integral u (2.6) je Riemannov integral definiran u srednjem, drugi je uobičajeni Riemannov integral, a treći je Itôv stohastički integral definiran kao [72],

$$\lim_{\delta t\to 0}\left(E\left(\left|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{G}(\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau)-\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{G}(t_i)\left(\boldsymbol{\beta}_x(t_{i+1})-\boldsymbol{\beta}_x(t_i)\right)\right|^2\right)\right)=0,\ \delta t=\max_i\left(t_{i+1},t_i\right), \tag{2.7}$$

ako su inkrementi Brownovog gibanja $\left(\boldsymbol{\beta}_x(t_{i+1})-\boldsymbol{\beta}_x(t_i)\right)$ nezavisni od $\{\boldsymbol{G}(t_i),\ t_0\le t_i\le t\}$, a funkcija $\boldsymbol{G}(t)$ neprekidna u srednjem, pri čemu je $\{t_0<t_1<\cdots<t_n=t\}$ particija intervala $[t_0,t]$. Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (2.5) može se izraziti preko fundamentalnog rješenja homogene diferencijalne jednadžbe, prijelazne matrice $\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$ [76],

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{L}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{G}(\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau), \tag{2.8}$$

odnosno

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{L}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{w}(t), \tag{2.9}$$

gdje je $\boldsymbol{w}(t)$ definiran s

$$\boldsymbol{w}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{G}(\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau), \tag{2.10}$$

bijeli Gaussov šum procesa radi Markovljevog i Gaussovog svojstva Brownovog gibanja (vidi u [77], teorem 5.15). Šum procesa (2.10) je Itôv integral za deterministički integrand, a njegova martingalnost proizlazi iz svojstva martingalnosti Brownovog gibanja, (vidi u [77], teorem 5.2), odnosno $E\left(\boldsymbol{w}(t)\right)=E\left(\boldsymbol{w}(t_0)\right)=0$. Kovarijanca šuma procesa jednaka je (vidi u [72], teorem 4.1, također i u [76])

$$\begin{aligned}E\left(\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}(t)^{\mathrm{T}}\right)&=E\left(\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{G}(\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau)\left(\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{G}(\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau)\right)^{\mathrm{T}}\right)\\&=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{G}(\tau)E\left(\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau)^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{G}(\tau)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)^{\mathrm{T}}\\&=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{Q}_x(\tau)\boldsymbol{G}(\tau)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Prema [76], prijelazna matrica jednaka je

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right). \tag{2.12}$$

Neka se sustav promatra samo u diskretnim vremenskim trenucima. Tada je diskretizirana stohastička diferencijalna jednadžba (2.1) jednaka

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)+\boldsymbol{\Gamma}_k(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{w}_k, \tag{2.13}$$

a u posebnom slučaju linearnog sustava (2.9) [72, 75, 76]

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\Lambda}_k \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{w}_k, \tag{2.14}$$

gdje je indeksom k naglašeno diskretno vrijeme uz naglasak da $\boldsymbol{w}_k \neq \boldsymbol{w}(t_k)$ i

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, t_k), \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_k \boldsymbol{u}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \boldsymbol{L}(\tau) \boldsymbol{u}(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{w}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \boldsymbol{G}(\tau) \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau). \tag{2.17}$$

Kovarijanca šuma procesa diskretiziranog sustava (2.14) tako je jednaka

$$E\left(\boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \boldsymbol{G}(\tau) \boldsymbol{Q}_x(\tau) \boldsymbol{G}(\tau)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}(t_{k+1}, \tau)^{\mathrm{T}}\, \mathrm{d}\tau. \tag{2.18}$$

Opservacija procesa $\{\boldsymbol{x}(t),\ t \geq t_0\}$ provodi se procesom $\{\boldsymbol{y}(t),\ t \geq t_0\}$ koji je opisan Itôvom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom [72]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), t)\, \mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_y(t),\ t \geq t_0, \tag{2.19}$$

pri čemu je $\{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_y(t),\ t \geq t_0\}$ proces inkrementa Brownovog gibanja kovarijance $E\left(\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_y(t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_y(t)^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{R}_y(t)\, \mathrm{d}t$. U linearnom slučaju, stohastička jednadžba (2.19) postaje

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{H}(t) \boldsymbol{x}(t)\, \mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_y(t),\ t \geq t_0, \tag{2.20}$$

gdje je s $\boldsymbol{H}(t)$ označena matrica mjerenja. Zamjenom $\boldsymbol{z}(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)/\mathrm{d}t$ i $\boldsymbol{v}(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_y(t)/\mathrm{d}t$, (2.19) se formalno piše kao

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), t) + \boldsymbol{v}(t), \tag{2.21}$$

što za linearni slučaj (2.20) postaje

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{H}(t) \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t), \tag{2.22}$$

pri čemu je proces $\{\boldsymbol{v}(t),\ t \geq t_0\}$ bijeli Gaussov šum mjerenja, nekoreliran sa šumom procesa $\{\boldsymbol{w}(t),\ t \geq t_0\}$.

Uobičajeno se opservacija provodi u diskretnim trenucima $t_k,\ k = 1, 2, \ldots$ kao usrednjena vrijednost mjerenja (2.19) (u linearnom slučaju (2.20)), unutar intervala $t \in [t_k, t_k + \Delta t]$, pa je

$$\boldsymbol{z}_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} \mathrm{d}\boldsymbol{y}(\tau), \tag{2.23}$$

odnosno

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t_k), t_k) + \boldsymbol{v}_k \tag{2.24}$$

za nelinearni slučaj te

$$z_k = \boldsymbol{H}(t_k)\boldsymbol{x}(t_k) + \boldsymbol{v}_k \tag{2.25}$$

za linearni slučaj, pri čemu je

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_y(\tau), \quad \boldsymbol{v}_k \neq \boldsymbol{v}(t_k), \tag{2.26}$$

bijela Gaussova sekvenca kovarijance [15]

$$\begin{aligned} E\left(\boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{R}_k &= \frac{1}{\Delta t^2}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} E\left(\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_y(\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_y(\tau)^{\mathrm{T}}\right) \\ &= \frac{1}{\Delta t^2}\int_{t_k}^{t_k+\Delta t} \boldsymbol{R}_y(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{R}_y(t_k). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Prema [72], teorem 3.11, procesi (2.9) i (2.22) su Gauss-Markovljevi procesi, a ako su u procesima (2.14) i (2.25) početne vrijednosti konstantne ili imaju Gaussovu razdiobu, prema [72], teorem 2.11, procesi generiraju Gauss-Markovljeve sekvence.

Za diskretizirani nelinearni (2.13) i linearni (2.14) sustav, proces opservacije označen je s

$$z_k = \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k \tag{2.28}$$

za nelinearni, odnosno

$$z_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k \tag{2.29}$$

za linearni proces.

Model gibanja opisan sa stohastičkim diferencijalnim jednadžbama (2.1) i (2.19) pretpostavlja čestični model cilja kojim se fizičke dimenzije objekta koncentriraju u jednoj točki [55]. U opservacijskoj domeni, ovakav je objekt opisan samo jednim mjerenjem. Drugim riječima, odjek cilja sadržan je u samo jednoj ćeliji razlučivosti senzora.

2.1.2. Model nemanevrirajućeg gibanja cilja

Gibanje cilja opisano je u Kartezijevom ili pravokutnom koordinatnom sustavu s n-komponentnim vektorima pozicije $\mathbf{x}(t)$ i brzine $\dot{\mathbf{x}}(t)$, pa je vektor stanja

$$\boldsymbol{x}(t) = \left[\mathbf{x}(t)\ \dot{\mathbf{x}}(t)\right]^{\mathrm{T}}, \tag{2.30}$$

pri čemu je argumentom t naglašena vremenska ovisnost. Za površinske ciljeve, vektori $\mathbf{x}(t)$ i $\dot{\mathbf{x}}(t)$ su dvodimenzionalni ($n = 2$), dok za općeniti slučaj trodimenzionalnog gibanja vrijedi

$n = 3$. Gibanje je neovisno po osima, što znači da gibanje duž jedne koordinatne osi ne utječe na gibanja duž ostalih.

Svojstvo nemanevrirajućeg gibanja je zanemariva akceleracija, odnosno

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) \approx 0, \tag{2.31}$$

pri čemu je implicitno pretpostavljeno da je $\boldsymbol{u}(t) = 0$, a odstupanje od jednolikog gibanja po pravcu nastaje zbog slučajnih poremećaja koji nisu uključeni u model gibanja. Ovaj model gibanja naziva se skoro jednoliko gibanje po pravcu (CV), sa svojstvima matrica sustava $\boldsymbol{F}(t)$ i $\boldsymbol{G}(t)$ linearne stohastičke diferencijalne jednadžbe (2.3)

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{O}_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2.32}$$

$$\boldsymbol{G}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{nn} \\ \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

pri čemu su $\boldsymbol{I}_n$ i $\boldsymbol{O}_{nn}$ jedinična i nul-matrica, vidi definicije A.1.1 i A.1.2. Prijelazna matrica jednaka je

$$\boldsymbol{\Phi}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n(t - t_0) \\ \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

za kontinuirani slučaj linearne stohastičke diferencijalne jednadžbe (2.9), odnosno

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n T \\ \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

za linearnu diferencijsku stohastičku jednadžbu (2.14), pri čemu je T označava vrijeme između sukcesivnih opservacija, $T = t_{k+1} - t_k$. Pri tome je kovarijanca šuma diskretiziranog kontinuiranog procesa (2.14), u posebnom slučaju vremenski neovisnoga šuma procesa, jednaka

$$\boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_x T^3/3 & \boldsymbol{Q}_x T^2/2 \\ \boldsymbol{Q}_x T^2/2 & \boldsymbol{Q}_x T \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

2.1.3. Model manevrirajućeg gibanja cilja

Značajka manevra je postojanje akceleracije u gibanju. Manevar je po svojoj prirodi deterministički, a njegov utjecaj na gibanje opisan je upravljačkim ulazom $\boldsymbol{u}(t)$ u jednadžbi (2.1). Pri modeliranju manevra sa stohastičkim procesom, pretpostavlja se neovisnost gibanja po osima, drugim riječima, gibanje duž jedne koordinatne osi ne utječe na gibanja duž ostalih. Stoga je vektor stanja, analogno relaciji (2.30), opisan komponentama pozicije, brzine i akceleracije kao

$$\boldsymbol{x}(t) = \left[\mathbf{x}(t)\ \dot{\mathbf{x}}(t)\ \ddot{\mathbf{x}}(t)\right]^{\mathrm{T}}. \tag{2.37}$$

U Singerovom modelu korelirane akceleracije [78], pretpostavlja se akceleracija $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ kao stacionarni Markovljev proces prvog reda sa svojstvom $E\left(\ddot{\mathbf{x}}(t)\right) = 0$ i autokorelacijom

$$\boldsymbol{r}(\tau) = E\left(\ddot{\mathbf{x}}(t)\,\ddot{\mathbf{x}}(t+\tau)^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\sigma}_m^{\circ 2} \circ \exp\left(\circ - \left(\boldsymbol{\alpha}\,|\tau|\right)\right)\right), \quad \boldsymbol{\alpha} \geq 0, \tag{2.38}$$

koja je rezultat linearnog stohastičkog procesa

$$\frac{\mathrm{d}\ddot{\mathbf{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\alpha} \circ \ddot{\mathbf{x}}(t) + \boldsymbol{w}(t), \tag{2.39}$$

pri čemu je sa simbolom $\circ$ označen Hadamardov produkt, eksponencijal, kvadrat i inverzija (vidi dodatak A.2, definiciju A.2.1 te napomene A.2.1 – A.2.3), a s $\operatorname{diag}(\cdot)$ dijagonalna matrica (vidi definiciju A.1.3). Nadalje, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ -1}$ označava Hadamardovu inverziju vektora $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}$ čije su komponente vremena manevra po koordinatnim osima i veća su od nule, a $\boldsymbol{\sigma}_m^2 = E\left(\ddot{\mathbf{x}}(t)^2\right)$ označava trenutnu varijancu akceleracije. S $\boldsymbol{w}(t)$ je označen bijeli šum konstantne spektralne gustoće snage [78]

$$\boldsymbol{q}_x = 2\boldsymbol{\alpha} \circ \boldsymbol{\sigma}_m^{\circ 2}. \tag{2.40}$$

Za model gibanja opisan Singerovim modelom (2.39), matrice sustava $\boldsymbol{F}(t)$ i $\boldsymbol{G}(t)$ jednake su

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}_{nn} \\ \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{O}_{nn} & \operatorname{diag}(-\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}, \tag{2.41}$$

$$\boldsymbol{G}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{nn} \\ \boldsymbol{O}_{nn} \\ \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}, \tag{2.42}$$

iz čega proizlazi prijelazna matrica rješenjem jednadžbe (2.12). Za diskretizirani model gibanja, ona je jednaka

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n T & \operatorname{diag}(T\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 2} - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 2} \circ \boldsymbol{\rho}) \\ \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{I}_n & \operatorname{diag}(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}) \\ \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{O}_{nn} & \operatorname{diag}(\boldsymbol{\rho}) \end{bmatrix}, \tag{2.43}$$

pri čemu je s $\boldsymbol{\rho} = \exp\left(\circ -(\boldsymbol{\alpha} T)\right)$ označen korelacijski koeficijent manevra [79]. Matrica kovarijance procesa šuma rješenje je jednadžbe (2.18) i jednaka je

$$\boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_m \operatorname{diag}(\boldsymbol{Q}_{\mathbf{xx}}) & \boldsymbol{Q}_m \operatorname{diag}(\boldsymbol{Q}_{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}}) & \boldsymbol{Q}_m \operatorname{diag}(\boldsymbol{Q}_{\mathbf{x}\ddot{\mathbf{x}}}) \\ \boldsymbol{Q}_m \operatorname{diag}(\boldsymbol{Q}_{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}}) & \boldsymbol{Q}_m \operatorname{diag}(\boldsymbol{Q}_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}) & \boldsymbol{Q}_m \operatorname{diag}(\boldsymbol{Q}_{\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}}) \\ \boldsymbol{Q}_m \operatorname{diag}(\boldsymbol{Q}_{\mathbf{x}\ddot{\mathbf{x}}}) & \boldsymbol{Q}_m \operatorname{diag}(\boldsymbol{Q}_{\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}}) & \boldsymbol{Q}_m \operatorname{diag}(\boldsymbol{Q}_{\ddot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}}) \end{bmatrix}, \tag{2.44}$$

gdje je prema (2.40), $\boldsymbol{Q}_m = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\sigma}_m^{\circ 2}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}_x \operatorname{diag}(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}})$ uz $\boldsymbol{Q}_x = \operatorname{diag}(\boldsymbol{q}_x)$. Elementi matrice kovarijance (2.44) tako su jednaki

$$\boldsymbol{Q}_{\mathbf{xx}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} \circ \left(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 3} + \frac{2}{3} T^3 \boldsymbol{J}_{n1} - 2T^2 \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} - 4T\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 2} + 2T\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 2} - \boldsymbol{\rho}^{\circ 2} \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 3} \right), \tag{2.45}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} \circ \left(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 2} + T^2 \boldsymbol{J}_{n1} + 2T\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} - 2\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 2} - 2T\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\rho}^{\circ 2} \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 2} \right), \tag{2.46}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathbf{x}\ddot{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} \circ \left(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} - 2T\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^{\circ 2} \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} \right), \tag{2.47}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} \circ \left(-3\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\rho}^{\circ 2} \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} + 4\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} + 2T\boldsymbol{J}_{n1} \right), \tag{2.48}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} \circ \left(\boldsymbol{J}_{n1} - 2\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}^{\circ 2} \right), \tag{2.49}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\ddot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{J}_{n1} - \boldsymbol{\rho}^{\circ 2}, \tag{2.50}$$

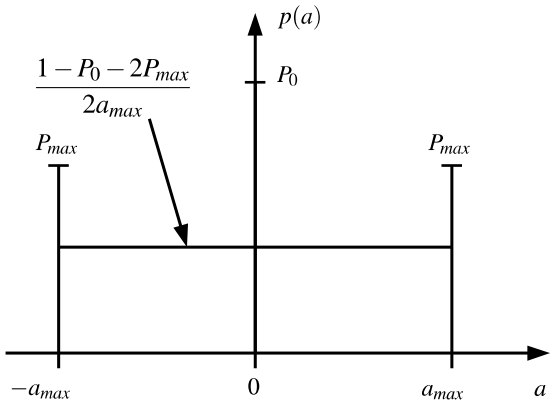
pri čemu Hadamardova potencija $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 3}$ proizlazi iz definicije A.2.1 i napomene A.2.1, a jedinična Hadamardova matrica $\boldsymbol{J}_{n1}$ definirana je napomenom A.2.4. Singerovim modelom razdiobe akceleracije [78], slika 2.1, pretpostavlja se vjerojatnost pojave maksimalne akceleracije P_{max} i vjerojatnost P_0 da je akceleracija nula za vrijeme manevra [75, 78]. Za vrijednosti akceleracija između navedenih ekstrema pretpostavljena je jednolika razdioba, tako da je za generičku koordinatu

$$p(a) = \frac{1 - P_0 - 2P_{max}}{2a_{max}}, \quad a \in (-a_{max}, 0) \cup (0, a_{max}). \tag{2.51}$$

Trenutna varijanca akceleracije jednaka je [78]

$$\boldsymbol{Q}_m = \operatorname{diag}\left(\frac{\boldsymbol{a}_{max}^{\circ 2}}{3} \left(1 + 4\boldsymbol{p}_{max} - \boldsymbol{p}_0\right) \right), \tag{2.52}$$

pri čemu je uvažena različitost akceleracija po komponentama koordinatnog sustava, sadržana u vektorima maksimalnih akceleracija $\boldsymbol{a}_{max} = \{a_{max_i}, i = 1,\ldots,n\}$ i pripadnih vjerojatnosti $\boldsymbol{p}_{max} = \{P_{max_i}, i = 1,\ldots,n\}$ te $\boldsymbol{p}_0 = \{P_{0_i}, i = 1,\ldots,n\}$. Prema (2.43), ovisno o vremenima manevra $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} = \{\tau_{\mathbf{x}_i}, i = 1,\ldots,n\}$ u odnosu na vrijeme između sukcesivnih opservacija T, Singerov model manevra nalazi se između dva ekstremna moda gibanja, skoro jednolikog gibanja (CV), kada omjer $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}/T$ teži nuli te skoro jednolikog ubrzanog gibanja (CA), kada taj omjer teži beskonačnosti.



Slika 2.1. Ilustracija razdiobe akceleracije po generičkoj koordinati za Singerov model [78]. Razdioba je mješavina diskretne razdiobe za vrijednosti akceleracije 0, $-a_{max}$ i a_{max} te jednolike razdiobe u intervalu $(-a_{max}, 0) \cup (0, a_{max})$.

Srednja vrijednost akceleracije Singerovog modela jednaka je nuli, što je i očekivano jer uobičajeno ne postoje nikakve apriorne informacije o karakteru cilja i namjeri njegovog manevra. Spoznaja da preinakom modela gibanja primjenom poznatog karaktera manevra raste točnost estimacije, vodi primjeni trenutnog stanja cilja u Singerov model [80]. Ovim modelom se adaptira srednja (očekivana) vrijednost akceleracije što rezultira modelom koji bolje opisuje stvarni karakter manevra. Tako je vektor akceleracije $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ opisan kao zbroj komponente akceleracije prema Singerovom modelu $\tilde{\ddot{\mathbf{x}}}(t)$ i srednje vrijednosti akceleracije $\bar{\ddot{\mathbf{x}}}(t)$ koja je rezultat primjene trenutnog vektora stanja u Singerov model [75],

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\ddot{\mathbf{x}}}(t) + \bar{\ddot{\mathbf{x}}}(t). \tag{2.53}$$

Prema (2.39), stohastički proces tako je jednak

$$\frac{\mathrm{d}\ddot{\mathbf{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\alpha} \circ \tilde{\ddot{\mathbf{x}}}(t) + \boldsymbol{w}(t) = -\boldsymbol{\alpha} \circ \ddot{\mathbf{x}}(t) + \boldsymbol{\alpha} \circ \bar{\ddot{x}}(t) + \boldsymbol{w}(t), \tag{2.54}$$

pri čemu je bijeli šum procesa $\{\boldsymbol{w}(t),\ t \geq 0\}$ identičan šumu procesa za Singerov model (2.39). Prema (2.54), matrice linearne stohastičke jednadžbe (2.5) jednake su

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}_{nn} \\ \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{O}_{nn} & \boldsymbol{O}_{nn} & \operatorname{diag}(-\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}, \tag{2.55}$$

$$\boldsymbol{L}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{nn} \\ \boldsymbol{O}_{nn} \\ \operatorname{diag}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}, \tag{2.56}$$

$$\boldsymbol{G}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{nn} \\ \boldsymbol{O}_{nn} \\ \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}. \tag{2.57}$$

Diskretizacija linearne stohastičke jednadžbe (2.3) koja je opisana matricama sustava (2.55) – (2.57) rezultira prijelaznom matricom $\boldsymbol{\Phi}_k$ prema (2.43) i matricom kovarijance šuma procesa $\boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}}$ prema (2.44), dok je prema [75],

$$\boldsymbol{L}_k \boldsymbol{u}_k = \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n T^2/2 \\ \boldsymbol{I}_n T \\ \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} T - \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 2} + \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}^{\circ 2} \circ \boldsymbol{\rho}\right) \\ \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} \circ (\boldsymbol{J}_{n1} - \boldsymbol{\rho})\right) \\ \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\rho}\right) \end{bmatrix} \right) \bar{\bar{\ddot{\mathbf{x}}}}_k, \tag{2.58}$$

pri čemu je [75, 80, 81]

$$\bar{\bar{\ddot{\mathbf{x}}}}_k = E\left(\ddot{\mathbf{x}}_k | \mathbb{Z}^{k-1}\right) = E\left(\ddot{\mathbf{x}}_{k-1} | \mathbb{Z}^{k-1}\right) = \hat{\bar{\ddot{\mathbf{x}}}}_{k-1}, \tag{2.59}$$

gdje je sa $\mathbb{Z}^{k-1}$ označen skup diskretnih mjerenja prema (2.24) (odnosno (2.25) za linearni slučaj)

$$\mathbb{Z}^{k-1} = \{\boldsymbol{z}_i, i = 1, \ldots, k-1\}. \tag{2.60}$$

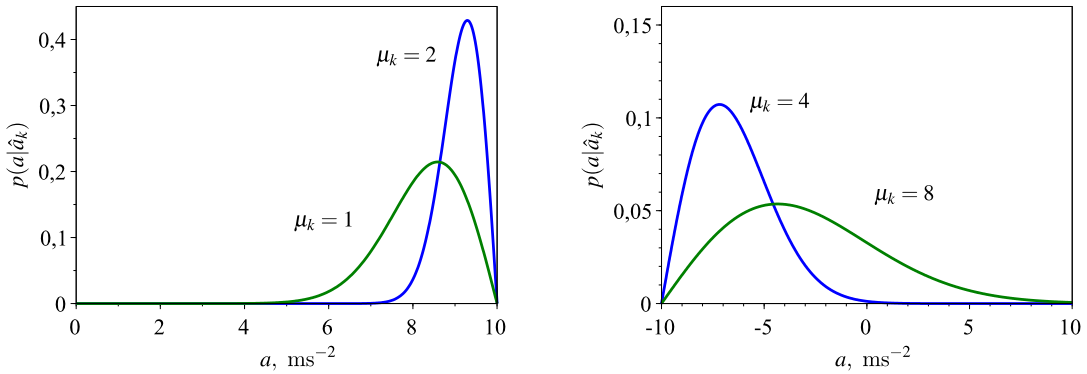
U [80, 81], predložena je uvjetna razdioba akceleracije $p(a|\hat{a}_k)$ po generičkoj koordinati prema Rayleighovoj razdiobi, slika 2.2,

$$p(a|\hat{a}_k) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_k^2}(a_{max} - a) \exp\left(-\frac{(a_{max}-a)^2}{\mu_k^2}\right), & -\infty < a \leq a_{max},\ \hat{a}_k > 0 \\ \frac{1}{\mu_k^2}(a - a_{-max}) \exp\left(-\frac{(a-a_{-max})^2}{\mu_k^2}\right), & a_{-max} \leq a < \infty,\ \hat{a}_k < 0 \end{cases}, \tag{2.61}$$

pri čemu vrijednosti maksimalne pozitivne (a_{max}) i maksimalne negativne (a_{-max}) akceleracije ne moraju nužno biti jednake. Parametar μ_k ovisan je o estimaciji akceleracije $\hat{a}_k$, a kao i u klasičnom Singerovom modelu (2.39), kovarijanca procesa šuma opisana je jednadžbama (2.44) – (2.50), uz varijancu apriorne akceleracije

$$E\left((a_{k+1}-\bar{a}_{k+1})^2\,|\hat{a}_k\right)=\sigma_m^2=\begin{cases}\frac{4-\pi}{\pi}\left(a_{max}-\hat{a}_k\right)^2, & \hat{a}_k>0\\ \frac{4-\pi}{\pi}\left(a_{-max}+\hat{a}_k\right)^2, & \hat{a}_k<0\end{cases} \tag{2.62}$$

koja proizlazi iz predložene razdiobe (2.61). Tako je kovarijanca apriorne akceleracije, uvažavajući različitost po koordinatama, jednaka $\boldsymbol{Q}_m=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\sigma}_m^{\circ 2})$, pri čemu je vektor $\boldsymbol{\sigma}_m=\left\{\sigma_{m_i}, i=1,\ldots,n\right\}$.



(a) $\hat{a}_k>0,\ a_{max}=10\ \mathrm{ms}^{-2}$. (b) $\hat{a}_k<0,\ a_{-max}=-10\ \mathrm{ms}^{-2}$.

Slika 2.2. Ilustracija ovisnosti razdiobe akceleracije o parametru μ za pozitivne i negativne estimacije akceleracije $\hat{a}_k$ te Singerov model primjenom trenutnog stanja cilja.

Vrlo često je manevar površinskog cilja konstantni okret, odnosno gibanje sa skoro jednolikom obodnom i kutnom brzinom. Uobičajeni Singerov model (2.39), kojim se pretpostavlja jednolika razdioba akceleracije, ne opisuje dobro ovakvu vrstu gibanja jer je značajka konstantnog okreta konstantna obodna i kutna brzina te, na vektor brzine, normalni vektor akceleracije. Model predložen u [82, 83] pokušava ublažiti navedeni nedostatak Singerovog modela preinakom kojom se pretpostavlja konstantna obodna brzina uz jednoliku razdiobu njena smjera unutar intervala $[-\pi,\pi)$ te jednolika razdioba kutne brzine unutar intervala minimalne i maksimalne vrijednosti. Točniji modeli okretnog gibanja uključuju kutnu brzinu kao komponentu vektora stanja te opisuju normalnu (a_n) i tangencijalnu (a_t) akceleraciju [75]. Ovisno o njihovim vrijednostima, razlikuje se skoro jednoliko gibanje kada je $a_n=a_t=0$, ubrzano gibanje kada je $a_n=0$ i $a_t\neq 0$ (u posebnom slučaju kada je a_t konstantna, gibanje je jednoliko ubrzano) te kružno gibanje kada je $a_n\neq 0$ i $a_t=0$ (u posebnom slučaju konstantni okret kada je a_n konstantna). Ovakav model je nelinearan, osim u posebnom slučaju poznate kutne brzine. Za

razliku od većine modela koji perturbaciju obodne i kutne brzine modeliraju dodavanjem bijelog šuma nakon diskretizacije vremenski kontinuiranog modela, model konstantnog okreta koji je predložen u [84] uključuje perturbaciju obodne i kutne brzine u vremenski kontinuiranom modelu. Vektor stanja za površinske ciljeve opisan je s (2.30), uz dodatak komponente kutne brzine ω,

$$\boldsymbol{x}(t) = [\mathbf{x}(t)\ \dot{\mathbf{x}}(t)\ \omega(t)]^{\mathrm{T}} = [\mathrm{x}(t)\ \mathrm{y}(t)\ \dot{\mathrm{x}}(t)\ \dot{\mathrm{y}}(t)\ \omega(t)]^{\mathrm{T}}, \tag{2.63}$$

pri čemu su s $\big(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t)\big)$ i $\big(\dot{\mathrm{x}}(t), \dot{\mathrm{y}}(t)\big)$ označene pozicija i brzina u Kartezijevom koordinatnom sustavu obzirom na osi x i y. Funkcije sustava $\boldsymbol{f}(\cdot)$ i $\boldsymbol{G}(\cdot)$ stohastičke diferencijalne jednadžbe (2.1) jednake su, uz $\boldsymbol{u}(t) = 0$ [84],

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t) = [\dot{\mathrm{x}}(t) \quad \dot{\mathrm{y}}(t) \quad -\omega(t)\dot{\mathrm{y}}(t) \quad \omega(t)\dot{\mathrm{x}}(t) \quad 0]^{\mathrm{T}}, \tag{2.64}$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t), t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{\mathrm{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} & \frac{\dot{\mathrm{y}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.65}$$

gdje je s $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|$ označena norma vektora brzine, $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t)^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{x}}(t)}$. Proces $\{\boldsymbol{w}_x(t),\ t \geq t_0\}$ je bijeli Gaussov šum sa svojstvom

$$E\left(\boldsymbol{w}_x(t)\,\boldsymbol{w}_x(t)^{\mathrm{T}}\right) = \begin{bmatrix} \sigma_{\dot{\mathbf{x}}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\omega}^2 \end{bmatrix}, \tag{2.66}$$

pri čemu je sa $\sigma_{\dot{\mathbf{x}}}$ označena devijacija obodne brzine i sa σ_ω devijacija kutne brzine. Diskretizacija kontinuiranog modela (2.1) provodi se primjenom Itôve leme, vidi u [72], lema 4.2, na stohastičku diferencijalnu jednadžbu u integralnoj formi (2.2), pri tome zadržavajući samo pojedinačne integralne članove [84]. Rezultat diskretizacije je stohastički proces

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(\tau) + (t-\tau)f(\boldsymbol{x}(\tau), \tau) + \sqrt{t-\tau}\,\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t), t)\,\boldsymbol{w}(t). \tag{2.67}$$

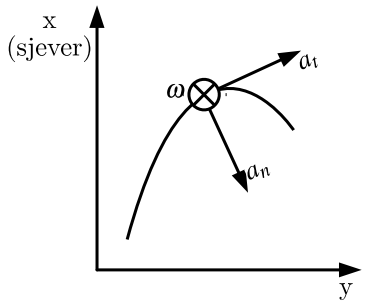
Model krivocrtnog gibanja predložen u [85] istovremeno modelira normalnu i tangencijalnu komponentu akceleracije, slika 2.3. Uz vektor stanja (2.30), prema [85], gibanje je opisano stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}(t), t)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{w}_x(t), \tag{2.68}$$

pri čemu su matrice $\boldsymbol{F}(t)$ i $\boldsymbol{G}(t)$ definirane s (2.32) i (2.33), a $\boldsymbol{L}(\cdot)$ je funkcija vektora stanja,

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}(t),t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\dot{\mathrm{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} & -\frac{\dot{\mathrm{y}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \\ \frac{\dot{\mathrm{y}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} & \frac{\dot{\mathrm{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \end{bmatrix}, \tag{2.69}$$

uz vektor $\boldsymbol{u}(t) = [a_t(t)\ a_n(t)]^{\mathrm{T}}$.



Slika 2.3. Ilustracija tangencijalne (a_t) i normalne (a_n) komponente akceleracije u pravokutnom koordinatnom sustavu NED [79], gdje os x označava sjever i os y istok. Prema pravilu desne ruke, os z uperena je prema dolje, kao i vektor kutne brzine ω.

Diskretizacija kontinuirane stohastičke diferencijalne jednadžbe (2.68) provodi se pod pretpostavkom da je rješenje jednadžbe isto kao i za linearni slučaj, odnosno

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\Lambda}_k(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{w}_k, \tag{2.70}$$

pri čemu je

$$\boldsymbol{\Lambda}_k(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\tau)\,\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.71}$$

pod pretpostavkom da je veličina $\boldsymbol{u}(t)$ konstantna unutar intervala $[t_k, t_{k+1})$, iz čega proizlazi

$$\phi(t) = \phi(t_k) + \omega_k(t - t_k) : t \in [t_k, t_{k+1}) \implies \phi_k = \phi(t_k),\ \phi_{k+1} = \phi_k + \omega_k T, \tag{2.72}$$

gdje je s $\phi(t) = \arctan\big(\dot{\mathrm{y}}(t)/\dot{\mathrm{x}}(t)\big)$ označen kurs. Nadalje, ako je unutar intervala $[t_k, t_{k+1})$ promjena brzine znatno manja od njene vrijednosti, odnosno $a_t(t)T \ll \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|$ [85],

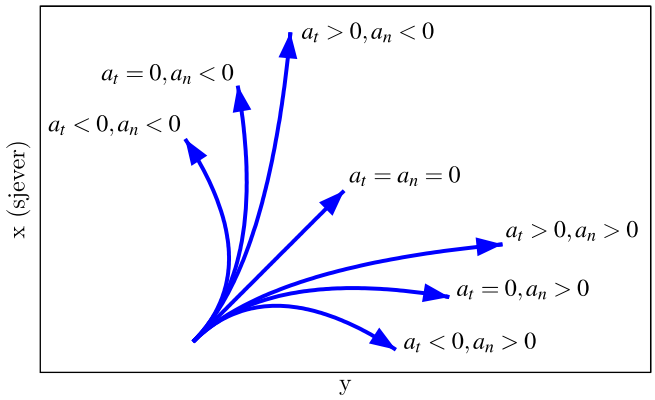
$$\frac{\dot{\mathrm{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \approx \cos\big(\phi(t)\big), \tag{2.73}$$

$$\frac{\dot{\mathrm{y}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \approx \sin\big(\phi(t)\big). \tag{2.74}$$

Uvrštenjem (2.72) – (2.74) u (2.69) te uz definiciju prijelazne matrice $\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},t)$ prema (2.34), $\boldsymbol{\Lambda}_k(\boldsymbol{x})$ je približno [85]

$$\boldsymbol{\Lambda}_k(\boldsymbol{x}) \approx \begin{bmatrix} -\frac{\cos(\phi_{k+1})}{\omega_k^2} - \frac{T\sin(\phi_k)}{\omega_k} + \frac{\cos(\phi_k)}{\omega_k^2} & \frac{\sin(\phi_{k+1})}{\omega_k^2} - \frac{T\cos(\phi_k)}{\omega_k} - \frac{\sin(\phi_k)}{\omega_k^2} \\ -\frac{\sin(\phi_{k+1})}{\omega_k^2} + \frac{T\cos(\phi_k)}{\omega_k} + \frac{\sin(\phi_k)}{\omega_k^2} & -\frac{\cos(\phi_{k+1})}{\omega_k^2} - \frac{T\sin(\phi_k)}{\omega_k} + \frac{\cos(\phi_k)}{\omega_k^2} \\ \frac{\sin(\phi_{k+1})}{\omega_k} - \frac{\sin(\phi_k)}{\omega_k} & \frac{\cos(\phi_{k+1})}{\omega_k} - \frac{\cos(\phi_k)}{\omega_k} \\ -\frac{\cos(\phi_{k+1})}{\omega_k} + \frac{\cos(\phi_k)}{\omega_k} & \frac{\sin(\phi_{k+1})}{\omega_k} - \frac{\sin(\phi_k)}{\omega_k} \end{bmatrix}, \tag{2.75}$$

pri čemu je kutna brzina $\omega_k = a_n(t_k)/\|\dot{\mathbf{x}}(t_k)\|$. Diskretizirani šum procesa je bijela Gaussova sekvenca sa svojstvom $E\left(\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{Q}_k$. Slika 2.4 ilustrira krivocrtno gibanje za različite vrijednosti tangencijalne i normalne akceleracije. Zaključno, model krivocrtnog gibanja (2.70) pogodan je za modeliranje složenog manevra gdje pored okreta postoji i tangencijalna akceleracija, a pri odabiru parametara modela, treba voditi računa o aproksimacijama koje rezultiraju jednadžbama (2.73) – (2.75) [75].



Slika 2.4. Ilustracija krivocrtnog gibanja za različite vrijednosti tangencijalne (a_t) i normalne (a_n) akceleracije u pravokutnom koordinatnome sustavu NED [75]. U posebnom slučaju, vrijednosti akceleracija $a_t = a_n = 0$ odgovaraju nemanevrirajućem gibanju i $a_t = 0, a_n \neq 0$ konstantnom okretu.

2.2. Model mjerenja

Proces opservacije provodi se radarskim senzorom, mjerenjem u sfernom koordinatnom sustavu. Povezanost s pozitivnim pravokutnim koordinatnim sustavom NED u kojemu je opisan vektor stanja praćenog cilja ilustrirana je slikom 2.5. Ishodište O koordinatnog sustava nalazi se na nekoj visini iznad lokalne tangencijalne ravnine i odgovara poziciji senzora. Pri tome je koordinatna os x usmjerena prema sjeveru, os y prema istoku i os z prema dolje, normalno na ravninu [86]. Lokalna tangencijalna ravnina određena je geocentričnom širinom ϕ, koja je

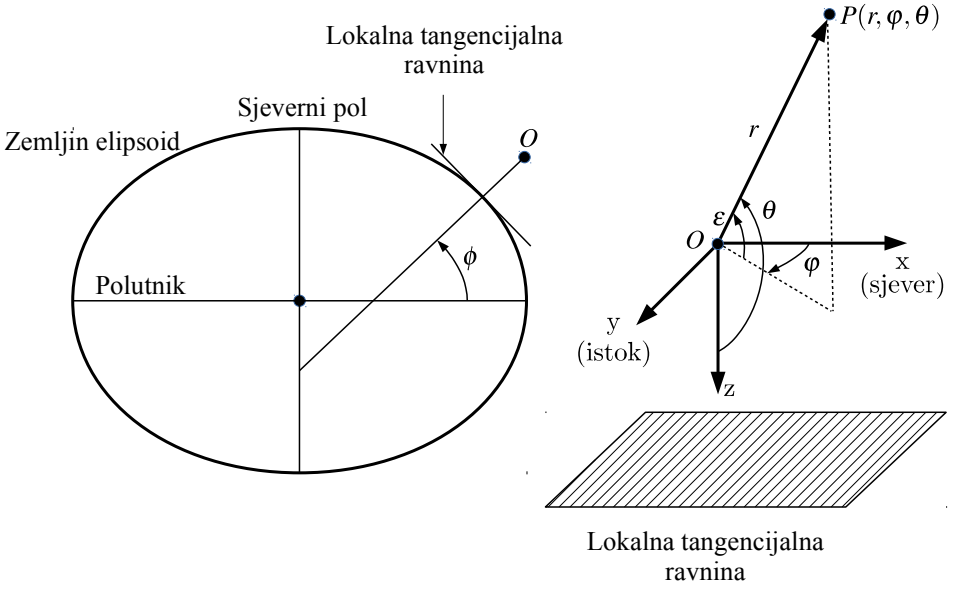
definirana kao „*...kut što ga zatvara radijus ekvatora Zemlje kao elipsoida s radijus-vektorom promatrane točke, mjeren u ravnini meridijana mjesta*" ([87], stranica 8). Prema slici 2.5, koordinate točke P izražene u pravokutnom sustavu NED su

$$\mathrm{x} = r\cos(\varphi)\sin(\theta) = r\cos(\varphi)\cos(\varepsilon), \tag{2.76}$$

$$\mathrm{y} = r\sin(\varphi)\sin(\theta) = r\sin(\varphi)\cos(\varepsilon), \tag{2.77}$$

$$\mathrm{z} = r\cos(\theta) = r\sin(\varepsilon), \tag{2.78}$$

pri čemu je r radijalna udaljenost, φ azimut i ε elevacija točke P. Za površinske ciljeve, ishodište koordinatnog sustava O nalazi se u lokalnoj tangencijalnoj ravnini pa je stoga elevacija cilja jednaka nuli. Pri tome je točnost mjerenja opisana radijalnom (σ_r) i azimutnom (σ_φ) točnošću.



Slika 2.5. Povezanost sfernih koordinata (r, φ, θ) i koordinata $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ pozitivnog pravokutnog koordinatnog sustava NED.

Sferni koordinatni sustav (ili polarni za površinske ciljeve), prirodni je koordinatni sustav senzora. Budući da je vektor stanja $\boldsymbol{x}(t)$ opisan u pravokutnom koordinatnom sustavu, postoje dvije mogućnosti izbora koordinatnog sustava za provedbu procesa praćenja. Prva je primjena prirodnog koordinatnog sustava senzora i pravokutnog koordinatnog sustava za estimaciju pri čemu je diskretni proces opservacije nelinearan i opisan s (2.24) gdje je, za površinske ciljeve,

$$\boldsymbol{z}_k = \begin{bmatrix} r_k^{(*)} \\ \varphi_k^{(*)} \end{bmatrix} = \mathbf{z}_k + \boldsymbol{v}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathrm{x}_k^2 + \mathrm{y}_k^2} \\ \arctan \frac{\mathrm{y}_k}{\mathrm{x}_k} \end{bmatrix} + \boldsymbol{v}_k. \tag{2.79}$$

Za vremenski indeks k, $r_k^{(*)}$ i $\varphi_k^{(*)}$ su izmjerene vrijednosti (radijalne) udaljenosti i azimuta cilja, $\boldsymbol{v}_k$ šum mjerenja, a x_k i y_k stvarne koordinate cilja u pravokutnom sustavu. Druga mogućnost je pretvorba polarnih koordinata mjerenja u pravokutne i provedba diskretne opservacije prema linearnom modelu (2.25) čime je opravdana, za linearnu dinamiku gibanja cilja (2.3), primjena Kalmanovog filtra kao optimalnog estimatora. Pri tome je za površinske ciljeve pretpostavljeno

$$\boldsymbol{z}_k = \begin{bmatrix} r_k^{(*)} \cos\left(\varphi_k^{(*)}\right) \\ r_k^{(*)} \sin\left(\varphi_k^{(*)}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_k \\ \mathrm{y}_k \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k. \tag{2.80}$$

U strogom smislu, za ovaj je slučaj proces opservacije nelinearan jer šum mjerenja $\mathbf{v}_k$ nakon pretvorbe (2.80) nema više Gaussovu razdiobu, može imati pristranost i nelinearno ovisi o stanju sustava pa se ovakvo mjerenje naziva i pseudolinearno mjerenje [88]. Za tipične vrijednosti radijalne udaljenosti do reda veličine desetak kilometara, uz azimutnu točnost do reda veličine par desetina stupnja i radijalnu točnost do reda veličine desetak metara, pristranost je zanemariva te je estimacija, iako suboptimalna zbog pretvorbe (2.80), konzistentna, vidi dodatak B.1. Za veličine radijalne udaljenosti i/ili točnosti koje višestruko premašuju navedene tipične vrijednosti, potrebno je provesti pretvorbu u nepristrano mjerenje kako bi estimacija zadovoljila uvjete konzistencije [8].

Nepristrano mjerenje $\boldsymbol{\zeta}_k$ povezano je s pretvorbenim i pristranim mjerenjem $\boldsymbol{z}_k$ koeficijentom multiplikacije μ, tako da je

$$\boldsymbol{\zeta}_k = \mu \boldsymbol{z}_k = \begin{bmatrix} \mu r_k^{(*)} \cos\left(\varphi_k^{(*)}\right) \\ \mu r_k^{(*)} \sin\left(\varphi_k^{(*)}\right) \end{bmatrix}. \tag{2.81}$$

Koeficijent multiplikacije ovisi o pristranosti pretvorbenog šuma mjerenja $\mathbf{v}_k$ koja je određena uvjetnim očekivanjem $E\big(E\left(\mathbf{v}_k|\mathbf{z}_k\right)|\boldsymbol{z}_k\big)$ [8, 88], pa je

$$\mu = 1 - \exp(-\sigma_\varphi^2) + \exp(-\sigma_\varphi^2/2), \tag{2.82}$$

gdje je sa $\mathbf{z}_k$ označeno mjerenje bez šuma, odnosno stvarna pozicija u polarnom koordinatnom sustavu, vidi (2.79). Nepristrano mjerenje tako je

$$\boldsymbol{\zeta}_k = \boldsymbol{z}_k - \begin{bmatrix} r_k^{(*)} \cos\left(\varphi_k^{(*)}\right) \left(\exp(-\sigma_\varphi^2) - \exp(-\sigma_\varphi^2/2)\right) \\ r_k^{(*)} \sin\left(\varphi_k^{(*)}\right) \left(\exp(-\sigma_\varphi^2) - \exp(-\sigma_\varphi^2/2)\right) \end{bmatrix}, \tag{2.83}$$

s kovarijancom mjerenja

$$\boldsymbol{R}_k^{(*)} = \begin{bmatrix} R_{\mathrm{xx},k}^{(*)} & R_{\mathrm{xy},k}^{(*)} \\ R_{\mathrm{xy},k}^{(*)} & R_{\mathrm{yy},k}^{(*)} \end{bmatrix}, \tag{2.84}$$

pri čemu su elementi matrice jednaki [8]

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{xx},k}^{(*)} = {} & \left(r_k^{(*)}\right)^2 \exp(-2\sigma_\varphi^2)\Bigg(\cos\left(\varphi_k^{(*)}\right)^2\left(\cosh(2\sigma_\varphi^2)-\cosh(\sigma_\varphi^2)\right)+ \\ & +\sin\left(\varphi_k^{(*)}\right)^2\left(\sinh(2\sigma_\varphi^2)-\sinh(\sigma_\varphi^2)\right)\Bigg)+ \\ & +\sigma_r^2\exp(-2\sigma_\varphi^2)\Bigg(\cos\left(\varphi_k^{(*)}\right)^2\left(2\cosh(2\sigma_\varphi^2)-\cosh(\sigma_\varphi^2)\right)+ \\ & +\sin\left(\varphi_k^{(*)}\right)^2\left(2\sinh(2\sigma_\varphi^2)-\sinh(\sigma_\varphi^2)\right)\Bigg), \end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{yy},k}^{(*)} = {} & \left(r_k^{(*)}\right)^2 \exp(-2\sigma_\varphi^2)\Bigg(\sin\left(\varphi_k^{(*)}\right)^2\left(\cosh(2\sigma_\varphi^2)-\cosh(\sigma_\varphi^2)\right)+ \\ & +\cos\left(\varphi_k^{(*)}\right)^2\left(\sinh(2\sigma_\varphi^2)-\sinh(\sigma_\varphi^2)\right)\Bigg)+ \\ & +\sigma_r^2\exp(-2\sigma_\varphi^2)\Bigg(\sin\left(\varphi_k^{(*)}\right)^2\left(2\cosh(2\sigma_\varphi^2)-\cosh(\sigma_\varphi^2)\right)+ \\ & +\cos\left(\varphi_k^{(*)}\right)^2\left(2\sinh(2\sigma_\varphi^2)-\sinh(\sigma_\varphi^2)\right)\Bigg), \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$R_{\mathrm{xy},k}^{(*)} = \sin\left(\varphi_k^{(*)}\right)\cos\left(\varphi_k^{(*)}\right)\exp(-4\sigma_\varphi^2)\left(\sigma_r^2+\left(\left(r_k^{(*)}\right)^2+\sigma_\varphi^2\right)\left(1-\exp(\sigma_\varphi^2)\right)\right). \tag{2.87}$$

2.3. Estimacija

Estimacija je problem određivanja nepoznatog vektora stanja cilja $\boldsymbol{x}(t)$ na temelju poznavanja skupa opservacija $\mathbb{Z}^\tau = \{\boldsymbol{z}_\mathrm{t}, t_0 \leq \mathrm{t} \leq \tau\}$ pri čemu je posebno, uz $t = \tau$, estimacija filtracija. Skup diskretnih opservacija označen je sa $\mathbb{Z}^k = \{\boldsymbol{z}_i, 1 \leq i \leq k\}$, pri čemu je s k označen indeks diskretnog vremena, a uvjet filtracije zahtijeva da je $t_k = t$. Radi jednostavnosti, ispušten je nepoznati i deterministički upravljački ulaz $\boldsymbol{u}(t)$ u polaznoj stohastičkoj diferencijalnoj jednadžbi (2.1). Optimalna estimacija zahtijeva poznavanje uvjetne razdiobe $p\left(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^\tau\right)$, a u posebnom slučaju estimacije s minimalnom varijancom greške, estimacija je jednaka uvjetnom očekivanju

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) = E\left(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^\tau\right), \tag{2.88}$$

vidi u [72], teorem 5.2. Za problem filtriranja, aposteriorna razdioba $p\left(\boldsymbol{x}(t_k)\,|\,\mathbb{Z}^k\right)$, za trenutak opservacije t_k, određena je Bayesovom rekurzijom pri čemu se pretpostavlja diskretni skup opservacija $\mathbb{Z}^k$

$$p\big(\boldsymbol{x}(t_k)\,|\,\mathbb{Z}^k\big) = \frac{p\big(\boldsymbol{z}_k\,|\,\boldsymbol{x}(t_k)\big)\,p\big(\boldsymbol{x}(t_k)\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}\big)}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} p\big(\boldsymbol{z}_k\,|\,\boldsymbol{\xi}\big)\,p\big(\boldsymbol{\xi}\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}, \tag{2.89}$$

gdje je $\boldsymbol{z}_k$ mjerenje u trenutku vremenskog indeksa k. Za vremena između opservacija $\{t, t_k \leq t < t_{k+1}\}$, apriorna razdioba zadovoljava Kolmogorovljevu jednadžbu [72]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}p\big(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^k\big) = &-\sum_{i=1}^{n_x} \frac{\partial\Big(p\big(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^k\big)\,f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big)\Big)}{\partial x_i} + \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_x} \frac{\partial^2\Big(p\big(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^k\big)\,\big(\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{Q}_x(t)\boldsymbol{G}(t)^{\mathrm{T}}\big)_{ij}\Big)}{\partial x_i\,\partial x_j},\end{aligned} \tag{2.90}$$

pri čemu $f_i(\cdot)$ označava i-tu komponentu vektorske funkcije $\boldsymbol{f}(\cdot)$ nelinearnog modela gibanja (2.1), x_i označava i-tu komponentu vektora $\boldsymbol{x}(t)$, a $(\cdot)_{ij}$ je član matrice i-tog reda stupca j. Također je $p\big(\boldsymbol{x}(t_0)\,|\,\mathbb{Z}^0\big) = p\big(\boldsymbol{x}(t_0)\big)$. U slučaju diskretnog modela gibanja, aposteriorna razdioba također je određena Bayesovom rekurzijom (2.89),

$$p(\boldsymbol{x}_k|\mathbb{Z}^k) = \frac{p(\boldsymbol{z}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k)\,p(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{Z}^{k-1})}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\boldsymbol{z}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k)\,p(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{Z}^{k-1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k}, \tag{2.91}$$

u skladu notacije diskretnog sustava [72, 89], pri čemu je apriorna estimacija dana Chapman-Kolmogorovljevom jednadžbom

$$p(\boldsymbol{x}_k|\mathbb{Z}^{k-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\boldsymbol{x}_k\,|\,\boldsymbol{x}_{k-1})\,p(\boldsymbol{x}_{k-1}\,|\,\mathbb{Z}^{k-1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}. \tag{2.92}$$

Bayesove rekurzije (2.89) i (2.91) pružaju okvir optimalne estimacije, ali, osim u iznimnim slučajevima, nisu analitički rješive [89]. Posebni slučajevi su linearni Gaussov dinamički sustav (2.3) i (2.20), gdje je rješenje dano u formi Kalmanovog filtra [90], zatim nelinearnosti koje odgovaraju Benešovoj vrsti [91, 92] te prostori stanja s diskretnim i fiksnim brojem stanja, gdje je rješenje dano mrežnom metodom [93]. Aposteriorna razdioba prema (2.89) odnosno (2.91) može se smatrati Gaussovom, kao u slučaju EKF [15, 94], UKF [95] i CKF [89] inačica Kalmanovog filtra, ili aproksimirati metodama poput razvoja po Gaussovim funkcijama [96], čestičnog filtra ili filtra s adaptivnom mrežom [93].

U nastavku ovog poglavlja opisan je Kalmanov filtar kao optimalno rješenje estimacije za linearne Gaussove sustave. Nadalje, pružen je opis primjene okvira Kalmanovog filtriranja u kontekstu nelinearne estimacije kojim se pretpostavlja Gaussova aposteriorna razdioba estimacije: klasičnog proširenog Kalmanovog filtra (EKF) kojim se provodi linearizacija sustava u okolici estimacije [15], filtra bez derivacije (UKF) koji estimaciju i pripadajuću kovarijancu računa propagacijom prvog i drugog momenta iz prethodnog koraka uz pomoć sigma-točaka [95], kubaturnog Kalmanovog filtra (CKF) koji problemu nelinearnosti pristupa primjenom sferno-radijalnog kubaturnog pravila [89]. Slijedi opis čestičnog filtra (PF) kojim se aposteriorna raz-

dioba aproksimira skupom slučajnih otežanih uzoraka [93], s inačicom UPF, hibrida čestičnog i bezderivacijskog filtra (bezderivacijsko-čestični filtar), kojim se propozicijska razdioba, za razliku od uobičajene apriorne prijelazne razdiobe, određuje uz pomoć filtra bez derivacije [97].

2.3.1. Okvir Kalmanovog filtriranja

Kontinuirani stohastički proces opisan je s (2.5), odnosno (2.6), dok se opservacije provode u diskretnim vremenskim intervalima prema (2.20), pri čemu je, radi jednostavnosti, ispušten upravljački ulaz $\boldsymbol{u}(t)$. Za rješenje problema optimalne estimacije potrebno je odrediti evoluciju uvjetne razdiobe $p\big(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^k\big)$ kroz vrijeme. Ona je općenito za vremena između opservacija $\{t, t_k \leq t < t_{k+1}\}$ dana preko Kolmogorovljeve ili Fokker-Planck jednadžbe (2.90), koja za linearni sustav postaje (vidi u [72], poglavlje 4.9 i poglavlje 7.2),

$$\begin{aligned}\frac{\partial p\big(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^k\big)}{\partial t} =& - p\big(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^k\big)\,\mathrm{tr}\big(\boldsymbol{F}(t)\big) - \nabla p\big(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^k\big)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{x}(t) + \\ &+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{Q}_x(t)\boldsymbol{G}(t)^{\mathrm{T}}\nabla^2 p\big(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^k\big)\Big),\end{aligned} \tag{2.93}$$

gdje je s $\nabla p(\cdot) = \partial p(\cdot)/\partial \boldsymbol{x}(t)$ označen gradijent, s $\nabla^2 p(\cdot) = \partial^2 p(\cdot)/\partial \boldsymbol{x}(t)^2$ Hesseova matrica od $p(\cdot)$ i s $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ trag matrice $\boldsymbol{A}$, odnosno zbroj njenih dijagonalnih elemenata. Kako je proces $\{\boldsymbol{x}_t, t \geq 0\}$ Gauss–Markovljev, razdioba $p\big(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^k\big)$ ima Gaussovu razdiobu koja je potpuno opisana uvjetnim očekivanjem i kovarijancom greške kao

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) = E\big(\boldsymbol{x}(t)\,|\,\mathbb{Z}^k\big), \tag{2.94}$$

$$\boldsymbol{P} = E\Big(\big(\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)\big)\big(\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)\big)^{\mathrm{T}}\Big). \tag{2.95}$$

Između vremena opservacija $\{t, t_k \leq t < t_{k+1}\}$, račun s (2.93) daje poznate Kalman–Bucyjeve jednadžbe [98]

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t), \tag{2.96}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{F}(t)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{Q}_x(t)\boldsymbol{G}(t)^{\mathrm{T}}. \tag{2.97}$$

Primjenom $p\big(\boldsymbol{x}(t_k)\,|\,\mathbb{Z}^k\big) = p\big(\boldsymbol{x}(t_k)\,|\,z_k, \mathbb{Z}^{k-1}\big)$ i Bayesove formule (2.89), za trenutak opservacije t_k, aposteriorna razdioba jednaka je

$$p\big(\boldsymbol{x}(t_k)\,|\,\mathbb{Z}^k\big) = \frac{p\big(z_k\,|\,\boldsymbol{x}(t_k), \mathbb{Z}^{k-1}\big)\,p\big(\boldsymbol{x}(t_k)\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}\big)}{p\left(z_k\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}\right)}. \tag{2.98}$$

Razdioba apriornog mjerenja, zbog Gaussovosti procesa opservacije (2.25) također je Gaussova, kovarijance jednake zbroju kovarijanci apriorne estimacije i mjerenja, odnosno

$$p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{z}_k; \boldsymbol{H}(t_k)\bar{\boldsymbol{x}}(t_k), \boldsymbol{H}(t_k)\bar{\boldsymbol{P}}(t_k)\boldsymbol{H}(t_k)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k\right), \tag{2.99}$$

pri čemu $\mathcal{N}\left(\boldsymbol{z}_k; \boldsymbol{H}(t_k)\bar{\boldsymbol{x}}(t_k), \boldsymbol{H}(t_k)\bar{\boldsymbol{P}}(t_k)\boldsymbol{H}(t_k)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k\right)$ označava Gaussovu razdioba argumenta $\boldsymbol{z}_k$, srednje vrijednosti $\boldsymbol{H}(t_k)\bar{\boldsymbol{x}}(t_k)$ i kovarijance $\boldsymbol{H}(t_k)\bar{\boldsymbol{P}}(t_k)\boldsymbol{H}(t_k)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k$. Nadalje, pod pretpostavkom da mjerenje u trenutku t_k ovisi samo o stanju procesa u tom trenutku, vrijedi $p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, \boldsymbol{x}(t_k), \mathbb{Z}^{k-1}\right) = p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, \boldsymbol{x}(t_k)\right)$, pa primjenom (2.25) i (2.99) slijedi

$$p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, \boldsymbol{x}(t_k)\right) = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{z}_k; \boldsymbol{H}(t_k)\boldsymbol{x}(t_k), \boldsymbol{R}_k\right). \tag{2.100}$$

Drugi član u brojniku (2.89) je apriorna razdioba. Proces opisan s (2.9) je Gauss-Markovljev proces, (vidi u [72], teorem 3.11), pa je stoga apriorna razdioba

$$p\left(\boldsymbol{x}(t_k) \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}(t_k); \bar{\boldsymbol{x}}(t_k), \bar{\boldsymbol{P}}(t_k)\right) \tag{2.101}$$

također Gaussova. Uvrštenjem (2.99), (2.100) i (2.101) u (2.98), slijedi uvjetna razdioba

$$p\left(\boldsymbol{x}(t_k) \,|\, \mathbb{Z}^{k}\right) = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}(t_k); \hat{\boldsymbol{x}}(t_k), \boldsymbol{P}(t_k)\right), \tag{2.102}$$

pri čemu je s $\hat{\boldsymbol{x}}(t_k)$ označena korekcija apriorne estimacije $\bar{\boldsymbol{x}}(t_k)$ najnovijim mjerenjem $\boldsymbol{z}_k$. Relacija (2.102) je aposteriorna razdioba vektora stanja $\boldsymbol{x}(t_k)$ pri čemu je

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t_k) = \left(\boldsymbol{H}(t_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}\boldsymbol{H}(t_k) + \bar{\boldsymbol{P}}(t_k)^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{H}(t_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}\boldsymbol{z}_k + \bar{\boldsymbol{P}}(t_k)^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}(t_k)\right), \tag{2.103}$$

$$\boldsymbol{P}(t_k) = \left(\bar{\boldsymbol{P}}(t_k)^{-1} + \boldsymbol{H}(t_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}\boldsymbol{H}(t_k)\right)^{-1}. \tag{2.104}$$

Definicijom Kalmanovog koeficijenta

$$\boldsymbol{K}(t_k) = \bar{\boldsymbol{P}}(t_k)\boldsymbol{H}(t_k)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{H}(t_k)\bar{\boldsymbol{P}}(t_k)\boldsymbol{H}(t_k)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k\right)^{-1} \tag{2.105}$$

te primjenom relacija [72]

$$\left(\boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}\right)^{-1} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}\right)^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}, \tag{2.106}$$

$$\left(\boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}\right)^{-1}, \tag{2.107}$$

iz (2.103) i (2.104) proizlaze poznate jednadžbe Kalman–Bucyevog filtra [98] za kontinuirani sustav u trenucima diskretnih opservacija

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t_k) = \bar{\boldsymbol{x}}(t_k) + \boldsymbol{K}(t_k)\left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{H}(t_k)\bar{\boldsymbol{x}}(t_k)\right), \tag{2.108}$$

$$\boldsymbol{P}(t_k) = \bar{\boldsymbol{P}}(t_k) - \boldsymbol{K}(t_k)\boldsymbol{H}(t_k)\bar{\boldsymbol{P}}(t_k). \tag{2.109}$$

Između vremena opservacija $\{t, t_k \leq t < t_{k+1}\}$, primjenom (2.94) i (2.95) te uz poznavanje početnih uvjeta $\{\boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{P}(t_0)\}$, proizlazi estimirani vektor stanja i kovarijanca estimacije [98]

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_k)\boldsymbol{x}(t_k), \tag{2.110}$$

$$\bar{\boldsymbol{P}}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_k)\boldsymbol{P}(t_k)\boldsymbol{\Phi}(t, t_k)^{\mathrm{T}} + \int_{t_k}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t, \tau)\boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{Q}_x(\tau)\boldsymbol{G}(\tau)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t, \tau)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.111}$$

Kalmanov filtar opisan s (2.108) i (2.109) globalno je optimalan za linearne Gaussove sustave u smislu minimalne srednje kvadratne greške estimacije. Za aposteriorne razdiobe koje nisu Gaussove i/ili nelinearne sustave, u klasi linearnih estimatora je optimalan jer također minimizira srednju kvadratnu grešku [15] što je, pod pretpostavkom poznavanja prva dva momenta aposteriorne razdiobe, primijenjeno u filtrima poput proširenog i kubatornog Kalmanovog filtra te Kalmanovog filtra bez derivacije.

Prošireni Kalmanov filtar (EKF) temelji se na Taylorovom razvoju nelinearnosti $\boldsymbol{f}(\cdot)$ i $\boldsymbol{h}(\cdot)$ u stohastičkoj diferencijalnoj jednadžbi gibanja (2.1) i opservacija (2.24), pri čemu je ispušten nepoznati i deterministički ulaz $\boldsymbol{u}(t)$ i pri čemu se aposteriorna razdioba smatra Gaussovom što dozvoljava provedbu Kalmanovog filtriranja kao optimalnog linearnog estimatora kojim se minimizira varijanca greške estimacije.

Rješenje stohastičke jednadžbe (2.1), uz $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t), t) = \boldsymbol{G}(t)$ za vremena između dviju sukcesivnih opservacija, jednako je

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_k}^{t} \boldsymbol{G}(\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \tag{2.112}$$

Provedbom uvjetnog očekivanja te diferenciranjem slijedi diferencijalna jednadžba koja opisuje propagaciju estimacije za vremena između dviju sukcesivnih opservacija [76] kao

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}(t), t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \tag{2.113}$$

jer je $E\left(\int_{t_k}^{t} \boldsymbol{G}(\tau)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_x(\tau)\right) = 0$ i početni uvjet jednak je $\hat{\boldsymbol{x}}(t_k)$. Dok za linearne sustave vrijedi $E\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t)\big) = \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), t)$, za nelinearne sustave $\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}(t), t) \neq \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), t)$, ali razvojem nelinearne funkcije $\boldsymbol{f}(\cdot)$ u okolici trenutne estimacije te zadržavanjem članova reda samo do (uključujući i) linearnog člana, slijedi

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t) = \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), t) + \big(\nabla \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), t)^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}}\tilde{x} + \ldots, \tag{2.114}$$

$$E\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t)\big) = \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}(t), t) \approx \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(t), t), \tag{2.115}$$

pri čemu $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$ označava grešku estimacije a $(\nabla \boldsymbol{f}(\cdot)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ Jakobijevu matricu funkcije $\boldsymbol{f}(\cdot)$ i $t_k \leq t < t_{k+1}$. Aproksimacija diferencijalne jednadžbe koja opisuje propagaciju kovarijance greške estimacije tako je jednaka [76]

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t) = \boldsymbol{F}\big(\hat{\boldsymbol{x}}(t),t\big)\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{F}\big(\hat{\boldsymbol{x}}(t),t\big)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{Q}_x(t)\boldsymbol{G}(t)^{\mathrm{T}}, \tag{2.116}$$

pri čemu je Jakobijeva matrica $(\nabla \boldsymbol{f}(\cdot)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ zamijenjena matricom $\boldsymbol{F}(\cdot)$.

Kalmanov filtar je linearni estimator, što znači da se estimacija za trenutak opservacije t_k temelji na linearnoj kombinaciji mjerenja

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t_k) = \boldsymbol{b}(t_k) + \boldsymbol{K}(t_k)\boldsymbol{z}_k. \tag{2.117}$$

Iz uvjeta nepristranosti estimacije $E\big(\boldsymbol{x}(t_k) - \bar{\boldsymbol{x}}(t_k)\big) = 0$ i $E\big(\boldsymbol{x}(t_k) - \hat{\boldsymbol{x}}(t_k)\big) = 0$ [76], (2.117) postaje

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t_k) = \bar{\boldsymbol{x}}(t_k) + \boldsymbol{K}(t_k)\big(\boldsymbol{z}_k - \bar{\boldsymbol{h}}\left(\boldsymbol{x}(t_k),t\right)\big). \tag{2.118}$$

Kao i funkcija $\boldsymbol{f}(\cdot)$, funkcija mjerenja se može razviti u Taylorov red u okolici apriorne estimacije $\bar{\boldsymbol{x}}(t_k)$, pa zadržavajući samo članove reda do (uključujući i) linearnog člana slijedi

$$\bar{\boldsymbol{h}}\left(\boldsymbol{x}(t_k),t\right) \approx \boldsymbol{h}(\bar{\boldsymbol{x}}(t_k),t). \tag{2.119}$$

Iz uvjeta minimalne srednje kvadratne greške [76]

$$\frac{\partial E\Big(\big(\boldsymbol{x}(t_k) - \hat{\boldsymbol{x}}(t_k)\big)^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{x}(t_k) - \hat{\boldsymbol{x}}(t_k)\big)\Big)}{\partial \boldsymbol{K}(t_k)} = 0, \tag{2.120}$$

slijedi Kalmanov koeficijent i kovarijanca greške estimacije kao

$$\boldsymbol{K}(t_k) = \bar{\boldsymbol{P}}(t_k)\boldsymbol{H}\big(\bar{\boldsymbol{x}}(t_k),t\big)^{\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{H}\big(\bar{\boldsymbol{x}}(t_k),t\big)\bar{\boldsymbol{P}}(t_k)\boldsymbol{H}\big(\bar{\boldsymbol{x}}(t_k),t\big)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k\Big)^{-1}, \tag{2.121}$$

$$\boldsymbol{P}(t_k) = \bar{\boldsymbol{P}}(t_k) - \boldsymbol{K}(t_k)\boldsymbol{H}\big(\bar{\boldsymbol{x}}(t_k),t\big)\bar{\boldsymbol{P}}(t_k), \tag{2.122}$$

pri čemu $\boldsymbol{H}(\cdot)$ označava Jakobijevu matricu $(\nabla \boldsymbol{h}(\cdot)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Nedostaci proširenog Kalmanovog filtra su nestabilnost (divergencija) ako linearizacija nije dovoljno točna aproksimacija nelinearnosti funkcije, nepostojanje Jakobijeve matrica u slučajevima linearno-skočnih sustava, sustava s kvantiziranim senzorima, ekspertnih sustava koji rezultiraju konačnim skupom diskretnih rješenja te za neke aplikacije netrivijalna derivacija Jakobijeve matrice što najčešće predstavlja poteškoću u implementaciji filtra [99].

Koncept Kalmanovog filtra bez derivacije (UKF) predložen je u [100–102] te je za probleme nelinearnog statističkog zaključivanja, probleme učenja neuronskih mreža i probleme dvojne estimacije gdje se istovremeno estimira stanje i dinamički model sustava proširen u [103, 104]. Ideja transformacije bez derivacije je aproksimacija aposteriorne razdiobe za razliku od aproksimacije nelinearne funkcije kako je to provedeno u proširenom Kalmanovom filtru. Aproksimacija se provodi određivanjem skupa sigma-točaka $\mathbb{S} = \{\boldsymbol{\mathcal{X}}_i, W_i, i = 0,1,\ldots,p\}$

koja točno opisuju srednju vrijednost $\hat{\boldsymbol{x}}$ i kovarijancu $\boldsymbol{P}$ n_x-dimenzionalne razdiobe,

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=0}^{p} W_i \boldsymbol{\mathcal{X}}_i, \tag{2.123}$$

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=0}^{p} W_i \left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i - \hat{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i - \hat{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2.124}$$

pri čemu za nepristranu estimaciju treba biti zadovoljen uvjet $\sum_{i=0}^{p} W_i = 1$. Iako koeficijenti $\{W_i, i = 0,1,\ldots,p\}$ nisu vjerojatnosti pa njihove vrijednosti nisu ograničene intervalom $[0,1]$, mogu se odabrati tako da odgovaraju uzoračkoj srednjoj vrijednosti i uzoračkoj kovarijanci,

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_i = \hat{\boldsymbol{x}} + \left(\sqrt{n_x \boldsymbol{P}}\right)_i, \tag{2.125}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i+n_x} = \hat{\boldsymbol{x}} - \left(\sqrt{n_x \boldsymbol{P}}\right)_i, \tag{2.126}$$

$$W_i = W_{i+n_x} = \frac{1}{2n_x}, \tag{2.127}$$

pri čemu je $i = 1,\ldots,n_x$, a $\left(\sqrt{n_x \boldsymbol{P}}\right)_i$ i-ti stupac matrice $\sqrt{n_x}\boldsymbol{A}$ tako da vrijedi $n_x \boldsymbol{P} = n_x \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ [95]. Za sustav opisan s (2.13), izostavljanjem upravljačkog ulaza $\boldsymbol{u}_k$ te uz $\boldsymbol{\Gamma}_k(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{\Gamma}_k$, apriorna estimacija procesa opisana je s

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sum_{i=1}^{2n_x} W_i \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}), \tag{2.128}$$

uz kovarijancu

$$\bar{\boldsymbol{P}}_{k+1} = \sum_{i=1}^{2n_x} \left(\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1}\right)\left(\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{Q} \boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}}, \tag{2.129}$$

pri čemu su sigma-točke i koeficijenti određeni s (2.125) – (2.127). Pod pretpostavkom da se nelinearna funkcija $\boldsymbol{f}(\cdot)$ može razviti preko Taylorovog reda, u odnosu na EKF prvog reda, apriorna estimacija (2.128) je točnija dok je kovarijanca (2.129) istog reda točnosti. Jedna od prednosti transformacije bez derivacije u odnosu na EKF je izbjegavanje računanja Jakobijeve matrice uz nepromijenjenu kompleksnost algoritma [100]. Još točnija estimacija postiže se primjenom dodatnog člana $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0$ čija je vrijednost jednaka očekivanju vektora stanja $\boldsymbol{x}$, pa se vrijednosti sigma-točki prema (2.125) i (2.126) trebaju razmjerno promijeniti kako bi se zadržala ista kovarijanca $\boldsymbol{P}$ [95],

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_0 = \hat{\boldsymbol{x}}, \tag{2.130}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_i = \hat{\boldsymbol{x}} + \left(\sqrt{\frac{n_x}{1 - W_0}\boldsymbol{P}}\right)_i, \tag{2.131}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i+n_x} = \hat{\boldsymbol{x}} - \left(\sqrt{\frac{n_x}{1-W_0}\boldsymbol{P}}\right)_i, \tag{2.132}$$

$$W_i = W_{i+n_x} = \frac{1-W_0}{2n_x}, \tag{2.133}$$

pri čemu je $i = 1,\ldots,n_x$. Uvođenje dodatnog člana kontrolira točnost viših momenata [95], pa je za npr. $W_0 = \kappa/(n_x+\kappa)$ parametrom κ minimizirana greška višeg reda. Za Gaussovu razdiobu, optimalna vrijednost parametra κ iznosi $n_x - 3$ čime koeficijent spljoštenosti jednog od n_x stanja odgovara koeficijentu spljoštenosti Gaussove razdiobe, pa je greška spljoštenosti minimizirana [94, 100]. Transformacija bez derivacije može se implementirati u okvir Kalmanovog filtriranja. Za nelinearne stohastičke diferencijske jednadžbe s aditivnim šumom procesa (2.13) uz $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{\Gamma}_k$ i aditivnim šumom mjerenja (2.24), za vremenski indeks k određuju se sigma-točke prema (2.130) – (2.133) [105], $\forall i = 1,\ldots,n_x$,

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,0} = \hat{\boldsymbol{x}}_k, \tag{2.134}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i} = \hat{\boldsymbol{x}}_k + \left(\sqrt{\frac{n_x}{1-W_0}\boldsymbol{P}_k}\right)_i, \tag{2.135}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i+n_x} = \hat{\boldsymbol{x}}_k - \left(\sqrt{\frac{n_x}{1-W_0}\boldsymbol{P}_k}\right)_i. \tag{2.136}$$

Apriorna estimacija određena je s

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}, \boldsymbol{u}_k), \tag{2.137}$$

uz kovarijancu

$$\bar{\boldsymbol{P}}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i \left(\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}, \boldsymbol{u}_k) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1}\right)\left(\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}, \boldsymbol{u}_k) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}}. \tag{2.138}$$

Za proces opservacije, sigma-točke apriorne estimacije nadopunjuju se kovarijancom mjerenja, tako da je, $\forall i = 1,\ldots,n_x$,

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,0} = \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,0}, \boldsymbol{u}_k), \tag{2.139}$$

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i} = \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}, \boldsymbol{u}_k) + \left(\sqrt{\frac{n_x}{1-W_0}\boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}}}\right)_i, \tag{2.140}$$

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i+n_x} = \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i+n_x}, \boldsymbol{u}_k) - \left(\sqrt{\frac{n_x}{1-W_0}\boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}}}\right)_i, \tag{2.141}$$

$$\bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i \boldsymbol{h}_{k+1}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i}). \tag{2.142}$$

Uz kovarijancu inovacije

$$\boldsymbol{S}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i}) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big) \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i}) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{k+1}, \tag{2.143}$$

Kalmanov koeficijent jednak je

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k+1} = \left(\sum_{i=0}^{2n_x} W_i \Big(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i} - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \Big) \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i}) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big)^{\mathrm{T}} \right) \boldsymbol{S}_{k+1}^{-1}. \tag{2.144}$$

Aposteriorna estimacija i kovarijanca tako su

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} + \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k+1}(\boldsymbol{z}_{k+1} - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1}), \tag{2.145}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1} = \bar{\boldsymbol{P}}_{k+1} - \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k+1} \boldsymbol{S}_{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k+1}^{\mathrm{T}}. \tag{2.146}$$

Porastom broja stanja n_x, sigma-točke $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_i, i = 0, 1, \ldots, 2n_x\}$ udaljavaju se od srednje vrijednosti $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0$ što može predstavljati problem za prostor s velikim brojem stanja. Problem se može ublažiti uvođenjem dvaju dodatnih parametara α i β koji kontroliraju skaliranje i grešku višeg reda [88]. Uvođenjem parametra $\lambda = \alpha^2(n_x + \kappa) - n_x$, koeficijent W_0 postaje

$$W_0 = \frac{\lambda}{n_x + \lambda}. \tag{2.147}$$

Nulti član u izrazu za kovarijancu dodatno je otežan [106] tako da apriorna kovarijanca (2.138) postaje

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{P}}_{k+1} = {} & \big(W_0 + (1 - \alpha^2 + \beta) \big) \big(\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}, \boldsymbol{u}_k) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \big) \big(\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}, \boldsymbol{u}_k) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \big)^{\mathrm{T}} + \\ & + \sum_{i=1}^{2n_x} W_i \big(\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}, \boldsymbol{u}_k) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \big) \big(\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}, \boldsymbol{u}_k) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \big)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{2.148}$$

pri čemu su sigma-točke dane s (2.134) – (2.136) i $W_i = \frac{1}{2(n_x+\lambda)}$. Kovarijanca inovacije (2.143) i Kalmanov koeficijent (2.144) postaju

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_{k+1} = {} & \big(W_0 + (1 - \alpha^2 + \beta) \big) \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i}) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big) \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i}) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big)^{\mathrm{T}} + \\ & + \sum_{i=1}^{2n_x} W_i \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i}) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big) \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i}) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{k+1}, \end{aligned} \tag{2.149}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k+1} = {} & \Bigg(\big(W_0 + (1 - \alpha^2 + \beta) \big) \Big(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i} - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \Big) \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i}) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big)^{\mathrm{T}} + \\ & + \sum_{i=1}^{2n_x} W_i \Big(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i} - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \Big) \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k+1,i}) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big)^{\mathrm{T}} \Bigg) \boldsymbol{S}_{k+1}^{-1}. \end{aligned} \tag{2.150}$$

Parametar skaliranja uobičajeno je mala pozitivna vrijednost, tipično u rasponu $10^{-4} \leq \lambda \leq 1$, dok su za Gaussovu razdiobu parametri kontrole spljoštenosti $\kappa = 3 - n_x$ i $\beta = 2$ optimalni [105].

Za razliku od filtra bez transformacije koji pretpostavlja općenitu simetričnu apriornu razdiobu, u kubaturnome Kalmanovom filtru (CKF) fokus je postavljen na apriornu Gaussovu razdiobu te što točniju estimaciju aposteriorne statistike, posebno prva dva momenta koji se propagiraju u okviru Kalmanovog filtriranja [89].

Pod pretpostavkom Gaussovih razdiobi, apriorna estimacija definirana jednadžbom (2.92) te apriorno mjerenje postaju

$$\bar{\boldsymbol{x}}_k = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\, \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{P}_{k-1}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}, \tag{2.151}$$

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{z}}_k &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k) p(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{Z}^{k-1})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)\, \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; \bar{\boldsymbol{x}}_k, \bar{\boldsymbol{P}}_k\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_k. \end{aligned} \tag{2.152}$$

Kako je iz jednadžbi (2.151) i (2.152) vidljivo, za optimalnu Bayesovu rekurziju (2.91) treba numerički riješiti integral u obliku

$$E\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x}}} \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2.153}$$

pri čemu je radi jednostavnosti pretpostavljen normalizirani slučaj Gaussove razdiobe sa srednjom vrijednošću nula i jediničnom kovarijancom. U [89], za rješavanje integrala (2.153), primijenjeno je sferno-radijalno kubaturno pravilo. Metoda se sastoji od koraka sferno-radijalne pretvorbe te koraka kombinacije sferno-kubaturnog i radijalnog pravila. U sferno-radijalnoj pretvorbi, provedena je zamjena varijabli $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{\chi}$ sa svojstvom da je $\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\chi} = 1 \implies \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = r^2 \;\forall\, r \in [0, +\infty]$, pa (2.153) postaje

$$E\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \int_0^{+\infty} \int_{U_{n_x}} \boldsymbol{f}(r\boldsymbol{\chi})\, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{\chi}) r^{n_x - 1} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \mathrm{d}r, \tag{2.154}$$

pri čemu je $U_{n_x} = \{\boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^{n_x}, \boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\chi} = 1\}$ površina jedinične hipersfere s mjerom površine σ. Integral (2.153) tako je izražen u obliku radijalnog

$$E\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \int_0^{+\infty} S(r) r^{n_x - 1} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \mathrm{d}r \tag{2.155}$$

i sfernog integrala

$$S(r) = \int_{U_{n_x}} \boldsymbol{f}(r\boldsymbol{\chi})\, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{\chi}) \tag{2.156}$$

te je za rješavanje (2.155) primijenjena kombinacija sferno-kubaturnog i radijalnog pravila.

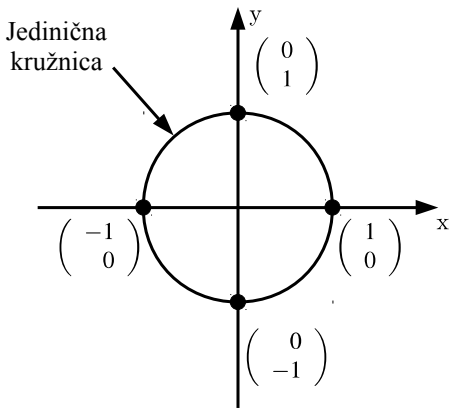
Sferno-kubaturno pravilo za rješavanje integrala (2.156) proizlazi iz teorije invarijantnosti koja iskorištava simetričnosti prostora integracije kako bi se broj momentnih integralnih jednadžbi i broj kubaturnih točaka sveo na minimum. Za pravilo trećeg reda,

$$S(r) = \int_{U_{n_x}} \boldsymbol{f}(r\boldsymbol{\chi})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{\chi}) \approx \frac{\sqrt{\pi^{n_x}}}{n_x\Gamma(n_x/2)} \sum_{i=1}^{2n_x} \boldsymbol{f}(r\boldsymbol{\mathcal{X}}_i), \tag{2.157}$$

pri čemu je s $\Gamma(\cdot)$ označena gama-funkcija i s $\boldsymbol{\mathcal{X}}_i$ i-ta kubaturna točka. Skup kubaturnih točaka $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{\mathcal{X}}_i, i = 1,\ldots,2n_x\}$ određen je presjecištima jedinične hipersfere sa svojim osima [89]. Tako je za dvodimenzionalni prostor ($n_x = 2$) skup kubaturnih točaka jednak

$$\mathbb{X} = \{\boldsymbol{\mathcal{X}}_i, i = 1,\ldots,4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \tag{2.158}$$

kako je to ilustrirano slikom 2.6. Aproksimacija (2.157) točna je za skup monomnih funkcija $\boldsymbol{f}(\cdot)$ do (uključujući i) trećeg stupnja, pri čemu je monomna funkcija definirana kao $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1^{d_1}\boldsymbol{x}_2^{d_2}\ldots\boldsymbol{x}_n^{d_n}$ gdje su d nenegativne cjelobrojne vrijednosti. Točnost aproksimacije do (uključujući i) trećeg reda zahtijeva zadovoljenje uvjeta $\sum_{i=0}^{n} d_i = d \leq 3$.



Slika 2.6. Skup kubaturnih točaka za dvodimenzionalni prostor i kubaturno pravilo trećeg reda.

Rješenje radijalnog integrala (2.155) može se aproksimirati primjenom Gauss-Laguerreove kvadraturne formule [107], (vidi također u [108], poglavlje 8.6),

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^{\alpha}\exp(-x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{m} W_i f(\mathscr{X}_i), \tag{2.159}$$

pri čemu su $\{\mathscr{X}_i, i = 1\ldots,m\}$ kvadraturne točke određene korijenima poopćenog Laguerreovog ili Čebišev-Laguerreovog polinoma m-tog reda i parametra α,

$$L_m^{\alpha}(x) = \exp(x)\, x^{-\alpha} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \left(\exp(-x)\, x^{\alpha+m} \right), \tag{2.160}$$

a koeficijenti $\{W_i, i = 1, \ldots, m\}$ dani s

$$W_i = \frac{m!\Gamma(m+\alpha+1)}{\mathscr{X}_i \left(\dot{L}_m^{\alpha}(\mathscr{X}_i) \right)^2} = \frac{m!\Gamma(m+\alpha+1)\mathscr{X}_i}{\left(L_{m+1}^{\alpha}(\mathscr{X}_i) \right)^2}. \tag{2.161}$$

Rješenje integrala (2.155) tako se aproksimira s (2.157) i (2.159), pa je [107]

$$\begin{aligned} E\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) &= \frac{1}{2n_x\Gamma(n_x/2)} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{2n_x} \boldsymbol{f}\left(\sqrt{2r}\boldsymbol{\mathcal{X}}_i \right) \right) r^{\frac{n_x}{2}-1} \exp(-r)\, \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2n_x\Gamma(n_x/2)} \sum_{i=1}^{2n_x} \sum_{j=1}^{m} W_j \boldsymbol{f}\left(\sqrt{2\mathscr{X}_j}\boldsymbol{\mathcal{X}}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n_x} \sum_{j=1}^{m} \mathscr{W}_j \boldsymbol{f}\left(\sqrt{2\mathscr{X}_j}\boldsymbol{\mathcal{X}}_i \right), \end{aligned} \tag{2.162}$$

pri čemu je provedena zamjena varijabli $r = r^2/2$. Koeficijenti $\{W_j, j = 1, \ldots, m\}$ dani su s (2.161), kubaturne točke $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_i . i = 1, \ldots, 2n_x\}$ određene su presjecištima jedinične hipersfere sa svojim osima, dok su kvadraturne točke $\{\mathscr{X}_j, j = 1, \ldots, m\}$ određene uvjetom $L_m^{\frac{n_x}{2}-1} = 0$. U [89], red Gauss-Laguerreovog pravila jednak je jedan jer je u kombiniranom sferno-radijalnom pravilu (2.162) Gauss-Laguerreova aproksimacija točna za polinome nultog i drugog reda, a nije točna za polinome neparnog reda, dok je kubaturno pravilo točno za polinome nultog i drugog reda, a zbog simetrije, za polinome neparnog reda aproksimacija je točna i jednaka nuli. Tako je aproksimacija (2.162) za $m = 1$ točna za sve polinome do (uključujući i) trećeg reda. U ovom slučaju, kvadraturno-kubaturne točke dane su s

$$\boldsymbol{\Xi}_i = \sqrt{n_x}\boldsymbol{\mathcal{X}}_i,\ i = 1, \ldots, 2n_x, \tag{2.163}$$

pri čemu su točke $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_i, i = 1, \ldots, 2n_x\}$ određene presjecištima jedinične hipersfere sa svojim osima, vidi (2.158) i sliku 2.6 za primjer dvodimenzionalnog prostora, a koeficijenti $\{\mathscr{W}_i, i = 1, \ldots, 2n_x\}$ jednaki su $\frac{1}{2n_x}$ [89, 109].

U okviru Kalmanovog filtriranja, sferno-kubaturno pravilo primijenjeno je za apriornu estimaciju (2.151) i (2.152). Kvadraturno-kubaturne točke normalizirane razdiobe skaliraju se obzirom na stvarnu srednju vrijednost $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ i kovarijancu $\boldsymbol{P}_k$, pa (2.163) postaje

$$\boldsymbol{\Xi}_{k,i} = \sqrt{\boldsymbol{P}_k n_x}\boldsymbol{\mathcal{X}}_i + \hat{\boldsymbol{x}}_k,\ i = 1, \ldots, 2n_x. \tag{2.164}$$

Tako je apriorna estimacija (2.151) u prediktivnoj fazi filtriranja aproksimirana s

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sum_{i=1}^{2n_x} \mathscr{W}_i \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{\Xi}_{k,i}), \tag{2.165}$$

$$\bar{\boldsymbol{P}}_{k+1} = \sum_{i=1}^{2n_x} \mathscr{W}_i \Big(\boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{\Xi}_{k,i}\right) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \Big) \Big(\boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{\Xi}_{k,i}\right) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \Big)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}}, \tag{2.166}$$

jer je šum procesa $\boldsymbol{w}_k$ aditivan, vidi (2.13). U korektivnoj fazi filtriranja, kvadraturno-kubaturne točke $\{\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{k+1,i}, i = 1,\ldots,2n_x, k \geq 0\}$ određene su apriornom estimacijom $\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ i njenom kovarijancom $\bar{\boldsymbol{P}}_{k+1}$,

$$\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{k+1,i} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{P}}_{k+1} n_x}\, \boldsymbol{\mathcal{X}}_i + \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1},\ i = 1,\ldots,2n_x, \tag{2.167}$$

tako da su apriorno mjerenje (2.152) i kovarijanca inovacije dani s

$$\bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} = \sum_{i=1}^{2n_x} \mathscr{W}_i \boldsymbol{h}_{k+1}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{k+1,i}), \tag{2.168}$$

$$\boldsymbol{S}_{k+1} = \sum_{i=1}^{2n_x} \mathscr{W}_i \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}\left(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{k+1,i}\right) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big) \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}\left(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{k+1,i}\right) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{k+1}, \tag{2.169}$$

zbog aditivnosti šuma mjerenja $\boldsymbol{v}_{k+1}$, vidi (2.24). Kalmanov koeficijent, apriorna estimacija i njena kovarijanca, jednaki su

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_k = \left(\sum_{i=1}^{2n_x} \mathscr{W}_i \Big(\boldsymbol{f}_k\left(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{k,i}\right) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \Big) \Big(\boldsymbol{h}_{k+1}\left(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{k+1,i}\right) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1} \Big)^{\mathrm{T}} \right) \boldsymbol{S}_{k+1}^{-1}, \tag{2.170}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} + \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k+1}(\boldsymbol{z}_{k+1} - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1}), \tag{2.145}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1} = \bar{\boldsymbol{P}}_{k+1} - \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k+1} \boldsymbol{S}_{k+1} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k+1}^{\mathrm{T}}. \tag{2.146}$$

U odnosu na UKF, CKF je numerički stabilniji i točniji [89, 110]. Dok se primjenom višeg reda kubaturnog pravila od trećeg ne postižu zamjetna poboljšanja u značajkama estimacije [89], manja efektivna greška ostvaruje se povećanjem reda Gauss-Laguerreovog pravila [107].

2.3.2. Metoda čestičnog filtriranja

Za razliku od filtara EKF, UKF i CKF koji su uklopljeni o okvir Kalmanovog filtriranja i koji apriornu i aposteriornu razdiobu vektora stanja pretpostavljaju Gaussovom (normalnom), metoda čestičnog filtriranja nema ograničenja u pogledu forme razdiobe te se njome provodi potpuna nelinearna ne-Gaussova estimacija. Metoda se sastoji od aproksimacije aposteriorne razdiobe $p\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{Z}^k\right)$ skupom nezavisnih identično distribuiranih uzoraka („čestica") $\mathbb{X}_k = \{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}, i = 1,\ldots,N, k \geq 0\}$ [105, 111] kao

$$\hat{p}\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{Z}^k\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta\left(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}\right), \tag{2.171}$$

pri čemu je s $\delta(\cdot)$ označena Diracova delta-funkcija, a uzorci $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}, i = 1,\ldots,N, k \geq 0\}$ izvučeni su iz razdiobe $p\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{Z}^k\right)$. Očekivanje općenite funkcije vektora stanja $\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_k)$ za vremenski indeks k jednako je

$$E\left(\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right) p\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{Z}^k\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_k, \tag{2.172}$$

pa je tako aproksimacijom (2.171),

$$\hat{E}\left(\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right)\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}\right). \tag{2.173}$$

Uz $\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{x}_k$, (2.173) je optimalna estimacija u smislu minimalne srednje kvadratne greške [72]. Porastom broja uzoraka ($N \to \infty$), aproksimacija $\hat{E}\left(\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_k)\right)$ gotovo sigurno konvergira k $E\left(\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_k)\right)$, a ako su očekivanje i kovarijanca funkcije $\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_k)$ konačni,

$$E\left(\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right)\right) \in \mathbb{R}^{n_x}, \tag{2.174}$$

$$E\left(\left(\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right) - E\left(\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right)\right)\right)\left(\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right) - E\left(\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right)\right)\right)^{\mathrm{T}}\right) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \tag{2.175}$$

prema središnjem graničnom teoremu [111–114] vrijedi

$$\sqrt{N}\left(\hat{E}\left(\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right)\right) - E\left(\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right)\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \boldsymbol{\sigma}_k^2\right), \tag{2.176}$$

pri čemu $\xrightarrow{d}$ označava konvergenciju po distribuciji. Prema (2.175), matrica kovarijanci $\boldsymbol{\sigma}_k^2$ dana je s

$$\boldsymbol{\sigma}_k^2 = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \left(\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}_k) - E\left(\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_k\right)\right)\right)\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_k) - E\left(\boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{x}_k\right)\right)\right)^{\mathrm{T}} p\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{Z}^k\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_k. \tag{2.177}$$

Kako je uzimanje uzoraka iz aposteriorne razdiobe često nemoguće, uzorci se uzimaju iz poznate propozicijske razdiobe $q\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right)$ pri čemu je $\mathbb{x}^k = \{\boldsymbol{x}_\kappa, \kappa = 0,1,\ldots,k\}$. Primjenom Bayesovog teorema [113], (2.172) postaje

$$\begin{aligned} E\left(\boldsymbol{g}_k\left(\mathbb{x}^k\right)\right) &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{g}_k\left(\mathbb{x}^k\right) \frac{p\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right)}{q\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right)} q\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right) \mathrm{d}\mathbb{x}^k \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{g}_k\left(\mathbb{x}^k\right) \frac{p\left(\mathbb{Z}^k \,|\, \mathbb{x}^k\right) p\left(\mathbb{x}^k\right)}{p\left(\mathbb{Z}^k\right) q\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right)} q\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right) \mathrm{d}\mathbb{x}^k \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{g}_k\left(\mathbb{x}^k\right) \frac{W_k\left(\mathbb{x}^k\right)}{p\left(\mathbb{Z}^k\right)} q\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right) \mathrm{d}\mathbb{x}^k, \end{aligned} \tag{2.178}$$

pri čemu je

$$W_k\left(\mathbb{x}^k\right) = \frac{p\left(\mathbb{Z}^k \,|\, \mathbb{x}^k\right) p\left(\mathbb{x}^k\right)}{q\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right)} \tag{2.179}$$

nenormirani težinski koeficijent. Provedbom teorema potpune vjerojatnosti [113],

$$p\left(\mathbb{Z}^k\right) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p\left(\mathbb{Z}^k \,|\, \mathbb{x}^k\right) p\left(\mathbb{x}^k\right) \mathrm{d}\mathbb{x}^k = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} W_k\left(\mathbb{x}^k\right) q\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right) \mathrm{d}\mathbb{x}^k, \tag{2.180}$$

(2.178) postaje

$$E\left(\boldsymbol{g}_k\left(\mathbb{x}^k\right)\right) = \frac{E\left(\boldsymbol{g}_k\left(\mathbb{x}^k\right) W_k\left(\mathbb{x}^k\right)\right)}{E\left(W_k\left(\mathbb{x}^k\right)\right)}, \tag{2.181}$$

pri čemu je očekivanje provedeno po razdiobi $q\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right)$. Uzimanjem uzoraka iz poznate propozicijske razdiobe $q\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right)$, očekivanje funkcije $\boldsymbol{g}_k(\mathbb{x}_k)$ prema (2.181) može se aproksimirati s

$$E\left(\boldsymbol{g}_k\left(\mathbb{x}^k\right)\right) = \frac{1/_N \sum_{i=1}^N \boldsymbol{g}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k\right) W_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k\right)}{1/_N \sum_{i=1}^N W_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k\right)} = \sum_{i=1}^N \mathscr{W}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k\right) \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k\right), \tag{2.182}$$

gdje je $\mathscr{W}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k\right)$ normirani težinski koeficijent

$$\mathscr{W}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k\right) = \frac{W_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k\right)}{\sum_{i=1}^N W_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k\right)}. \tag{2.183}$$

Aproksimacija (2.182) je pristrana zbog omjera, ali prema [111, 115, 116], pod uvjetom da su uzorci $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k, i = 1,\ldots,N, k \geq 0\}$ nezavisni i identično distribuirani, da je skup mogućih vrijednosti uzoraka iz aposteriorne razdiobe sadržan u propozicijskoj razdiobi, da je $E\left(W_k\left(\mathbb{x}^k\right)\right) \in \mathbb{R}$ te da postoji konačna srednja vrijednost i kovarijanca funkcije $\boldsymbol{g}_k\left(\mathbb{x}^k\right)$ prema (2.174) i (2.175), moguća je asimptotska konvergencija i zadovoljenje središnjeg graničnog teorema, odnosno

$$\hat{p}\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right) = \sum_{i=1}^N \mathscr{W}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k\right) \delta\left(\mathbb{x}^k - \boldsymbol{\mathcal{X}}_i^k\right). \tag{2.184}$$

Za rješavanje problema filtracije, važan je rekurzivni odnos između nenormiranih koeficijenata za trenutni vremenski indeks i onih iz prethodnog ciklusa. Tako se propozicijska razdioba u nazivniku (2.179) može izraziti kao

$$q\left(\mathbb{x}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right) = q\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{x}^{k-1}, \mathbb{Z}^k\right) q\left(\mathbb{x}^{k-1} \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right), \tag{2.185}$$

dok je brojnik jednak

$$p\left(\mathbb{Z}^k \,|\, \mathbb{x}^k\right) p\left(\mathbb{x}^k\right) = p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, \mathbb{x}^k, \mathbb{Z}^{k-1}\right) p\left(\mathbb{Z}^{k-1} \,|\, \mathbb{x}^{k-1}\right) p\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{x}^{k-1}\right) p\left(\mathbb{x}^{k-1}\right). \tag{2.186}$$

Primjenom (2.185) i (2.186) u (2.179), proizlazi rekurzivni oblik nenormiranog koeficijenta, odnosno forma sekvencijalnog uzorkovanja (SIS),

$$W_k\left(\mathbb{x}^k\right) = W_{k-1}\left(\mathbb{x}^{k-1}\right)\frac{p\left(\boldsymbol{z}_k\,|\,\mathbb{x}^k,\mathbb{Z}^{k-1}\right)p\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{x}^{k-1}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{x}^{k-1},\mathbb{Z}^k\right)}. \tag{2.187}$$

Pod pretpostavkom da je proces $\{\boldsymbol{x}_k, k \geq 0\}$ Markovljev,

$$p\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{x}^{k-1}\right) = p\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\boldsymbol{x}_{k-1}\right), \tag{2.188}$$

i da mjerenje $\boldsymbol{z}_k$ ovisi samo o stanju sustava u trenutku k,

$$p\left(\boldsymbol{z}_k\,|\,\mathbb{x}^k,\mathbb{Z}^{k-1}\right) = p\left(\boldsymbol{z}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k\right), \tag{2.189}$$

rekurzija nenormiranog koeficijenta (2.187) postaje

$$W_k\left(\boldsymbol{x}_k\right) = W_{k-1}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}\right)\frac{p\left(\boldsymbol{z}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k\right)p\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\boldsymbol{x}_{k-1}\right)}{q\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{x}^{k-1},\mathbb{Z}^k\right)}. \tag{2.190}$$

Tako je estimacija aposteriorne razdiobe uzorcima iz propozicijske razdiobe jednaka

$$\hat{p}\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{Z}^k\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{W_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}\right)}{\sum_{j=1}^{N}W_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}\right)}\delta\left(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}\right) = \sum_{i=1}^{N}\mathscr{W}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}\right)\delta\left(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}\right), \tag{2.191}$$

iz čega proizlazi aproksimacija uvjetnog očekivanja kao aproksimacija optimalne estimacije u smislu minimalne srednje kvadratne greške,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{E}\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{Z}^k\right) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}}\boldsymbol{x}_k\hat{p}\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{Z}^k\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k = \sum_{i=1}^{N}\mathscr{W}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}\right)\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}. \tag{2.192}$$

Optimalna razdioba q_{opt} kojom se minimizira varijanca skupa koeficijenata $\{\mathscr{W}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}\right), i = 1,\ldots,N, k \geq 0\}$ ostvaruje se uvjetnom razdiobom stvarnog stanja sustava $p\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{x}^{k-1},\mathbb{Z}^k\right)$, uvjetom poznavanja povijesti stanja $\mathbb{x}^{k-1}$ i mjerenja $\mathbb{Z}^k$. Prema propoziciji 4 u [116], za probleme filtriranja gdje je potrebno poznavanje razdiobe samo trenutnog stanja $p\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{Z}^k\right)$, propozicijska razdioba kojom se minimizira varijanca skupa koeficijenta $\{\mathscr{W}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}), i = 1,\ldots,N, k \geq 0\}$, uvjetovana cjelokupnim stazama skupa čestica $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^{k-1}, i = 1,\ldots,N, k > 0\}$ i cjelokupnim mjerenjem $\mathbb{Z}^k$, jednaka je

$$q_{opt} = p\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1,i},\boldsymbol{z}_k\right), \tag{2.193}$$

pa je koeficijent i-te čestice prema (2.190), primjenom Bayesove formule, razmjeran s [93]

$$\begin{aligned}\mathscr{W}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}) &\propto \mathscr{W}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1,i})\,p\left(\boldsymbol{z}_k\,|\,\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1,i}\right)\\ &= \mathscr{W}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1,i})\int_{\mathbb{R}^{n_x}}p\left(\boldsymbol{z}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k\right)p\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1,i}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k.\end{aligned} \tag{2.194}$$

Dva nedostatka primjene optimalne propozicijske razdiobe su uzimanje uzoraka iz razdiobe (2.193) te rješavanje integrala (2.194) što, osim u dva posebna slučaja, nije moguće provesti analitički. U prvom slučaju, kada je $\boldsymbol{x}_k$ član konačnog skupa, integral (2.194) prelazi u sumu te je moguće provesti uzimanje uzoraka iz razdiobe (2.193) kao u [117], gdje se mod gibanja iz diskretnog i konačnog skupa modela estimira čestičnim, a vektor stanja, uvjetovan modom gibanja, Kalmanovim filtrom. U drugom slučaju, kada je razdioba $p\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1,i}, z_k\right)$ Gaussova, što je moguće za nelinearni sustav opisan s (2.13) uz $\boldsymbol{\Gamma}_k(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{\Gamma}_k$ i linearno mjerenje opisano s (2.25) [93, 116]. Tada je

$$p\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \boldsymbol{x}_{k-1}, z_k\right) = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{\sigma}_k^2 \left(\left(\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \boldsymbol{f}_{k-1}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}\right) + \boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1} z_k\right), \boldsymbol{\sigma}_k^2\right), \quad (2.195)$$

pri čemu je

$$\left(\boldsymbol{\sigma}_k^2\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} + \boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}\boldsymbol{H}_k, \quad (2.196)$$

a

$$p\left(z_k \,|\, \boldsymbol{x}_{k-1}\right) = \mathcal{N}\left(z_k; \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1}), \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\right). \quad (2.197)$$

Rješenja poput lokalne linearizacije [116] ili provođenje nelinearnog filtriranja poput proširenog Kalmanovog ili filtriranja bez derivacije [105, 118], aproksimacija su optimalne razdiobe (2.193). Dok metoda lokalne linearizacije primjenjuje propozicijsku razdiobu koja je Gaussova aproksimacija optimalne razdiobe $p\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \boldsymbol{x}_{k-1}, z_k\right)$, metoda proširenog Kalmanovog ili bezderivacijsko-čestičnog filtriranja (UPF) provodi, za vremenski indeks k i za svaki uzorak $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1,i}$, najprije apriornu estimaciju (predikciju), zatim korekciju apriorne estimacije $\bar{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k,i}$ kurentnim mjerenjem z_k te naposljetku estimaciju $\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k,i}$, vidi (2.118) i (2.122) za prošireni Kalmanov te (2.134) – (2.146) za UPF, kako bi se razdioba $p\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \boldsymbol{x}_{k-1}, z_k\right)$ aproksimirala Gaussovom. Nenormirani koeficijent za i-ti uzorak tako je dan s

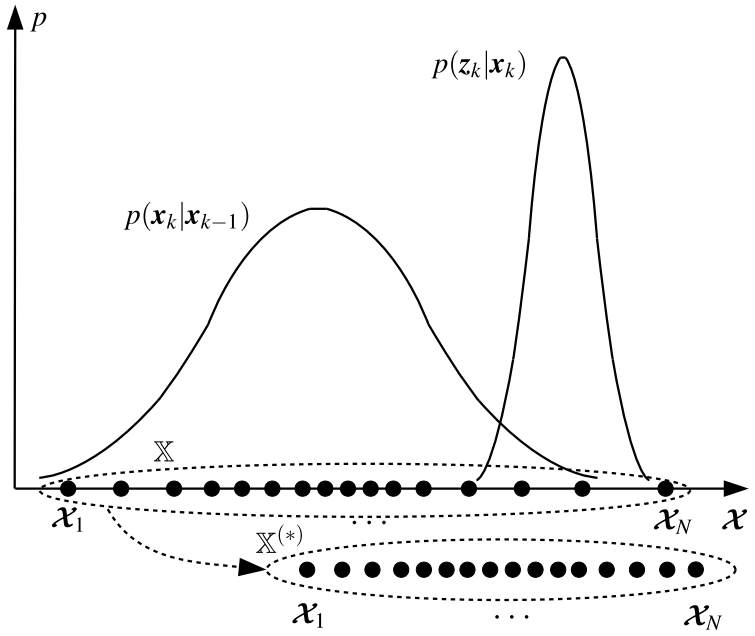
$$W_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}) = W_{k-1}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1,i}) \frac{p\left(z_k \,|\, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}\right) p\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i} \,|\, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1,i}\right)}{\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}; \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k,i}, \boldsymbol{P}_{k,i}\right)}, \quad (2.198)$$

pri čemu je svaki uzorak $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}$ izvučen iz razdiobe $\mathcal{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_{k,i}, \boldsymbol{P}_{k,i}\right)$. Naposljetku, estimacija se provodi prema (2.192), pri čemu je normirani koeficijent

$$\mathscr{W}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}) = \frac{W_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i})}{\sum_{j=1}^{N} W_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j})}. \quad (2.199)$$

Također je za propozicijsku razdiobu uobičajena primjena prijelazne razdiobe $p\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \boldsymbol{x}_{k-1}\right)$ radi lakoće implementacije, ali nedostatka u tome što ne uključuje posljednje (kurentno) mjerenje. Također, kada vjerodostojnost mjerenja $p(z_k \,|\, \boldsymbol{x}_k)$ leži u repu prijelazne razdiobe, povećava se rizik od iscrpljivanja uzoraka, a aproksimacija aposteriorne razdiobe je slaba kada je šum mje-

renja malen, slika 2.7. Nasuprot tome, metode aproksimacije optimalne razdiobe poput proširenog ili Kalmanovog filtriranja bez derivacije uključuju kurentno mjerenje te pomiču uzorke prema području veće vjerojatnosti kako je ilustrirano slikom 2.7.



Slika 2.7. Ilustracija iscrpljivanja uzoraka kada je za propozicijsku razdiobu primijenjena prijelazna razdioba i kada vjerodostojnost kurentnog mjerenja leži u repu prijelazne razdiobe. Metode aproksimacije optimalne razdiobe pomiču uzorke iz skupa $\mathbb{X}$ prema području veće vjerojatnosti (skup $\mathbb{X}^{(*)}$).

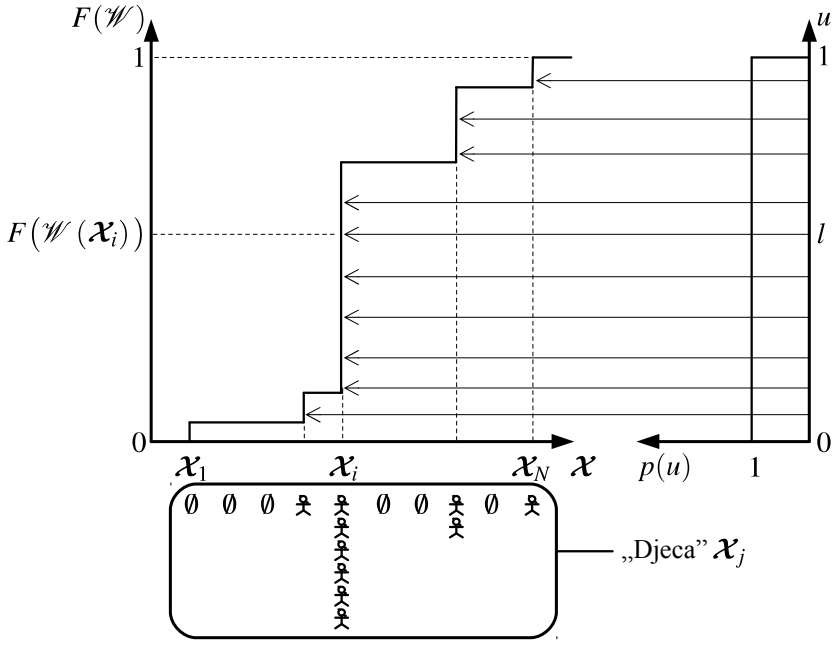
U [116] je pokazano da provođenjem sekvencijalnog uzorkovanja varijanca koeficijenata $\{\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i), i = 1,\ldots,N\}$ s vremenom raste te naposljetku samo mali broj uzoraka (u krajnjem slučaju samo jedan) imaju značajnu težinu, što znači da većina računalnog opterećenja otpada na evaluaciju uzoraka koji ne pridonose značajno estimaciji. Ovakva degeneracija uzoraka nastoji se prevladati shemama odabira odnosno tehnikama ponovnog uzorkovanja poput sekvencijalnog (SIR), rezidualnog ili sistematskog [114]. U [119], uveden je pojam efektivnog broja uzoraka N_{eff} kao mjera degeneracije uzoraka,

$$N_{eff} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)} \tag{2.200}$$

te se, ukoliko je manji od granične vrijednosti, pristupa postupku ponovnog uzorkovanja. Granična vrijednost određena je empirijski i uobičajeno iznosi $2N/3$.

Postupkom ponovnog uzorkovanja uzorci se regeneriraju uz istovremeno uklanjanje onih čiji koeficijenti nisu značajni. U osnovi se nastoje istaknuti uzorci sa značajnim težinskim koeficijentom u odnosu na one čiji koeficijenti nisu značajni i koji značajno ne pridonose estimaciji. Tako se metodama ponovnog uzorkovanja uzimaju nezavisni identično distribuirani uzorci iz aposteriorne razdiobe (2.191), pa je slučajna mjera $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_i, \mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i), i = 1,\ldots,N\}$ zamijenjena

slučajnom mjerom $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_j, \mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_j) = 1/N, j = 1,\ldots,N\}$, pri čemu je zbog nezavisnih i identično distribuiranih uzoraka $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_j\}$ svaki koeficijent jednak $1/N$. Primjenom teorema 5.1 u [120] koji se odnosi na optimalnu estimaciju s N uzoraka funkcije slučajne varijable čija je razdioba predstavljena mješavinom razdioba poput (2.191), svakom uzorku $\boldsymbol{\mathcal{X}}_i$ je, razmjerno njegovom težinskom koeficijentu $\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)$, dodijeljen određen broj novih uzoraka („djece") N_i, ali tako da je konačni broj uzoraka uvijek jednak N i očekivanje broja „djece" jednako $E(N_i) = N\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)$. Metodom SIR koja je ilustrirana slikom 2.8, očekivani broj „djece" N_i za svaki i-ti uzorak nastoji se postići uzorcima jednolike razdiobe $\{u_l, l = 1,\ldots,N\}$ koji određuju odgovarajući indeks uzorka i, što je jednako uzimanju N uzoraka iz skupa $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_i, i = 1,\ldots,N\}$ pri čemu je vjerojatnost biranja uzorka i jednaka $\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)$. Nakon ponovnog uzorkovanja, sva „djeca" imaju novi težinski koeficijent koji je jednak $1/N$. Vjerojatnost da i-ti uzorak ima N_i „djece" određena je multinomnom razdiobom $\mathscr{M}\big(N, \mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_1),\ldots,\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_N)\big)$ [121] s varijancom broja „djece" $\mathrm{var}(N_i) = N\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)\big(1 - \mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)\big)$ [111].

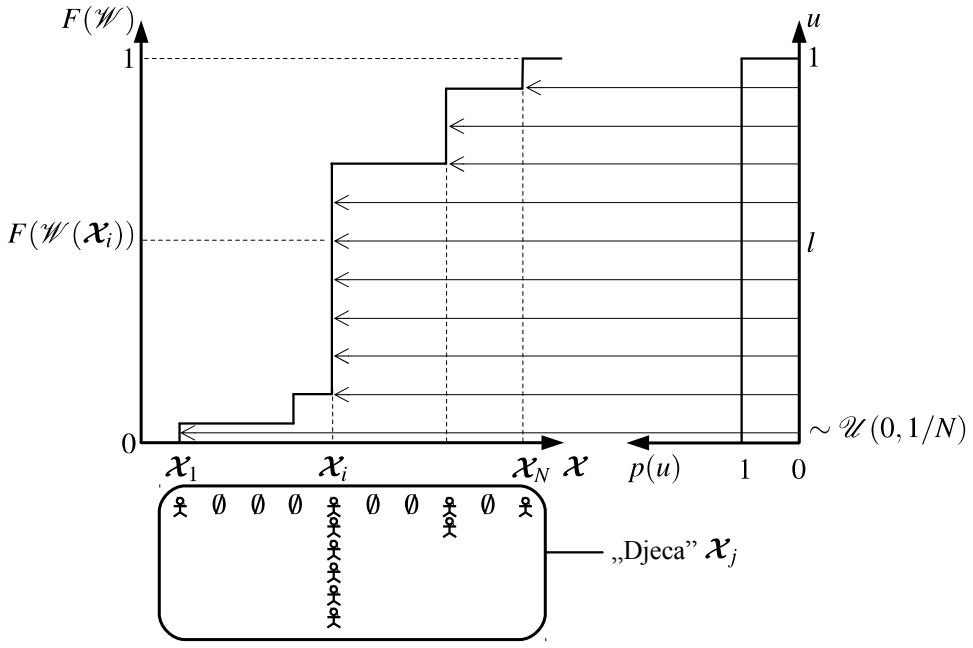


Slika 2.8. Ilustracija metode sekvencijalnog ponovnog uzorkovanja (SIR) gdje N uzoraka u_l iz jednolike razdiobe određuje indeks koeficijenta $\{\mathscr{W}_i, i = 1,\ldots,N\}$ te se tako svaki uzorak $\boldsymbol{\mathcal{X}}_i$ umnaža razmjerno svojoj značajnosti $\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)$. Sva umnožena „djeca" $\boldsymbol{\mathcal{X}}_j$ imaju isti težinski koeficijent koji je jednak $1/N$.

Metodom rezidualnog ponovnog uzorkovanja, uvjet $E(N_i) = N\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)$ nastoji se zadovoljiti kroz dva koraka [119]. U prvom koraku, broj „djece" $N_{A,i}$ svakog i-tog uzorka jednak je cjelobrojnoj vrijednosti od $N\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)$, odnosno $N_{A,i} = \lfloor N\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)\rfloor$, pri čemu je s $\lfloor\cdot\rfloor$ označena cjelobrojna vrijednost. U drugom koraku, nad preostalim brojem $N_B = N - \sum_{i=1}^{N} N_{A,i}$ uzoraka provodi se metoda SIR pri čemu je težinski koeficijent svakog uzorka $\mathscr{W}_B(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)$ jednak $N_B^{-1}\big(N\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i) - N_{A,i}\big)$. Ako se s $N_{B,i}$ označi broj „djece" i-tog uzorka u drugom koraku tako da je $N_B = \sum_{i=1}^{N} N_{B,i}$, svaki i-ti uzorak na kraju ima $N_{A,i} + N_{B,i}$ „djece". Metoda rezidualnog

ponovnog uzorkovanja računalno je manje zahtjevna od metode SIR i s manjom varijancom broja „djece" koja je jednaka $N_B \mathscr{W}_B(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)\big(1-\mathscr{W}_B(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)\big)$ [111, 114].

Još manja varijanca broja „djece" postignuta je provođenjem sistematskog uzorkovanja kojim se smanjuje nesigurnost određivanja indeksa i. Algoritmom sistematskog uzorkovanja koji je predložen u [122] (vidi također [120], poglavlje 5) za općeniti slučaj biranja M uzoraka iz mješavine N razdioba, broj „djece" N_i uvijek poprima vrijednosti $\lfloor N\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)\rfloor$ ili $\lfloor N\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)\rfloor + 1$ čime je, zadržavajući oznake koje su uvedene za rezidualno uzorkovanje, ostvarena varijanca broja „djece" $\mathrm{var}(N_i) = N_B \mathscr{W}_B(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)\big(1-N_B\mathscr{W}_B(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)\big)$ [111, 120]. Algoritam sistematskog uzorkovanja ilustriran je slikom 2.9. Skup točaka $\{u_l, l=1,\ldots,N\}$ za koje vrijedi $u_{l+1}-u_l = 1/N,\ l=1,\ldots,N-1$, određuje indekse i kroz zadovoljenje uvjeta $\sum_{\iota=1}^{i}\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\iota) \le u_l < \sum_{\iota=1}^{i+1}\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_\iota)$, s tim što je početna točka u_1 izvučena iz jednolike razdiobe na intervalu $[0, 1/N]$ [123].



Slika 2.9. Ilustracija sistematskog uzorkovanja gdje N uzoraka u_l određuje indeks koeficijenta $\{\mathscr{W}_i, i=1,\ldots,N\}$ te se tako svaki uzorak $\boldsymbol{\mathcal{X}}_i$ umnaža razmjerno svojoj značajnosti $\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i)$. Sva umnožena „djeca" imaju isti težinski koeficijent koji je jednak $1/N$. Početna vrijednost u_1 izvučena je iz jednolike razdiobe na intervalu $[0, 1/N]$, a svi uzorci su međusobno jednako udaljeni za iznos $1/N$.

Metode ponovnog uzorkovanja umnažaju svaki uzorak $\boldsymbol{\mathcal{X}}_i$ brojem „djece" koji je jednak $E(\mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i))$, što znači da uzorci sa značajnijim težinskim koeficijentom imaju razmjerno više „djece", dok ih uzorci s manje značajnim koeficijentima imaju malo ili uopće nemaju. Proces ponovnog uzorkovanja, budući da uzima uzorke iz diskretne aproksimacije razdiobe (2.191), tako može dovesti do iscrpljivanja uzoraka gdje uvijek jedni te isti uzorci generiraju nove uzorke, od kojih opet, nakon ciklusa filtracije, izvorni uzorak ima najznačajniji koeficijent, a ostali su zanemarivi. Pojava iscrpljivanja uzoraka posebno je istaknuta kada je pro-

cesni šum malen. Stoga se nakon koraka ponovnog uzorkovanja, $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_i, \mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_i), i = 1,\ldots,N\} \rightarrow \{\boldsymbol{\mathcal{X}}_j, \mathscr{W}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_j), j = 1\ldots,N\}$, unosi određena varijacija u položaju uzoraka $\boldsymbol{\mathcal{X}}_j$ pri čemu se njihova razdioba, koja je opisana s (2.191), ne mijenja. Jedan od načina varijacije je primjena regularizacije (ukoliko broj komponenti vektora stanja nije velik ($n_x \leq 4$)) [93, 111, 124] i primjena metode Markovljevog lanca Monte Carlo (MCMC) [114].

Regularizacijskom se metodom provodi ponovno uzorkovanje iz kontinuirane estimacije aposteriorne razdiobe. Npr. jezgrena estimacija [61] razdiobe koja je ilustrirana slikom 2.10, opisana je s

$$\hat{p}\left(\boldsymbol{x}_k^{(*)} \,|\, \mathbb{Z}^k\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathscr{W}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}\right) \frac{1}{\sigma^{n_x}} \mathscr{K}\left(\frac{\boldsymbol{x}_k^{(*)} - \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}^{(*)}}{\sigma}\right), \tag{2.201}$$

pri čemu su uzorci $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}^{(*)}, i = 1,\ldots,N, k \geq 0\}$ nastali linearnom transformacijom izbjeljivanja

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}^{(*)} = \boldsymbol{A}_k^{-1} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}, \tag{2.202}$$

tako da je empirijska kovarijanca razdiobe

$$\hat{p}\left(\boldsymbol{x}_k^{(*)} \,|\, \mathbb{Z}^k\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathscr{W}_k\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}\right) \delta\left(\boldsymbol{x}_k^{(*)} - \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i}^{(*)}\right) \tag{2.203}$$

jednaka $\boldsymbol{I}_{n_x}$, a $\boldsymbol{A}_k \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}_k$ pri čemu je $\boldsymbol{P}_k$ empirijska kovarijanca razdiobe (2.191) [124]. Jezgrena funkcija $\mathscr{K}(\cdot)$ je simetrična unimodalna probabilistička funkcija sa svojstvima [93, 125]

$$\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathscr{K}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1, \tag{2.204}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{x} \mathscr{K}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0, \tag{2.205}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}\, \mathscr{K}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty, \tag{2.206}$$

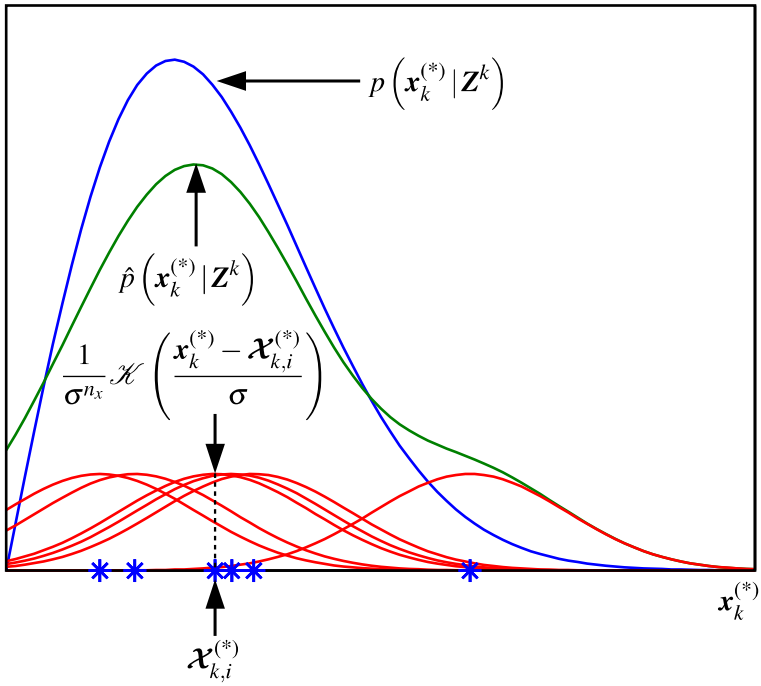
tako da je za konzistentnost estimacije potrebno zadovoljiti [61]

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sigma(N)\right) = 0, \tag{2.207}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(E\left(\hat{p}(\boldsymbol{x})\right)\right) = p(\boldsymbol{x}), \tag{2.208}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(N\sigma(N)\right) = \infty. \tag{2.209}$$

Za što bolju estimaciju razdiobe, kritična je vrijednost skalarnog parametra σ koja se najčešće određuje minimiziranjem srednje kvadratne integrirane greške (MISE) za pretpostavljenu aposteriornu razdiobu, ili metodama unakrsne provjere [126], vidi također odjeljak 5.1.



Slika 2.10. Ilustracija estimacije aposteriorne razdiobe metodom jezgrene estimacije.

Regularizacijom se skupu ponovo uzetih uzoraka $\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}, \mathscr{W}_k(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}) = 1/N, j = 1,\ldots,N, k \geq 0\}$ iz diskretne razdiobe (2.191), nakon izbjeljivanja (2.202), dodaje skup regularizacijskih članova $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{k,j} \sim \mathscr{K}(\cdot), j = 1,\ldots,N, k \geq 0\}$, tako da je ponovno uzorkovanje iz kontinuirane razdiobe (2.201),

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(**)} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)} + \sigma^{n_x}\boldsymbol{\varepsilon}_{k,j}, \tag{2.210}$$

što je jednako ponovnom uzorkovanju iz kontinuirane razdiobe (2.191),

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(***)} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j} + \sigma^{n_x}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\varepsilon}_{k,j}. \tag{2.211}$$

Prema [93, 124], optimalna jezgrena funkcija za slučaj kada svi uzorci imaju isti težinski koeficijent je Epanečnjikova jezgrena funkcija

$$\mathscr{K}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{n_x+2}{2c_{n_x}}\left(1-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right), & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < 1 \\ 0, & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq 1 \end{cases}, \tag{2.212}$$

gdje je s c_{n_x} označen volumen jedinične hipersfere definirane u prostoru $\mathbb{R}^{n_x}$. Optimalna vrijednost parametra σ određena je kriterijem minimalne greške MISE pod pretpostavkom Gaussove aposteriorne razdiobe kao

$$\sigma_{opt} = \left(8c_{n_x}^{-1}\left(n_x+4\right)\left(2\sqrt{\pi}\right)^{n_x}N\right)^{\frac{1}{n_x+4}}. \tag{2.213}$$

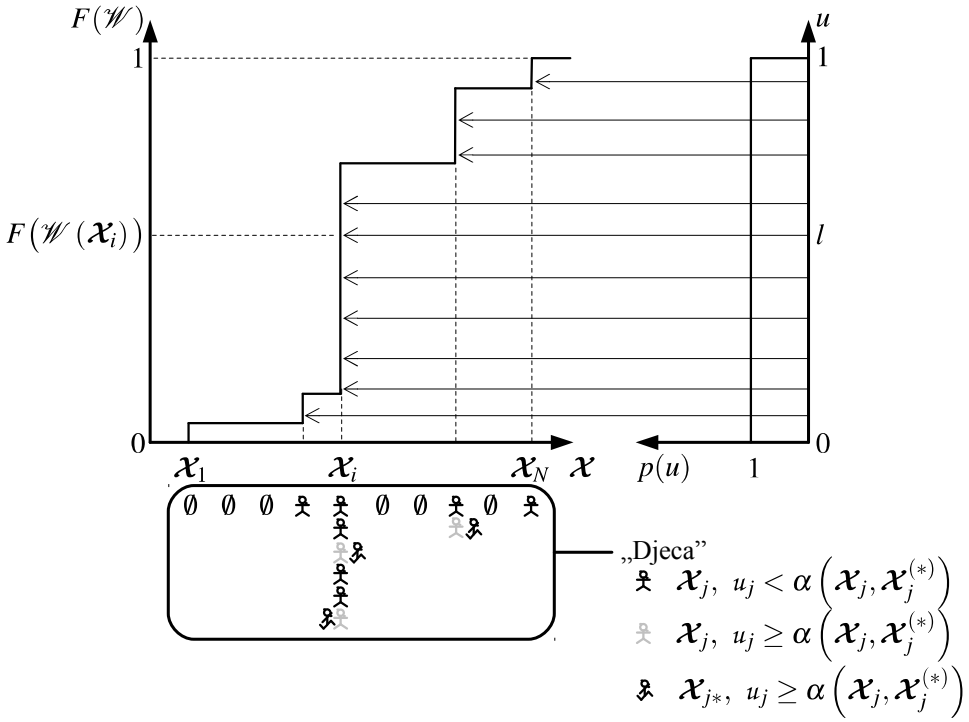
Ponovno uzorkovanje iz aposteriorne razdiobe moguće je provesti pomoću N realizacija Markovljevog lanca. Pri tome stacionarna razdioba lanca mora biti jednaka aposteriornoj razdiobi, a realizacije se uzimaju nakon perioda konvergencije. Da bi Markovljev lanac konvergirao k stacionarnoj razdiobi, treba biti ireducibilan, što znači da svako stanje mora biti dostupno iz svakog drugog (ostalog) stanja, treba biti povratan, što znači da vjerojatnost povrata u bilo koje stanje beskonačno često mora biti jednaka jedan te naposljetku, treba biti aperiodičan kako ne bi periodički oscilirao između stanja [114]. Jedna od metoda konstruiranja Markovljevog lanca definiranog sa stacionarnom razdiobom je Metropolis-Hastingsova metoda [127]. Za svaki vremenski indeks k, metodom koja je predložena u [128] (koja je generalizacija metode [129]), svakom uzorku $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}$ predlaže se kandidat $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)}$ izvučen iz proizvoljne propozicijske prijelazne razdiobe $q(\cdot)$. Predloženi kandidat se prihvaća s vjerojatnošću

$$\alpha\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)}\right) = \min\left(\left\{1, \frac{p\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)} \,|\, \mathbb{Z}^k\right) q\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j} \,|\, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)}\right)}{p\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j} \,|\, \mathbb{Z}^k\right) q\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)} \,|\, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}\right)}\right\}\right) \tag{2.214}$$

ako je vjerojatnost realizacije $\alpha\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)}\right) \geq u_j$, pri čemu je $\{u_j \sim \mathcal{U}(0,1), j = 1,\ldots,N\}$. Propozicijska prijelazna razdioba $q(\cdot)$ može biti slučajna šetnja za koju vrijedi $q\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}\right) = q\left(\left|\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j} - \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)}\right|\right)$, pa (2.214) poprima oblik Metropolisove metode [129],

$$\alpha\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)}\right) = \min\left(\left\{1, \frac{p\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)} \,|\, \mathbb{Z}^k\right)}{p\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j} \,|\, \mathbb{Z}^k\right)}\right\}\right), \tag{2.215}$$

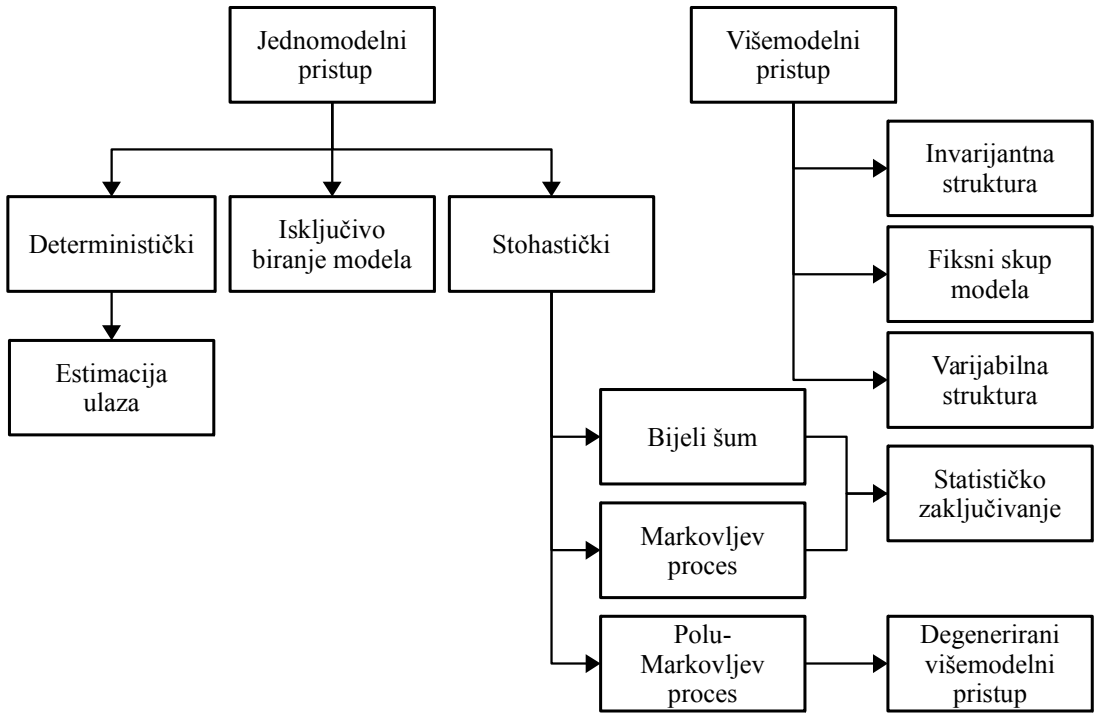
kako je to ilustrirano slikom 2.11. Kandidat $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)}$ tako je jednak $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j} + \boldsymbol{\varepsilon}_{k,j}$, pri čemu je $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,j} \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\sigma}^2)$. Premale vrijednosti dijagonalne matrice kovarijance $\boldsymbol{\sigma}^2$ vode čestom prihvaćanju kandidata, ali uz sporu konvergenciju, dok se za visoke vrijednosti stanje lanca rijetko mijenja jer je zbog pomaka kandidata prema repu razdiobe, omjer $p(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j}^{(*)} \,|\, \mathbb{Z}^k)/p(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,j} \,|\, \mathbb{Z}^k)$, a time i vjerojatnost prihvaćanja, niska.



Slika 2.11. Ilustracija Metropolisove metode koja se primjenjuje nakon metode SIR, vidi sliku 2.8. Pomak uzorka $\boldsymbol{\mathcal{X}}_j^{(*)}$ je prihvaćen ako je vjerojatnost prihvaćanja $\alpha\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_j, \boldsymbol{\mathcal{X}}_j^{(*)}\right)$ veća od slučajne vrijednosti u_j koja je izvučena iz jednolike razdiobe na intervalu $[0,1]$.

2.3.3. Metode estimacije vektora stanja manevrirajućeg cilja

Klasifikacija osnovnih metoda estimacije vektora stanja manevrirajućeg cilja ilustrirana je slikom 2.12. Metode se u osnovi temelje na jednomodelnom i višemodelnom pristupu. Kako se dinamika manevrirajućeg cilja ne može opisati samo jednim kinematičkim modelom, klasične metode jednomodelnog pristupa oslanjaju se na detekciju manevra. Ako je detektiran, opisan je determinističkim ili stohastičkim modelom. Deterministički model podrazumijeva estimaciju upravljačkog ulaza sustava (koji je uzrok manevru), dok stohastički modeli podrazumijevaju manevar kao nekorelirani (bijeli šum) ili korelirani (Markovljev) stohastički proces, rezultirajući adaptacijom parametara filtra (statističko zaključivanje), odnosno degeneriranim višemodelnim pristupom kada je upravljački ulaz sustava modeliran skupom diskretnih stanja, opisan prijelaznom vjerojatnošću i razdiobom vremena zadržavanja [82, 130, 131].



Slika 2.12. Klasifikacija osnovnih metoda estimacije vektora stanja manevrirajućeg cilja.

Određivanje početka manevra osnova je adaptivnih metoda. Uobičajeno se provodi testiranjem hipoteze o postojanju manevra ispitivanjem povijesti inovacija, odnosno mjerenja odjeka cilja u volumenu valjanosti koji odgovara predviđenom manevru. Ako je hipoteza potvrđena, provodi se adaptacija parametara poput upravljačkog ulaza ili razine šuma procesa [132]. Nedostatak ove metode je (vjerojatno) veliko kašnjenje između stvarnog početka manevra i početka adaptacije. Brža reakcija ostvarena je estimacijom u filtru s varijabilnom dimenzijom vektora stanja, odnosno isključivim biranjem modela, pri čemu se inicijalno pretpostavlja model jednolikog gibanja. Nakon detekcije manevra, vektor se proširuje komponentom akceleracije, a kad njena vrijednost postane zanemariva, ponovno se primjenjuje početni model jednolikog gibanja [12].

Višemodelnim metodama se istovremeno, pored vektora stanja, provodi i estimaciju moda gibanja. Osnova višemodelnih metoda je vjerojatnosna kombinacija pojedinačnih estimacija koje su provedene pod različitim hipotezama o karakteru (modu) gibanja, npr. nemanevrirajućem ili manevrirajućem gibanju. Esencijalno se razlikuju u načinu tretiranja strukture skupa modela, matematičke aproksimacije modova gibanja. Dok invarijantna struktura pretpostavlja sustav koji se nalazi u jednom, ali nepoznatom i vremenski nepromjenjivom modu gibanja, struktura s fiksnim skupom modela pretpostavlja vremenski promjenljiv mod gibanja pri čemu je svaki mod opisan modelom koji je član skupa vremenski nepromjenjivog broja članova. Nasuprot tome, varijabilna struktura pretpostavlja sustav koji se u svakom trenutku nalazi u modu gibanja koji je opisan modelom iz skupa koji sadrži vremenski promjenljivi broj članova [16].

Filtri opisani u odjeljku 2.3.1 uključeni su u cjeline metoda za praćenje manevrirajućeg cilja u čijem se kontekstu primjenjuje metoda pridruživanja koja je tema ovoga rada. Dok jednomodelne metode uključuju estimaciju upravljačkog ulaza i adaptaciju parametara filtra [15, 132] te proširenje vektora stanja [12], višemodelne metode uključuju poopćenu prividno-Bayesovu metodu prvog i drugog reda (GPB1 i GPB2) [15], metodu s međudjelovanjem između modela (IMM) [20, 21] i Viterbijevu metodu [19].

U klasičnom jednomodelnom pristupu modeliranja i detekcije manevra, nepoznati ulaz (akceleracija) $\boldsymbol{u}_k$, modelira se kao deterministički proces što je temelj tehnika estimacije nepoznatog ulaza. Pri tome se estimacija temelji na pretpostavkama [132]:

P1 nepoznati ulaz je konstantan za vrijeme manevra

P2 manevar traje duže nego detekcija, tj. može završiti tek nakon što je detektiran

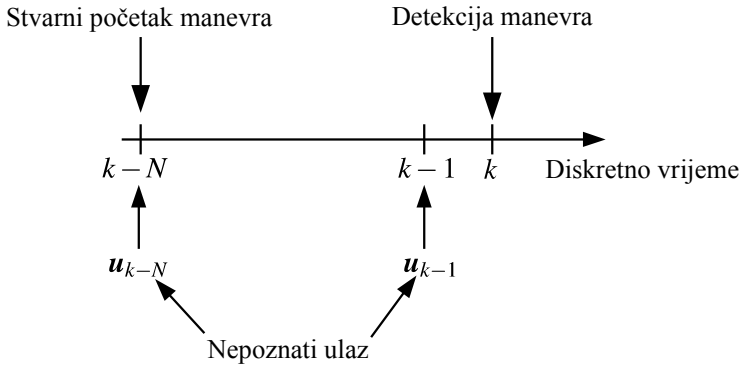
P3 manevar se detektira N vremenskih uzoraka nakon stvarnog početka.

Pretpostavka P1 slijedi iz nepoznate prirode praćenog cilja gdje se za svaki trenutak opservacije t_k pretpostavlja konstantna razina ulaza $\{\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}, i = k-N,\ldots,k-1\}$ kroz vremenski interval $[t_{k-N}, t_{k-1}]$, pri čemu je s N označen broj prošlih uzoraka kako je to ilustrirano slikom 2.13. Stvarni (diskretizirani) model gibanja cilja (2.14) uključuje nepoznati ulaz, ali se estimacija i opservacija provode pod hipotezom gibanju cilja bez manevra H0 [15, 132],

$$\boldsymbol{x}_{k+1}^{(\mathrm{H0})} = \boldsymbol{\Phi}_k \boldsymbol{x}_k^{(\mathrm{H0})} + \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{w}_k, \tag{2.216}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{x}_k^{(\mathrm{H0})} + \boldsymbol{v}_k, \tag{2.217}$$

gdje eksponent $(\mathrm{H0})$ naglašava estimaciju na temelju hipoteze gibanja bez manevra. Tehnika detekcije manevra sastoji se u testiranju hipoteze H1 da je gibanje cilja manevrirajuće, ispitivanjem statističke značajnosti estimirane razine ulaza $\hat{\boldsymbol{u}}_k$ koji se, za svaki vremenski uzorak t_k, estimira na temelju inovacije iz prethodnih N vremenskih ciklusa. Ako je veličina $\hat{\boldsymbol{u}}_k$ statistički značajna, hipoteza H1 je potvrđena te se provodi korekcija estimacije vektora stanja na temelju početka manevra u trenutku vremenskog indeksa t_{k-N}.



Slika 2.13. Vremenski dijagram određivanja djelovanja nepoznatog ulaza na gibanje cilja.

Neka je s $i = k-N,\ldots,k-1$ označen indeks diskretnih vremena u vremenskom intervalu $[t_{k-N}, t_{k-1}]$. Rekurzivni izraz za apriornu estimaciju $\bar{\boldsymbol{x}}_i^{(\mathrm{H0})}$ na temelju hipoteze gibanja bez manevra H0, (2.216) i (2.217), dan je s

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{(\mathrm{H0})} &= \boldsymbol{\Phi}_i \hat{\boldsymbol{x}}_i^{(\mathrm{H0})} = \boldsymbol{\Phi}_i \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{H}_i\right) \bar{\boldsymbol{x}}_i^{(\mathrm{H0})} + \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{z}_i \\ &= \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i \bar{\boldsymbol{x}}_i^{(\mathrm{H0})} + \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{z}_i, \end{aligned} \tag{2.218}$$

gdje je $\boldsymbol{K}_i$ koeficijent Kalmanovog filtra (vidi (2.105)) i $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i = \boldsymbol{\Phi}_i \left(\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{H}_i\right)$ prijelazna matrica za vremenski indeks i, pri čemu je, uvažavajući notaciju prema (2.15), $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i = \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t_{i+1}, t_i)$. Rekurzivna relacija (2.218) izražena preko apriorne estimacije na početku manevra, jednaka je

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{(\mathrm{H0})} &= \left(\prod_{m=0}^{i-k+N} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{i-m}\right) \bar{\boldsymbol{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H0})} + \sum_{j=k-N}^{i} \left(\prod_{m=0}^{i-j-1} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{i-m}\right) \boldsymbol{\Phi}_j \boldsymbol{K}_j \boldsymbol{z}_j \\ &= \bar{\boldsymbol{\Phi}}\left(t_i, t_{k-N}\right) \bar{\boldsymbol{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H0})} + \sum_{j=k-N}^{i} \bar{\boldsymbol{\Phi}}\left(t_i, t_{j+1}\right) \boldsymbol{\Phi}_j \boldsymbol{K}_j \boldsymbol{z}_j, \end{aligned} \tag{2.219}$$

pri čemu je prijelazna matrica $\bar{\boldsymbol{\Phi}}\left(t_i, t_j\right)$ definirana kao

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}\left(t_i, t_j\right) = \begin{cases} \prod_{m=0}^{j} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{i-m}, & i \geq j \\ \boldsymbol{I}_{n_x}, & i < j \end{cases}. \tag{2.220}$$

Apriorna estimacija pod hipotezom manevrirajućeg gibanja H1 prema modelu (2.14), jednaka je

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{(\mathrm{H1})} = \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t_i, t_{k-N}) \bar{\boldsymbol{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} + \sum_{j=k-N}^{i} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t_i, t_{j+1}) \left(\bar{\boldsymbol{\Phi}}_j \boldsymbol{K}_j \boldsymbol{z}_j + \boldsymbol{\Lambda}_j \boldsymbol{u}_j\right), \tag{2.221}$$

pa je

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{(\mathrm{H1})} = \bar{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{(\mathrm{H0})} + \sum_{j=k-N}^{i} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t_i, t_{j+1}) \boldsymbol{\Lambda}_j \boldsymbol{u}_j. \tag{2.222}$$

Inovacija estimacije pod hipotezom nemanevrirajućeg gibanja cilja H0, jednaka je

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H0})} &= \tilde{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H1})} + \boldsymbol{H}_{i+1} \sum_{j=k-N}^{i} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t_i, t_{j+1}) \boldsymbol{\Lambda}_j \boldsymbol{u}_j \\ &= \tilde{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H1})} + \boldsymbol{\mathcal{H}}_{i+1} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{2.223}$$

pod pretpostavkom da je $\{\boldsymbol{\Lambda}_i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{u}, i = k-N,\ldots,k-1\}$. Prvi član u (2.223) je inovacija estimacije pod hipotezom manevrirajućeg gibanja cilja, koja je, pod pretpostavkom konzistentnosti estimatora, bijeli šum, vidi dodatak B.1. Stoga je inovacija $\tilde{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H0})}$ linearna kombinacija nepoznatog ulaza $\boldsymbol{u}$ i bijelog šuma $\tilde{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H1})}$ što pruža mogućnost estimacije parametra $\boldsymbol{u}$ metodom najmanje

kvadratne greške [15, 72], uzevši u obzir sve inovacije u vremenskom intervalu $[t_{k-N+1}, t_k]$,

$$\tilde{\boldsymbol{z}}^{(\mathrm{H0})} = \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{z}}^{(\mathrm{H1})}, \tag{2.224}$$

pri čemu je vektor mjerenja dan s

$$\tilde{\boldsymbol{z}}^{(\mathrm{H0})} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(\mathrm{H0})} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{z}}_{k-N+1}^{(\mathrm{H0})} \end{bmatrix}, \tag{2.225}$$

matrica mjerenja s

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}_k \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_{k-N+1} \end{bmatrix} \tag{2.226}$$

te kovarijanca bijelog šuma, odnosno kovarijanca inovacije $\tilde{\boldsymbol{z}}^{(\mathrm{H1})}$, sa

$$\boldsymbol{S}^{(\mathrm{H1})} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_k^{(\mathrm{H1})} & \cdots & \boldsymbol{O}_{n_z n_z} \\ \boldsymbol{O}_{n_z n_z} & \ddots & \boldsymbol{O}_{n_z n_z} \\ \boldsymbol{O}_{n_z n_z} & \cdots & \boldsymbol{S}_{k-N+1}^{(\mathrm{H1})} \end{bmatrix}. \tag{2.227}$$

Rješenje relacije (2.224) po $\boldsymbol{u}$ u smislu najmanje kvadratne greške tako je

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \left(\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{S}^{(\mathrm{H1})} \right)^{-1} \boldsymbol{\mathcal{H}} \boldsymbol{\Lambda} \right)^{-1} \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{S}^{(\mathrm{H1})} \right)^{-1} \tilde{\boldsymbol{z}}^{(\mathrm{H0})}, \tag{2.228}$$

gdje je, pod hipotezom nepostojanja manevra i linearnog Gaussovog sustava, $\boldsymbol{u} \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\sigma}^2)$, s matricom kovarijance $\boldsymbol{\sigma}^2$ koja je jednaka $(\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}^{-1} \boldsymbol{\mathcal{H}} \boldsymbol{\Lambda})^{-1}$. Pod hipotezom H0 da ne postoji manevar, normalizirani kvadratni ulaz

$$\varepsilon_u = \hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}^{-2} \hat{\boldsymbol{u}} \tag{2.229}$$

ima χ^2 raspodjelu s n_x stupnjeva slobode, gdje je n_x broj komponenti vektora stanja. Vjerojatnost lažne detekcije manevra određena je s vjerojatnošću $P(\varepsilon_u \geq d \,|\, \mathrm{H0}) = \alpha$ gdje je α razina značajnosti i d granica intervala pouzdanosti, vidi dodatak B.1. Manevar je detektiran ako je normalizirani kvadratni ulaz (2.229) statistički značajan te se tada provodi korekcija apriorne

estimacije kao

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{x}}_k &= \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{H0})} + \sum_{j=k-N}^{k-1} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t_{k-1}, t_{j+1}) \boldsymbol{\Lambda} \hat{\boldsymbol{u}} \\ &= \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{H0})} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_k \hat{\boldsymbol{u}}\end{aligned} \tag{2.230}$$

i korekcija kovarijance kao

$$\bar{\boldsymbol{P}}_k = \bar{\boldsymbol{P}}_k^{(\mathrm{H0})} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_k \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\mathcal{L}}_k^{\mathrm{T}} \tag{2.231}$$

koja je povećana radi nesigurnosti korekcijskog člana $\hat{\boldsymbol{u}}$ u (2.230).

U [133], pretpostavka P1 je relaksirana i nepoznati ulaz je opisan zbrojem p otežanih i poznatih vremenskih funkcija $f(\cdot)$ unutar intervala detekcije $[t_{k-N}, t_{k-1}]$,

$$\boldsymbol{u}_j = \sum_{\iota=1}^{p} \boldsymbol{W}_\iota f_\iota(t_j), \tag{2.232}$$

pri čemu je $\boldsymbol{W}_\iota$ vektor iste duljine kao i $\boldsymbol{u}_j$. Problem određivanja nepoznatog ulaza svodi se na estimaciju vektora $\hat{\boldsymbol{W}}_\iota$ tako da je zbroj normaliziranih inovacija unutar intervala $[t_{k-N}, t_{k-1}]$ minimiziran, odnosno

$$\hat{\boldsymbol{W}}_\iota = \min_{\{\boldsymbol{W}_1, \ldots, \boldsymbol{W}_p\}} \left(\sum_{i=k-N}^{k-1} \left(\tilde{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H1})}\right)^{\mathrm{T}} S_{i+1}^{-1} \tilde{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H1})} \right), \quad \iota = 1, \ldots, p. \tag{2.233}$$

Uvrštenjem (2.232) u (2.233) slijedi

$$\begin{aligned}\sum_{i=k-N}^{k-1} \left(\tilde{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H1})}\right)^{\mathrm{T}} S_{i+1}^{-1} \tilde{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H1})} = \sum_{i=k-N}^{k-1} &\left(\bar{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H0})} - \boldsymbol{H}_{i+1} \sum_{j=k-N}^{i} \bar{\boldsymbol{\Phi}}\left(t_i, t_{j+1}\right) \boldsymbol{\Lambda}_j \sum_{\iota=1}^{p} \boldsymbol{W}_\iota f_\iota(t_j) \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_{i+1}^{-1} \cdot \\ &\cdot \left(\bar{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H0})} - \boldsymbol{H}_{i+1} \sum_{j=k-N}^{i} \bar{\boldsymbol{\Phi}}\left(t_i, t_{j+1}\right) \boldsymbol{\Lambda}_j \sum_{\iota=1}^{p} \boldsymbol{W}_\iota f_\iota(t_j) \right),\end{aligned} \tag{2.234}$$

pa derivacijom po $\boldsymbol{W}_j$ i izjednačenjem s nulom proizlazi p jednadžbi, tako da je estimirana vrijednost koeficijenata jednaka [133]

$$\hat{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{B}, \tag{2.235}$$

pri čemu je

$$\hat{\boldsymbol{W}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{W}}_1^{\mathrm{T}} & \ldots & \hat{\boldsymbol{W}}_p^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.236}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \sum_{i=k-N}^{k-1} \boldsymbol{C}_{i,1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_{i+1}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{S}_{i+1}^{(\mathrm{H1})}\right)^{-1} \tilde{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H0})} \\ \vdots \\ \sum_{i=k-N}^{k-1} \boldsymbol{C}_{i,p}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_{i+1}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{S}_{i+1}^{(\mathrm{H1})}\right)^{-1} \tilde{\boldsymbol{z}}_{i+1}^{(\mathrm{H0})} \end{bmatrix} \tag{2.237}$$

i

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{p1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pp} \end{bmatrix}, \tag{2.238}$$

s elementima

$$\boldsymbol{A}_{rc} = \sum_{i=k-N}^{k-1} \boldsymbol{C}_{i,r}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_{i+1}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{S}_{i+1}^{(\mathrm{H1})}\right)^{-1} \boldsymbol{H}_{i+1} \boldsymbol{C}_{i,c}, \tag{2.239}$$

gdje je

$$\boldsymbol{C}_{i,r} = \sum_{j=k-N}^{i} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t_i, t_{j+1}) \boldsymbol{\Lambda}_j f_r(t_j). \tag{2.240}$$

Prema [133], da bi se mogla izračunati inverzna matrica $\boldsymbol{A}^{-1}$, matrica $\boldsymbol{A}$ mora biti regularna i broj uzoraka N mora biti veći od broja p međusobno nezavisnih vremenskih funkcija $f(\cdot)$.

Relaksiranje pretpostavke P3 vodi na pristup višestrukih hipoteza u pogledu određivanja vremena početka manevra [14]. U osnovi, estimacija ulaza se paralelno provodi pod N hipoteza da je početak manevra u $t_i, i = k-N, \ldots, k-1$. Krajnja estimacija ulaza određena je ili otežanom srednjom vrijednošću preko svih hipoteza ili vrijednošću pod najvjerodostojnijom hipotezom. Kako je vektor stanja opisan pozicijom, brzinom i akceleracijom, nepoznati ulaz opisuje impulsnu promjenu razine akceleracije [132].

Iako je manevar po svojoj prirodi deterministički, brojni radovi ukazuju na omiljeniji pristup koji manevar modelira kao stohastički proces, općenito kao bijeli šum (model skoro jednolikog gibanja, skoro jednoliko ubrzanog gibanja, polinomni model [15, 75]), Markovljev proces (Singerov model vremenske autokorelacije [78] i različite preinake, vidi odjeljak 2.1.3) ili kao polu-Markovljev proces (ulaz je modeliran kroz skup diskretnih stanja, opisan prijelaznom vjerojatnošću i razdiobom vremena zadržavanja [82, 130, 131]). Modeliranje manevra stohastičkim procesom temelj je metode adaptivne estimacije gdje je statistika šuma nepoznata, a najčešće se, uz pretpostavku bijelog šuma, određuje kroz srednju vrijednost i kovarijancu. Znatno manji broj metoda provodi adaptaciju Kalmanovog koeficijenta filtra kao odgovor na utjecaj nepoznatog šuma, bez izravnog određivanja njegove statistike [132]. U [134], definirano je nekoliko pristupa adaptivnoj estimaciji statistike šuma. U Bayesovom pristupu, apriorna razdioba statistike šuma osvježava se kurentnim mjerenjem rezultirajući aposteriornom razdiobom, u pristupu

najveće vjerodostojnosti, statistika šuma se određuje maksimiziranjem razdiobe, metodom kovarijance provodi se usporedba stvarne kovarijance inovacije s teorijskom i po potrebi povećava šum procesa modela, a u korelacijskom pristupu, parametri statistike šuma određuju se iz uzorkovane autokorelacije mjerenja ili inovacije [132, 135, 136]. Nedostatak adaptivnih metoda za uspješnu primjenu u praćenju manevrirajućeg cilja svakako je nemogućnost brze adaptacije filtra na manevar.

Tako se npr. u metodi kovarijance, pod pretpostavkom Gaussovog šuma procesa skoro jednolikog gibanja i Gaussovog šuma procesa koji opisuje manevar, adaptivna estimacija svodi na određivanje razine šuma procesa koja odgovara manevru [15, 72, 134], a u slučaju koreliranog šuma, tehnike izbjeljivanja svode problem na standardno filtriranje, proširenjem vektora stanja komponentom akceleracije. Određivanje razine procesa šuma može biti kontinuirano ili kroz skup diskretnih vrijednosti, a odluka o postojanju manevra najčešće se temelji na usrednjenoj normaliziranoj kvadratnoj inovaciji

$$\bar{\varepsilon}_{z,k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\boldsymbol{z}}_{k,i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_{k,i}^{-1} \tilde{\boldsymbol{z}}_{k,i} \tag{2.241}$$

kroz N uzoraka koja u slučaju linearnog Gaussovog procesa ima χ^2 raspodjelu. U kontinuiranom pristupu adaptaciji razine šuma procesa, definira se faktor multiplikacije μ takav da je kovarijanca inovacije jednaka

$$\boldsymbol{S}_k = \boldsymbol{H}_k \left(\boldsymbol{\Phi}_{k-1} \boldsymbol{P}_{k-1} \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \mu_k \boldsymbol{\Gamma}_{k-1} \boldsymbol{Q}_{k-1} \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}} \right) \boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k. \tag{2.242}$$

Pod hipotezom H0 da je estimacija konzistentna (stvarna kovarijanca estimacije konzistentna je s estimiranom, vidi dodatak B.1), usrednjena normalizirana kvadratna inovacija nalazi se s visokom vjerojatnošću unutar intervala pouzdanosti $[d_1, d_2]$,

$$P\big(\bar{\varepsilon}_{z,k} \in [d_1, d_2] \,|\, \mathrm{H0}\big) = 1 - \alpha, \tag{2.243}$$

pri čemu je α razina značajnosti. Ako je usrednjena normalizirana kvadratna inovacija (2.241) veća od gornje granice d_2, faktorom μ se povećava doprinos kovarijance procesnog šuma sve dok se vrijednost usrednjene normalizirane kvadratne inovacije ponovno ne nađe unutar granica pouzdanosti $[d_1, d_2]$ s visokom vjerojatnošću. U diskretnom pristupu, početno se koristi razina šuma procesa koja odgovara nemanevrirajućem modu gibanja cilja, a ako usrednjena normalizirana kvadratna inovacija (2.241) pređe gornju granicu pouzdanosti d_2, bira se sljedeća, viša razina šuma procesa, sve dok se vrijednost normalizirane kvadratne inovacije ponovno ne nađe unutar granica pouzdanosti $[d_1, d_2]$. Povratak na početnu razinu šuma provodi se kada vrijednost usrednjene normalizirane kvadratne inovacije (2.241) padne ispod donje granice pouzdanosti d_1 koja odgovara razini šuma procesa kojim je modeliran manevar [15].

U [12, 15], pristup estimaciji ulaza kroz proširenje vektora stanja koristi isključivu odluku o primjeni modela za nemanevrirajuće ili modela za manevrirajuće gibanje. Odluka se temelji na testiranju značajnosti usrednjene normalizirane kvadratne inovacije (2.241) pri čemu se smatra da je akceleracija konstantna za vrijeme posljednjih N uzoraka. Drugim riječima, manevar se estimira kao nepoznati ulaz koji je sastavni dio dinamike cilja.

Neka su definirane estimacija i kovarijanca greške estimacije za model pod hipotezom H0 da je gibanje cilja nemanevrirajuće,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{H0})} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k^{(\mathrm{H0})} \\ \hat{\dot{\mathbf{x}}}_k^{(\mathrm{H0})} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_k^{(\mathrm{H0})} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{\mathbf{x}\mathbf{x},k}^{(\mathrm{H0})} & \boldsymbol{P}_{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}},k}^{(\mathrm{H0})} \\ \boldsymbol{P}_{\dot{\mathbf{x}}\mathbf{x},k}^{(\mathrm{H0})} & \boldsymbol{P}_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}},k}^{(\mathrm{H0})} \end{bmatrix}, \tag{2.244}$$

gdje su indeksima $\mathbf{x}$ i $\dot{\mathbf{x}}$ označene komponente pozicije i brzine, a eksponentom (H0) je naglašen model pod hipotezom H0. Pod hipotezom H1 da je gibanje cilja manevrirajuće, estimacija vektora stanja i pripadna kovarijanca su

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{H1})} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k^{(\mathrm{H1})} \\ \hat{\dot{\mathbf{x}}}_k^{(\mathrm{H1})} \\ \hat{\ddot{\mathbf{x}}}_k^{(\mathrm{H1})} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_k^{(\mathrm{H1})} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{\mathbf{x}\mathbf{x},k}^{(\mathrm{H1})} & \boldsymbol{P}_{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}},k}^{(\mathrm{H1})} & \boldsymbol{P}_{\mathbf{x}\ddot{\mathbf{x}},k}^{(\mathrm{H1})} \\ \boldsymbol{P}_{\dot{\mathbf{x}}\mathbf{x},k}^{(\mathrm{H1})} & \boldsymbol{P}_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}},k}^{(\mathrm{H0})} & \boldsymbol{P}_{\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}},k}^{(\mathrm{H1})} \\ \boldsymbol{P}_{\ddot{\mathbf{x}}\mathbf{x},k}^{(\mathrm{H1})} & \boldsymbol{P}_{\ddot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}},k}^{(\mathrm{H1})} & \boldsymbol{P}_{\ddot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}},k}^{(\mathrm{H1})} \end{bmatrix}, \tag{2.245}$$

gdje je komponenta akceleracije označena s $\hat{\ddot{\mathbf{x}}}_k$. Ako je manevar detektiran u trenutku t_k na temelju N prošlih uzoraka, ponovo se provodi estimacija za vremenski interval $[t_{k-N}, t_k]$ ali temeljena na modelu manevrirajućeg cilja, slika 2.14, pri čemu je potrebno provesti inicijalizaciju filtra za model manevrirajućeg gibanja i vremenski indeks $k-N$ [12],

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} \\ \hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} \\ \hat{\ddot{\mathbf{x}}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} \end{bmatrix}. \tag{2.246}$$

Pod pretpostavkom jednoliko ubrzanog gibanja u pravokutnom koordinatnom sustavu, pozicija i brzina u trenutku početka manevra dane su s [12]

$$\mathbf{x}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} = \mathbf{x}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})} + \dot{\mathbf{x}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})} T + \frac{1}{2} \boldsymbol{a}^{(\mathrm{H1})} T^2, \tag{2.247}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} = \dot{\mathbf{x}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})} + \boldsymbol{a}^{(\mathrm{H1})} T, \tag{2.248}$$

pri čemu je $\boldsymbol{a}^{(\mathrm{H1})}$ vektor konstantne akceleracije s početkom u t_{k-N-1} i T vrijeme između dvije sukcesivne opservacije. Inicijalizacija komponenti proširenog vektora jednaka je

$$\hat{\ddot{\mathbf{x}}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} = \frac{2}{T^2}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} - \hat{\mathbf{x}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})} - \hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})}T\right) = \frac{2}{T^2}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H0})}\right), \tag{2.249}$$

$$\hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} = \hat{\dot{\mathbf{x}}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})} + \hat{\ddot{\mathbf{x}}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})}T, \tag{2.250}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} = \mathbf{x}_{k-N}^{(*)}, \tag{2.251}$$

pri čemu je $\mathbf{x}_{k-N}^{(*)} = \mathbf{x}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} + \mathbf{v}_{k-N}$ izmjerena pozicija, $\mathbf{v}_{k-N}$ pretvorbeni šum mjerenja prema (2.80) (ako se mjerenje provodi sa senzorom u polarnim ili sfernim koordinatama) i $\bar{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H0})}$ apriorna estimacija pozicije temeljena na modelu nemanevrirajućeg gibanja. Prema [12], početna pozicijska komponenta matrice kovarijance jednaka je

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{xx},k-N}^{(\mathrm{H1})} = \mathrm{var}\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})}\right) = \mathrm{var}\left(\mathbf{x}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} - \mathbf{x}_{k-N}^{(*)}\right) = \mathrm{var}\left(\mathbf{v}_{k-N}\right) = \boldsymbol{R}_{k-N}, \tag{2.252}$$

gdje je $\boldsymbol{R}_{k-N}$ kovarijanca mjerenja. Inicijalne kovarijance komponente akceleracije i brzine jednake su:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{\ddot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}},k-N}^{(\mathrm{H1})} &= \mathrm{var}\left(\tilde{\ddot{\mathbf{x}}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})}\right) = \frac{4}{T^4}\mathrm{var}\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} - \tilde{\mathbf{x}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})} - \tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})}T\right) \\
&= \frac{4}{T^4}\left(\boldsymbol{R}_{k-N} + \boldsymbol{P}_{\mathbf{xx},k-N-1}^{(\mathrm{H0})} + 2\boldsymbol{P}_{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}},k-N-1}^{(\mathrm{H0})}T + \boldsymbol{P}_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}},k-N-1}^{(\mathrm{H0})}T^2\right), \qquad (2.253) \\
\boldsymbol{P}_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}},k-N}^{(\mathrm{H1})} &= \mathrm{var}\left(\tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})}\right) = \mathrm{var}\left(\tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})} + \tilde{\ddot{\mathbf{x}}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})}T\right) \\
&= \mathrm{var}\left(\tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})} + \frac{2}{T^2}\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} - \tilde{\mathbf{x}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})} - \tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})}T\right)\right) \\
&= \frac{4}{T^2}\left(\boldsymbol{R}_{k-N} + \boldsymbol{P}_{\mathbf{xx},k-N-1}^{(\mathrm{H0})}\right) + \frac{4}{T}\boldsymbol{P}_{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}},k-N-1}^{(\mathrm{H0})} + \boldsymbol{P}_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}},k-N-1}^{(\mathrm{H0})}. \qquad (2.254)
\end{aligned}$$

Nadalje, početna međukovarijanca pozicije i brzine jednaka je

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}},k-N}^{(\mathrm{H1})} &= E\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})}\left(\tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})}\right)^{\mathrm{T}}\right) \\
&= E\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})}\left(\frac{2}{T}\tilde{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})} - \frac{2}{T}\tilde{\mathbf{x}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})} - \tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{k-N-1}^{(\mathrm{H0})}\right)^{\mathrm{T}}\right) = \frac{2}{T}\boldsymbol{R}_{k-N}. \qquad (2.255)
\end{aligned}$$

Početne međukovarijance pozicije i akceleracije te brzine i akceleracije, dane su kao

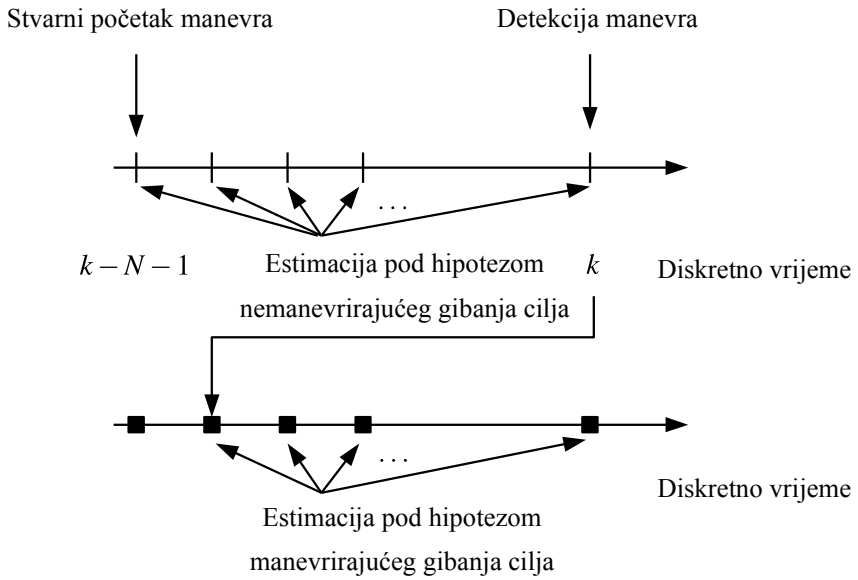
$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{x}\ddot{\mathbf{x}},k-N}^{(\mathrm{H1})} = E\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})}\left(\tilde{\ddot{\mathbf{x}}}_{k-N}^{(\mathrm{H1})}\right)^{\mathrm{T}}\right) = \frac{2}{T^2}\boldsymbol{R}_{k-N}, \tag{2.256}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{(\mathrm{H1})}_{\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}},k-N} &= E\left(\tilde{\hat{\mathbf{x}}}^{(\mathrm{H1})}_{k-N}\left(\tilde{\hat{\mathbf{x}}}^{(\mathrm{H1})}_{k-N}\right)^{\mathrm{T}}\right)\\ &= E\left(\left(-\frac{2}{T}\mathbf{v}_{k-N}-\frac{2}{T}\tilde{\mathbf{x}}^{(\mathrm{H0})}_{k-N-1}-\tilde{\dot{\mathbf{x}}}^{(\mathrm{H0})}_{k-N-1}\right)\frac{2}{T^2}\left(-\mathbf{v}_{k-N}-\tilde{\mathbf{x}}^{(\mathrm{H0})}_{k-N-1}-\tilde{\dot{\mathbf{x}}}^{(\mathrm{H0})}_{k-N-1}T\right)^{\mathrm{T}}\right)\\ &= \frac{4}{T^3}\left(\boldsymbol{R}_{k-N}+\boldsymbol{P}^{(\mathrm{H0})}_{\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}},k-N-1}\right)+\frac{6}{T^2}\boldsymbol{P}^{(\mathrm{H0})}_{\mathbf{x}\ddot{\mathbf{x}},k-N-1}+\frac{2}{T}\boldsymbol{P}^{(\mathrm{H0})}_{\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}},k-N-1}.\end{aligned} \tag{2.257}$$

Manevar se smatra završenim ako vrijednost usrednjene normalizirane kvadratne estimacije akceleracije

$$\bar{\varepsilon}_{\ddot{\mathrm{x}},k}=\frac{1}{N}\sum_{i=k-N+1}^{k}\left(\hat{\tilde{\mathbf{x}}}^{(\mathrm{H1})}_{i}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{P}^{(\mathrm{H1})}_{\ddot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}},i}\right)^{-1}\hat{\tilde{\mathbf{x}}}^{(\mathrm{H1})}_{i} \tag{2.258}$$

postane statistički beznačajna, pa se estimacija tada ponovno provodi modelom nemanevrirajućeg gibanja cilja.



Slika 2.14. Ilustracija detekcije manevra u trenutku t_k. Ako je manevar detektiran, vektor stanja $\boldsymbol{x}$ s članovima pozicije $\mathbf{x}$ i brzine $\dot{\mathbf{x}}$ proširuje se komponentom akceleracije $\ddot{\mathbf{x}}$ te se estimacija za interval $[t_{k-N},t_k]$ provodi ponovno proširenim vektorom stanja [12, 15].

Klasični jednomodelni pristup u praćenju manevrirajućeg cilja fokusiran je na modeliranje senzora i moda gibanja cilja te na nesigurnosti koje proizlaze iz nesavršenih modela (koncentrirane u odgovarajućim procesnim šumovima). Nasuprot tome, višemodelnim pristupom problematici praćenja manevrirajućeg cilja pristupa se kao hibridnoj estimaciji, odnosno estimaciji moda (karaktera) gibanja te estimaciji baznog (kinematičkog) vektora stanja. Drugim riječima, ovim pristupom se smatra da je sustav u svakom trenutku u jednom, premda nepoznatom, modu gibanja. U jednostavnom slučaju linearnog sustava, hibridni sustav nastao diskretizacijom kon-

tinuiranog sustava (2.3), opisan je s [16] kao

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_k^{(s_{k+1})}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k^{(s_{k+1})}\boldsymbol{w}_k^{(s_{k+1})}, \tag{2.259}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k^{(s_k)}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k^{(s_k)}, \tag{2.260}$$

pri čemu je ulaz $\boldsymbol{u}_k$ sustava pretpostavljeno nula, $\boldsymbol{x}_k$ bazni vektor i s_k mod gibanja iz skupa mogućih modova $\mathbb{S}$, istinit u intervalu $(t_k, t_{k+1}]$, pretpostavljeno homogen Markovljev proces opisan prijelaznom vjerojatnošću $P\left(s_{k+1} = s_j \,|\, s_k = s_i\right) = P_{ij},\ \forall s_i, s_j \in \mathbb{S},\ \forall k > 0$. Pri tome indeks vremena k označava događaj, a indeksi i i j mod. Stanje sustava $\boldsymbol{\xi}_k = (\boldsymbol{x}_k, s_k)$ je hibridni proces jer $\boldsymbol{x}_k$ poprima kontinuirane i s_k diskretne vrijednosti. Osim ako je mod s_k poznat, ili nepoznat ali vremenski invarijantan, sustav opisan s (2.259) i (2.260) je nelinearan jer $\boldsymbol{x}_k$ i $\boldsymbol{z}_k$ ne ovise linearno o stanju $\boldsymbol{\xi}_k$ [16].

Motivacija za primjenu višemodelnog pristupa u praćenju manevrirajućeg cilja leži u tome što se time nadilaze dva bitna ograničenja klasičnog jednomodelnog pristupa, a to su odluka koja prethodi estimaciji (premda estimacija može donijeti važne informacije o modu i stanju gibanja cilja) te potpuno vjerovanje u donesenu odluku. Drugim riječima, u klasičnom jednomodelnom pristupu estimacija se temelji na modelu koji je po donesenoj odluci jedini predstavnik moda gibanja (premda može biti odabran iz skupa modela). U višemodelnom pristupu pretpostavlja se skup modela $\mathbb{M}$, a odluka i estimacija su povezane kroz hipotezu da svaki model iz skupa $\mathbb{M}$ aproksimira određeni mod iz skupa $\mathbb{S}$. Krajnja estimacija se provodi vjerojatnosnom kombinacijom $M = |\mathbb{M}|$ estimacija, od kojih je svaka evalvirana pod hipotezom određenog modela.

Prema (2.259) i (2.260), svaki model $m_i \in \mathbb{M}$ zadovoljava

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_k^{(i)}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k^{(i)}\boldsymbol{w}_k^{(i)}, \tag{2.261}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k^{(i)}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k^{(i)}, \tag{2.262}$$

gdje je eksponentom (i) označena ovisnost sustava o modelu m_i te se pretpostavlja da događaj $m_k = m_i,\ m_i \in \mathbb{M}$, odgovara modu s_i za trenutak t_k. Skup modela $\mathbb{M}$ opisan je homogenom prijelaznom vjerojatnošću $P\left(m_{k+1} = m_j \,|\, m_k = m_i\right) = P_{ij}, \forall m_i, m_j \in \mathbb{M},\ k > 0$. Tako se višemodelna estimacija temelji na modelima koji su matematička aproksimacija, do stanovite razine točnosti, moda odnosno stvarnog karaktera gibanja.

Dvije su osnovne pretpostavke za estimaciju višemodelnim pristupom za vremenski invarijantni mod:

- P4 mod gibanja je vremenski invarijantan, odnosno $s_k = s, \forall k > 0$
- P5 u svakom trenutku, mod s_k je član skupa $\mathbb{S}_k$ koji je vremenski invarijantan i jednak vremenski invarijantnom skupu modela $\mathbb{M}$ koji se koristi u estimaciji, odnosno $\mathbb{S}_k = \mathbb{M}, \forall k > 0$.

Pod pretpostavkom P4, vjerojatnost da model m_i odgovara stvarnom modu jednaka je vjerojatnosti da cijeli slijed događaja $\{m_\kappa = m_i, \kappa = 1,\ldots,k\}$ do trenutka t_k odgovara stvarnom slijedu modova [16],

$$P(m_k = m_i \,|\, \mathrm{P4}) = P(m_1 = m_i, \ldots, m_k = m_i \,|\, \mathrm{P4}), \tag{2.263}$$

i postoji $M = |\mathbb{M}|$ takvih sljedova,

$$\mathbb{M}^k = \{\mathbb{M}_1^k, \ldots, \mathbb{M}_M^k\}, \tag{2.264}$$

$$\mathbb{M}_i^k = \{m_1 = m_i, \ldots, m_k = m_i, m_i \in \mathbb{M}\}. \tag{2.265}$$

Estimacija baznog stanja u smislu minimalne varijance predložena je u [137] kao

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_k &= E\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{Z}^k, \mathrm{P4}, \mathrm{P5}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{M} E\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{Z}^k, \mathbb{M}_i^k\right) P\left(\mathbb{M}_i^k \,|\, \mathbb{Z}^k, \mathrm{P4}, \mathrm{P5}\right) = \sum_{i=1}^{M} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} \mathcal{M}_k^{(i)},\end{aligned} \tag{2.266}$$

gdje je sa $\mathbb{Z}^k = \{z_1, \ldots, z_k\}$ označen skup mjerenja do trenutka t_k, a $\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}$ je estimacija pod hipotezom da slijed $\mathbb{M}_i^k$ odgovara stvarnom slijedu s aposteriornom vjerojatnošću $\mathcal{M}_k^{(i)}$. Estimacija (2.266) je nepristrana, varijance [138]

$$\boldsymbol{P}_k = \sum_{i=1}^{M} \left(\boldsymbol{P}_k^{(i)} + \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} - \hat{\boldsymbol{x}}_k\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} - \hat{\boldsymbol{x}}_k\right)^T\right) \mathcal{M}_k^{(i)}, \tag{2.267}$$

gdje je $\boldsymbol{P}_k^{(i)} = \mathrm{var}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} \,|\, \mathbb{Z}^k, \mathbb{M}_i^k, \mathrm{P4}, \mathrm{P5}\right)$. Ako je m_i linearan i zadovoljava uvjete bjeline šuma procesa i opservacije te njihove nekoreliranosti, rekurzivna linearna estimacija $\{\hat{\boldsymbol{x}}_k, \boldsymbol{P}_k\} \rightarrow \{\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}, \boldsymbol{P}_{k+1}\}$ u smislu minimiziranja varijance dana je eksplicitno Kalmanovim filtrom, bez obzira na Gaussovost. Pod pretpostavkama P4 i P5, vjerojatnost stvarnog modela gotovo sigurno teži prema jedan kako vrijeme teži beskonačnosti [139]. Neka je za skup $\mathbb{M} = \{m_i, i = 1,\ldots,M\}$ linearnih, vremenski invarijantnih modela s bijelim i nekoreliranim Gaussovim šumom procesa i opservacije, definirana udaljenost modela m_i od modela stvarnog moda sustava m_s kao

$$d(i,s) = |d(i) - d(s)| \neq 0,\ \forall i \neq s,\ m_i \in \mathbb{M}, \tag{2.268}$$

gdje su udaljenosti definirane pomoću kovarijanci inovacije u mirnom stanju filtra kao [16]

$$d(i) = \log_{\mathrm{e}}\left(\left|\boldsymbol{S}^{(i)}\right|\right) + \mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{S}^{(i)}\right)^{-1} \boldsymbol{S}^{(i,s)}\right), \tag{2.269}$$

$$d(s) = \log_{\mathrm{e}}\left(\left|\boldsymbol{S}^{(s)}\right|\right) + n_z, \tag{2.270}$$

pri čemu su $\boldsymbol{S}^{(i)}$ i $\boldsymbol{S}^{(s)}$ kovarijance inovacija za model m_i i model m_s koji opisuje stvarni mod sustava, proračunate iz odgovarajućih Kalmanovih filtara. Broj komponenti vektora mjerenja i (baznog) vektora stanja označen je s n_z i n_x. Prema [139], stvarna kovarijanca inovacije filtra za model m_i kada je m_s model stvarnog moda sustava, označena je sa $\boldsymbol{S}^{(i,s)}$ i jednaka je

$$\boldsymbol{S}^{(i,s)} = \boldsymbol{H}^{(i,s)} \bar{\boldsymbol{P}}^{(i,s)} \left(\boldsymbol{H}^{(i,s)}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}^{(s)}, \tag{2.271}$$

gdje je $\boldsymbol{H}^{(i,s)} = \boldsymbol{H}^{(s)} - \boldsymbol{H}^{(i)}$ matrica mjerenja, $\boldsymbol{R}^{(s)}$ kovarijanca mjerenja i

$$\bar{\boldsymbol{P}}^{(i,s)} = \boldsymbol{\Phi}^{(i,s)} \boldsymbol{P}^{(i,s)} \left(\boldsymbol{\Phi}^{(i,s)}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Gamma}^{(i,s)} \boldsymbol{Q}^{(i,s)} \left(\boldsymbol{\Gamma}^{(i,s)}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.272}$$

rješenje Ljapunovljeve jednadžbe uz

$$\boldsymbol{\Phi}^{(i,s)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(s)} & \boldsymbol{O}_{n_x n_x} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(i)} \boldsymbol{K}^{(i)} \boldsymbol{H}^{(s)} & \boldsymbol{\Phi}^{(i)} (\boldsymbol{I}_{n_x} - \boldsymbol{K}^{(i)} \boldsymbol{H}^{(i)}) \end{bmatrix}, \tag{2.273}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}^{(i,s)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}^{(s)} & \boldsymbol{O}_{n_x n_z} \\ \boldsymbol{O}_{n_x n} & \boldsymbol{\Phi}^{(i)} \boldsymbol{K}^{(i)} \end{bmatrix}, \tag{2.274}$$

$$\boldsymbol{Q}^{(i,s)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{(s)} & \boldsymbol{O}_{n_x n_z} \\ \boldsymbol{O}_{n_z n_x} & \boldsymbol{R}^{(s)} \end{bmatrix}, \tag{2.275}$$

pri čemu je s n označen broj komponenti vektora pozicije i brzine. Prema [16, 140], za bilo koja dva modela m_i, m_j iz skupa $\mathbb{M}$, omjer vjerodostojnosti $p(\mathbb{Z}^k|\mathbb{M}_i^k)/p(\mathbb{Z}^k|\mathbb{M}_j^k)$ teži prema nuli s vjerojatnošću jedan ako vrijedi $d(j) < d(i)$ pod pretpostavkom P4 i ako su odgovarajući sljedovi inovacija linearnog Gaussovog sustava ergodični, s konačnom i pozitivnom semidefinitnom matricom kovarijance u mirnom stanju. Bez obzira na to je li model m_s koji opisuje stvarni mod sadržan u skupu modela $\mathbb{M}$ ili nije, pod pretpostavkom P4, vjerojatnost modela m_i s najmanjom udaljenošću $|d(i) - d(s)|$ od modela stvarnog moda teži jedinici gotovo sigurno kako vrijeme prolazi [140].

Relaksiranje pretpostavke P4 dozvoljava vremensku varijantnost moda gibanja:

P4$^{(*)}$ stvarni slijed moda $\{s_k, k > 0\}$ je Markovljev ili polu–Markovljev proces.

Do trenutka t_k, pod pretpostavkom P5, postoji M^k mogućih sljedova promjene modela,

$$\mathbb{M}^k = \{\mathbb{M}_1^k, \ldots, \mathbb{M}_{M^k}^k\} = \{\mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k = \mathbb{M}_1^k, \ldots, \mathbb{M}_{M^k}^k\}, \tag{2.276}$$

pri čemu je slijed modela $\mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k$ jednak

$$\mathbb{M}^k_{\mathbb{i}^k} = \{m_1 = m_{i_1}, \ldots, m_k = m_{i_k}\} = \{m_{i_\kappa}, m_{i_\kappa} \in \mathbb{M}, \kappa = 1, \ldots, k\} \tag{2.277}$$

i broj modela $M = |\mathbb{M}|$ vremenski invarijantan. Skup indeksa modela do trenutka t_k označen je s

$$\mathbb{I}^k = \left\{\mathbb{I}^k_1, \ldots, \mathbb{I}^k_{M^k}\right\} = \left\{\mathbb{i}^k, \mathbb{i}^k = \mathbb{I}^k_1, \ldots, \mathbb{I}^k_{M^k}\right\}, \tag{2.278}$$

pri čemu je

$$\mathbb{i}^k = \{i_1, \ldots, i_k\} = \{i_\kappa, i_\kappa = 1, \ldots, M, \kappa = 1, \ldots, k\}. \tag{2.279}$$

Optimalna estimacija baznog stanja u smislu minimiziranja varijance jednaka je [15, 16]

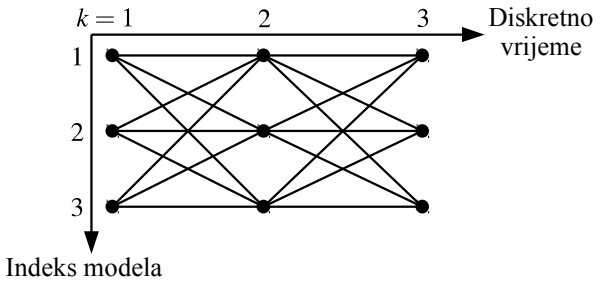
$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_k &= E\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{Z}^k, \mathrm{P4}^{(*)}, \mathrm{P5}\right) \\ &= \sum_{\mathbb{i}^k \in \mathbb{I}^k} E\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{Z}^k, \mathbb{M}^k_{\mathbb{i}^k}\right) P\left(\mathbb{M}^k_{\mathbb{i}^k} \,|\, \mathbb{Z}^k\right) = \sum_{\mathbb{i}^k \in \mathbb{I}^k} \hat{\boldsymbol{x}}^{(\mathbb{i}^k)}_k \mathcal{M}^{(\mathbb{i}^k)}_k,\end{aligned} \tag{2.280}$$

gdje je $\hat{\boldsymbol{x}}^{(\mathbb{i}^k)}_k$ estimacija baznog stanja pod hipotezom pojave slijeda modela $\mathbb{M}^k_{\mathbb{i}^k}$ odnosno indeksa $\mathbb{i}^k$ i $\mathcal{M}^{(\mathbb{i}^k)}_k$ je vjerojatnost pojave takvog slijeda. Kovarijanca estimacije (2.280) jednaka je

$$\boldsymbol{P}_k = \sum_{\mathbb{i}^k \in \mathbb{I}^k} \left(\boldsymbol{P}^{(\mathbb{i}^k)}_k + \left(\hat{\boldsymbol{x}}^{(\mathbb{i}^k)}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}^{(\mathbb{i}^k)}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k\right)^T\right) \mathcal{M}^{(\mathbb{i}^k)}_k, \tag{2.281}$$

pri čemu je $\boldsymbol{P}^{(\mathbb{i}^k)}_k = \mathrm{var}\left(\hat{\boldsymbol{x}}^{(\mathbb{i}^k)}_k \,|\, \mathbb{Z}^k, \mathbb{M}^k_{\mathbb{i}^k}, \mathrm{P4}^{(*)}, \mathrm{P5}\right)$ [16].

Prema (2.280), optimalna estimacija baznog stanja zahtijeva s vremenom eksponencijalno rastući broj filtara, kako je to ilustrirano slikom 2.15, što je teško ostvariv uvjet pa se stoga, radi smanjenja računalne složenosti, uvode metode poput redukcije hipoteza i iteracijske strategije. Redukcija hipoteza u osnovi je spajanje sličnih i/ili odbacivanje onih malo vjerojatnih, pri čemu je moguć i slučajni odabir skupa. Iteracijskim strategijama nastoji se riješiti problem estimacije pomoću iteracijskih algoritama što je pogodno za estimaciju u smislu najveće vjerodostojnosti ili maksimalne aposteriorne vjerojatnosti.



Slika 2.15. Usmjereni rešetkasti dijagram ilustrira eksponencijalno rastući broj filtara potrebnih za optimalnu metodu višemodelne estimacije. Broj modela je stalan, ali je sustav vremenski varijantan. Slijed $\mathbb{i}^k$ je slijed spojnica između vremenskih točaka indeksa modela, a u ovom slučaju, uz tri modela i indeksom vremena $k = 3$, postoji $3^3 = 27$ mogućih sljedova promjene modela.

U pristupu spajanja hipoteza poopćenom prividno-Bayesovom metodom, spajaju se u jednu sve hipoteze koje su jednake u zadnjih N vremenskih uzoraka, pri čemu se najčešće koristi metoda s $N = 1$ (GPB1) i $N = 2$ (GPB2) uzoraka. Prema [15, 16], za $N = 1$, estimacija (2.280) se može pisati kao

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \sum_{\mathbb{i}^k \in \mathbb{I}^k} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathbb{i}^k)} \mathcal{M}_k^{(\mathbb{i}^k)} = \sum_{m_i \in \mathbb{M}} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} \mathcal{M}_k^{(i)}, \tag{2.282}$$

gdje je $\mathcal{M}_k^{(i)} = P\left(m_k = m_i \,|\, \mathbb{Z}^k\right)$ i zbrajanje preko M^k sljedova zamijenjeno je zbrajanjem preko skupa modela tako da je

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} = \sum_{\mathbb{i}^{k-1} \in \mathbb{I}^{k-1}} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\{\mathbb{i}^{k-1}, i\})} P\left(\mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-1}}^{k-1} \,|\, \mathbb{Z}^k, m_k = m_i\right). \tag{2.283}$$

Smisao spajanja sličnih hipoteza je zamjena rekurzije $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathbb{i}^{k-1})} \to \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathbb{i}^k)}$ (M^k uvjetnih filtriranja) s rekurzijom $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i)} \to \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}$ koja zahtijeva samo M operacija uvjetnog filtriranja, odnosno aproksimacija sljedova koje imaju zajednički model u zadnjem vremenskom uzorku,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\{\mathbb{i}^{k-2}, i\})} &= E\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-2}}^{k-2}, m_{k-1} = m_i\right) \\ &\approx \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i)} = E\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}, m_{k-1} = m_i\right), \end{aligned} \tag{2.284}$$

kako je to ilustrirano slikom 2.16. Za linearni sustav opisan s (2.261) i (2.262), rješenje (2.284) dano je u formi Kalmanovog filtra (vidi (2.105)),

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} = E\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{Z}^k, m_k = m_i\right) = \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \boldsymbol{K}_k^{(i)} \left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{H}_k^{(i)} \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right), \; i = 1, \ldots, M. \tag{2.285}$$

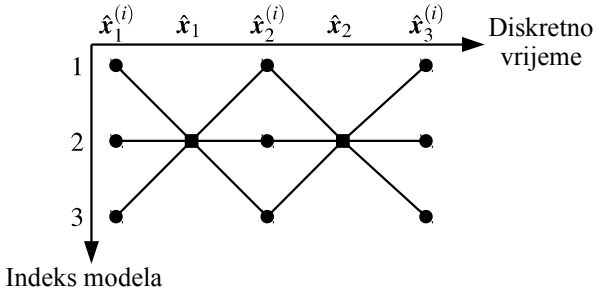
Vjerojatnost da je model m_i stvarni mod izražena je rekurzijom, $\forall m_i \in \mathbb{M}$, [15],

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_k^{(i)} &= P\left(m_k = m_i \,|\, \mathbb{Z}^k\right) = P\left(m_k = m_i \,|\, \boldsymbol{z}_k, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{c} p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) P\left(m_k = m_i \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{c} \Lambda_k^{(i)} \sum_{m_j \in \mathbb{M}} P\left(m_k = m_i \,|\, m_{k-1} = m_j, \mathbb{Z}^{k-1}\right) P\left(m_{k-1} = m_j \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \\ &= \frac{\Lambda_k^{(i)} \sum\limits_{m_j \in \mathbb{M}} P_{ji}\, \mathcal{M}_{k-1}^{(j)}}{\sum\limits_{m_i, m_j \in \mathbb{M}^2} \Lambda_k^{(i)} P_{ji}\, \mathcal{M}_{k-1}^{(j)}},\end{aligned} \tag{2.286}$$

pri čemu je, pod hipotezom modela m_i, vjerodostojnost $\Lambda_k^{(i)} = p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, m_k = m_i, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{P}_{k-1}\right)$ i parametar filtriranja $P_{ji} = P\left(m_k = m_i \,|\, m_{k-1} = m_j\right)$. Kovarijanca estimacije jednaka je

$$\boldsymbol{P}_k = \sum_{m_i \in \mathbb{M}} \left(\boldsymbol{P}_k^{(i)} + \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} - \hat{\boldsymbol{x}}_k\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} - \hat{\boldsymbol{x}}_k\right)^T \right) \mathcal{M}_k^{(i)}, \tag{2.287}$$

pri čemu je $\boldsymbol{P}_k^{(i)} = \mathrm{var}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} \,|\, \mathbb{Z}^k, m_k = m_i\right)$.



Slika 2.16. Usmjereni rešetkasti dijagram ilustrira spajanje hipoteza metodom GPB1. Hipoteze koje se spajaju imaju zajednički model u zadnjem vremenskom uzorku. Luk lijevo od kružnog čvora označava operaciju filtriranja, pravokutni čvor označava početni uvjet.

U metodi GPB2, spajaju se sljedovi s jednakim modelima u zadnjem (t_{k-1}) i predzadnjem (t_{k-2}) vremenskom trenutku, pa se estimacija (2.280) može pisati kao [15, 16],

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \sum_{\mathbb{i}^k \in \mathbb{I}^k} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathbb{i}^k)} \mathcal{M}_k^{(\mathbb{i}^k)} = \sum_{m_i, m_j \in \mathbb{M}^2} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\{i,j\})} \mathcal{M}_k^{(\{i,j\})}, \tag{2.288}$$

gdje je $\mathcal{M}_k^{(\{i,j\})} = P\left(m_{k-1} = m_i, m_k = m_j \,|\, \mathbb{Z}^k\right)$ i zbrajanje preko M^k komponenti zamijenjeno je zbrajanjem preko zadnjeg ($m_k = m_j$) i predzadnjeg ($m_{k-1} = m_i$) modela tako da je

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\{i,j\})} = \sum_{\mathbb{i}^{k-2} \in \mathbb{I}^{k-2}} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\{\mathbb{i}^{k-2}, i, j\})} P\left(\mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-2}}^{k-2} \,|\, \mathbb{Z}^k, m_{k-1} = m_i, m_k = m_j\right). \tag{2.289}$$

Tako se metodom GPB2 provodi aproksimacija

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\{\mathbb{i}^{k-3},i,j\})} &= E\left(\boldsymbol{x}_{k-1}\,|\,\mathbb{Z}^{k-1},\mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-3}}^{k-3},m_{k-2}=m_i,m_{k-1}=m_j\right)\\ &\approx \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\{i,j\})} = E\left(\boldsymbol{x}_{k-1}\,|\,\mathbb{Z}^{k-1},m_{k-2}=m_i,m_{k-1}=m_j\right),\end{aligned} \tag{2.290}$$

čime je rekurzija $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathbb{i}^{k-1})} \to \hat{\boldsymbol{x}}_{k}^{(\mathbb{i}^{k})}$ s M^k uvjetnih filtriranja zamijenjena rekurzijom $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\{i,j\})} \to \hat{\boldsymbol{x}}_{k}^{(\{i,j\})}$ s M^2 operacija uvjetnog filtriranja. Istovjetno metodi GPB1, za linearni sustav opisan s (2.259) i (2.260), estimacija svakog pojedinog filtra $m_j \in \mathbb{M}$, jednaka je

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_{k}^{(\{i,j\})} &= E\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{Z}^k,m_{k-1}=m_i,m_k=m_j\right)\\ &= \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(j)}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i)} + \boldsymbol{K}_k^{(j)}\left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{H}_k^{(j)}\boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(j)}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i)}\right), \quad \forall m_i \in \mathbb{M},\end{aligned} \tag{2.291}$$

kako je to ilustrirano slikom 2.17. Prema (2.288), krajnja estimacija jednaka je

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \sum_{m_j\in\mathbb{M}} \mathcal{M}_k^{(j)} \sum_{m_i\in\mathbb{M}} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\{i,j\})} P\left(m_{k-1}=m_i\,|\,m_k=m_j,\mathbb{Z}^k\right), \tag{2.292}$$

gdje je [15]

$$\begin{aligned}P\left(m_{k-1}=m_i\,|\,m_k=m_j,\mathbb{Z}^k\right) &= \frac{1}{c}p\left(\boldsymbol{z}_k\,|\,m_k=m_j,m_{k-1}=m_i,\mathbb{Z}^{k-1}\right)\cdot\\ &\quad\cdot P\left(m_k=m_j\,|\,m_{k-1}=m_i,\mathbb{Z}^{k-1}\right)P\left(m_{k-1}=m_i\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}\right)\\ &= \frac{\Lambda_k^{(\{i,j\})}P_{ij}\,\mathcal{M}_{k-1}^{(i)}}{\sum\limits_{m_i,m_j\in\mathbb{M}}\Lambda_k^{(\{i,j\})}P_{ij}\,\mathcal{M}_{k-1}^{(i)}},\end{aligned} \tag{2.293}$$

pri čemu je $\Lambda^{(\{i,j\})} = p\left(\boldsymbol{z}_k\,|\,m_k=m_j,m_{k-1}=m_i,\mathbb{Z}^{k-1}\right) = p\left(\boldsymbol{z}_k\,|\,m_k=m_j,\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i)},\boldsymbol{P}_{k-1}^{(i)}\right)$. Početni uvjet $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i)}$ u (2.291) dan je rekurzivno preko estimacije iz prethodnog ciklusa,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i)} &= E\left(\boldsymbol{x}_{k-1}\,|\,\mathbb{Z}^{k-1},m_{k-1}=m_i\right)\\ &= \sum_{m_\iota\in\mathbb{M}}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\{\iota,i\})}P\left(m_{k-2}=m_\iota\,|\,\mathbb{Z}^{k-1},m_{k-1}=m_i\right), \quad \forall m_i\in\mathbb{M}.\end{aligned} \tag{2.294}$$

Kovarijanca estimacije dana je s

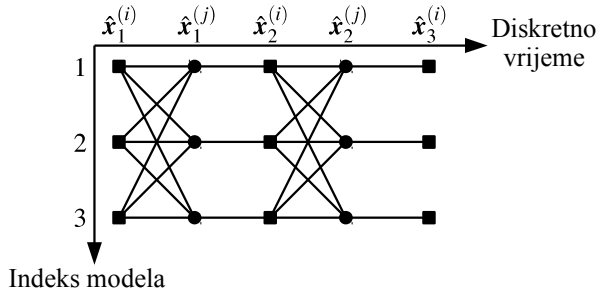
$$\boldsymbol{P}_k = \sum_{m_j\in\mathbb{M}}\left(\boldsymbol{P}_k^{(j)} + \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(j)}-\hat{\boldsymbol{x}}_k\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(j)}-\hat{\boldsymbol{x}}_k\right)^T\right)\mathcal{M}_k^{(j)}, \tag{2.295}$$

gdje je

$$\boldsymbol{P}_k^{(j)} = \sum_{m_i \in \mathbb{M}} \left(\boldsymbol{P}_k^{(\{i,j\})} + \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\{i,j\})} - \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(j)} \right) \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\{i,j\})} - \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(j)} \right)^T \right) P\left(m_{k-1} = m_i \,|\, m_k = m_j, \mathbb{Z}^k \right), \tag{2.296}$$

pri čemu je $\boldsymbol{P}_k^{(\{i,j\})} = \text{var}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\{i,j\})} \,|\, \mathbb{Z}^k, m_{k-1} = m_i, m_k = m_j \right)$ kovarijanca estimacije (2.291). Vjerojatnost da je model m_j stvarni mod gibanja u trenutku t_k jednaka je [15]

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_k^{(j)} &= P\left(m_k = m_j \,|\, \mathbb{Z}^k \right) = \frac{1}{c} p\left(\boldsymbol{z}_k, m_k = m_j \,|\, \mathbb{Z}^{k-1} \right) \\
&= \frac{1}{c} \sum_{m_i \in \mathbb{M}} p\left(\boldsymbol{z}_k, m_k = m_j \,|\, m_{k-1} = m_i, \mathbb{Z}^{k-1} \right) P\left(m_{k-1} = m_i \,|\, \mathbb{Z}^{k-1} \right) \\
&= \frac{1}{c} \sum_{m_i \in \mathbb{M}} p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, m_k = m_j, m_{k-1} = m_i, \mathbb{Z}^{k-1} \right) P\left(m_k = m_j \,|\, m_{k-1} = m_i, \mathbb{Z}^{k-1} \right) \mathcal{M}_{k-1}^{(i)} \\
&= \frac{\sum\limits_{m_i \in \mathbb{M}} \Lambda_k^{(\{i,j\})} P_{ij}\, \mathcal{M}_{k-1}^{(i)}}{\sum\limits_{m_i, m_j \in \mathbb{M}^2} \Lambda_k^{(\{i,j\})} P_{ij}\, \mathcal{M}_{k-1}^{(i)}}.
\end{aligned} \tag{2.297}$$



Slika 2.17. Usmjereni rešetkasti dijagram ilustrira spajanje hipoteza metodom GPB2. Hipoteze koje se spajaju imaju zajednički model u zadnjem i predzadnjem vremenskom uzorku. Luk lijevo od kružnog čvora označava operaciju filtriranja, pravokutni čvor označava početni uvjet.

Preinaka početnog uvjeta (2.284) uvjetovana događajem $m_k = m_i, m_i \in \mathbb{M}$ (trenutni mod gibanja u t_k opisuje model m_i), rezultira poznatim višemodelnim pristupom s međudjelovanjem između modela IMM [20, 21]. Navedena preinaka je opravdana jer se filtriranje ionako vrši pod hipotezom da je model m_i stvarni mod gibanja u t_k, dok istovremeno događaj $m_k = m_i$ pruža važne informacije o modu gibanja u prethodnom trenutku. Početni uvjeti za ciklus filtriranja u trenutku t_k tada su, $\forall m_i \in \mathbb{M}$,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)} = E\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}, m_k = m_i \right) = \sum_{m_j \in \mathbb{M}} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(j)} P\left(m_{k-1} = m_j \,|\, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1} \right), \tag{2.298}$$

što znači međudjelovanje prije uvjetnog filtriranja za razliku od pristupa GPB2 gdje se međudjelovanje modela provodi tek nakon uvjetnog filtriranja (unutarnja suma u (2.292)), kako je to

ilustrirano slikom 2.18. Tako se uvjetno filtriranje u metodi GPB2 provodi s informacijom o stanju moda sustava u prošlom ciklusu, dok se u metodi IMM primjenjuje informacija apriornog stanja moda sustava u trenutnom ciklusu filtriranja. Drugim riječima, svaki filtar ima svoje početne uvjete, najbolju statistiku koja opisuje prethodne informacije i znanje o vjerojatnosti modela m_i u trenutku t_k. Zbog toga su značajke metode IMM skoro jednake metodi GPB2, ali uz složenost koja je jednaka metodi GPB1. Prijelazna vjerojatnost u (2.298) dana je s [141]

$$P\left(m_{k-1}=m_j\,|\,m_k=m_i,\mathbb{Z}^{k-1}\right)=\frac{P_{ji}\,\mathcal{M}_{k-1}^{(j)}}{P\left(m_k=m_i\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}\right)}, \tag{2.299}$$

gdje je apriorna vjerojatnost stanja sustava

$$P\left(m_k=m_i\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}\right)=\sum_{m_j\in\mathbb{M}}P_{ji}\,\mathcal{M}_{k-1}^{(j)} \tag{2.300}$$

i $P_{ji}=P\left(m_k=m_i\,|\,m_{k-1}=m_j\right),\ \forall m_i,m_j\in\mathbb{M},\ k>0$ parametar dizajna filtra. Tako su početni uvjeti za svaki pojedini filtar dani s (2.298), uz početnu kovarijancu

$$\boldsymbol{P}_{k-1}^{(i*)}=\sum_{m_j\in\mathbb{M}}\left(\boldsymbol{P}_{k-1}^{(j)}+\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(j)}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)}\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(j)}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)}\right)^{T}\right)P\left(m_{k-1}=m_j\,|\,m_k=m_i,\mathbb{Z}^{k-1}\right). \tag{2.301}$$

Za linearni sustav, estimacija se provodi Kalmanovim filtrom,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^i=\boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)}+\boldsymbol{K}_k^{(i)}\left(\boldsymbol{z}_k-\boldsymbol{H}_k^{(i)}\boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)}\right), \tag{2.302}$$

$$\boldsymbol{P}_k^{(i)}=\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(i)}-\boldsymbol{K}_k^{(i)}\boldsymbol{S}_k^{(i)}\left(\boldsymbol{K}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2.303}$$

$\forall m_i\in\mathbb{M}$, pri čemu su

$$\boldsymbol{K}_k^{(i)}=\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(i)}\left(\boldsymbol{H}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{S}_k^{(i)}\right)^{-1}, \tag{2.304}$$

$$\boldsymbol{S}_k^{(i)}=\boldsymbol{H}_k^{(i)}\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(i)}\left(\boldsymbol{H}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_k^{(i)}, \tag{2.305}$$

Kalmanov koeficijent i kovarijanca inovacije uz kovarijancu apriorne estimacije

$$\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(i)}=\boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)}\boldsymbol{P}_{k-1}^{(i*)}\left(\boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{(i)}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{(i)}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.306}$$

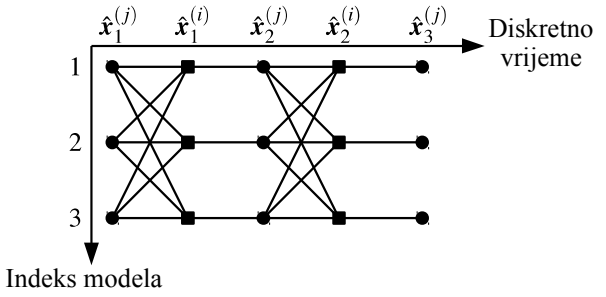
i

$$P\left(m_k=m_i\,|\,\mathbb{Z}^k\right)=\mathcal{M}_k^{(i)}=\frac{\Lambda_k^{(i)}\sum\limits_{m_j\in\mathbb{M}}P_{ji}\,\mathcal{M}_{k-1}^{(j)}}{\sum\limits_{m_i,m_j\in\mathbb{M}^2}\Lambda_k^{(i)}P_{ji}\,\mathcal{M}_{k-1}^{(j)}}, \tag{2.307}$$

vjerojatnost da je model m_i stvarni mod u t_k, pri čemu je $\Lambda^{(i)} = p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, m_k = m_i, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(i*)}\right)$ [15]. Krajnja estimacija dana je s

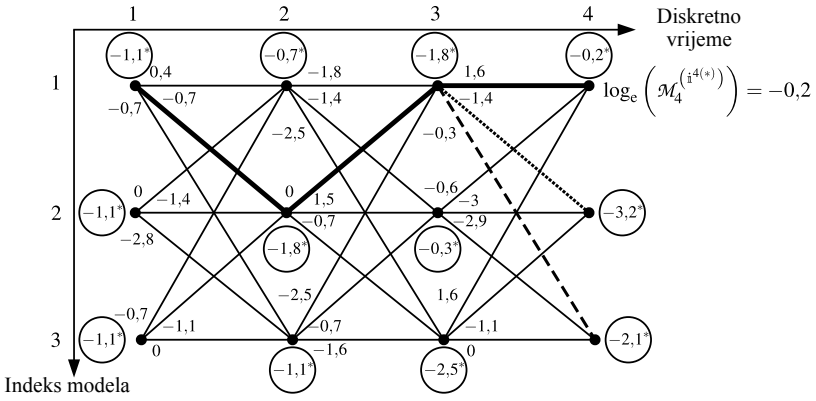
$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \sum_{m_i \in \mathbb{M}} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} \mathcal{M}_k^{(i)}, \tag{2.308}$$

$$\boldsymbol{P}_k = \sum_{m_i \in \mathbb{M}} \left(\boldsymbol{P}_k^{(i)} + \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} - \hat{\boldsymbol{x}}_k\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} - \hat{\boldsymbol{x}}_k\right)^{\mathrm{T}} \right) \mathcal{M}_k^{(i)}. \tag{2.287}$$



Slika 2.18. Usmjereni rešetkasti dijagram ilustrira spajanje hipoteza metodom IMM. Hipoteze koje se spajaju imaju zajednički model u zadnjem vremenskom uzorku, ali se, za razliku od metode GPB2, međudjelovanje provodi prije uvjetnog filtriranja što znači primjenu informacije o apriornom stanju moda sustava za trenutni vremenski ciklus. Usporedbe radi, u metodi GPB2 uvjetno filtriranje za trenutni ciklus primjenjuje informaciju o stanju moda sustava u prethodnom ciklusu. Luk lijevo od kružnog čvora označava operaciju filtriranja, pravokutni čvor označava početni uvjet.

Kako je to ilustrirano slikom 2.19, Viterbijevom se metodom rekurzivno, za svaki trenutak t_k, nalazi $M = |\mathbb{M}|$ sljedova promjene modela [16, 19].



Slika 2.19. Usmjereni rešetkasti dijagram ilustrira Viterbijevu metodu odabira najvjerojatnijeg slijeda promjene moda sustava $\mathbb{i}^{4(*)}$ (debela linija) između, s vremenom eksponencijalno rastućeg, broja sljedova. Sljedovi označeni isprekidanom i točkastom linijom označavaju najbolje staze preostalih modela. Broj pored čvora označava logaritamsku prijelaznu vjerodostojnost iz modela $m_{k-1} = m_j$ u model $m_k = m_i$, a broj sa zvjezdicom maksimalnu logaritamsku vjerojatnost slijeda koji završava na tom čvoru. Logaritamska vjerojatnost slijeda $\mathbb{i}^k$ izražena je zbrojem logaritamskih vjerodostojnosti duž staze kroz rešetkasti dijagram i početne logaritamske vjerojatnosti čvora.

Neka u trenutku t_{k-1}, za svaki model $m_j \in \mathbb{M}$, postoji estimacija s pripadajućom vjerojatnošću modela $\left\{\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\{\mathbb{i}^{k-2},j\})}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\{\mathbb{i}^{k-2},j\})}, \mathcal{M}_{k-1}^{(\{\mathbb{i}^{k-2},j\})}\right\}$, koji su početni uvjet za uvjetno filtriranje u t_k pod hipotezom da je mod sustava za trenutak t_k jednak modelu m_i. Tako se od svih estimacija $\left\{\hat{\boldsymbol{x}}_{k}^{(\{\mathbb{i}^{k-2},j,i\})}, \boldsymbol{P}_{k}^{(\{\mathbb{i}^{k-2},j,i\})}, \mathcal{M}_{k}^{(\{\mathbb{i}^{k-2},j,i\})}, j=1,\ldots,M, m_k = m_i\right\}, \forall m_i \in \mathbb{M}$, zadržava samo ona čija je vjerojatnost da je model m_i stvarni mod sustava u t_k, indeksa

$$j^{(*)}(i) = \arg\max_j \left(\mathcal{M}_k^{(\{\mathbb{i}^{k-2},j,i\})}\right), \quad m_k = m_i, \tag{2.309}$$

najveća, kako je to ilustrirano slikom 2.20, pa tako Viterbijeva metoda osigurava najvjerojatniji slijed promjene modela za svaki model (filtar) posebno. Između članova skupa estimacija

$$\left\{\hat{\boldsymbol{x}}_k^{\left(\left\{\mathbb{i}^{k-2},j^{(*)}(i),i\right\}\right)}, \boldsymbol{P}_k^{\left(\left\{\mathbb{i}^{k-2},j^{(*)}(i),i\right\}\right)}, \mathcal{M}_k^{\left(\left\{\mathbb{i}^{k-2},j^{(*)}(i),i\right\}\right)}, i=1,\ldots,M\right\}, \tag{2.310}$$

bira se ona čija je vjerojatnost modela m_i u t_k najveća, indeksa

$$i^{(*)} = \arg\max_i \left(\mathcal{M}_k^{\left(\left\{\mathbb{i}^{k-2},j^{(*)}(i),i\right\}\right)}\right), \tag{2.311}$$

tako da je skup indeksa najvjerojatnijeg slijeda

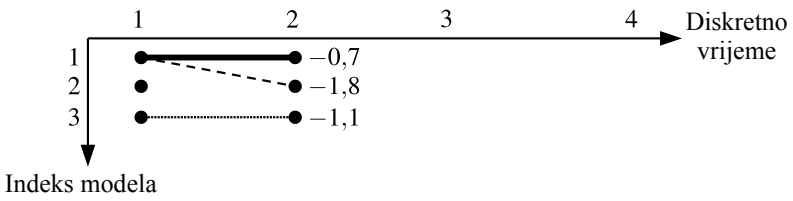
$$\mathbb{i}^{k(*)} = \left\{\mathbb{i}^{k-2}, j^{(*)}(i^{(*)}), i^{(*)}\right\}. \tag{2.312}$$

Viterbijevom se rekurzijom između skupa M sljedova nalazi najvjerojatniji slijed, ali skup M sljedova nije nužno i skup M najvjerojatnijih, jer npr. slijed koji je drugi po vjerojatnosti za određeni model može biti bolji od najboljeg za neki drugi model [16]. Prema [16], vjerojatnost slijeda jednaka je

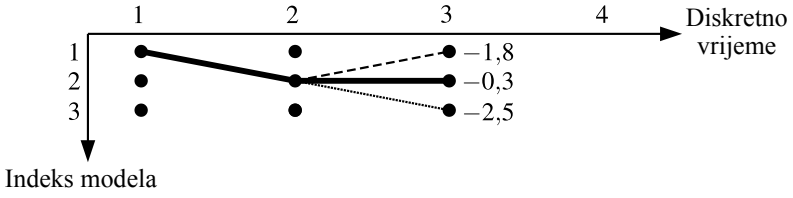
$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_k^{(\mathbb{i}^k)} &= P\left(\mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k \,|\, \mathbb{Z}^k\right) \\
&= \frac{1}{c} p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k, \mathbb{Z}^{k-1}\right) P\left(m_k = m_{i_k} \,|\, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-1}}^{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}\right) P\left(\mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-1}}^{k-1} \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right), \qquad (2.313)\\
\log_{\mathrm{e}}\left(\mathcal{M}_k^{(\mathbb{i}^k)}\right) &= \log_{\mathrm{e}}\left(\mathcal{M}_{k-1}^{(\mathbb{i}^{k-1})}\right) + \Lambda_k^{(\mathbb{i}^{k-1},i_k)}, \qquad (2.314)\\
\Lambda_k^{(\{\mathbb{i}^k,i_k\})} &= \log_{\mathrm{e}}\left(p\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k, \mathbb{Z}^{k-1}\right) P\left(m_k = m_{i_k} \,|\, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-1}}^{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}\right)\right) - \log_{\mathrm{e}}(c). \qquad (2.315)
\end{aligned}$$

Budući da za hibridni sustav veličina prijelazne vjerodostojnosti $\Lambda_k^{(\mathbb{i}^{k-1})}$ ovisi o povijesti modela $\mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-2}}^{k-2}$, Viterbijev algoritam je suboptimalan čak i u slučaju Markovljevog svojstva slijeda moda [16],

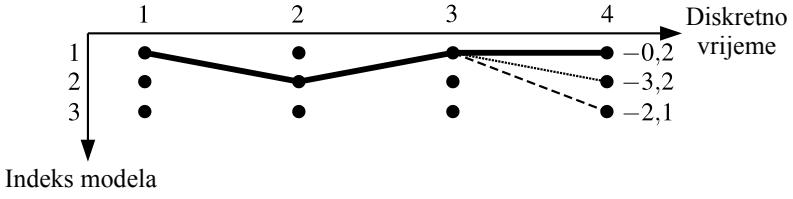
$$P\left(m_k = m_{i_k} \,|\, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-1}}^{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = P\left(m_k = m_{i_k} \,|\, m_{k-1} = m_{i_{k-1}}, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = P_{i_{k-1}i_k}. \tag{2.316}$$



(a) $\log_e\left(\mathcal{M}_2^{\left(\mathbb{i}^{2(*)}\right)}\right) = -0{,}7,\ \mathbb{i}^{2(*)} = \{1,1\}.$



(b) $\log_e\left(\mathcal{M}_3^{\left(\mathbb{i}^{3(*)}\right)}\right) = -0{,}3,\ \mathbb{i}^{3(*)} = \{1,2,2\}.$

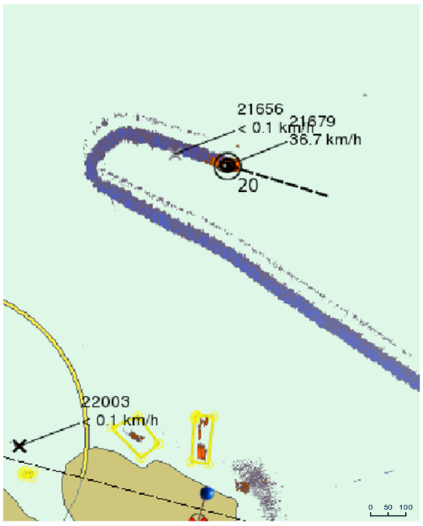


(c) $\log_e\left(\mathcal{M}_4^{\left(\mathbb{i}^{4(*)}\right)}\right) = -0{,}2,\ \mathbb{i}^{4(*)} = \{1,2,1,1\}.$

Slika 2.20. Ilustracija rekurzivne Viterbijeve metode.

2.4. Primjer

Svrha ovog primjera je usporedba metoda, opisanih u odjeljku 2.3.3, s gledišta njihove točnosti estimacije, kako bi se odabrala ona koja pruža najveću točnost i to s obzirom na očekivano gibanje manevrirajućeg površinskog cilja kojeg ilustrira snimka radarskog sustava, slika 2.21. U nastavku ovog rada, odabrana metoda se uklapa u proces pridruživanja koji je razrađen u poglavlju 5 i nije osjetljiv na poznavanje karaktera smetnje, a pri tome su, za verifikaciju njegovih značajki, primijenjeni isti parametri stohastičkih procesa koji su određeni u nastavku ovog odjeljka, uvažavajući pri tom kinematička ograničenja očekivane vrste cilja. Usporedba je provedena između jednomodelnih metoda estimacije nepoznatog upravljačkog ulaza (IE), adaptivne kovarijance (AKF), proširenja vektora stanja (isključivog biranja modela, VSD) te višemodelne metode s međudjelovanjem između modela (IMM), vidi odjeljak 2.3.3.



Slika 2.21. Snimka radarskog sustava ilustrira manevar površinskog cilja, brzog patrolnog čamca na mirnome moru. Slika je nastala u okviru projekta zaštite tzv. „Plave" i „Zelene" granice [142, 143].

Gibanje cilja modelirano je kao stohastički proces s nesigurnošću brzine unutar segmenata skoro jednolikog gibanja ($t \in [0,t_1) \cup [t_2,t_\infty]$) te s nesigurnošću obodne i kutne brzine unutar segmenta skoro kružnog gibanja ($t \in [t_1,t_2)$). Gibanje je opisano u pravokutnom koordinatnom sustavu NED, pod pretpostavkom sigurne detekcije cilja (vjerojatnost detekcije jednaka je jedan) te bez nesigurnosti u izvor mjerenja (mjerenje potječe isključivo od cilja). Unutar vremenskih intervala $[0,t_1 = 60\text{ s})$ i $[t_2 = 80\text{ s},\infty]$, gibanje cilja je skoro jednoliko i opisano linearnom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom (2.9), pri čemu je $\boldsymbol{u}(t) = 0$, a vektor stanja i prijelazna matrica opisani su s (2.30) i (2.34). Unutar intervala $[t_1,t_2)$, gibanje cilja opisano je nelinearnom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom (2.2), pri čemu je vektor stanja opisan s (2.63). Prijelazna funkcija, pojačanje i statistika Gaussovog šuma procesa opisani su s (2.64) – (2.66), a (2.67) je rješenje diskretizacije nelinearne jednadžbe (2.2) pomoću Eulerove aproksimacije.

Prema slici 2.21, polumjer okreta iznosi približno 75 m, pa je uz obodnu brzinu 10 ms^{-1} normalna akceleracija jednaka 1,3 ms^{-2}. Prema [144], tipične manevarske sposobnosti brzih plovila duljina od 10 m do 15 m, u smislu maksimalne brzine i pripadnog polumjera okreta, leže u granicama od 20 ms^{-1} do 30 ms^{-1}, odnosno od 150 m do 200 m, što rezultira vremenom polukružnog okreta između 20 s i 30 s.

U segmentu skoro jednolikog gibanja, procesni šum jednak je i za x-komponentu i za y-komponentu vektora stanja, odnosno $\boldsymbol{Q}_x = Q_x\boldsymbol{I}_2$, pa je očekivanje kvadrata brzine na početku manevra

$$E\left(\|\dot{\mathbf{x}}(t_1)\|^2\right) = \|\dot{\mathbf{x}}(t_0)\|^2 + 2Q_x(t_1 - t_0), \tag{2.317}$$

pri čemu je s $\|\dot{\mathbf{x}}(t_1)\|$ označena norma brzine, $\|\dot{\mathbf{x}}(t_1)\| = \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t_1)^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{x}}(t_1)}$. Nadalje, očekivanje kvadrata brzine na kraju polukružnog okreta je

$$E\left(\|\dot{\mathbf{x}}(t_2)\|^2\right) = E\left(\|\dot{\mathbf{x}}(t_1)\|^2\right)\left(1+\omega^2\left(t_2-t_1\right)^2\right) + (t_2-t_1)\sigma_{\dot{\mathbf{x}}}^2$$
$$\approx E\left(\|\dot{\mathbf{x}}(t_1)\|^2\right) + (t_2-t_1)\sigma_{\dot{\mathbf{x}}}^2, \tag{2.318}$$

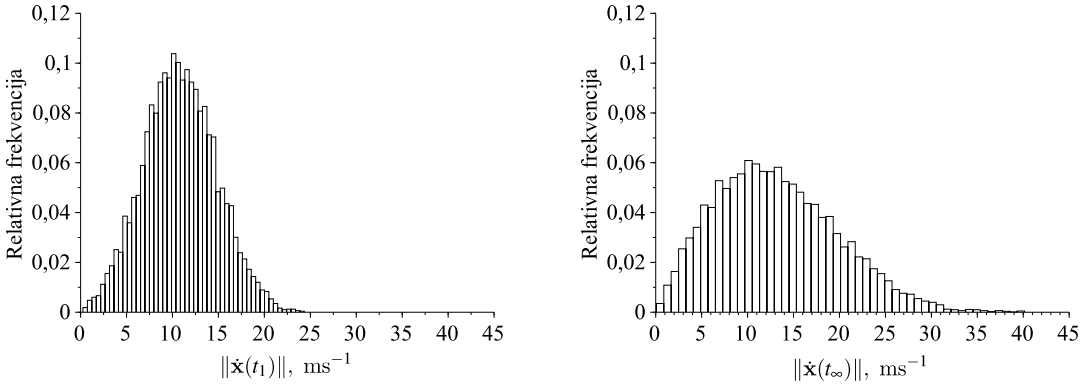
pod pretpostavkom da je $\omega^2(t_2-t_1)^2 \ll 1$ i kutna brzina ω konstantna. Uz $\sigma_{\dot{\mathbf{x}}}^2 = 2Q_x$, nesigurnost brzine jednaka je u segmentima skoro jednolikog i skoro kružnog gibanja te je očekivanje kvadrata brzine na kraju staze jednako

$$E\left(\|\dot{\mathbf{x}}(t_\infty)\|^2\right) \approx \|\dot{\mathbf{x}}(t_0)\|^2 + 2Q_x(t_\infty - t_0). \tag{2.319}$$

Pod pretpostavkom skoro jednolikog gibanja duž cijele staze, varijanca kvadrata brzine na kraju staze iznosi

$$\operatorname{var}\left(\|\dot{\mathbf{x}}(t_\infty)\|^2\right) = E\left(\|\dot{\mathbf{x}}(t_\infty)\|^4\right) - \left(E\left(\|\dot{\mathbf{x}}(t_\infty)\|^2\right)\right)^2$$
$$= 4Q_x(t_\infty - t_0)\|\dot{\mathbf{x}}(t_0)\|^2 + 4Q_x^2(t_\infty - t_0)^2. \tag{2.320}$$

Tako je uvjet maksimalne brzine v_{max} gibanja objekta moguće preinačiti u zahtjev da se brzina nalazi unutar granica od nula do v_{max} s visokom vjerojatnošću (tipično iznad 0,95) za svaku točku staze. Ovaj zahtjev se može ispuniti primjenom očekivane vrijednosti (2.319) i varijance (2.320) kvadrata brzine na kraju staze, npr. primjenom trostruke devijacije proizlazi $v_{max}^2 = E\left(\|\dot{\mathbf{x}}(t_\infty)\|^2\right) + 3\sqrt{\operatorname{var}\left(\|\dot{\mathbf{x}}(t_\infty)\|^2\right)}$, iz čega proizlazi vrijednost šuma procesa $Q_x = 0{,}3\ \mathrm{m^2 s^{-3}}$ uz $v_{max} = 30\ \mathrm{ms^{-1}}$. Histogram brzine na početku manevra i na kraju staze prikazan je slikom 2.22 za vrijeme polukružnog okreta trajanja 20 s, a jedna realizacija stohastičkog procesa koji modelira manevrirajuće gibanje ilustrirana je slikom 2.23a.



(a) Na početku manevra. (b) Na kraju staze.

Slika 2.22. Histogram brzine, rezultat stohastičkog procesa kojim je modelirano manevrirajuće gibanje cilja. Procesni šum jednak je i za x-komponentu i za y-komponentu vektora stanja te iznosi $Q_x = 0{,}3\ \mathrm{m^2 s^{-3}}$ za segmente skoro jednolikog gibanja, odnosno $\sigma_{\dot{\mathbf{x}}}^2 = 0{,}6\ \mathrm{m^2 s^{-3}}$ uz $v_{max} = 30\ \mathrm{ms^{-1}}$ za segment polukružnog okreta. Manevar počinje u trenutku $t_1 = 60$ s i traje 20 s. Trajanje staze iznosi $t_\infty = 200$ s.

Varijanca prirasta brzine između dviju sukcesivnih opservacija za vrijeme skoro jednolikog gibanja iznosi

$$\mathrm{var}\big(\dot{\mathrm{x}}(t_{k+1}) - \dot{\mathrm{x}}(t_k)\big) = \mathrm{var}\big(\dot{\mathrm{y}}(t_{k+1}) - \dot{\mathrm{y}}(t_k)\big) = Q_x(t_{k+1} - t_k), \tag{2.321}$$

a za polukružni okret unutar intervala $[t_1, t_2)$ srednja vrijednost kutne brzine iznosi $E\big(\omega(t) \,|\, t \in [t_1, t_2)\big) = \pi/(t_2 - t_1) = 0{,}157\ \mathrm{rads}^{-1}$. Pri tome je varijanca procesa šuma obodne brzine između dviju sukcesivnih opservacija

$$\mathrm{var}\big(\|\dot{\mathbf{x}}_{k+1}\| - \|\dot{\mathbf{x}}_k\|\big) = \sigma^2_{\dot{\mathbf{x}}}(t_{k+1} - t_k), \tag{2.322}$$

s parametrom $\sigma^2_{\dot{\mathbf{x}}} = 0{,}6\ \mathrm{m^2 s^{-3}}$. Varijanca prirasta kutne brzine između dviju sukcesivnih opservacija jednaka je

$$\mathrm{var}\,(\omega_{k+1} - \omega_k) = \sigma^2_{\omega}(t_{k+1} - t_k), \tag{2.323}$$

s parametrom $\sigma^2_{\omega} = 0{,}0001\ \mathrm{rad^2 s^{-3}}$. Početni vektor stanja cilja dan je s

$$\boldsymbol{x}(t_0) = [\mathbf{x}(t_0)\ \dot{\mathbf{x}}(t_0)]^{\mathrm{T}} = [2.000\ \mathrm{m}\ 2.000\ \mathrm{m}\ 7\ \mathrm{m/s}\ \ -7\ \mathrm{m/s}]^{\mathrm{T}}. \tag{2.324}$$

Proces opservacije provodi se radarskim senzorom radijalne i azimutne razlučivosti $\mathrm{d}r = 25$ m i $\mathrm{d}\varphi = 4°$, pri čemu su mjerenja opisana u polarnom koordinatnom sustavu, radijalne i azimutne razlučivosti $\Delta r = 25$ m, odnosno $\Delta\varphi = 1°$, čije ishodište odgovara poziciji senzora, vidi odjeljak 2.2. Pod pretpostavkom jednolike razdiobe pozicije odjeka cilja unutar volumena razlučivosti $V_r = \Delta r \Delta\varphi$, devijacija greške mjerenja po udaljenosti i azimutu odgovarajuće Gaussove razdiobe iznosi $\sigma_r = \Delta r/\sqrt{12}$ i $\sigma_\varphi = \Delta\varphi/\sqrt{12}$, a vrijeme između dviju sukcesivnih opservacija iznosi $T = t_{k+1} - t_k = 2$ s. Pretvorbom mjerenja iz polarnog u pravokutni sustav (2.80), proces opservacije je pseudolinearan i opisan s (2.25).

Inicijalizacija staze cilja provodi se metodom dvije početne mjerne točke, vremenskih indeksa $k = 1$ i $k = 2$, tako da je $\boldsymbol{z}_1 = \left[r_1^{(*)}\ \varphi_1^{(*)}\right]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{z}_2 = \left[r_2^{(*)}\ \varphi_2^{(*)}\right]^{\mathrm{T}}$ i početni vektor estimacije jednak

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t_2) = \begin{bmatrix} r_2^{(*)} \cos\left(\varphi_2^{(*)}\right) \\ r_2^{(*)} \sin\left(\varphi_2^{(*)}\right) \\ \frac{1}{T}\left(r_2^{(*)} \cos\left(\varphi_2^{(*)}\right) - r_1^{(*)} \cos\left(\varphi_1^{(*)}\right)\right) \\ \frac{1}{T}\left(r_2^{(*)} \sin\left(\varphi_2^{(*)}\right) - r_1^{(*)} \sin\left(\varphi_1^{(*)}\right)\right) \end{bmatrix}, \tag{2.325}$$

s kovarijancom

$$\boldsymbol{P}(t_2) = \begin{bmatrix} R^{(*)}_{\mathrm{xx},2} & 0 & R^{(*)}_{\mathrm{xx},2}/T & 0 \\ 0 & R^{(*)}_{\mathrm{yy},2} & 0 & R^{(*)}_{\mathrm{yy},2}/T \\ R^{(*)}_{\mathrm{xx},2}/T & 0 & 2R_{\mathrm{xx},2}/T^2 & 0 \\ 0 & R^{(*)}_{\mathrm{yy},2}/T & 0 & 2R_{\mathrm{yy},2}/T^2 \end{bmatrix}. \tag{2.326}$$

Prema [8], u matrici kovarijance mjerenja mogu se zanemariti članovi kovarijance između koordinata, pa je

$$\boldsymbol{R}^{(*)} \approx \begin{bmatrix} \mathrm{var}(\tilde{\mathrm{x}}) & 0 \\ 0 & \mathrm{var}(\tilde{\mathrm{y}}) \end{bmatrix}, \tag{2.327}$$

pri čemu je

$$\tilde{\mathrm{x}} = \mathrm{x}^{(*)} - \mathrm{x} \approx \tilde{r}\cos\left(\varphi^{(*)}\right) - \tilde{\varphi}\, r^{(*)} \sin\left(\varphi^{(*)}\right), \tag{2.328}$$

$$\tilde{\mathrm{y}} = \mathrm{y}^{(*)} - \mathrm{y} \approx \tilde{r}\sin\left(\varphi^{(*)}\right) + \tilde{\varphi}\, r^{(*)} \cos\left(\varphi^{(*)}\right), \tag{2.329}$$

rezultat linearizacije i $\tilde{r} = r^{(*)} - r$, $\tilde{\varphi} = \varphi^{(*)} - \varphi$, tako da je, zanemarivši međuovisnost između koordinata koja se javlja pri koordinatnoj pretvorbi, matrica kovarijanci za proizvoljni vremenski indeks k jednaka,

$$\boldsymbol{R}^{(*)}_k = \begin{bmatrix} r^{(*)}_k \sigma^2_\varphi \sin\left(\varphi^{(*)}_k\right)^2 + \sigma^2_r \cos\left(\varphi^{(*)}_k\right)^2 & 0 \\ 0 & r^{(*)}_k \sigma^2_\varphi \cos\left(\varphi^{(*)}_k\right)^2 + \sigma^2_r \sin\left(\varphi^{(*)}_k\right)^2 \end{bmatrix}. \tag{2.330}$$

Metodom adaptivne kovarijance (AKF) s dvije diskretne razine, manevar je modeliran kao skoro jednoliko gibanje, povećane kovarijance procesnog šuma koja kroz veću vrijednost Kalmanovih koeficijenata dopušta veći upliv mjerenja na estimaciju u korekcijskoj fazi filtracije. Pod hipotezom H0 da je gibanje cilja nemanevrirajuće, vrijednost kovarijance odgovara šumu procesa, odnosno $\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{H0})}_x = Q^{(\mathrm{H0})}_x \boldsymbol{I}_2$, pri čemu je $Q^{(\mathrm{H0})}_x = 0{,}3\ \mathrm{m^2 s^{-3}}$. Ako je normalizirana kvadratna inovacija (2.241) kroz broj uzoraka $N = 4$ statistički značajna, detektiran je manevar, pa je, pod hipotezom H1 da je gibanje cilja manevrirajuće, vrijednost kovarijance šuma procesa $\boldsymbol{Q}^{(\mathrm{H1})}_x = Q^{(\mathrm{H1})}_x \boldsymbol{I}_2$. Parametar kovarijance $Q^{(\mathrm{H1})}_x$ određen je parametrima dizajna filtra: očekivanom obodnom brzinom $\|\dot{\mathbf{x}}(t_1)^{(\mathrm{H1})}\|$ na početku manevra, očekivanim vremenom trajanja manevra $t_2 - t_1$ te karakterom manevra. Prema (2.321), varijanca prirasta x-komponente brzine (jednaka razmatranja vrijede i za y-komponentu) pri polukružnom okretu, pod pretpostavkom konstantne kutne brzine okreta ω, jednaka je

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\big(\dot{\mathrm{x}}(t_{k+1})-\dot{\mathrm{x}}(t_k)\,|\,t\in[t_1,t_2)\big) &= \|\dot{\mathbf{x}}(t_1)^{(\mathrm{H1})}\|^2 E\left(\Big(\cos\big(\omega T+\phi(t_1)\big)-\cos\big(\phi(t_1)\big)\Big)^2\right)\\ &= \|\dot{\mathbf{x}}(t_1)^{(\mathrm{H1})}\|^2\big(1-\cos(\omega T)\big),\end{aligned} \tag{2.331}$$

za svaku točku okreta, $t\in[t_1,t_2)$, jer je $E\Big(\cos\big(\omega T+\phi(t_1)\big)-\cos\big(\phi(t_1)\big)\Big)=0$ pri čemu je očekivanje provedeno po vrijednostima početnog kursa $\phi(t_1)\in[0,2\pi)$. Izjednačavanjem varijance (2.331) s varijancom modela skoro jednolikog gibanja (2.321), proizlazi

$$Q_x^{(\mathrm{H1})}=\frac{\|\dot{\mathbf{x}}(t_1)^{(\mathrm{H1})}\|^2\big(1-\cos(\omega T)\big)}{T}. \tag{2.332}$$

Kutna brzina određena je karakterom manevra i njegovim trajanjem. Za polukružni okret iznosi $\omega=\pi/(t_2-t_1)$, pa uz očekivanu (pretpostavljenu) obodnu brzinu polukružnog okreta $\|\dot{\mathbf{x}}(t_1)^{(\mathrm{H1})}\|=10\ \mathrm{ms}^{-1}$, parametar kovarijance procesnog šuma iznosi $Q_x^{(\mathrm{H1})}=2{,}5\ \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-3}$. Iako je akceleracija u manevru polukružnog okreta determinističkog karaktera, u ovoj metodi je provedena njena aproksimacija bijelim Gaussovim šumom sa srednjom vrijednošću nula i varijancom $Q_x^{(\mathrm{H1})}T$.

Filtar s estimacijom nepoznatog ulaza primjenjuje metodu najmanje kvadratne greške, vidi (2.228), u estimaciji akceleracije $\hat{\boldsymbol{u}}=\hat{\ddot{\mathbf{x}}}=\big[\hat{\ddot{\mathrm{x}}}\ \hat{\ddot{\mathrm{y}}}\big]^{\mathrm{T}}$, uz model skoro jednolikog gibanja cilja, kovarijance procesnog šuma $\boldsymbol{Q}_x=Q_x\boldsymbol{I}_2$, pri čemu je parametar $Q_x=0{,}3\ \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-3}$ te uz broj uzoraka (širinu prozora) $N=4$. Ako je normalizirana kvadratna akceleracija (2.229) značajna, provodi se korekcija apriorne estimacije i njene kovarijance prema (2.230) i (2.231). Pri tome je matrica pojačanja ulaza jednaka

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\frac{T^2}{2}\boldsymbol{I}_2\\ T\boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}. \tag{2.333}$$

U metodi isključivog biranja modela (pristup s proširenjem vektora stanja ili VSD), primijenjena su dva modela gibanja cilja: model skoro jednolikog gibanja opisan s (2.34) – (2.36) za nemanevrirajuće gibanje te Singerov model opisan s (2.43) – (2.50) za manevrirajuće gibanje. Pri tome je vremenska konstanta manevra za Singerov model jednaka očekivanom vremenu manevra, jednaka za obje koordinate x i y te iznosi $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}=[20\ \mathrm{s}\ 20\ \mathrm{s}]^{\mathrm{T}}$, a devijacija trenutne akceleracije jednaka je maksimalnoj očekivanoj akceleraciji 0,5g,

$$a_{max}=5\ \mathrm{ms}^{-2}, \tag{2.334}$$

pa je prema (2.52), $\boldsymbol{Q}_m=\mathrm{diag}\left(\left[8{,}3\ \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-4}\ 8{,}3\ \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-4}\right]\right)$.

Višemodelni pristup IMM za nemanevrirajuće gibanje primjenjuje model skoro jednolikog gibanja opisan s (2.34) – (2.36), a za manevrirajuće gibanje Singerov model s parametrima

$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} = [20\text{ s } 20\text{ s}]^{\mathrm{T}}$ i $\boldsymbol{Q}_m = \mathrm{diag}\left(\left[8{,}3\text{ m}^2\text{s}^{-4}\ 8{,}3\text{ m}^2\text{s}^{-4}\right]\right)$, jednako kao i metoda VSD. Prema [8], očekivano vrijeme τ_{ii}, izraženo brojem vremenskih uzoraka, za vrijeme kojeg sustav zadržava mod opisan modelom m_i, jednako je

$$E(\tau_{ii}) = \frac{1}{1-P_{ii}}, \tag{2.335}$$

pri čemu je s P_{ii} označena vjerojatnost zadržavanja moda opisanog modelom m_i. Prema relaciji (2.335), ako se model za manevrirajuće gibanje označi s m_2 te ako je pretpostavljeno vrijeme trajanja manevra $\tau_{22} = 10$ uzoraka, slijedi $P_{22} = 0{,}9$. Vjerojatnost zadržavanja moda nemanevrirajućeg gibanja P_{11} nije kritična te je primijenjena vrijednost $P_{11} = 0{,}95$. Tako je prijelazna matrica definirana kao

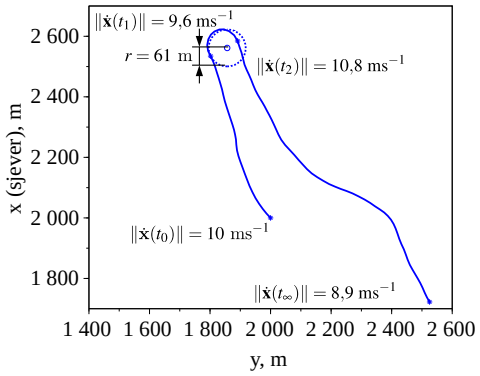
$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix}. \tag{2.336}$$

Slike 2.23b, c i d ilustriraju djelovanje kontrolnih veličina metoda AKF, IE, VSD i IMM, a slika 2.24 ilustrira točnost estimacije pozicije i brzine navedenih metoda, izražene kao korijen srednje kvadratne greške na temelju $N = 1.000$ nezavisnih realizacija manevrirajućeg gibanja. Tablice 2.1 i 2.2 prikazuju rezultate usporedbe metoda VSD i IE te rezultate usporedbe metoda IMM i VSD, pri čemu je kriterijska funkcija za ocjenu metode, vidi dodatak C.1, kvadratna greška pozicijske i brzinske komponente vektora stanja,

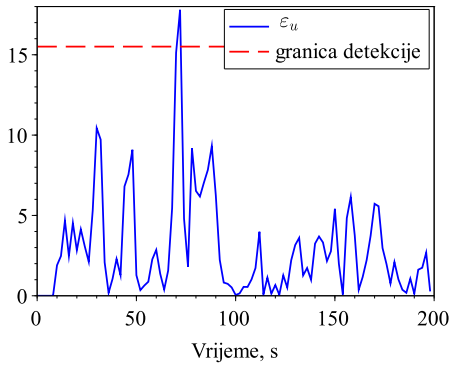
$$C(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2) = \frac{1}{k_2-k_1+1}\sum_{\kappa=k_1}^{k_2} \tilde{\mathbf{x}}_{\kappa}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{x}}_{\kappa}, \tag{2.337}$$

$$C(\|\tilde{\dot{\mathbf{x}}}\|^2) = \frac{1}{k_2-k_1+1}\sum_{\kappa=k_1}^{k_2} \tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{\kappa}^{\mathrm{T}}\tilde{\dot{\mathbf{x}}}_{\kappa}, \tag{2.338}$$

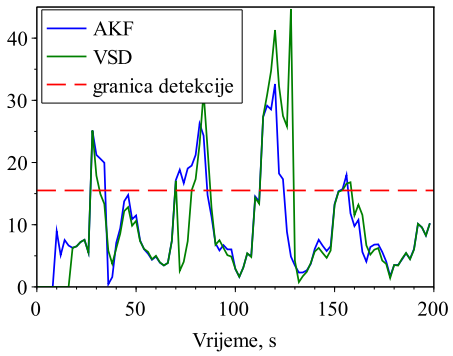
usrednjene kroz segment staze $[k_1, k_2)$ koji se testira (segment skoro jednolikog gibanja, segment kružnog okreta). Testna statistika je omjer razlike uzoračkih očekivanja kriterijskih funkcija (2.337) i (2.338) preko N realizacija i uzoračke devijacije te razlike, vidi (C.5). Prema rezultatima testne statistike, metoda VSD je bolja u odnosu na metodu IE u segmentu polukružnog okreta, ali je lošija u segmentima skoro jednolikog gibanja. Nasuprot tome, metoda IMM je bolja od metode VSD u svim segmentima gibanja.



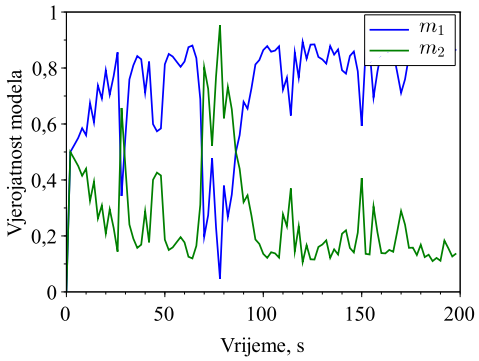
(a) Jedna od N realizacija staze.



(b) Normalizirana kvadratna estimirana akceleracija.

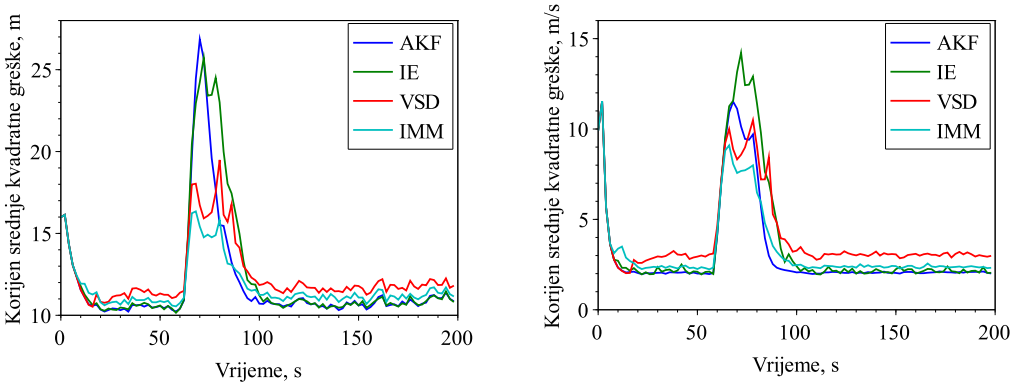


(c) Normalizirana kvadratna inovacija.



(d) Vjerojatnost modela skoro jednolikog gibanja (m_1) i Singerovog modela (m_2).

Slika 2.23. Ilustracija jedne realizacije stohastičkog procesa manevrirajućeg gibanja (a) i kontrolnih veličina koje odgovaraju toj realizaciji, (b) – (d). Procesni šum jednak je i za x-komponentu i za y-komponentu vektora stanja te iznosi $Q_x = 0{,}3$ m^{2}s^{-3} za segmente skoro jednolikog gibanja, odnosno $\sigma^2_{\dot{\mathbf{x}}} = 0{,}6$ m^{2}s^{-3} uz $v_{max} = 30$ ms^{-1} za segment skoro kružnog gibanja. Trenutak početka manevra je $t_1 = 60$ s uz trajanje 20 s. Trajanje staze iznosi $t_\infty = 200$ s.



(a) Točnost pozicije.

(b) Točnost brzine.

Slika 2.24. Točnost estimacije pozicije (a) i brzine (b) za 1.000 realizacija. Procesni šum jednak je i za x-komponentu i za y-komponentu vektora stanja te iznosi $Q_x = 0{,}3$ m^{2}s^{-3} za segmente skoro jednolikog gibanja, odnosno $\sigma^2_{\ddot{x}} = 0{,}6$ m^{2}s^{-3} uz $v_{max} = 30$ ms^{-1} za segment skoro kružnog gibanja. Trenutak početka manevra je $t_1 = 60$ s uz trajanje 20 s. Trajanje staze iznosi $t_\infty = 200$ s.

Tablica 2.1. Rezultati usporedbe metoda isključivog biranja modela (VSD) i estimacije upravljačkog ulaza (IE). Hipoteza da je metoda VSD bolja od metode IE se prihvaća ako je rezultat testne statistike veći od $d = 1{,}65$ uz značajnost greške $\alpha = 0{,}05$.

Komponenta	Pozicija	Brzina	Pozicija	Brzina	Pozicija	Brzina
Interval	$[2\,\text{s}, 60\,\text{s})$		$[62\,\text{s}, 80\,\text{s})$		$[82\,\text{s}, 200\,\text{s}]$	
$\overline{\Delta J}$	$-10{,}9$	$-2{,}7$	185,5	50,5	$-10{,}4$	$-2{,}8$
$\sigma_{\overline{\Delta J}}$	0,8	0,4	8,5	13,4	1,2	1,3
Rezultat testne statistike	$-13{,}3$	$-6{,}4$	21,9	3,8	$-8{,}6$	$-2{,}3$

Tablica 2.2. Rezultati usporedbe metoda s međudjelovanjem između modela (IMM) i isključivog biranja modela (VSD). Hipoteza da je metoda IMM bolja od metode VSD se prihvaća ako je rezultat testne statistike veći od $d = 1{,}65$ uz značajnost greške $\alpha = 0{,}05$.

Komponenta	Pozicija	Brzina	Pozicija	Brzina	Pozicija	Brzina
Interval	$[2\,\text{s}, 60\,\text{s})$		$[62\,\text{s}, 80\,\text{s})$		$[82\,\text{s}, 200\,\text{s}]$	
$\overline{\Delta J}$	4,0	1,4	41,0	17,2	19,6	6,3
$\sigma_{\overline{\Delta J}}$	0,7	0,6	2,9	4,1	0,8	1,1
Rezultat testne statistike	5,8	2,4	13,9	4,2	23,8	5,6

2.5. Zaključak

Ovo poglavlje pruža uvid u teorijsku podlogu metoda estimacije koje su primijenjene u ovom radu, kako za estimaciju vektora stanja manevrirajućeg cilja, tako i u okviru procesa učenja neuronske mreže, u kontekstu procesa pridruživanja radarskih podataka stazi manevrirajućeg cilja. U kontekstu estimacije vektora stanja, na temelju linearne stohastičke diferencijalne jednadžbe koja opisuje gibanje cilja, izveden je model skoro jednolikog (nemanevrirajućeg) gibanja te su kao modeli manevrirajućeg gibanja izvedeni Singerov model i njegova modifikacija trenutnim vektorom stanja. Pokazano je da složeniji model manevra koji modelira nesigurnost u obodnoj i kutnoj brzini te krivocrtni model kojim je modelirana tangencijalna i normalna komponenta akceleracije, rezultiraju nelinearnom prijenosnom funkcijom sustava.

U nastavku poglavlja, kao rezultat primjene okvira Kalmanovog filtriranja kada je gibanje odnosno mjerenje nelinearno, opisani su prošireni i kubaturni Kalmanov filtar te filtar bez derivacije. Za izrazito nelinearna gibanja te kada je potrebno poznavati stvarnu aposteriornu razdiobu vektora stanja, opisana je metoda čestičnog filtriranja koja se, radi bolje aproksimacije optimalne propozicijske razdiobe koja minimizira varijancu koeficijenata, može kombinirati s filtrom bez derivacije.

Primjena okvira Kalmanovog filtriranja za praćenje manevrirajućeg cilja, u kontekstu sigurne detekcije i bez nesigurnosti u izvor mjerenja, opisana je konceptom jednomodelnog pristupa, poput primjene metode estimacije akceleracije kao nepoznatog ulaza sustava, metode adaptivne kovarijance te metode isključivog biranja modela. U kontekstu višemodelnog pristupa, opisana je primjena Kalmanovog okvira u poopćenoj prividno-Bayesovoj metodi, Viterbijevoj metodi te u metodi s međudjelovanjem između modela. Za razliku od modela mjerenja radarskim senzorom koji je opisan u sfernom, a u posebnom slučaju praćenja površinskih ciljeva polarnom koordinatnom sustavu, opisane metode estimacije vektora stanja uvijek su provedene u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Na kraju poglavlja, provedena je usporedba opisanih metoda kao ilustracija razlika u točnosti estimacije pozicije i brzine manevrirajućeg cilja čije je gibanje modelirano kao stohastički proces, uvažavajući pri tome očekivane manevarske sposobnosti cilja. Rezultati statističke analize nad velikim brojem nezavisnih realizacija staze gibanja pokazuju da je koncept višemodelne estimacije bolji (u smislu točnosti estimacije) od jednomodelnog, a između jednomodelnih metoda, isključivo biranje modela bolje je (također u smislu točnosti estimacije), u segmentima manevra u odnosu na jednostavnije metode estimacije akceleracije ili adaptacije kovarijance šuma procesa.

Poglavlje 3

Interpretacija smetnje mora

U ovom se radu smetnja mora odnosi na odjeke nastale raspršenjem elektromagnetske energije od površinskih valova čiji je primarni generator vjetar. Fizikalna interpretacija mehanizama koji dovode do nastanka ovakve vrste valova dana je u odjeljku 3.1, a za razliku od uobičajenog pristupa koji smetnju mora opisuje statističkim značajkama (odjeljak 3.2), u odjeljku 3.3 je pružen njen opis u kontekstu nelinearnog stohastičkog procesa, s težištem na opis dinamike hibridnog AM/FM-procesa kojim je zadržana prirođena slučajnost smetnje [97, 145–147]. Opis u kontekstu stohastičkog procesa detaljniji je model smetnje i primijenjen je u numeričkoj simulaciji procesa praćenja manevrirajućeg cilja pri izraženoj smetnji mora, radi verifikacije robusnosti metode predložene ovim radom. Primjerom na kraju poglavlja pokazano je dobro slaganje modela K-razdiobe smetnje i eksperimentalnih podataka (mjerenja smetnje mora) radara IPIX [148, 149].

Dok je proteklih desetljeća fokus analize smetnje mora bio postavljen primarno na analizu i modeliranje refleksivnih svojstava morske površine te na detekciju pri malim upadnim kutovima (tipično ispod 1°, u sklopu primjene brodskih i obalnih radara, vidi iz mnoštva objavljene literature npr. [26, 150–159]), protekloga je desetljeća fokus istraživanja postavljen na analizu pri visokim upadnim kutovima, tipično iznad 10° (npr. scenarij primjene visokorazlučivog radara bespilotne letjelice), u smislu ekvivalentne radarske reflektirajuće površine ili radarskog presjeka [2–4], amplitudne razdiobe [3–5, 28], prostorne i vremenske korelacije te polarizacije [160], Dopplerovog spektra [3, 4, 67], analizi igličastih odjeka [161–163], kao i na što točnije modeliranje i simulaciju smetnje [6, 164–173] te detekciju [160, 174].

U opisu smetnje i njenih modela, gdje god je bilo moguće, primijenjene su specifičnosti Jadranskoga mora. Gdje nije bilo (s obzirom na manjkavost dostupne literature vezano za problematiku raspršenja elektromagnetske energije od morske površine u specifičnim uvjetima Jadrana), primijenjeni su rezultati koji se odnose na ocean ili otvorena mora, pretpostavljajući da se pri tome zadržava određena kvalitativna ovisnosti statističkih značajki smetnje (npr. tendencija povećanja težine repa amplitudne razdiobe sa smanjenjem upadnog kuta ili povećanjem

razlučivosti senzora, sinusoidalna ovisnost radarskog presjeka mora ovisno o smjeru vjetra, da se nabroje samo neke), kako i sugeriraju autori radova [3, 4] u kojima su opisani rezultati provedenih mjerenja u uvjetima nerazvijenoga Sredozemnoga mora.

3.1. Nastanak površinskih valova

Iako morsku površinu karakterizira nepravilnost koja se mijenja s vremenom, može se uočiti općenita ovisnost propagacije i karakteristika valova o vjetru. Zbog djelovanja poticajne sile vjetra kojoj su suprotstavljene umirujuća sila gravitacije te sila površinske napetosti, na spoju morske površine i zraka nastaje progresivno površinsko gibanje odnosno površinski val. Valne duljine površinskih valova kod kojih je gravitacija primarna umirujuća sila (gravitacijski valovi), kreću se u rasponu od nekoliko stotina metara do manje od metra, dok su valne duljine kapilarnih valova, kod kojih je primarna umirujuća sila površinska napetost, reda veličine centimetra i manje. Gravitacijski valovi nastali djelovanjem lokalnog vjetra iznad morske površine nazivaju se vjetrovnim valovima ili valovima živog mora, dok je uzrok nastanka valova mrtvog mora ili zibnih valova udaljeni vjetar izvan zone promatranja, a karakterizira ih pravilnija frekvencija i smjer propagacije [97, 175, 176]. Nasuprot tome, veličina i formiranje kapilarnih valova reflektiraju trenutnu jakost lokalnog vjetra [2]. Jakost i duljina trajanja vjetra te privjetrište odnosno površina koju zahvaća vjetar, utječu na stanje mora što se uobičajeno opisuje Beaufortovom skalom koja povezuje jakost (brzinu) vjetra, opis morske površine i značajnu visinu valova $H_{1/3}$ koja je definirana kao prosječna vrijednost trećine najviših valova, vidi npr. [175]. Opis vrijedi samo za lokalne prilike i potpuno razvijeno more gdje se karakteristike valova ne mijenjaju, odnosno kada je postignuta ravnoteža između prijenosa energije s vjetra na valove i njene disipacije. Međutim, u Jadranu se zbog zatvorenosti mora općenito ne mogu očekivati potpuno razvijeni valovi koji su zbog toga strmiji i kraće valne duljine nego što bi bili u oceanu [177, 178]. Najčešći vjetrovi u Jadranskom moru u zimskom periodu jesu bura, sjeverni-sjeverozapadni do istočni-sjeveroistočni vjetar te jugo, istočni-jugoistočni do južni-jugoistočni vjetar. U ljetnim mjesecima javlja se maestral, sjeverozapadni do zapadno-sjeverozapadni vjetar. Bura i jugo mogu poprimiti orkanski karakter, rezultirajući ekstremnim visinama valova, dok je maestral blaži. Bura puše poprečno preko Jadrana, a topografija gorja na njegovoj istočnoj obali određuje intenzitet i smjer valova. Uobičajena jakost vjetra iznosi do 20 ms^{-1}, ali može premašiti i 50 ms^{-1}. Za razliku od valova bure, valovi juga su veći i duži te već formirani ulaze kroz Otrantska vrata, rezultirajući razvijenijim morem. U olujnim uvjetima, jakost juga može biti do 30 ms^{-1}.

Ovisnost značajne visine valova $H_{1/3}$, značajne periode $T_{1/3}$ (prosjek valnih perioda trećine najviših valova) i odgovarajuće srednje vrijednosti valne duljine $\lambda_{1/3}$ za površinske valove Jadranskoga mora, prikazana je tablicom 3.1, a prema [179], ovisnost značajne visine $H_{1/3}$ i

značajne duljine valova $\lambda_{1/3}$ može se aproksimirati s

$$\lambda_{1/3} = 16{,}78\, H_{1/3}^{0{,}71}, \tag{3.1}$$

sa srednjom vrijednošću omjera

$$E\left(H_{1/3}/\lambda_{1/3}\right) = 1:12{,}5. \tag{3.2}$$

Tablica 3.1. Ljestvica stanja mora za Jadran. Preuzeto iz [176].

Jadran	Stanje mora (WMO)	$H_{1/3}$ (m)	$T_{1/3}$ (s)	$\lambda_{1/3}$ (m)	Dio ukupnog broja valova (%)
0	0				10
1	1	0,05	1,6	2	24,6
2	2	0,2	2,7	5	
3	3	0,5	3,7	9,5	43,0
4		0,8	4,6	14	
5	4	1,3	5,4	20	17,2
6		1,9	6,2	25	
7	5	2,6	6,9	32	4,2
8		3,5	7,6	39	
9	6	4,6	8,3	46,5	1,0
10		5,9	9,0	55	
11	7	7,3	9,7	66	0,01
12		8,8	10,4	79	

U spektralnom opisu vjetrovnih valova Jadranskoga mora najčešće se primjenjuje Tabainov spektar gustoće valne energije, ovisan samo o parametru značajne visine vala [180],

$$S(\omega) = 0{,}862\frac{0{,}0135\,\mathrm{g}^2}{\omega^5}\exp\left(-\frac{5{,}186}{H_{1/3}^2\omega^4}\right)1{,}63^{\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_m)^2}{2\sigma_T^2\omega_m^2}\right)}. \tag{3.3}$$

Spektar je modifikacija spektra JONSWAP koji je temeljen na ograničenom broju mjerenih spektara [181]. Modalna frekvencija ω_m u (3.3) određena je s

$$\omega_m = 0{,}32 + \frac{1{,}8}{H_{1/3}+0{,}6}, \tag{3.4}$$

a parametar oblika σ_T s

$$\sigma_T = \begin{cases} 0{,}08, & \omega \leq \omega_m \\ 0{,}1, & \omega > \omega_m \end{cases} . \tag{3.5}$$

Prema [64], ovisnost brzine vjetra na visini 10 m i značajne visine vjetrovnih valova aproksimirana je polinomom drugoga reda kao

$$H_{1/3} = 0{,}0127\, v_w^2 + 0{,}0055\, v_w \tag{3.6}$$

a stanja mora sa značajnim visinama valova manjim od 1 m čine skoro 70 % stanja mora u srednjem Jadranu.

3.2. Statističke značajke smetnje

U ovom je odjeljku dana teorijska podloga modela morske površine kao raspršivača elektromagnetske energije te su opisane statističke značajke smetnje: normirani radarski presjek, amplitudna razdioba, Dopplerov spektar, prostorna (radijalna) i vremenska (azimutna) korelacija te polarimetrijske značajke. Pored emitirane frekvencije, navedene su značajke općenito ovisne o upadnom kutu, polarizaciji, razlučivosti senzora, uvjetima propagacije, vjetru te stanju mora. Iscrpni popis recentne i relevantne literature vezano za problematiku modeliranja morske površine i raspršenja elektromagnetske energije pri visokim upadnim kutovima pružen je u [2].

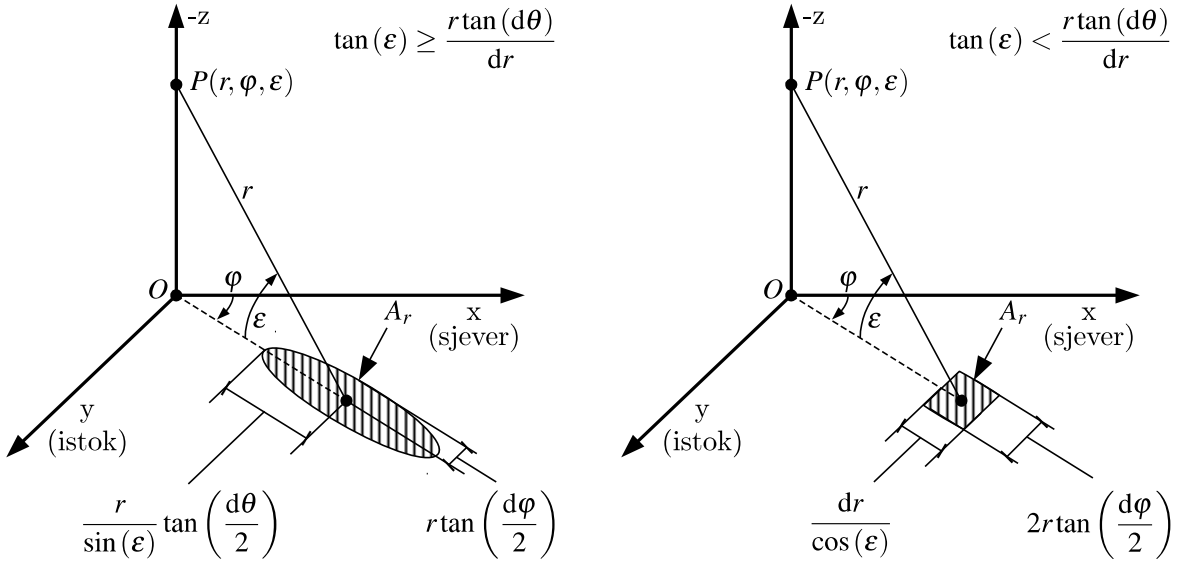
3.2.1. Radarski presjek

Zbog visoke dielektrične konstante mora, većina elektromagnetske energije biva raspršena, tek manji dio apsorbiran. Razina raspršene energije na mjestu prijemne antene ovisi o hrapavosti morske površine, jer je uz malu valovitost (u odnosu na valnu duljinu) i hrapavost malena, pa je refleksija skoro zrcalna i posljedično je razina prijemne energije (razmjerna radarskom presjeku) niska. Nasuprot tome, velika valovitost implicira i veliku hrapavost, pa je stoga refleksija difuzna i razina prijemne energije visoka.

Radarski presjek $\eta(\varepsilon)$ obasjanog dijela morske površine normiran je s obzirom na presjek volumena razlučivosti senzora i horizontalne površine, što rezultira površinom razlučivosti A_r tako da vrijedi $\eta(\varepsilon) = \eta_0(\varepsilon)A_r$, pri čemu $\eta_0(\varepsilon)$ označava normirani radarski presjek. Obasjani dio morske površine A_r ovisan je o udaljenosti r i odnosu upadnog kuta ε i radijalne dr i azimutne razlučivosti dφ kako je prikazano slikom 3.1,

$$A_r \approx \begin{cases} \frac{\pi r^2}{\sin(\varepsilon)} \tan\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right) \tan\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\right), & \tan(\varepsilon) \geq \frac{r\tan(\mathrm{d}\theta)}{\mathrm{d}r} \\ \frac{2r\mathrm{d}r}{\cos(\varepsilon)} \tan\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\right), & \tan(\varepsilon) < \frac{r\tan(\mathrm{d}\theta)}{\mathrm{d}r} \end{cases} . \tag{3.7}$$

Vrijednost radarskog presjeka, ovisno o upadnom kutu ε, općenito pokazuje tri karakteristična područja: područje interferencije, pri niskim upadnim kutovima, manjim od približno 10°, gdje na propagaciju izrazito utječu višestruka raspršenja i efekt zasjenjivanja, rezultirajući, kako se kut upada smanjuje, brzim opadanjem vrijednosti presjeka; područje zaravni, pri umjerenim upadnim kutovima, od otprilike 10° pa do 50°, gdje povećanje kuta upada ne rezultira izrazitim povećanjem vrijednosti presjeka; područje skoro zrcalne refleksije pri visokim upadnim kutovima, većim od približno 50°, gdje vrijednost presjeka varira inverzno s hrapavošću površine te je najveća pri okomitom obasjavanju. Općenito je vrijednost presjeka manja pri horizontalnoj nego pri vertikalnoj polarizaciji.



(a) Visoki upadni kut.

(b) Niski upadni kut.

Slika 3.1. Ilustracija ćelije razlučivosti senzora. Ovisno o upadnom kutu ε, površina razlučivosti A_r određena je ili azimutnom i elevacijskom razlučivošću snopa $(\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}\theta)$, ili elevacijskom $\mathrm{d}\theta$ i radijalnom $\mathrm{d}r$ razlučivošću.

Jedan od ranih pokušaja objašnjenja fenomena refleksije elektromagnetske energije od morske površine je Braggovo rezonantno raspršenje. Nastaje zadovoljenjem uvjeta konstruktivne kombinacije reflektirane energije,

$$n\lambda_{EM} = 2\lambda_w \cos(\varepsilon),\ n = 0, 1, \ldots, \tag{3.8}$$

što je ilustrirano slikom 3.2a, pri čemu λ_{EM} označava valnu duljinu emitirane elektromagnetske energije, λ_w duljinu vala i ε upadni kut. Braggovim se raspršenjem može objasniti raspršenje

od malih valova (u odnosu na valnu duljinu), pri čemu je radarski presjek, primjenom teorije rubnih problema uz uvjet da je omjer valnog broja $k_{EM} = 2\pi/\lambda_{EM}$ i efektivne visine valova H_{RMS} manji od jedan [151],

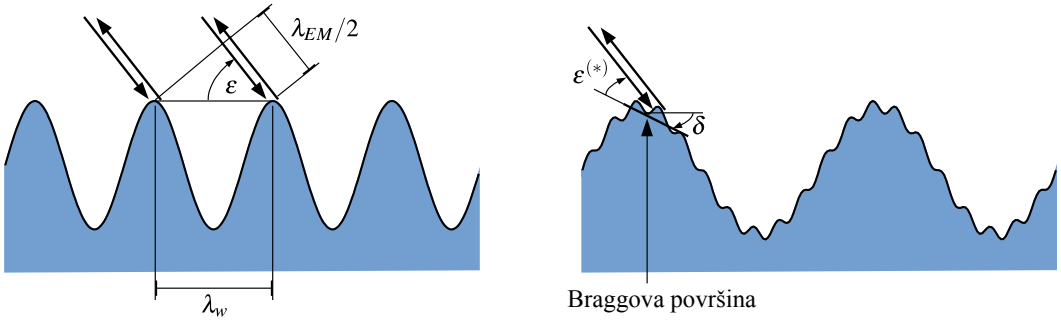
$$\begin{aligned}\eta_0(\varepsilon) &= 4k_{EM}^4 \cos(\varepsilon)^2 f(\varepsilon, x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}r \left(H_{RMS}^2 \rho(r)\right) \exp\left(-\mathrm{i}2rk_{EM}\cos(\varepsilon)\right) \\ &= 8\pi k_{EM}^4 \cos(\varepsilon)^2 f(\varepsilon, x)\, S\big(2k_{EM}\cos(\varepsilon)\big),\end{aligned} \tag{3.9}$$

pri čemu x označava ovisnost o polarizaciji i električnim svojstvima morske površine, a integral se prepoznaje kao Fourierova transformacija funkcije površinske korelacije $H_{RMS}^2 \rho(r)$, odnosno spektar po valnim brojevima $S\big(2k_{EM}\cos(\varepsilon)\big)$. Koeficijent površinske korelacije označen je s $\rho(r)$, a radarski je presjek razmjeran kvadratu efektivne visine valova. Pri mikrovalnim frekvencijama, uvjet da je efektivna visina vala prema valnom broju manja od jedan nije zadovoljen za realne visine valova.

Kako je morska površina kompozicija dugih i kratkih gravitacijskih te kapilarnih valova, napredniji kompozitni model pretpostavlja niz površina koje zadovoljavaju Braggovo raspršenje (Braggovih površina), lokalnog nagiba δ moduliranog dugim gravitacijskim valovima, kako ilustrira slika 3.2b. Pri tome je korelacijska duljina površina takva da je moguć rezonantni efekt i da raspršenje svake površine doprinosi ukupnom raspršenju sa slučajnom fazom, a zakrivljenost dugih modulacijskih valova je zanemariva u odnosu na korelacijsku duljinu površine. Radarski je presjek $\bar{\eta}_0(\varepsilon)$ tako očekivanje preko svih lokalnih presjeka $\eta_0(\varepsilon^{(*)})$,

$$\bar{\eta}_0(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0\left(\varepsilon^{(*)} = \varepsilon + \delta\right) p(\delta)\mathrm{d}\,\delta \tag{3.10}$$

pri čemu $\varepsilon^{(*)}$ označava lokalni upadni kut i $p(\delta)$ razdiobu nagiba δ. U općenitom dvodimenzionalnom slučaju, lokalni upadni kut funkcija je nagiba uzdužno i normalno na ravninu upada, a kutna funkcija $f(\varepsilon, x)$ kompleksna mješavina kutnih funkcija horizontalne i vertikalne polarizacije [151].



(a) Braggovo raspršenje.

(b) Kompozitni model.

Slika 3.2. Ilustracija Braggovog rezonantnog raspršenja elektromagnetske energije i kompozitnog modela morske površine.

Pod ne-Braggovim se raspršenjem uobičajeno podrazumijeva fenomen pojave igličastih odjeka, velikog Dopplerovog pomaka, velike snage pri horizontalnoj i znatno manje pri vertikalnoj polarizaciji, uz vrijeme trajanja do nekoliko sekundi. Smatra se da postoji nekoliko uzroka pojave igličastih odjeka, a svi su povezani s fenomenom lomljenih valova: raspršenje od vala koji je tik pred lomljenjem i znatno veće duljine nego Braggov rezonantni val, raspršenje od lomljenog vala velike valne duljine i izrazite komponente zrcalnog raspršenja, gušenje pri vertikalnoj polarizaciji zbog efekta Brewsterovog kuta (pri kojem ne postoji refleksija uz vertikalnu polarizaciju) i višestrukih raspršenja pri horizontalnoj polarizaciji zbog zasjenjivanja valnih žljebova velikim valnim krestama [182].

Model GIT [65] široko je prihvaćeni model radarskog presjeka morske površine za niske upadne kutove (do približno 10°) i bez anomalija u propagaciji. Prema modelu, radarski je presjek funkcionalno ovisan o tri člana: članu stanja mora A_w, članu višestruke propagacije A_i te članu smjera vjetra A_u. Član stanja mora A_w ovisan je o valnoj duljini emitirane elektromagnetske energije λ_{EM} i, prema podacima u [65], više ovisi o brzini vjetra v_w nego o značajnoj visini valova $H_{1/3}$, te je dan s

$$A_w = \left(\frac{1{,}94 v_w}{1 + v_w/15{,}4} \right)^{1{,}1(\lambda_{EM}+0{,}015)^{-0{,}4}}. \tag{3.11}$$

Član višestruke refleksije A_i ovisi koeficijentu hrapavosti ρ_ε kao

$$A_i = \frac{\rho_\varepsilon^4}{1 + \rho_\varepsilon^4}, \tag{3.12}$$

pri čemu je

$$\rho_\varepsilon = \frac{(14{,}4\lambda_{EM} + 5{,}5)\,\varepsilon H_{1/3}}{1{,}6\lambda_{EM}}. \tag{3.13}$$

Član smjera vjetra A_u modificiran je u [183] kao

$$A_u^{(V)} = \exp\left(\frac{\left(0{,}2206\cos(2\phi_w) + 0{,}1171\cos(\phi_w)\right)(1 - 2{,}8\varepsilon)}{(\lambda_{EM} + 0{,}015)^{0{,}4}} \right) \tag{3.14}$$

za vertikalnu i

$$A_u^{(H)} = \exp\left(\frac{0{,}3219\cos(\phi_w)(1 - 2{,}8\varepsilon)}{(\lambda_{EM} + 0{,}015)^{0{,}4}} \right) \tag{3.15}$$

za horizontalnu polarizaciju kako bi model bio u skladu s recentnim mjerenjima [184] koja su, između ostalog, pokazala bimodalnu značajku ovisnosti radarskog presjeka o smjeru vjetra ϕ_w pri vertikalnoj polarizaciji. Tako je za $f_{EM} < 12$ GHz, normirani radarski presjek za horizontalnu polarizaciju dan s

$$\eta_0^{(H)}(\varepsilon) = 3{,}9 \times 10^{-6} \lambda_{EM}\, \varepsilon^{0{,}4} A_w A_i A_u^{(H)}, \tag{3.16}$$

a za vertikalnu s

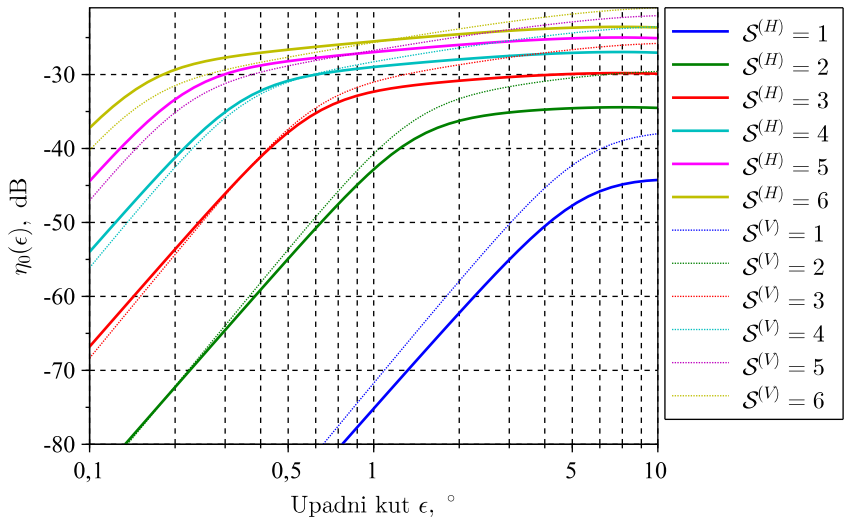
$$\eta_0^{(V)}(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{9{,}33(\varepsilon+0{,}0001)^{0{,}29}\, \lambda_{EM}^{0{,}25}\, \eta_0^{(H)} A_u^{(V)}}{A_u^{(H)} \left(\frac{H_{1/3}}{1{,}6}+0{,}015\right)^{0{,}24}}, & f_{EM} \geq 3 \text{ GHz} \\ \dfrac{166{,}0(\varepsilon+0{,}0001)^{0{,}57}\, \lambda_{EM}^{0{,}87}\, \eta_0^{(H)} A_u^{(V)}}{A_u^{(H)} \left(\frac{H_{1/3}}{1{,}6}+0{,}015\right)^{0{,}4}}, & f_{EM} < 3 \text{ GHz} \end{cases}. \tag{3.17}$$

Model GIT izvorno ne ovisi eksplicitno o stanju mora, već o brzini vjetra i značajnoj visini valova što omogućuje i modeliranja stanja mora koja nisu potpuno razvijena. U [185], povezujući brzinu vjetra v_w i značajnu visinu valova $H_{1/3}$ za potpuno razvijen ocean, model je modificiran stanjem mora kako bi se mogao verificirati eksperimentalnim podacima [154]. U ovom radu, ovisnost brzine vjetra i značajne visine valova modelirana je primjenom (3.6), pa tako slika 3.3 ilustrira radarski presjek za područje interferencije te za horizontalnu i vertikalnu polarizaciju pri smjeru vjetra 0° (najveći radarski presjek), kako se može očekivati za Jadransko more. Ovisnost brzine vjetra izražena stanjem mora $\mathcal{S}$ pri tome je,

$$v_w = -0{,}2165 + \sqrt{0{,}0469 + 10{,}072\,\mathcal{S}^2}, \tag{3.18}$$

primjenom relacije [185]

$$H_{1/3} = 0{,}049\,\mathcal{S}^{2{,}6}. \tag{3.19}$$



Slika 3.3. Ilustracija ovisnosti radarskog presjeka morske površine $\eta_0(\varepsilon)$ o upadnom kutu ε kako se može očekivati za Jadran, smjer vjetra 0° i model GIT. Upadni kutovi odgovaraju području interferencije, a emitirana frekvencija jednaka je 10 GHz.

Poznato je da su radarski presjeci pri malim stanjima mora (otprilike od 1 do 2) proračunati modelom GIT znatno manji nego u stvarnosti, vidi npr. [157]. Hibridni model [186] modificira model GIT efektima propagacije, što rezultira točnijim predviđanjima radarskog presjeka i za mala stanja mora. Normirana radarska površina hibridnog modela izražena je u obliku zbroja referentnog radarskog presjeka i članova koji modeliraju ovisnost o upadnom kutu, stanju mora, polarizaciji i smjeru vjetra,

$$\eta_0(\varepsilon) = \left(\eta_0(\varepsilon_0) + K_g + K_s + K_p + K_d\right) \text{ dB}, \tag{3.20}$$

pri čemu je radarski presjek za referentni kut ε_0 definiran kao

$$\eta_0(\varepsilon_0) = \begin{cases} \left(24{,}4 \log_{10}(f_{EM}) - 65{,}2\right) \text{ dB}, & f_{EM} \leq 12{,}5 \text{ GHz} \\ \left(3{,}25 \log_{10}(f_{EM}) - 42{,}0\right) \text{ dB}, & f_{EM} > 12{,}5 \text{ GHz} \end{cases} . \tag{3.21}$$

Faktor upadnog kuta K_g ovisi o odnosu upadnog kuta ε i prijelaznog kuta ε_t koji je, ovisno o stanju mora $\mathcal{S}$, jednak

$$\varepsilon_t = \arcsin\left(\frac{2{,}13\,\lambda_{EM}}{\mathcal{S}^2}\right), \tag{3.22}$$

tako da je za $\varepsilon_t \geq \varepsilon_0$,

$$K_g = \begin{cases} 0, & \varepsilon < \varepsilon_r \\ 20 \log_{10}(\varepsilon/\varepsilon_r), & \varepsilon_r \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t \\ 20 \log_{10}(\varepsilon_t/\varepsilon_r) + 10 \log_{10}(\varepsilon/\varepsilon_t), & \varepsilon_t < \varepsilon < 30^\circ \end{cases} , \tag{3.23}$$

a za $\varepsilon_t < \varepsilon_0$

$$K_g = \begin{cases} 0, & \varepsilon \leq \varepsilon_r \\ 10 \log_{10}(\varepsilon/\varepsilon_r), & \varepsilon > \varepsilon_r \end{cases} . \tag{3.24}$$

Faktor K_s odnosi se na stanje mora, a prema [183], modificiran je kao

$$K_s = 5(\mathcal{S} - 5) + \frac{(\mathcal{S} - 5)^3}{10}. \tag{3.25}$$

Faktor K_p jednak je nuli za vertikalnu polarizaciju, a za horizontalnu je dan s

$$K_p = \begin{cases} 1{,}7 \log_{\mathrm{e}}\left(\dfrac{H_{1/3}}{1{,}6} + 0{,}015\right) - 3{,}8 \log_{\mathrm{e}}(\lambda_{EM}) - \\ -2{,}5 \log_{\mathrm{e}}(\varepsilon + 0{,}0001) - 22{,}2 \\ 1{,}1 \log_{\mathrm{e}}\left(\dfrac{H_{1/3}}{1{,}6} + 0{,}015\right) - 1{,}1 \log_{\mathrm{e}}(\lambda_{EM}) - \\ -1{,}3 \log_{\mathrm{e}}(\varepsilon + 0{,}0001) - 9{,}7 \\ 1{,}4 \log_{\mathrm{e}}\left(\dfrac{H_{1/3}}{1{,}6}\right) - 3{,}4 \log_{\mathrm{e}}(\lambda_{EM}) - 1{,}3 \log_{\mathrm{e}}(\varepsilon) - 18{,}6, \end{cases} \begin{array}{ll} , & f_{EM} < 3 \text{ GHz} \\ , & 3 \text{ GHz} \leq f_{EM} \leq 10 \text{ GHz} \\ & f_{EM} > 10 \text{ GHz} \end{array} . \tag{3.26}$$

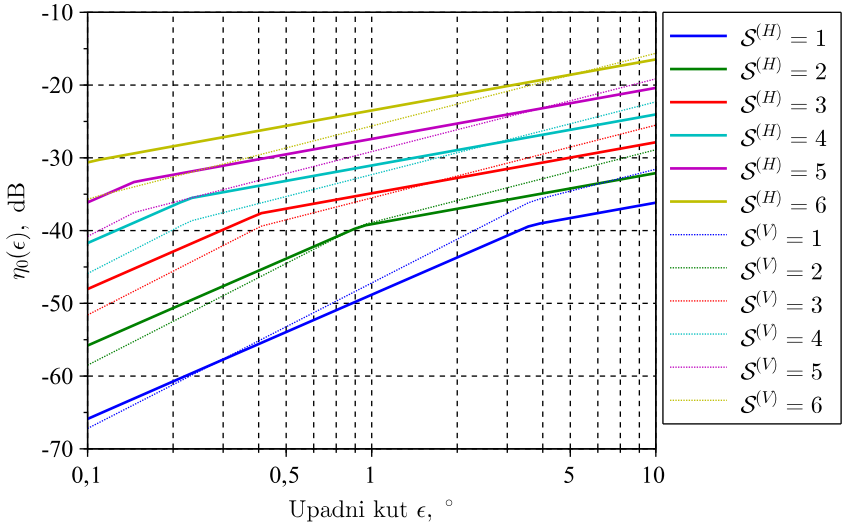
Faktor K_d ovisan je o smjeru vjetra ϕ_w, a u [183] je usklađen s mjerenjima [184] kao

$$K_d^{(V)} = \left(0{,}3 - 1{,}7 \log_{10}(\lambda_{EM})\right)\left(0{,}578 \cos(\phi_w) + 1{,}09 \cos(2\phi_w) - 1{,}0\right) \tag{3.27}$$

za vertikalnu polarizaciju i

$$K_d^{(H)} = \left(0{,}3 - 1{,}7 \log_{10}(\lambda_{EM})\right)\left(1{,}54 \cos(\phi_w) - 1{,}0\right) \tag{3.28}$$

za horizontalnu polarizaciju. Ilustracija ovisnosti radarskog presjeka mora za hibridni model prikazana je slikom 3.4.



Slika 3.4. Ilustracija ovisnosti radarskog presjeka morske površine $\eta_0(\varepsilon)$ o upadnom kutu ε za smjer vjetra 0° i hibridni model. Upadni kutovi odgovaraju području interferencije, a emitirana frekvencija jednaka je 10 GHz.

Za umjerene i visoke upadne kutove mogu se primijeniti modeli temeljeni na [187], kao npr. linearni IRSG model [66]. U ovom je slučaju metoda modeliranja interpolacija podataka mjerenja kako bi se dobila ovisnost radarskog presjeka o upadnom kutu i brzini vjetra u obliku

$$\eta_0(\varepsilon) = \left(W_0 + W_1 \varepsilon + W_2 \log_{10}(v_w)\right) \text{ dB}. \tag{3.29}$$

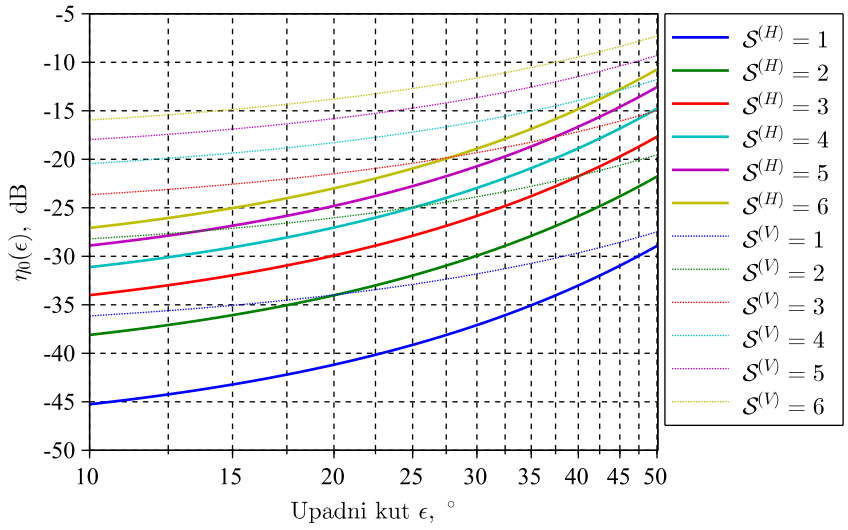
Vrijednosti koeficijenata W za tri osnovna smjera vjetra (smjer protiv vjetra, niz vjetar te bočno) i za frekvenciju 10 GHz, dane su tablicom 3.2. Uvrštenjem koeficijenata u (3.29) proizlaze odgovarajuće vrijednosti radarskog presjeka za smjer protiv vjetra $\eta_0^{(U)}$, za smjer niz vjetar $\eta_0^{(D)}$ te bočno u odnosu na vjetar $\eta_0^{(C)}$, tako da je presjek ovisan o smjeru vjetra [187]

$$\eta_0(\varepsilon) = \left(\frac{\eta_0^{(U)} + 2\eta_0^{(C)} + \eta_0^{(D)}}{4} + \frac{\eta_0^{(U)} - \eta_0^{(D)}}{2}\cos(\phi_w) + \frac{\eta_0^{(U)} - 2\eta_0^{(C)} + \eta_0^{(D)}}{4}\cos(2\phi_w) \right) \text{ dB}. \tag{3.30}$$

Primjenom ovisnosti brzine vjetra i značajne visine valova (3.6), proizlazi ovisnost radarskog presjeka kako se očekuje za Jadran i područje umjerenih i visokih upadnih kutova, što je ilustrirano slikom 3.5.

Tablica 3.2. Vrijednosti koeficijenata linearnog modela IRSG za frekvenciju 10 GHz. Prema [2].

Smjer u odnosnu na vjetar	Koeficijenti ovisni o polarizaciji					
	$W_0^{(H)}$	$W_1^{(H)}$	$W_2^{(H)}$	$W_0^{(V)}$	$W_1^{(V)}$	$W_2^{(V)}$
Protiv vjetra (0°)	−60,03	23,29	22,65	−50,18	12,41	25,15
Niz vjetar (180°)	−67,80	28,58	23,92	−50,15	12,30	23,92
Bočno (90°)	−67,09	23,12	24,71	−52,60	12,30	22,09



Slika 3.5. Ilustracija ovisnosti radarskog presjeka morske površine $\eta_0(\varepsilon)$ u području umjerenih i visokih upadnih kutova ε kako se može očekivati za Jadran i smjer protiv vjetra. Emitirana frekvencija jednaka je 10 GHz.

3.2.2. Amplitudna razdioba

Kada je unutar ćelije razlučivosti senzora efektivni broj reflektora konačan i raspodijeljen prema negativnoj binomnoj razdiobi, sa srednjom vrijednošću koja teži beskonačnosti, smetnja rezultira K-razdiobom [22, 23], a pri tome efektivni broj reflektora odražava broj onih koji značajno pridonose odjeku. Drugi pogled na ne-Rayleighovu fluktuaciju amplituda pružen je u [97], gdje se sugerira da fluktuacija potječe od grupiranja reflektora strukturom vala, a ne od malog efektivnog broja reflektora. Veći prosječni Dopplerov pomak za smjer valova prema senzoru i horizontalnu polarizaciju objašnjen je pomoću teorije o lomu valova. Prema teoriji, zbog reflektora grupiranih blizu kreste vala postoji mogućnost višestruke refleksije od morske površine ispred vala. Za vertikalnu polarizaciju, Brewsterov efekt, kut pri kojem ne postoji refleksija uz uvjet da je upadni val vertikalno polariziran, može rezultirati izrazitim poništavanjem odjeka, dok kod horizontalne polarizacije rezultirajući odjek može biti jak. Također, prosječna snaga odjeka manja je pri horizontalnoj nego vertikalnoj polarizaciji, ali uz češću pojavu igličastih odjeka, u skladu s teorijom kompozitnih površina i Braggovom raspršenju od kapilarnih valova. Pri tome je njihova međusobna udaljenost približno polovica valne duljine što rezultira konstruktivnim zbrajanjem pojedinačnih odjeka.

Navedena K-razdioba pripada klasi kompleksnih i eliptički simetričnih razdioba [188] te se može promatrati u kontekstu složenog procesa dugoročnih i kratkoročnih fluktuacija amplituda ζ, što odgovara modelu površinskih valova koji se prvenstveno sastoje od dvije komponente: velikih gravitacijskih i manjih kapilarnih valova, kako je to pokazano u odjeljku 3.1. Tako dugoročne fluktuacije amplitude nastaju zbog refleksije elektromagnetske energije od velikih gravitacijskih (vjetrovnih i zibnih) valova. Opisuju pozadinsku snagu η, odnosno ekvivalentni radarski presjek ili intenzitet procesa gama-razdiobe, vremenske korelacije nekoliko sekundi,

$$p(\eta) = \mathscr{G}(\eta;\nu,\beta) = \frac{\eta^{\nu-1}\exp\left(-\frac{2\eta}{\beta}\right)}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\nu}\Gamma(\nu)}, \quad \eta,\nu,\beta > 0, \tag{3.31}$$

pri čemu ν označava parametar oblika i β parametar skaliranja. Kratkoročne fluktuacije amplitude posljedica su refleksije od, unutar ćelije razlučivosti senzora, velikog broja jednoliko raspoređenih reflektora, rezultirajući Gaussovim procesom i vremenskom korelacijom nekoliko milisekundi, ovisno o internim gibanjima reflektora te elektromagnetskoj valnoj duljini [26, 97, 189],

$$p(\zeta|\eta) = \mathscr{R}(\zeta;\eta) = \frac{\zeta}{\eta}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\eta}\right), \quad \eta > 0 \wedge \zeta \geq 0. \tag{3.32}$$

Očekivanje razdiobe (3.32) preko svih očekivanih vrijednosti η rezultira K-razdiobom smetnje [41, 190],

$$p(\zeta) = \int_0^\infty p(\zeta \mid \eta)\, p(\eta)\, \mathrm{d}\eta$$
$$= \mathcal{K}(\zeta; \nu, \beta) = \frac{4\zeta^\nu}{\sqrt{\beta^{\nu+1}}\Gamma(\nu)} K_{\nu-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\beta}}\right), \quad \zeta, \beta, \nu > 0, \tag{3.33}$$

gdje $K_{(\cdot)}(\cdot)$ označava modificiranu Besselovu funkciju druge vrste, definiranu kao [191]

$$K_p(x) = \frac{x^p}{2^{p+1}} \int_0^\infty r^{-p-1} \exp(-r) \exp\left(-\frac{x^2}{4r}\right) \mathrm{d}r. \tag{3.34}$$

Vrijednost parametra oblika ν može se estimirati iz skupa amplitudnih uzoraka $\left\{\zeta_i^{(*)}, i = 1, \ldots, N\right\}$ (koje sadrže i termički šum), primjenom metode „X-statistike" [192] na intenzitet $\psi = \zeta^2$ (metoda [zlog(z)]),

$$\frac{1}{\hat{\nu}^{(*)}} + 1 = \frac{\left\langle \left\{ \psi_i^{(*)} \log_\mathrm{e}\left(\psi_i^{(*)}\right) \right\} \right\rangle}{\left\langle \left\{ \psi_i^{(*)} \right\} \right\rangle} - \left\langle \left\{ \log_\mathrm{e}\left(\psi_i^{(*)}\right) \right\} \right\rangle, \tag{3.35}$$

pri čemu $\hat{\nu}^{(*)}$ označava estimaciju parametra oblika mješavine smetnje (amplitudne K-razdiobe) i termičkog šuma (amplitudne Rayleighove razdiobe), a $\langle \cdot \rangle$ prvi uzorački moment. Parametar oblika nakon kompenzacije utjecaja termičkog šuma jednak je

$$\hat{\nu} = \hat{\nu}^{(*)} \left(1 + \frac{1}{\mathcal{C}}\right)^{-2}, \tag{3.36}$$

gdje $\mathcal{C}$ označava omjer snage smetnje prema snazi termičkog šuma σ_t^2, a parametar se skaliranja β može estimirati primjenom metode momenata [23],

$$\hat{\beta} = \frac{\left\langle \left\{ \psi_i^{(*)} \right\} \right\rangle - 2\sigma_t^2}{\hat{\nu}} \tag{3.37}$$

jer vrijedi da je $E(\psi) = \beta\nu$ i $E\left(\psi^{(*)}\right) = E(\psi) + 2\sigma_t^2$.

Kvalitativno, vrijednost je parametra oblika manja što je razlučivost senzora veća i što je upadni kut manji, manja je pri horizontalnoj polarizaciji i više ovisi o smjeru vjetra nego o smjeru valova, tako da je najmanja za smjer bočno u odnosu na vjetar, najveća za smjer protiv vjetra te nešto manja za smjer niz vjetar, a također blago raste s hrapavošću morske površine odnosno sa stanjem mora [6]. Tako npr., za radijalnu razlučivost reda veličine metra i azimutnu reda veličine stupnja, iznosi manje od 1 za upadni kut 20° i horizontalnu polarizaciju te približno 4 za vertikalnu polarizaciju [6], a za upadni kut 0,5°, pri stanju mora od 2 do 3 i vertikalnu polarizaciju, iznosi 0,5, a za stanje mora 6, približno 1 [158]. Pri malim upadnim kutovima, reda veličine stupnja i manje, u [155] su za horizontalnu polarizaciju, stanje mora 5 i

smjer bočno u odnosu na vjetar izmjerene vrijednosti 0,18, 0,42 i 0,59 za radijalne razlučivosti 5 m, 30 m i 150 m, a za vertikalnu, 0,37, 0,67 i 2,01. Za smjer protiv vjetra, vrijednosti parametra oblika iznose 0,31, 1,06 i 1,74 za horizontalnu te 0,4, 1 i 2,34 za vertikalnu polarizaciju. Treba napomenuti da su ovo vrijednosti izmjerene pri potpuno razvijenom oceanu. Vrijednost parametra oblika ovisi i o valnom segmentu koji je uzrok refleksije, npr., zbog zasjenjivanja valnih žljebova valnim krestama, broj raspršivača je manji i intenzitet Braggovog raspršenja reduciran te se može očekivati skoro Rayleighova amplitudna razdioba, a zbog valnih kresti koje su dominantni raspršivač, amplitudna razdioba značajno odstupa od Rayleighove, kako je i pokazano u analizi statističkih značajki raspršenja ovisno o valnom segmentu i za obalno područje [159]. U radu je pokazano da pri maksimumima reflektirane snage (koje odgovaraju refleksijama od kresti valova), vrijednost parametra oblika iznosi tipično od 4 do 6 (autori u radi nisu naveli vrstu polarizacije), a pri minimumima od 50 do 100, što je jasan pokazatelj Rayleighove amplitudne razdiobe.

Pri horizontalnoj polarizaciji i porastom senzorske razlučivosti, odstupanja od K-razdiobe su izraženija zbog pojave igličastih odjeka (koji gotovo i ne postoje pri vertikalnoj polarizaciji), što sugerira da modeliranje smetnje tradicionalnom K-razdiobom u tom slučaju nije dovoljno točno [5], posebno pri visokim upadnim kutovima (koji se očekuju u primjeni radara bespilotne letjelice), zbog dodatnog raspršenja od lomljenih valova [162]. U općenitom slučaju kada unutar ćelije razlučivosti reflektori nisu jednoliko raspoređeni ili su neki izraženiji od ostalih, uopćenje K-razdiobe rezultira amplitudnom KA-razdiobom [27]. U ovom se modelu pretpostavlja amplitudna K-razdioba kombinacije Braggovog raspršenja i raspršenja od valnih kresti, a pojava igličastih odjeka modelirana je Poissonovim procesom. Neka $\bar{\eta}$, η_s, η_B i σ_t^2 označavaju ukupnu snagu smetnje, snagu smetnje zbog igličastih odjeka, snagu smetnje zbog Braggovog raspršenja i raspršenja od valnih kresti te snagu termičkog šuma. Razdioba amplituda ζ, ovisna o lokalnom intenzitetu smetnje η, dana je s

$$p(\zeta|\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta}{\eta + \sigma_t^2 + n\eta_s} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\left(\eta + \sigma_t^2 + n\eta_s\right)}\right) \mathscr{P}(n;N), \tag{3.38}$$

pri čemu je $\mathscr{P}(n;N) = \frac{N^n}{n!}\exp(-N)$ Poissonova razdioba pojave n igličastih odjeka unutar ćelije razlučivosti i N njihov očekivani broj. Razdioba intenziteta smetnje dana je s (3.31) uz $\beta = 2\eta_B/\nu$, pa je

$$\begin{aligned} p(\zeta) &= \mathcal{KA}\left(\zeta;\nu,\beta = 2\eta_B/\nu,\eta_s,\sigma_t^2,N\right) \\ &= \int_0^{\infty} p(\zeta|\eta)p(\eta)\mathrm{d}\eta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{P}(n;N) \int_0^{\infty} \mathscr{R}\left(\zeta;\eta + \sigma_t^2 + n\eta_s\right) \mathscr{G}\left(\eta;\nu,\beta = 2\eta_B/\nu\right)\mathrm{d}\eta, \end{aligned} \tag{3.39}$$

a budući da su izvori smetnje i šum međusobno nekorelirani, vrijedi $E(\zeta^2) = \bar{\eta} = \sigma_t^2 + N\eta_s + \eta_B$. Integral u (3.39) rješava se numerički, vidi odjeljak 4.5 i (4.203) – (4.208). Kako je ilustrirano slikom 3.6, KA-razdioba pokazuje iznenadno odstupanje od K-razdiobe u području teškog repa kako je i opservirano u [5]. Metoda nalaženja parametra oblika ν provodi se prema (3.35), a u [193] je sugerirana vrijednost $N = 0{,}01$ i omjer η_s/η_B u granicama od 0 do 40, ovisno o učestalosti igličastih odjeka [5].

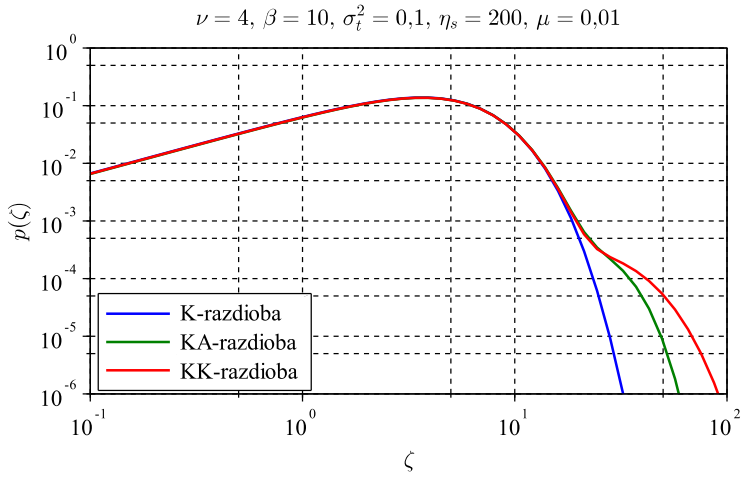
Zbog kompleksnosti opisa KA razdiobe koja zahtijeva numeričko integriranje, u [5] je predložena alternativa u KK-razdiobi, mješavini dvaju K-razdioba,

$$p(\zeta) = \mathcal{KK}(\zeta;\nu,\beta = 2\eta_B/\nu,\eta_s,\mu) = (1-\mu)\mathcal{K}(\zeta;\nu,2\eta_B/\nu) + \mu\,\mathcal{K}(\zeta;\nu,2\eta_s/\nu)\,, \quad (3.40)$$

pri čemu je pretpostavljena jednaka vrijednost parametra oblika za obje razdiobe. Prvi član u (3.40) odgovara razdiobi koja je rezultat Braggovog raspršenja i raspršenja od kresta valova, a drugi modelira utjecaj pojave igličastih odjeka (otklon od K-razdiobe prema slici 3.6 pri $p(\zeta) \approx 10^{-3}$) te nema fizikalnu osnovu. Omjer η_s/η_B određuje stupanj razdvajanja individualnih K-razdioba u (3.40), dok parametar μ utječe i na razdvajanje razdioba i na točku odstupanja od K-razdiobe [5]. Model KK-razdiobe (3.40) je proširen u [28] kako bi se obuhvatio utjecaj snage termičkog šuma σ_t^2, pa je individualna K-razdioba u (3.40) dana s

$$\mathcal{K}(\zeta;\nu,\beta) = \int_0^\infty \mathscr{R}\left(\zeta;\eta+\sigma_t^2\right)\mathscr{G}\left(\eta;\nu,\beta\right)\mathrm{d}\eta, \quad (3.41)$$

što je forma integrala KA-razdiobe (3.39) te se rješava numerički. Parametar oblika ν, pod pretpostavkom poznate snage šuma σ_t^2, jednak je za obje razdiobe te se može estimirati iz podataka mjerenja primjenom (3.35) i (3.36), a parametar skaliranja $\beta = 2\eta_B/\nu$ primjenom (3.37). Omjer η_s/η_B, kao i koeficijent μ, određen je empirijski, metodom najboljeg slaganja razdiobe (3.40) i podataka mjerenja.



Slika 3.6. Usporedba K-, KA- i KK-razdioba.

Paretova razdioba predložena u [24] također, kao i K-razdioba, pripada klasi kompleksnih i eliptički simetričnih razdioba [188], a u kontekstu malog upadnog kuta (0,2°) i visokorazlučivog radara (radijalne i azimutne razlučivosti 0,4 m i 2,4°), pokazuje dobro slaganje s podacima mjerenja, usporedivo s KK-razdiobom (3.40). Recentna istraživanja [194–197] pokazuju dobro slaganje s mjerenim rezultatima za male upadne kutove ($< 1°$) i srednjerazlučivi radar (radijalne i azimutne razlučivosti 30 m i 0,9°), također i za bistatički radar s radijalnom i azimutnom razlučivošću 3 m i 11° [198]. U [199], primjena Paretove razdiobe proširena je na visoke upadne kutove te je, pri usporedbi s K- i KK-razdiobom, pokazano jednako ili bolje slaganje s podacima mjerenja. Paretova razdioba rezultat je marginalizacije $\int_0^\infty p(\Psi \,|\, \eta) p(\eta) \mathrm{d}\eta$, pri čemu je razdioba intenziteta $p\left(\Psi = \zeta^2 \,|\, \eta\right)$ određena s (3.32), odnosno

$$p(\Psi|\eta) = \frac{1}{2\eta} \exp\left(-\frac{\Psi}{2\eta}\right), \quad \eta > 0 \wedge \Psi \geq 0. \tag{3.42}$$

Razdioba pozadinske snage dana je s

$$p(\eta) = \frac{\eta^{-\nu-1} \exp\left(-\frac{2}{\beta\eta}\right)}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\nu} \Gamma(\nu)}, \quad \eta, \nu, \beta > 0, \tag{3.43}$$

tako tako da je razdioba intenziteta opisana Poissonovom razdiobom kao

$$p(\Psi) = \mathcal{Pa}(\Psi; \nu, \beta) = \frac{\beta\nu}{4\left(\frac{\beta}{4}\Psi + 1\right)^{\nu+1}}, \quad \beta > 0 \wedge \Psi \geq 0. \tag{3.44}$$

Razdioba (3.44) jednostavnija je za matematičku manipulaciju od KK-razdiobe zbog ovisnosti o samo dva parametra (parametra oblika ν i parametra skaliranja β). Za primjenu gdje je snaga termičkog šuma znatno manja od snage smetnje, estimacija parametra oblika može se provesti metodom [zlog(z)], rješavanjem relacije

$$\frac{1}{\hat{\nu} - 1} = \frac{\langle \{\psi_i \log_{\mathrm{e}}(\psi_i)\} \rangle}{\langle \{\psi_i\} \rangle} - \langle \{\log_{\mathrm{e}}(\psi_i)\} \rangle - 1 \tag{3.45}$$

koja konvergira za $\nu > 1$ [170]. Parametar skaliranja određen je prvim momentom intenziteta, odnosno

$$\hat{\beta} = \frac{4}{\langle \{\psi_i\} \rangle (\hat{\nu} - 1)}. \tag{3.46}$$

Za manje vrijednosti parametra skaliranja, može se primijeniti metoda frakcionalnih momenata, npr. uz moment reda $1/2$ i moment reda $1/4$, parametri $\hat{\nu}$ i $\hat{\beta}$ rješenja su

$$\left\langle \left\{ \Psi_i^{1/2} \right\} \right\rangle = \left(\frac{4}{\beta}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(\hat{\nu} - 1/2)}{\Gamma(\hat{\nu})}, \tag{3.47}$$

$$\left\langle \left\{ \Psi_i^{1/4} \right\} \right\rangle = \left(\frac{4}{\beta} \right)^{1/4} \frac{\Gamma(5/4)\,\Gamma(\hat{\nu} - 1/4)}{\Gamma(\hat{\nu})}, \tag{3.48}$$

pri čemu je konvergencija ostvarena za $\nu > 1/2$, ili metoda maksimiziranja vjerodostojnosti, rješenje izraza

$$\frac{N \frac{\hat{\beta}}{4} \sum_{i=1}^{N} \frac{\Psi_i}{\hat{\beta}\Psi_i/4+1}}{N - \frac{\hat{\beta}}{4} \sum_{i=1}^{N} \frac{\Psi_i}{\hat{\beta}\Psi_i/4+1}} = \sum_{i=1}^{N} \log_{\mathrm{e}} \left(\hat{\beta}\Psi_i/4 + 1 \right) \tag{3.49}$$

i

$$\hat{\nu} = \frac{N}{\frac{\hat{\beta}}{4} \sum_{i=1}^{N} \frac{\Psi_i}{\hat{\beta}\Psi_i/4+1}} - 1, \tag{3.50}$$

pri čemu je s N označen broj uzoraka [194]. Kada snaga termičkog šuma nije zanemariva, u [170] je razvijen estimator koji se također temelji na metodi [zlog(z)], a za razliku od metode maksimiziranja vjerodostojnosti, ne zahtijeva numeričko integriranje i numeričko traženje maksimuma. Tako je, uz poznati omjer $\mathcal{C}$ i pod uvjetom $\nu > 1$, estimacija parametra oblika $\hat{\nu}$ rješenje izraza

$$\frac{\left\langle \left\{ \psi_i^{(*)} \log_{\mathrm{e}} \left(\psi_i^{(*)} \right) \right\} \right\rangle}{\left\langle \left\{ \psi_i^{(*)} \right\} \right\rangle} - \left\langle \left\{ \log_{\mathrm{e}} \left(\psi_i^{(*)} \right) \right\} \right\rangle - \\ - 1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\mathcal{C}}} \left(\frac{1}{\hat{\nu} - 1} - \exp\left((\hat{\nu} - 1)\mathcal{C} \right) E_{\nu}\left((\hat{\nu} - 1)\mathcal{C} \right) \right) \tag{3.51}$$

metodom numeričkog traženja. Pri tome $E_{\nu}(\cdot)$ označava poopćenu eksponencijalnu integralnu funkciju [200]

$$E_p(x) = \int_1^{\infty} r^{-p} \exp(-rx)\,\mathrm{d}r. \tag{3.52}$$

Parametar skaliranja proizlazi iz prvog momenta intenziteta kao

$$\hat{\beta} = \frac{4}{\left(\left\langle \left\{ \psi_i^{(*)} \right\} \right\rangle - 2\sigma_t^2 \right) (\hat{\nu} - 1)}. \tag{3.53}$$

Nešto točnija estimacija parametra oblika, osobito za vrijednost od 2 pa do približno 4, postiže se primjenom momenata necjelovitog reda p [172]. U istom je radu primijenjena vrijednost $p = 0,1$ i pokazano da estimacija parametra oblika $\hat{\nu}$ zadovoljava jednakost

$$\frac{\left\langle \left\{ \left(\psi_i^{(*)} \right)^p \right\} \right\rangle \left(\hat{\nu}^{(*)} - 2 \right)^{p/2}}{\left\langle \left\{ \psi_i^{(*)} \right\} \right\rangle^p \Gamma(p+1)} = \frac{\Gamma(\hat{\nu} - p)\,(\hat{\nu} - 1)^p\,(\hat{\nu} - 2)^{p/2}}{\Gamma(\hat{\nu})} \cdot \\ \cdot {}_2F_0 \left(\hat{\nu} - p, -p; \cdot; -\frac{\sqrt{\left(\hat{\nu}^{(*)} - 2 \right)(\hat{\nu} - 2)^{-1}} - 1}{\hat{\nu} - 1} \right) \tag{3.54}$$

kada omjer $\mathcal{C}$ nije poznat, pri čemu ${}_2F_0(p,r;\cdot;x)$ označava poopćenu hipergeometrijsku funkciju

$${}_2F_0(b,c;\cdot;x)=\frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(c)}\sum_{i=0}^{\infty}\Gamma(b+i)\Gamma(c+i)\frac{x^i}{i!},\ b,c\in\mathbb{C},x\in\mathbb{C}\setminus\{0\},|\arg(x)-\pi|<\pi-\varepsilon,\varepsilon>0 \tag{3.55}$$

[201, 202], $\langle(\cdot)^p\rangle$ uzorački moment reda p, a $\hat{\nu}^{(*)}$ je dan rješenjem

$$\hat{\nu}^{(*)}=1+\frac{\left\langle\left\{\left(\psi_i^{(*)}\right)^2\right\}\right\rangle}{\left\langle\left\{\left(\psi_i^{(*)}\right)^2\right\}\right\rangle-2\left\langle\left\{\psi_i^{(*)}\right\}\right\rangle^2} \tag{3.56}$$

koje konvergira za vrijednosti $\nu>2$. Poznavanjem povezanosti parametara razdiobe i vrijednosti prvog i drugog uzoračkog momenta intenziteta kao

$$\left\langle\left\{\psi_i^{(*)}\right\}\right\rangle=2\sigma_t^2+\frac{2}{\beta(\nu-1)}, \tag{3.57}$$

$$\left\langle\left\{\left(\psi_i^{(*)}\right)^2\right\}\right\rangle=8\left(\sigma_t^2\right)^2+\frac{16\sigma_t^2}{\beta(\nu-1)}+\frac{8}{\beta^2(\nu-1)(\nu-2)}, \tag{3.58}$$

proizlazi vrijednost parametra oblika $\hat{\beta}$ kao rješenje (3.57) i (3.58), zamjenom ν estimiranom vrijednošću $\hat{\nu}$ [172]. Uz poznatu snagu termičkog šuma σ_t^2, $\hat{\nu}$ je rješenje

$$\begin{aligned}\frac{\left\langle\left\{\left(\psi_i^{(*)}\right)^p\right\}\right\rangle}{\Gamma(1+p)\left(\left\langle\left\{\psi_i^{(*)}\right\}\right\rangle-2\sigma_t^2\right)^p}=&\frac{\Gamma(\hat{\nu}-p)\,(\hat{\nu}-1)^p}{\Gamma(\hat{\nu})}\cdot\\&\cdot{}_2F_0\left(\hat{\nu}-p,-p;\cdot;-\frac{-2\sigma_t^2}{\left(\left\langle\left\{\psi_i^{(*)}\right\}\right\rangle-2\sigma_t^2\right)(\hat{\nu}-1)}\right),\end{aligned} \tag{3.59}$$

a parametar skaliranja određen je s (3.53), što implicira da je zadovoljen uvjet $\nu>1$.

3.2.3. Dopplerov spektar

Raspršenju elektromagnetske energije doprinose različiti dijelovi strukture morske površine, a njihovo razlučivanje radarskim senzorom rezultira karakterističnim Dopplerovim spektrom. Dok oni dijelovi koji nisu razlučeni rezultiraju frekvencijskim pojasom oko neke srednje frekvencije, dijelovi koji su razlučeni rezultiraju značajnim pomakom od te vrijednosti [97]. Brzina v_D koja odgovara srednjem Dopplerovom pomaku, ovisno o smjeru vjetra i polarizaciji te za male upadne kutove, dana je na temelju eksperimentalnih podataka s [151]

$$v_D^{(H)} = 0{,}25 + 0{,}25 v_w, \tag{3.60}$$

$$v_D^{(V)} = 0{,}25 + 0{,}18 v_w, \tag{3.61}$$

pri čemu indeksi (H) i (V) označavaju slučaj horizontalne odnosno vertikalne polarizacije. Širina Dopplerovog spektra Δf_D približno je $0{,}24 v_w$.

Na temelju analize značajki raspršenja elektromagnetske energije pri upadnim kutovima od 10° pa do 70° i za frekvencijski pojas X, u [182] je zabilježeno: da se s porastom upadnog kuta i za smjer protiv vjetra, smanjuje srednja Dopplerova brzina razmjerno $\cos(\varepsilon)$; da je za visoke upadne kutove, tipično iznad 50°, oblik spektra za horizontalnu polarizaciju vrlo sličan spektru vertikalne polarizacije; da se smanjenjem upadnog kuta i za smjer protiv vjetra, razdvajaju vršne frekvencije horizontalnog i vertikalnog polarizacijskog spektra, tako da se vršna frekvencija spektra horizontalne polarizacije pomiče prema višim frekvencijama; da je za smjer protiv vjetra i pri upadnom kutu 25°, vršna vrijednost spektra ne-Braggovog raspršenja za nekoliko dB veća od vršne vrijednosti spektra Braggovog raspršenja; da su, provedbom visokopropusnog filtriranja Braggovog raspršenja i za smjer protiv vjetra, igličasti odjeci prisutni pri svim upadnim kutovima; za smjer bočno u odnosu na vjetar, komponenta ne-Braggovog raspršenja znatno je manja nego komponenta Braggovog raspršenja te nije opservirana za upadne kutove iznad 25°, što rezultira vrlo sličnim spektrima za obje polarizacije; da se vrijeme dekorelacije povećava upadnim kutom kako za vertikalnu, tako i za horizontalnu polarizaciju. Tako je napredniji model ovojnice spektra pružen u [203], dijeljenjem ukupnog spektra na komponentu koja je rezultat Braggovog raspršenja, opisanu Gaussovom funkcijom

$$S_B(f_D) = \frac{1}{\Delta f_{D_B}\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\left(f_D - \bar{f}_{D_B}\right)^2}{\Delta f_{D_B}^2}\right) = \mathscr{N}\left(f_D; \bar{f}_{D_B}, \frac{\Delta f_{D_B}^2}{2}\right), \tag{3.62}$$

i na komponentu koja je rezultat raspršenja od kresta lomljenih valova, opisanu Lorenzovom funkcijom

$$S_s(f_D) = \frac{\frac{\beta}{\pi}}{\left(f_D - \bar{f}_{D_s}\right)^2 + \beta^2} = \mathscr{L}\left(f_d; \bar{f}_{D_s}, \beta\right), \tag{3.63}$$

pri čemu $\bar{f}_{D_B}$ i $\bar{f}_{D_s}$ označavaju srednji Dopplerpv pomak Braggove komponente i komponente lomljenih valova, a β je parametar skaliranja, ovisan o parametru τ_s, vremenu trajanja raspršivača koji se nalaze na krestama lomljenih valova, tako da vrijedi $\beta = \frac{1}{2\pi^2\tau_s}$. Normirane komponente spektra (3.62) i (3.63) mogu se shvatiti kao razdiobe, pa tako komponenta Braggovog raspršenja ima Gaussovu razdiobu, a komponenta raspršenja od kresta lomljenih valova Lorenzovu odnosno Cauchyevu razdiobu Dopplerovih frekvencija. Ukupni je spektar smetnje opisan Voigtovom funkcijom [204] i rezultat je konvolucije spektra Braggovog raspršenja i spektra lomljenih valova kao [205]

$$S(c,p) = \frac{1}{\Delta f_{D_B}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{N}\left(r; 0, \frac{1}{2}\right) \mathscr{L}\left(p - r; 0, c\right) \mathrm{d}r, \tag{3.64}$$

pri čemu su $c = \frac{1}{2\pi^2 \tau_s \Delta f_{D_B}}$, $p = \frac{f_D - \bar{f}_{D_S}}{\Delta f_{D_B}}$ i $r = \frac{f_D - \bar{f}_{D_B}}{\Delta f_{D_B}}$. Za granične vrijednosti $c = 0$ i $c = \infty$, spektar (3.64) postaje Gaussov (3.62), odnosno Lorenzov (3.63).

Radi lakše matematičke manipulacije, ovojnica spektra se često aproksimira Gaussovom funkcijom, vidi npr. [206],

$$S(f_D)^{(V)} = c^{(V)} \exp\left(-\frac{f_D - \bar{f}_D^{(V)}}{\left(\Delta f_D^{(V)}\right)^2}\right), \tag{3.65}$$

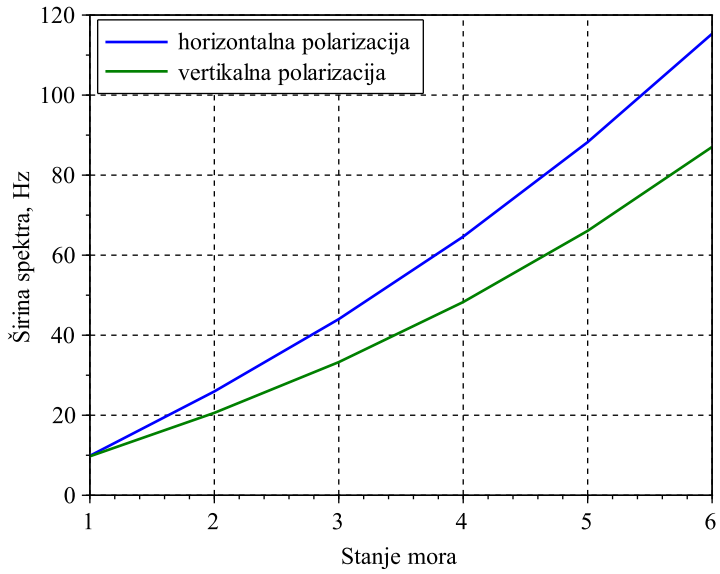
$$S(f_D)^{(H)} = c^{(H)} \exp\left(-\frac{f_D - \bar{f}_D^{(H)}}{\left(\Delta f_D^{(H)}\right)^2}\right), \tag{3.66}$$

a prema rezultatima mjerenja [67], porastom upadnog kuta raste vrijednost parametra $c^{(\cdot)}$, središnja frekvencija $\bar{f}_D^{(V)}$ približno je 0 Hz, a $\bar{f}_D^{(H)}$ pada sa 75 Hz (za upadni kut 15°) na 20 Hz (za kut 45°). Dok je uz porast upadnog kuta širina spektra $\Delta f_D^{(V)}$ relativno nepromjenjiva, $\Delta f_D^{(H)}$ pada, da bi iznad približno 40° postala jednaka $\Delta f_D^{(V)}$. Nadalje, uočena je tendencija ovisnosti širine spektra o visini valova i brzini vjetra, tako da je funkcionalna ovisnost, za frekvencijski pojas X i nepotpuno razvijeno more, dana s

$$\Delta f_D^{(V)} = 0{,}67 + 2{,}96\, v_w + 5{,}93\, H_{1/3}, \tag{3.67}$$

$$\Delta f_D^{(H)} = -4 + 4{,}57\, v_w + 6{,}44\, H_{1/3}. \tag{3.68}$$

Uvrštenjem ovisnosti brzine vjetra i značajne visine valova (3.6) te ovisnost visina valova o stanju mora (3.19), proizlaze očekivane vrijednosti za Jadran i upadni kut 30° kako je ilustrirano slikom 3.7.



Slika 3.7. Širine Gaussovih spektara (3.65) i (3.66) za upadni kut 30° i frekvencijski pojas X, kako se očekuje za Jadransko more.

U [207] su prepoznata tri mehanizma raspršenja: Braggovo raspršenje, raspršenje od kresta valova te igličasti odjeci. Pri Braggovom je raspršenju snaga odjeka jača pri vertikalnoj nego horizontalnoj polarizaciji, s vršnom frekvencijom spektra koja odgovara zbroju brzine Braggovih raspršivača v_{D_B} te pomaka i orbitalne brzine v_{D_d} odgovarajućih gravitacijskih valova. Vrijeme korelacije reda je nekoliko desetaka milisekundi. Snaga raspršenja od valnih kresti otprilike je jednaka za obje polarizacije, izrazitija je od Braggovog raspršenja i vremena je korelacije nekoliko milisekundi. Dok događaj kreste vala traje do nekoliko sekundi, značajke raspršene elektromagnetske energije slične su šumu, tako da vrijeme korelacije iznosi nekoliko milisekundi. Dopplerov spektar je širok, sa središnjom frekvencijom koja je veća od one Braggovog spektra i koja otprilike odgovara faznoj brzini dugih gravitacijskih valova. Igličasti odjeci izraziti su pri horizontalnoj polarizaciji, s vremenom trajanja desetine sekunde, a pri vertikalnoj polarizaciji gotovo da i ne postoje. Odgovarajući Dopplerov pomak izraženiji je nego Braggov. Na temelju navedenih mehanizama raspršenja, u [206] je spektar (3.64) pojednostavnjen zbrojem odgovarajućih Gaussovih spektara: Braggovog raspršenja (označenog indeksom B), raspršenja od kresta valova (označenog indeksom w) te igličastih odjeka (označenog indeksom s),

$$\begin{aligned} S(f_D)^{(V)} &= S_B(f_D)^{(V)} + S_w(f_D) \\ &= c_B^{(V)} \exp\left(-\frac{\left(f_D - \frac{2}{\lambda_{EM}} \left(v_{D_B} + v_{D_d} \right) \right)^2}{\Delta f_{D_B}^2} \right) + c_w \exp\left(-\frac{\left(f_D - \sqrt{\frac{g}{\pi \lambda_{EM}}} \right)^2}{\Delta f_{D_w}^2} \right) \end{aligned} \tag{3.69}$$

za vertikalnu, odnosno

$$\begin{aligned} S(f_D)^{(H)} &= S_B(f_D)^{(H)} + S_w(f_D) + S_s(f_D) \\ &= c_B^{(H)} \exp\left(-\frac{\left(f_D - \frac{2}{\lambda_{EM}}\left(v_{D_B} + v_{D_d}\right)\right)^2}{\Delta f_{D_B}^2} \right) + c_w \exp\left(-\frac{\left(f_D - \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\pi\lambda_{EM}}}\right)^2}{\Delta f_{D_w}^2} \right) + \\ &\quad + c_s \exp\left(-\frac{\left(f_D - \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\pi\lambda_{EM}}}\right)^2}{\Delta f_{D_s}^2} \right), \end{aligned} \tag{3.70}$$

za horizontalnu polarizaciju. Parametri spektra $c_B^{(\cdot)}$ i $c_{(\cdot)}$ (spektralne amplitude ovisne o polarizaciji i mehanizmu raspršenja), $v_{D_{(\cdot)}}$ (brzine i pomaci Braggovih raspršivača) te $\Delta f_{D_{(\cdot)}}$ (širine spektara), određeni su optimizacijom s obzirom na podatke mjerenja.

U analizi pojave igličastih odjeka [162] pri visokim upadnim kutovima (tipično poviše 15°), utvrđeno je da pretpostavke o sličnosti spektra horizontalne i vertikalne polarizacije zbog raspršenja od kresta valova i nepostojanju igličastih odjeka pri vertikalnoj polarizaciji nisu točne, pa je stoga u [67] model ovojnice spektra (3.69) i (3.70) modificiran tako da su komponente zbog igličastih odjeka i zbog kresta valova objedinjene, odnosno

$$\begin{aligned} S(f_D)^{(V)} &= S_B^{(V)} + S_{w,s}^{(V)} \\ &= c_B^{(V)} \exp\left(-\frac{\left(f_D - \frac{2}{\lambda_{EM}}\left(v_{D_B} + v_{D_d}\right)\right)^2}{\Delta f_{D_B}^2} \right) + c_{w,s}^{(V)} \exp\left(-\frac{\left(f_D - \bar{f}_{D_{w,s}}\right)^2}{\Delta f_{D_{w,s}}^2} \right) \end{aligned} \tag{3.71}$$

za vertikalnu te

$$\begin{aligned} S(f_D)^{(H)} &= S_B^{(H)} + S_{w,s}^{(H)} \\ &= c_B^{(H)} \exp\left(-\frac{\left(f_D - \frac{2}{\lambda_{EM}}\left(v_{D_B} + v_{D_d}\right)\right)^2}{\Delta f_{D_B}^2} \right) + c_{w,s}^{(H)} \exp\left(-\frac{\left(f_D - \bar{f}_{D_{w,s}}\right)^2}{\Delta f_{D_{w,s}}^2} \right) \end{aligned} \tag{3.72}$$

za horizontalnu polarizaciju. Kao i za ovojnice spektra opisane s (3.69) i (3.70), parametri $c_{(\cdot)}^{(\cdot)}$, $\Delta f_{D_{(\cdot)}}$, $\bar{f}_{D_{w,s}}$ te $v_{D_{(\cdot)}}$ određeni su optimizacijom s obzirom na podatke mjerenja. Rezultati mjerenja u X pojasu [67] pokazuju da je vrijednost koeficijenta $c_B^{(\cdot)}$ za otprilike 5 dB do 10 dB veća pri vertikalnoj polarizaciji te da i $c_B^{(\cdot)}$ i $c_{w,s}^{(\cdot)}$ pokazuju bimodalnu sinusnu ovisnost o smjeru vjetra, na način da je prvi maksimum u smjeru protiv vjetra, drugi u smjeru niz vjetar i minimum u smjeru bočno u odnosu na vjetar, što je u skladu s mjerenjima radarskog presjeka u odjeljku 3.2.1. Vrijednost koeficijenta ne-Braggovog raspršenja $c_{w,s}^{(\cdot)}$ za nekoliko je dB veća pri

horizontalnoj polarizaciji, a spektri pokazuju bimodalni karakter, osobito za smjer protiv vjetra. Dok je $\bar{f}_{D_B}$ relativno neovisna o smjeru vjetra te iznosi 0 Hz, $\bar{f}_{D_{w,s}}$ pokazuje sinusnu ovisnost o smjeru vjetra, s maksimumom od 50 Hz u smjeru protiv vjetra i minimumom od -50 Hz u smjeru niz vjetar. Širina spektra Δf_{D_B} također je relativno neovisna o smjeru vjetra i kreće se u granicama od približno 20 Hz do približno 25 Hz, a $\Delta f_{D_{w,s}}$ je najveća u smjeru protiv vjetra, pri čemu iznosi 100 Hz, a minimalna u smjeru niz vjetar, vrijednosti 70 Hz.

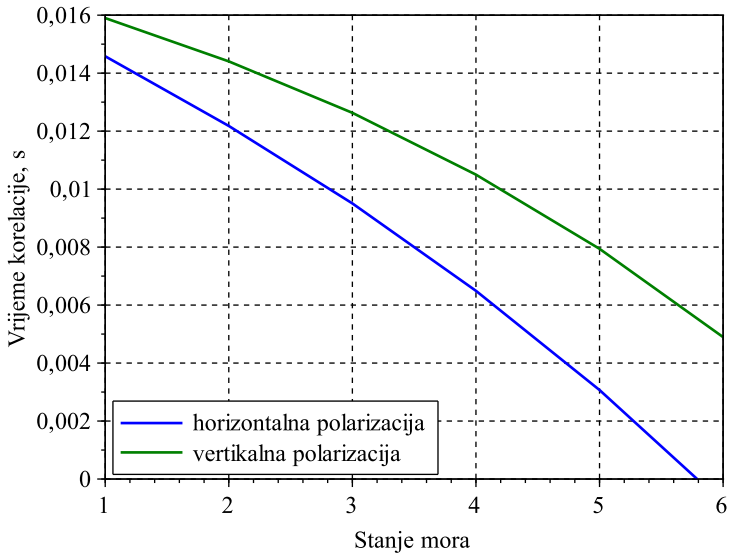
3.2.4. Vremenska korelacija

Na temelju mjerenja Dopplerovog spektra unutar ćelije razlučivosti, u frekvencijskom pojasu X i za visoke upadne kutove (od 15° do 45°) te njegovoj inverznoj Fourierovoj transformaciji, u [67] nije opservirana tendencija ovisnosti vremena korelacije o smjeru vjetra i upadnom kutu, ali jest za visinu valova i brzinu vjetra, pa je u istom radu predložena ovisnost vremena korelacije, temeljena na modelima spektra (3.69) i (3.70), kao

$$\rho^{(V)} = 0{,}01713 - 0{,}4 \times 10^{-3} v_w - 0{,}91 \times 10^{-3} H_{1/3}, \tag{3.73}$$

$$\rho^{(H)} = 0{,}01667 - 0{,}69 \times 10^{-3} v_w - 0{,}87 \times 10^{-3} H_{1/3}, \tag{3.74}$$

što je model pogodan za nepotpuno razvijeno more. Vrijeme korelacije koje se očekuje za Jadransko more, prema ovom modelu proizlazi uvrštenjem ovisnosti brzine vjetra i značajne visine valova o stanju mora (3.18) i (3.19), što je ilustrirano slikom 3.8.



Slika 3.8. Ovisnost vremena korelacije o stanju mora, za frekvencijski pojas X i visoke upadne kutove (od 15° do 45°), kako se očekuje za Jadransko more.

Slični rezultati vremena korelacije, ali na temelju Pearsonovog koeficijenta autokorelacije između uzoraka unutar volumena valjanosti te za male upadne kutove (reda veličine stupnja) i frekvencijski pojas X (pri čemu nije naznačena vrsta polarizacije), dani su u [152], gdje je vrijeme korelacije za stanje mora 2 približno 10 ms te u [157], gdje je za vrijeme korelacije također uočena tendencija smanjenja sa stanjem mora. Tako npr., za potpuno razvijena stanja mora 2 i 5, vremena korelacije iznose približno 10 ms, odnosno 5 ms.

Analiza vremenske korelacije za visoke upadne kutove (od 45° pa do 80°), provedena je u [5], na temelju Pearsonovog koeficijenta kratkoročne i dugoročne autokorelacije te za vremensku (azimutnu) i prostornu (radijalnu) komponentu. Dok je azimutni koeficijent korelacije određen skupom azimutno susjednih uzoraka, radijalni koeficijent određen je skupom radijalno susjednih uzoraka. Kratkoročni azimutni i radijalni koeficijent autokorelacije skupa od desetak uzoraka iznosi približno 4 ms, što je nešto manje nego u objavljenoj literaturi, ali uzrok vjerojatno leži u visokom upadnom kutu, većoj razlučivosti senzora i pokretnoj radarskoj platformi [5]. Analiza kratkoročnog koeficijenta autokorelacije uz par desetaka uzoraka, otkriva međusobnu nekoreliranost uzoraka, a analiza dugoročnog koeficijenta uz broj uzoraka reda veličine tisuću, strukturu morske površine. Tako azimutna korelacija otkriva valni period, a radijalna valu duljinu. Pri tome je azimutna korelacija za horizontalnu polarizaciju nešto izraženija od one za vertikalnu, a karakter korelacije otkriva jednu sporopromjenjivu komponentu. Radijalne korelacije vertikalne i horizontalne polarizacije istog su reda veličine, ali je u horizontalnoj, za razliku od vertikalne, izražena i brzopromjenjiva komponenta. Posebno, analiza kratkoročne i dugoročne radijalne korelacije otkriva kompozitni karakter morske površine, zbog toga što kratkoročna korelacija pokazuje međusobnu nekoreliranost uzoraka, a dugoročna stanovitu (premda ne i značajnu) koreliranost, što je u skladu s teorijom kompozitne morske površine, vidi odjeljke 3.2.1 i 3.2.2.

3.2.5. Polarimetrijske značajke

Poznavanje polarimetrijskih značajki morske površine i cilja može pomoći u njihovom međusobnom razlučivanju, jer međudjelovanje upadnog elektromagnetskog vala i raspršivača (morska površina, cilj), dovodi do promjene u polarizaciji reflektiranog vala, pri čemu intenzitet promjene ovisi o vrsti raspršivača.

Ovisnost reflektiranog električnog polja opisana je kao [208]

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_{EM}r\right)}{r}\boldsymbol{\mathcal{S}}\,\boldsymbol{e}_i, \tag{3.75}$$

pri čemu $\boldsymbol{e}_i$ i $\boldsymbol{e}_r$ označavaju upadno i reflektirano električno polje, r je udaljenost između izvora (antene) i raspršivača, k_{EM} je valni broj, i $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ je matrica raspršenja. Jednadžba (3.75) može se izraziti preko komponenti vertikalne (označene indeksom (V)), horizontalne (označene indeksom

(H)) te križne polarizacije (označene indeksom $(\times)$), kao

$$\begin{bmatrix} e_r^{(H)} \\ e_r^{(V)} \end{bmatrix} = \frac{\exp(\mathrm{i}k_{EM}r)}{r} \begin{bmatrix} s^{(H)} & s^{(\times)} \\ s^{(\times)} & s^{(V)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i^{(H)} \\ e_i^{(V)} \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

za monostatički radar, jer su zbog teorema recipročnosti, vandijagonalni elementi međusobno jednaki. Elementi matrice raspršenja određeni su radarskim presjekom raspršivača,

$$s^{(H)} = c\exp\left(\phi^{(H)}\right)\sqrt{\eta_0^{(H)}}, \tag{3.77}$$

$$s^{(V)} = c\exp\left(\phi^{(V)}\right)\sqrt{\eta_0^{(V)}}, \tag{3.78}$$

$$s^{(\times)} = c\exp\left(\phi^{(\times)}\right)\sqrt{\eta_0^{(\times)}}, \tag{3.79}$$

pri čemu je c konstanta i $\phi^{(\cdot)}$ odgovarajući fazni kut. Kada je raspršivač raspodijeljen, poput morske površine, elementi matrice raspršenja stohastičkog su karaktera, ali usrednjavanje u ovom slučaju ne pruža nikakva saznanja o njihovim korelacijskim značajkama. Stoga je za proces raspršenja potrebno primijeniti drugačiji opis, poput matrice koherentnosti, definirane kao uzoračko očekivanje vektorskog umnoška Paulijevih vektora raspršenja [209],

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \left\langle \left\{ \boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{k}_i^{\mathrm{H}}, i = 1,\ldots,N \right\} \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{k}_i^{\mathrm{H}} \tag{3.80}$$

pri čemu je Paulijev vektor jednak

$$\boldsymbol{k}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} s_i^{(H)} + s_i^{(V)} & s_i^{(H)} - s_i^{(V)} & 2s_i^{(\times)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad i = 1,\ldots,N, \tag{3.81}$$

gdje je s N označen broj uzoraka raspršivača, uobičajeno iz susjednih ćelija razlučivosti.

Metoda dekompozicije $H - \bar{\alpha}$ primjenjuje parcijalnu koherentnu dekompoziciju za razlučivanje i klasifikaciju različitih mehanizama raspršenja [210]. Metodom se provodi dekompozicija matrice koherencije kao

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}, \tag{3.82}$$

pri čemu je $\boldsymbol{U}$ unitarna matrica sa stupcima koji odgovaraju ortonormiranim svojstvenim vektorima matrice $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, odnosno

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_3) \\ \sin(\alpha_1)\cos(\beta_1)\exp(\mathrm{i}\delta_1) & \sin(\alpha_2)\cos(\beta_2)\exp(\mathrm{i}\delta_2) & \sin(\alpha_3)\cos(\beta_3)\exp(\mathrm{i}\delta_3) \\ \sin(\alpha_1)\sin(\beta_1)\exp(\mathrm{i}\gamma_1) & \sin(\alpha_2)\sin(\beta_2)\exp(\mathrm{i}\gamma_2) & \sin(\alpha_3)\sin(\beta_3)\exp(\mathrm{i}\gamma_3) \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

Svojstvene vrijednosti $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ matrice koherencije $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ posjeduju sve informacije sadržane u matrici. Rang matrice koherencije čestičnog raspršivača uvijek je jedan, pa stoga matrica $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ potpuno opisuje raspršenje, a za raspodijeljene raspršivače, poput morske površine, rang matrice koherencije općenito je (za monostatički radar) tri te matrica koherencije opisuje dominantni mehanizam raspršenja. Tako je pomoću polarimetrijskih podataka i primjenom metode dekompozicije matrice koherencije moguće provesti klasifikaciju (razlučivanje) s obzirom na elementarne mehanizme koji su uzrok raspršenju. U matrici (3.83) postoji samo osam nezavisnih parametara, jer nisu svi $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, i = 1, \ldots, 3$, međusobno nezavisni [5, 211]. Dekompozicija (3.82) predstavlja zbroj po determinističkim izvorima raspršenja, pri čemu je snaga svakog jednaka svojstvenoj vrijednosti $\lambda_i, i = 1, \ldots, 3$, što znači da je ukupna snaga raspršenja jednaka $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ [209]. Dok postojanje samo jedne svojstvene vrijednosti koja je veća od nule ukazuje na čestični cilj, međusobno jednake svojstvene vrijednosti ukazuju na slučajno raspodijeljeni cilj jer je doprinos svih mehanizama raspršenja jednak.

Polarimetrijska entropija raspršenja definirana je kao

$$H = -\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\log_3\big(P(A_i)\big), \quad (3.84)$$

pri čemu je vjerojatnost pojave svakog od mehanizma raspršenja $A_i, i = 1, \ldots, 3$, dana s

$$P(A_i) = \frac{\lambda_i}{\sum_{\iota=1}^{3}\lambda_\iota}. \quad (3.85)$$

Entropija je mjera nereda u sustavu, a u dekompoziciji $H - \bar{\alpha}$ poprima vrijednost između dva ekstrema, nule i jedinice. Kada je nula, proces raspršenja je nepolarizirani proces, potpuno opisan samo jednom matricom raspršenja, ranga jedan, tako da matrica koherentnosti ima samo jednu svojstvenu vrijednost koja je veća od nule. U drugom ekstremu, proces raspršenja je šumni proces i reflektirani je elektromagnetski val, neovisno o polarizaciji upadnog vala, potpuno depolariziran.

Parametar

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)\alpha_i \quad (3.86)$$

interni je stupanj slobode te se može primijeniti u opisu mehanizma raspršenja. Tako je za $\bar{\alpha} = 0$, mehanizam raspršenja izotropna površina (pojam izotropni podrazumijeva $|s^{(V)}| = |s^{(V)}|$), za

$\bar{\alpha} = 45°$ i $\bar{\alpha} = 90°$, izotropni dihedral, u intervalu $(0°, 45°)$, mehanizmi raspršenja su anizotropne površine, a u intervalu $(45°, 90°)$, anizotropni dihedrali [209].

Klasifikacijski prostor prema metodi dekompozicije $H - \bar{\alpha}$ [211] prikazan je slikom 3.9, a područje ostvarivosti opisano je s

$$H_1 = -\frac{1}{1+2c}\log_3\left(\frac{c^{2c}}{(1+2c)^{1+2c}}\right), \tag{3.87}$$

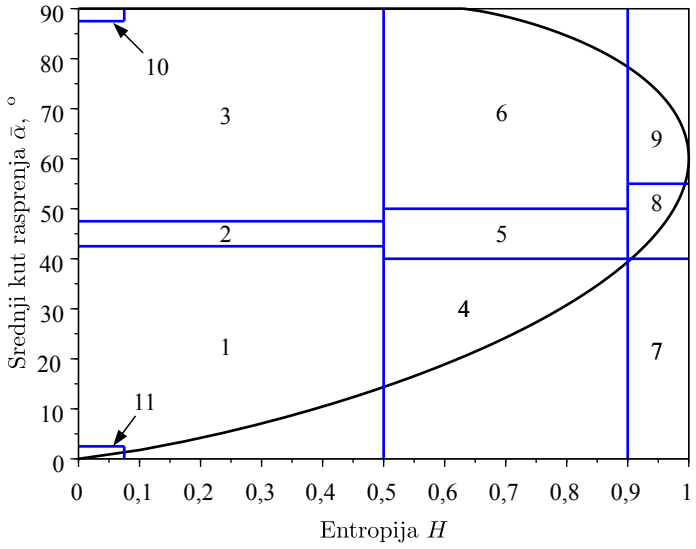
$$\bar{\alpha}_1 = \frac{c\pi}{1+2c} \tag{3.88}$$

za $0 \leq c \leq 1$ i

$$H_2 = \begin{cases} -\frac{1}{1+2c}\log_3\left(\frac{(2c)^{2c}}{(1+2c)^{1+2c}}\right), & 0 \leq c \leq 1/2 \\ -\frac{1}{1+2c}\log_3\left(\frac{(2c-1)^{2c-1}}{(1+2c)^{1+2c}}\right), & 1/2 < c \leq 1 \end{cases}, \tag{3.89}$$

$$\bar{\alpha}_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \leq c \leq 1/2 \\ \frac{\pi}{1+2c}, & 1/2 < c \leq 1 \end{cases} \tag{3.90}$$

[209]. Područje označeno s 1 pripada mehanizmu površinskog raspršenja niske entropije, poput Braggova površinskog raspršenja, geometrijskog i optičkog površinskog raspršenja te zrcalnog raspršenja koje ne uključuje faznu inverziju između kanala horizontalne i vertikalne polarizacije. Raspršenja od mora male valovitosti, sfere i ravne površine, također pripadaju ovom području. Području 2 pripada dipolno raspršenje niske entropije, s izrazitom korelacijom među mehanizmima raspršenja i velikom amplitudnom neravnotežom između kanala vertikalne i horizontalne polarizacije, poput raspršenja izoliranog dipola ili Braggove površine uz mali kut upada. Širina ove zone određena je kvalitetom kalibracije koja opet ovisi o mogućnosti radarskog mjerenja omjera horizontalnog i vertikalnog kanala. Područje 3 pripada parnom višestrukom raspršenju niske entropije, poput raspršenja od metalnih dihedrala. Područja 4, 5 i 6 pripadaju mehanizmima umjerene entropije gdje je dominantni raspršivač površina, dipol te višestruko raspršenje. Zbog povećane hrapavosti ili propagacije sekundarnog vala, entropija ovih područja je veća nego u područjima 1, 2 i 3. Pri visokim entropijama ne može se razlikovati površinsko raspršenje, kako je i naglašeno područjem 7 koje se nalazi van područja ostvarivosti. Područja 8 i 9 su područja mehanizama raspršenja visokih entropija, gdje je još uvijek moguće razlučivanje mehanizma dvostrukog raspršenja, poput oblaka anizotropnih igličastih čestica. U ekstremnom slučaju područja 8, raspršenje je šum, bez polarizacijske ovisnosti. Kako entropija raste, raspon mogućih mehanizama raspršenja pada i njihovo je razlučivanje iz polarimetrijskih opservacija sve teže [209].



Slika 3.9. Klasifikacijski prostor određen metodom dekompozicije $H - \bar{\alpha}$, pri čemu 1 označava područje površinskog raspršenja niske entropije, 2 područje dipolnog raspršenja niske entropije, 3 parno višestruko raspršenje niske entropije, 4 površinsko raspršenje umjerene entropije, 5 raspršenje od vegetacije umjerene entropije, 6 višestruko raspršenje umjerene entropije, 7 površinsko raspršenje visoke entropije, 8 raspršenje od vegetacije visoke entropije, 9 višestruko raspršenje visoke entropije, 10 dihedralno raspršenje i 11 trihedralno raspršenje [5].

Rezultati mjerenja raspršenja od morske površine pri visokim upadnim kutovima (od 15° do 45°) [5], pokazuju da je dominantni mehanizam raspršenja površinsko, odnosno Braggovo raspršenje niske entropije, iako su uočeni i drugi mehanizmi, poput dipolnog i višestrukog raspršenja niske entropije te raspršenja umjerene entropije. Igličasti odjeci vertikalne polarizacije klasificirani su u područje površinskog raspršenja niske entropije, što ukazuje na samo jedan dominantni raspršivač, a za one horizontalne polarizacije, entropije je šira (ali još uvijek u području niske entropije), ukazujući na doprinos više od jednog raspršivača i kompleksniju prirodu odjeka.

U [5], na polarimetrijske je podatke primijenjena metoda dekompozicije s obzirom na četiri osnovna mehanizma raspršenja: dvostrukog, Braggovog, neparnog višestrukog i križnog raspršenja, pri čemu je, za ciljeve poput brodica izrađenih od drva, aluminija i staklene vune, utvrđen mehanizam dvostrukog raspršenja kao dominantan. U [212], primjenom polarizacijskog otiska, definiranog kao trodimenzionalni prikaz snage odjeka ovisno o ekscentricitetu i nagibu polarizacijske elipse, pokazano je da se komponentom dvostrukog raspršenja, linearnom polarizacijom nagiba 45°, desnom kružnom i horizontalnom polarizacijom, redom ostvaruju najveći omjeri snage signala prema smetnji. Efekt je objašnjen činjenicom da je raspršenje morske površine dominantno Braggovo, uz zanemariv udio komponente dvostrukog raspršenja koje je opet dominantno raspršenje za ciljeve, što u konačnici rezultira, u odnosu na ostale polarizacije, najvećim omjerom snage signala prema smetnji. Iz polarimetrijskog otiska Braggovog raspršenja, vidljivo je da linearna polarizacija nagiba 45°, desna kružna i horizontalna polarizacija,

potiskuju komponentu Braggovog raspršenja otprilike jednako i bez gušenja komponente dvostrukog raspršenja, pa su stoga omjeri snage signala prema smetnji za ove polarizacije visoki, ali ipak nešto manji nego primjenom komponente dvostrukog raspršenja.

3.3. Smetnja mora kao stohastički proces

Statističke značajke smetnje opisane u odjeljku 3.2 samo su manifestacija procesa, bez uvida u karakter mehanizma koji ga pokreće. Iskorak prema fizikalnom opisu procesa svakako su modeli amplitudne K- i KA-razdiobe, izvedeni pod realnom hipotezom konačnog broja raspršivača unutar senzorskog volumena razlučivosti. Još jedan iskorak predstavlja opis procesa u smislu njegovog dinamičkog modela te ovisnosti o stanju mora, u širem smislu o brzini vjetra i značajnoj visini valova. Između ostalog, poznavanje dinamike procesa korisno je pri generiranju sintetičkih podataka radi verifikacije dijelova radarskog sustava osjetljivih na smetnju, poglavito procesa detekcije i pridruživanja, čija učinkovitost izravno utječe na kvalitetu procesa praćenja.

U [97], analizom podataka mjerenja radara IPIX, u frekvencijskom području X te pri malim (ispod nekoliko stupnjeva) upadnim kutovima, provedeno je istraživanje karaktera dinamike procesa smetnje te je utvrđeno postojanje mehanizma amplitudne i frekvencijske modulacije. U radu je pokazana, pomoću Mann-Whitneyevog testa sume rangova i nulte hipoteze da podaci mjerenja i podaci linearnog surogatskog sustava istih vrijednosti korelacije pripadaju istoj populaciji, nelinearnost procesa, k tome ovisna i o stanju mora. Vrijednost testa manja od -3 smatra se jakim pokazateljom nelinearnosti, a u radu je ova vrijednost zabilježena pri stanju mora 4 prema WMO ($H_{1/3} = 1{,}82$ m) te pri nižem stanu mora 3 ($H_{1/3} = 0{,}8$ m), ali samo ako je smjer valova prema radarskom senzoru. Pri stanju mora 3 i smjeru valova od radarskog senzora, testna statistika veća je od -3 te se proces smatra linearnim. Smatra se da nelinearnost potječe od kontinuirane frekvencijske modulacije zbog cikličkog gibanja raspršivača na morskoj površini te da općenito raste s porastom stanja mora. Ovoj pojavi treba pridodati i kontinuiranu amplitudnu modulaciju za koju se smatra da nastaje zbog stalne i neprekidne promjene nagiba morske površine, uzrokovane dugim gravitacijskim valovima. U istom su radu testirani podaci mjerenja s obzirom na deterministički kaos kao pokretački mehanizam procesa. Pronađene vrijednosti korelacijske dimenzije i Ljapunovljevih eksponenata (temeljne mjere za karakterizaciju kaosa) su invarijantne i ne razlikuju se bitno od vrijednosti za surogatski stohastički proces. U zaključku rada smatra se da, iako je sustav nelinearan te korelacijske dimenzije i Ljapunovljevi eksponenti zadovoljavaju uvjet kaotičnosti, se ne može sa sigurnošću potvrditi deterministički kaos kao pokretački mehanizam procesa smetnje, jer postojeći algoritmi nisu u mogućnosti razlučiti procesni (dinamički) šum od neizbježnog šuma mjerenja i tako potvrditi kaotičnost.

Nasuprot teoriji determinističkog kaosa kao pokretača smetnje mora, na temelju radova [145, 146] gdje je pružena teorijska podloga za dinamiku difuznog procesa sa svojstvom amplitudne K-razdiobe, u radu [147] je povezana evidentna nelinearnost procesa smetnje mora [97] s teorijskom podlogom u vidu stohastičkih diferencijalnih jednadžbi. Amplitudna K-razdioba rezultat je modela prema kojem je broj raspršivača $N(t)$ unutar senzorske ćelije razlučivosti konačan i vremenski promjenljiv, raspodijeljen prema negativnoj binomnoj razdiobi sa srednjom vrijednošću $\bar{N}$ koja teži beskonačnosti. U tom je slučaju kompleksna amplituda odjeka [146]

$$\begin{aligned}\zeta(t) = \zeta_I(t) + \mathrm{i}\zeta_Q(t) &= \sqrt{\beta} \lim_{\bar{N}(t)\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{N}}} \sum_{j=1}^{N(t)} \exp\left(\mathrm{i}\phi_j(t)\right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{\beta}{2}} \lim_{N(t)\to\infty} \left(\sqrt{\frac{N(t)}{\bar{N}}} \sqrt{\frac{2}{N(t)}} \sum_{j=1}^{N(t)} \exp\left(\mathrm{i}\phi_j(t)\right) \right) \\ &= \sqrt{\eta(t)}\zeta_0(t), \end{aligned} \tag{3.91}$$

pri čemu je β parametar skaliranja, $\phi_j(t)$ fazni kut raspršivača jednoliko raspodijeljen unutar intervala $[0, 2\pi)$, a s

$$\left\{ \eta(t) = \frac{\beta}{2} \lim_{N(t)\to\infty} \left(\frac{N(t)}{\bar{N}} \right), t \geq t_0 \right\} \tag{3.92}$$

i

$$\left\{ \zeta_0(t) = \lim_{N(t)\to\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{N(t)}} \sum_{j=1}^{N(t)} \exp\left(\mathrm{i}\phi_j(t)\right) \right), t \geq t_0 \right\} \tag{3.93}$$

su označeni stohastički procesi radarskog presjeka i normirane kompleksne amplitude. Potonji je kompleksni Gaussov proces s varijancom realne (fazne) i imaginarne (kvadraturne) komponente 1, tako da je $E\left(|\zeta_0(t)|^2\right) = 2$ (vidi (3.32) uz $\eta = 1$). Stohastička diferencijalna jednadžba za radarski presjek (dugoročne fluktuacije) prema [146] modificirana je parametrom skaliranja β, tako da je asimptotska razdioba $\lim_{t\to\infty}\left(p\big(\eta(t)\big)\right)$ jednaka razdiobi (3.31), a sam stohastički proces dan je s

$$\mathrm{d}\eta(t) = \mathcal{A}\frac{\beta}{2}\left(\nu - \frac{2\eta(t)}{\beta}\right)\mathrm{d}t + \sqrt{\mathcal{A}\beta\eta(t)}\,\mathrm{d}\beta_x(t), \tag{3.94}$$

gdje je $\{\beta_x(t), t \geq t_0\}$ Brownovo gibanje, odnosno Wienerov proces. Parametar $\mathcal{A}$ ima dimenziju frekvencije te ovisi samo o statističkim svojstava morske površine [147]. Normirani proces kratkoročnih fluktuacija $\zeta_0(t)$ dan je s [146]

$$\mathrm{d}\zeta_0(t) = -\frac{1}{2}\mathcal{B}\zeta_0(t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\mathcal{B}}\mathrm{d}\beta_y(t), \tag{3.95}$$

pri čemu $\mathrm{d}\beta_y(t)$ označava kompleksni proces inkrementa Brownovog gibanja sa svojstvom da je $E\left(|\mathrm{d}\beta_y(t)|^2\right) = \mathrm{d}t$ i $E\left(\mathrm{d}\beta_y(t)^2\right) = 0$. Konstanta $\mathcal{B}$ ima dimenziju frekvencije i razmjerna je koeficijentu propagacije elektromagnetskog vala, pri čemu vrijedi da je $\mathcal{A} \ll \mathcal{B}$. Primjenom

Itôve formule na ovisnost $r(t) = \sqrt{\eta(t)}$, proizlazi

$$\mathrm{d}r(t) = \mathcal{A}\frac{\beta}{2}\left(\frac{2\left(\nu - \frac{2\eta(t)}{\beta}\right) - 1}{4r(t)}\right)\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{\mathcal{A}\beta}{4}}\mathrm{d}\beta_x(t) \tag{3.96}$$

i umnožak $\mathrm{d}\big(r(t)\zeta_0(t)\big) = r(t)\mathrm{d}\zeta_0(t) + \zeta_0(t)\mathrm{d}r(t) + \mathrm{d}r(t)\,\mathrm{d}\zeta_0(t)$, pa je stohastička diferencijalna jednadžba kompleksne amplitude primjenom (3.95) i (3.96) [146]

$$\frac{\mathrm{d}\zeta(t)}{\zeta(t)} = -\frac{1}{2}\mathcal{B}\mathrm{d}t + \frac{\sqrt{2\mathcal{B}}}{\zeta_0(t)}\mathrm{d}\beta_y(t) + \mathcal{A}\frac{\beta}{2}\left(\frac{2\left(\nu - \frac{2\eta(t)}{\beta}\right) - 1}{4\eta(t)}\right)\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{\mathcal{A}\beta}{4\eta(t)}}\mathrm{d}\beta_x(t), \tag{3.97}$$

jer je $\mathrm{d}r(t)\,\mathrm{d}\zeta_0(t) = 0$ zbog toga što vrijedi $\mathrm{d}\beta_x\,\mathrm{d}\beta_y = 0$. Na sličan se način nalazi stohastička diferencijalna jednadžba intenziteta $\psi(t) = |\zeta(t)|^2$. Prema [146], uz primjenu (3.95) i (3.96) koja uzima u obzir parametar skaliranja, proizlazi

$$\mathrm{d}\psi(t) = \left(\mathcal{B}\big(2\eta(t) - \psi(t)\big) + \frac{\mathcal{A}\beta\,\psi(t)\left(\nu - \frac{2\eta(t)}{\beta}\right)}{2\eta(t)}\right)\mathrm{d}t + \sqrt{4\mathcal{B}\psi(t)\eta(t) + \frac{\mathcal{A}\beta\,\psi(t)^2}{\eta(t)}}\mathrm{d}\beta_\psi(t), \tag{3.98}$$

pri čemu je za član $|\mathrm{d}\psi(t)|^2$, koji nastaje provedbom Itôve formule na inkrement intenziteta $\mathrm{d}\psi(t)$, primijenjena stohastička volatilnost jednadžbe (3.97), odnosno

$$|\mathrm{d}\psi(t)|^2 = \left(2\mathcal{B}\eta(t) + \frac{\mathcal{A}\beta\,\psi(t)}{4\eta(t)}\right)\mathrm{d}t. \tag{3.99}$$

Inkrementi Brownovog gibanja $\{\mathrm{d}\beta_\psi(t), t \geq t_0\}$ povezani su s Wienerovim procesom $\{\beta_x(t), t \geq t_0\}$ i $\{\beta_y(t), t \geq t_0\}$ na način da je provedena zamjena kompleksnog procesa

$$\left\{\zeta_0(t)^*\mathrm{d}\beta_y(t) + \zeta_0(t)\mathrm{d}\beta_y(t)^*, t \geq t_0\right\} = \left\{\sqrt{\frac{2\psi(t)}{\eta(t)}}\mathrm{d}\beta_\phi(t), t \geq t_0\right\}, \tag{3.100}$$

pri čemu su $\{\mathrm{d}\beta_\phi(t), t \geq t_0\}$ inkrementi Brownovog gibanja procesa slučajne šetnje faze $\phi_j(t)$ te da je

$$\sqrt{4\mathcal{B}\psi(t)\eta(t) + \frac{\mathcal{A}\beta\,\psi(t)^2}{\eta(t)}}\,\mathrm{d}\beta_\psi(t) = \sqrt{4\mathcal{B}\psi(t)\eta(t)}\,\mathrm{d}\beta_\phi(t) + \psi(t)\sqrt{\frac{\mathcal{A}\beta}{\eta(t)}}\,\mathrm{d}\beta_x(t). \tag{3.101}$$

Autokorelacija intenziteta dana je u [146], pri čemu je, radi jednostavnosti, parametar $\mathcal{B} = 1$, što implicira $\mathcal{A} \ll 1$ u scenariju raspršenja pri mikrovalnim frekvencijama, a uvažavajući parametar skaliranja β, autokorelacija je

$$\rho(t-t_0)=E\big(\psi(t)\psi(t_0)\big)=\beta^2\Big(\nu+\exp\big(-\mathcal{A}(t-t_0)\big)\Big)\Big(1+\exp\big(-(t-t_0)\big)\Big),\ t\geq t_0 \quad (3.102)$$

te Dopplerov spektar

$$S(\omega_D)=2\beta\Re\left(\frac{{}_3F_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\frac{1}{2}+\mathrm{i}(\omega_D-\bar{\omega}_D)}{\mathcal{A}};\nu,1+\frac{\frac{1}{2}+\mathrm{i}(\omega_D-\bar{\omega}_D)}{\mathcal{A}};1\right)}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,(\omega_D-\bar{\omega}_D)}\right)\frac{\Gamma\big(\nu+\frac{1}{2}\big)^2}{\Gamma(\nu)^2}, \quad (3.103)$$

Fourierova transformacija funkcije autokorelacije amplitude

$$E\big(\zeta(t)\zeta(t_0)^*\big)=\beta\frac{\Gamma\big(\nu+\frac{1}{2}\big)^2}{\Gamma(\nu)^2}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\nu;\exp(-\mathcal{A}t)\right)\exp\left(-\frac{|t|}{2}-\mathrm{i}\bar{\omega}_D t\right), \quad (3.104)$$

gdje $\Re(\cdot)$ označava realni član kompleksnog broja, ω_D kutnu Dopplerovu frekvenciju, ${}_2F_1(\cdot)$ i ${}_3F_2(\cdot)$ poopćene hipergeometrijske funkcije jediničnog argumenta [201, 202],

$${}_2F_1(b_1,b_2;c_1;x)=\frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(b_1+i)\Gamma(b_2+i)}{\Gamma(c_1+i)}\frac{x^i}{i!}, \quad (3.105)$$

$${}_3F_2(b_1,b_2,b_3;c_1,c_2;x)=\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(b_1+i)\Gamma(b_2+i)\Gamma(b_3+i)}{\Gamma(c_1+i)\Gamma(c_2+i)}\frac{x^i}{i!}, \quad (3.106)$$

pri čemu vrijedi $b_1,b_2,b_3,c_1,c_2\in\mathbb{C},x\in\mathbb{C}\setminus\{0\},|\arg(x)-\pi|<\pi-\varepsilon,\varepsilon>0$.

3.4. Primjer

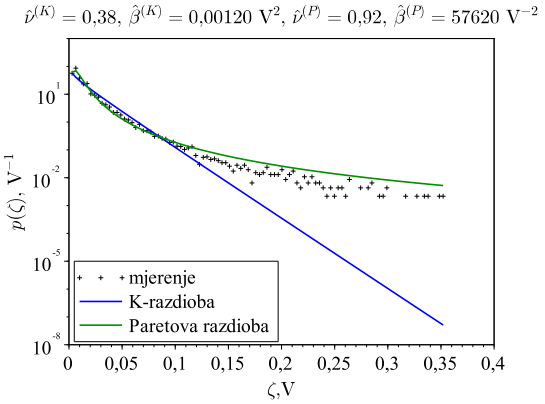
U ovom su primjeru, na temelju mjerenja smetnje mora radarom instrumentalne točnosti IPIX [148], ilustrirane statističke značajke poput amplitudne razdiobe, korelacije, periodograma (estimacije Dopplerovog spektra) te polarimetrijske značajke, vidi odjeljke 3.2.2 – 3.2.5. Kako bi primjer što vjernije ilustrirao uvjete Jadranskog mora, za analizu su odabrana mjerenja koja odgovaraju njegovim najčešćim stanjima, a to su, prema tablici 3.1, stanja mora od 3 do 4 te od 4 do 5, pri čemu nije uzeto u obzir stanje od 1 do 2 zbog praktički zanemarive značajne visine valova. Tako se, u nedostatku stvarnih podataka mjerenja smetnje Jadranskoga mora, ovi podaci mogu uzeti kao orijentir, uvažavajući činjenicu da su mjerenja provedena za otvoreno more, ocean, te da značajna visina valova nije jedina značajka koja određuje karakter smetnje. Prema tablici 3.3, zapis broj 17, datoteka imena 19931107_135603.cdf, sadrži podatke mjerenja 14 radijalno susjednih ćelija razlučivosti. Značajna visina valova iznosila je 0,9 m, a smjer je bio niz vjetar ($\phi_w=180°$), uz mali upadni kut, manji od 1°. Cilj, polistirenska sfera promjera 1 m i presvučena žičanom mrežom, plutala je na morskoj površini i primarno se nalazila u radijalnoj ćeliji broj 9, ali je zbog valova njen odjek detektiran u ćelijama u rasponu od broja 8 pa

do broja 11. Omjer snage cilja prema smetnji fluktuirao je u rasponu od 0 dB pa do 6 dB. Zapis broj 31, datoteka imena 19931109_202217.cdf, sadrži podatke mjerenja koja su provedena pri značajnoj visini valova 2,3 m i za smjer protiv vjetra ($\phi_w = 0°$), a odjek polistirenske plutače primarno se nalazio u ćeliji broj 7, sekundarno u rasponu ćelija od broja 6 pa do broja 8. U odnosu na mjerenje broj 17, primijenjeno je radiofrekvencijsko prigušenje 5,1 dB [213], a ostali uvjeti, poput radarske razlučivosti, upadnog kuta te omjera snage cilja prema smetnji, nisu se mijenjali. Radar se nalazio na nadmorskoj visini 30 m, a udaljenost najbliže radijalne ćelije, one označene brojem 1, iznosila je približno 2,6 km [148, 214]. U zapisima nema podataka o ostalim atmosferskim uvjetima. Mjerenja sadrže podatke faznog i kvadraturnog kanala horizontalne, vertikalne i križne polarizacije, dinamičkog raspona od $-0{,}7$ V do 0,7 V (u statističkoj analizi mjerenja broj 31, ovaj raspon, nakon kompenzacije prigušenja, iznosi od $-1{,}26$ V do 1,26 V). Struktura zapisa objašnjena je u [213].

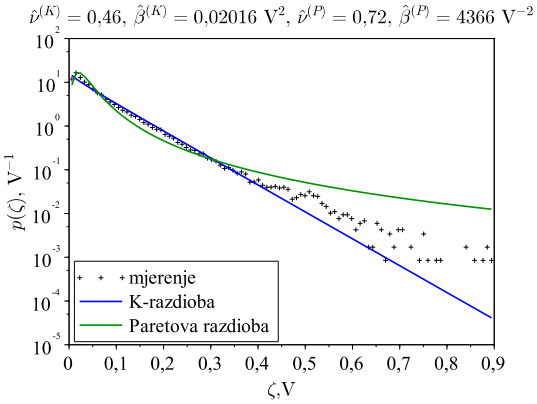
Tablica 3.3. Podaci mjerenja radara instrumentalne točnosti IPIX [148].

Zapis	dr	dφ	$\mathcal{S}$ (WMO)	$H_{1/3}$	ϕ_w	ε	f_S	Primarna pozicija	Sekundarna pozicija
br. 17	30 m	0,9°	3 – 4	0,9 m	180°	0,3°	1 kHz	br. 9	br. 8 – br. 11
br. 31	30 m	0,9°	4 – 5	2,3 m	0°	0,3°	1 kHz	br. 7	br. 6 – br. 8

Slike 3.10 i 3.11 ilustriraju rezultate statističke analize amplitudne razdiobe za testnu ćeliju br. 1, pri čemu je stvarna razdioba aproksimirana K- i Paretovom razdiobom. Parametri razdioba estimirani su primjenom metode (3.35) i (3.37) (za estimaciju parametra oblika $\hat{\nu}^{(K)}$ i skaliranja $\hat{\beta}^{(K)}$ K-razdiobe) te metode (3.49) i (3.50) (za estimaciju parametra oblika $\hat{\nu}^{(P)}$ i skaliranja $\hat{\beta}^{(P)}$ Paretove razdiobe). Premda Kolmogorov-Smirnovljev test ne potvrđuje poklapanje ni K- niti poklapanje Paretove razdiobe s mjerenjima, čak i kada se zanemare podaci u području teškog repa razdiobe ($p(\zeta) > 10^{-2}$), pregled slika 3.10 i 3.11 ukazuje na bolju aproksimaciju područja teškog repa Paretovom razdiobom, poglavito pri horizontalnoj polarizaciji. Nasuprot tome, K-razdiobom je stvarna razdioba dobro (bolje nego Paretovom) aproksimirana u području do vrijednosti vjerojatnosti približno 10^{-2}. Relativno male vrijednosti parametra oblika K-razdiobe u skladu su s očekivanjima, vidi odjeljak 3.2.2 gdje je, između ostalog, navedeno da vrijednost parametra oblika pada s upadnim kutom te da je manja pri horizontalnoj nego vertikalnoj polarizaciji.

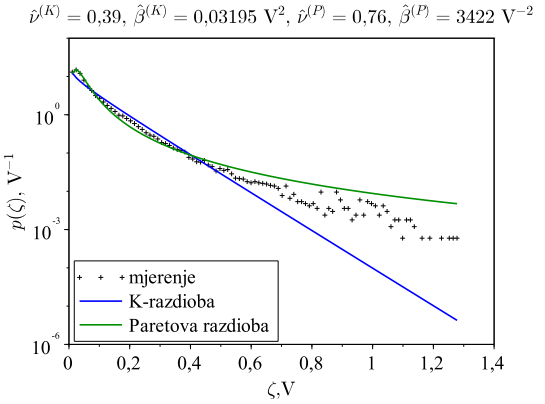


(a) Horizontalna polarizacija.

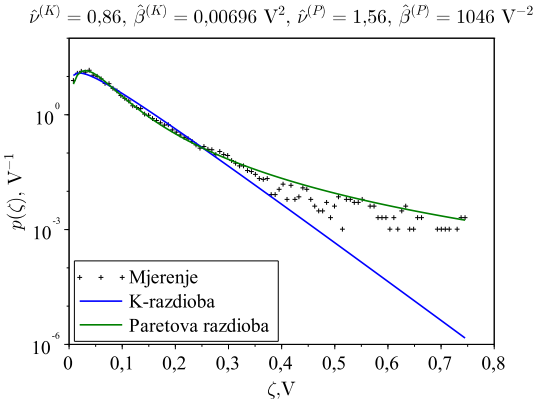


(b) Vertikalna polarizacija.

Slika 3.10. Estimacija amplitudne razdiobe za stanje mora od 3 do 4. Estimacija se provodi nalaženjem parametara oblika $\hat{\nu}^{(K)}$ i parametra skaliranja $\hat{\beta}^{(K)}$ K-razdiobe (3.33) te parametara $\hat{\nu}^{(P)}$ i $\hat{\beta}^{(P)}$ Paretove razdiobe (3.44).



(a) Horizontalna polarizacija.



(b) Vertikalna polarizacija.

Slika 3.11. Estimacija amplitudne razdiobe za stanje mora od 4 do 5. Estimacija se provodi nalaženjem parametara oblika $\hat{\nu}^{(K)}$ i parametra skaliranja $\hat{\beta}^{(K)}$ K-razdiobe (3.33) te parametara $\hat{\nu}^{(P)}$ i $\hat{\beta}^{(P)}$ Paretove razdiobe (3.44).

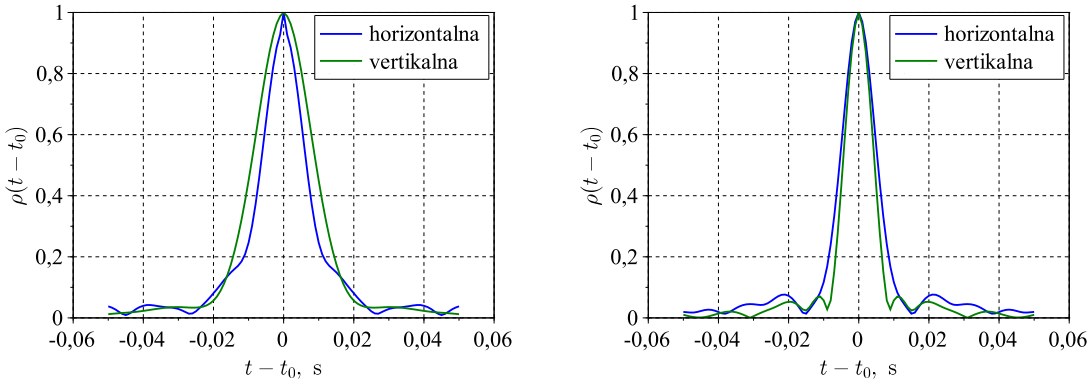
Rezultati statističke analize kratkoročne korelacije amplitude smetnje ilustrirani su slikom 3.12 i u skladu su s mjerenjima prema [152, 157]. Vrijeme korelacije određeno je vrijednošću koeficijenta $\rho(t - t_0) = 1/\mathrm{e}$, pri čemu e označava Eulerov broj, a usporedba s rezultatima mjerenja za visoke upadne kutove (od 15° do 45°) [67], vidi (3.73) i (3.74) te tablicu 3.4, otkriva da je vrijeme korelacije nešto manje, ali da je kvalitativna tendencija ovisnosti o stanju mora nepromijenjena. To je u skladu sa [182], gdje se navodi da se vrijeme korelacije povećava s upadnim kutom, vidi odjeljak 3.2.3. Zbog nepoznavanja brzine vjetra, primijenjena je ovisnost brzine vjetra i značajne visine valova za ocean kao

$$v_w = 7{,}18\, H_{1/3}^{0{,}4}, \tag{3.107}$$

vidi npr. [185].

Tablica 3.4. Ovisnost kratkoročne korelacije amplitude smetnje o polarizaciji i stanju mora te usporedba s mjerenjima pri visokim upadnim kutovima (od 15° do 45°) [67].

Zapis	$\mathcal{S}$ (WMO)	$H_{1/3}$	Mjerenje	Prema [67]
br. 17	3	0,9 m	$\Delta t^{(H)} = 8{,}1$ ms	$\Delta t^{(H)} = 11{,}1$ ms
br. 17	3	0,9 m	$\Delta t^{(V)} = 11{,}2$ ms	$\Delta t^{(V)} = 13{,}6$ ms
br. 31	4	2,3 m	$\Delta t^{(H)} = 6{,}6$ ms	$\Delta t^{(H)} = 7{,}7$ ms
br. 31	4	2,3 m	$\Delta t^{(V)} = 5{,}4$ ms	$\Delta t^{(V)} = 11$ ms



(a) Stanje mora od 3 do 4.

(b) Stanje mora od 4 do 5.

Slika 3.12. Ovisnost kratkoročne korelacije amplitude smetnje o polarizaciji i stanju mora.

Normirani radarski presjek η_0 estimiran je uzoračkim usrednjavanjem intenziteta $\psi(t)$, uz minimalno vrijeme uzorkovanja Δt prema tablici 3.4, jer je prema [167], pod pretpostavkom kompozitnog modela smetnje (3.91), veza između korelacijskog koeficijenta snage pozadinske smetnje (radarskog presjeka) $\rho_\eta(t-i\Delta t), i=0,1,\ldots$ i intenziteta $\rho_\psi(t-i\Delta t), i=0,1,\ldots,$

$$\rho_\psi(t-i\Delta t) = \rho_\eta(t-i\Delta t)\frac{\mathrm{var}\,(\eta)}{\mathrm{var}\,(\psi)}, \quad i=0,1,\ldots, \tag{3.108}$$

ali samo ako je zadovoljen uvjet nekoreliranosti skupa uzoraka kratkoročne fluktuacije $\{\zeta_0(i\Delta t), i=0,1,\ldots\}$,

$$E\left(\zeta_0(t)\zeta_0(t-i\Delta t)^*\right) = E\left(\zeta_0(t)^*\zeta_0(t-i\Delta t)\right) = 0. \tag{3.109}$$

Uz nekoherentnu integraciju N uzoraka, vrijedi da je [167]

$$\rho_\eta(t-i\Delta t) = \lim_{N\to\infty}\left(\left\langle\{\rho_\psi(t-i\Delta t), i=0,1,\dots\}\right\rangle\right), \tag{3.110}$$

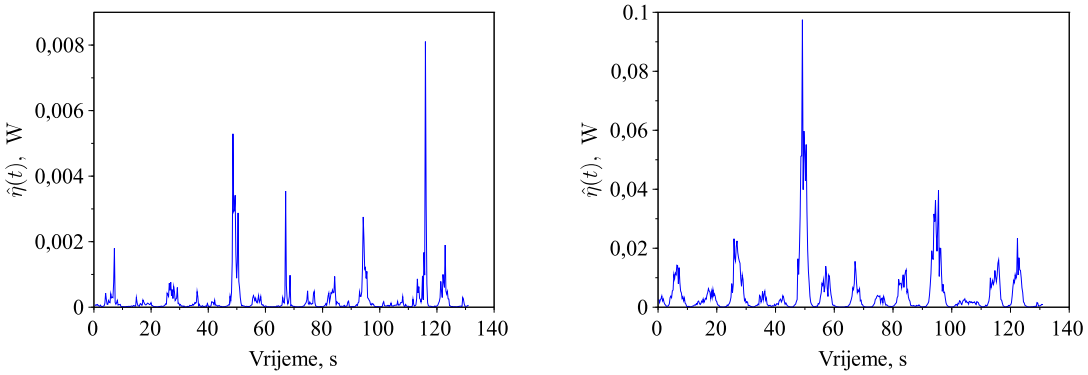
pa je estimacija radarskog presjeka dana s

$$\hat{\eta}(t_i) = \frac{1}{2}\left\langle\{\psi(t), t=t_i, t_i+\Delta t,\dots,t_i+(N-1)\Delta t\}\right\rangle,\ t_i = t_0, t_0+N\Delta t, t_0+2N\Delta t,\dots. \tag{3.111}$$

Tako slike 3.13 i 3.14 ilustriraju tijek radarskog presjeka $\hat{\eta}(t)$, uzoračku srednju vrijednost intenziteta $\psi(t)$ u intervalu $[t_i, t_i+(N-1)\Delta t]$ pri čemu se susjedni intervali ne preklapaju. Duljina intervala iznosi 0,25 s, uz vrijeme uzimanja uzoraka $\Delta t = 16$ ms. Prema [213] i (3.7), vrijednost normirane radarske površine dana je kao

$$\bar{\eta}_0 = \left(10\log_{10}\left(\left\langle\{\hat{\eta}(t_i)\}\right\rangle\right) + 40\log_{10}\left(\frac{r}{1000}\right) - 16{,}8 - 10\log_{10}(A_r)\right)\ \text{dB}, \tag{3.112}$$

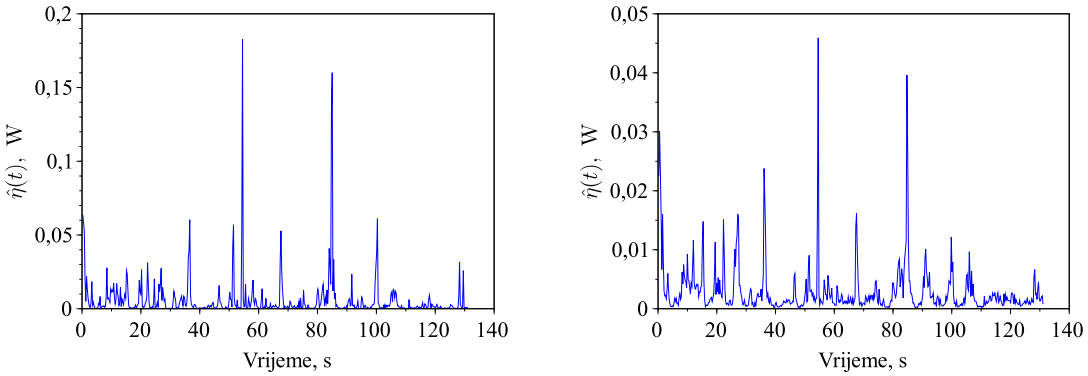
pri čemu, uz $r = 2{,}6$ km, površina radarske ćelije razlučivosti $A_r = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ iznosi 1224,6 m^2. Struktura morskog vala koji prolazi kroz ćeliju razlučivosti vidljiva je iz tijeka radarskog presjeka, posebno pri niskom stanju mora i vertikalnoj polarizaciji, slika 3.13b, a valni period usporediv je s podacima iz tablice 3.1. Pri horizontalnoj su polarizaciji izraženiji harmonici, kako je i opservirano u mjerenjima radijalne i azimutne korelacije uz visoke upadne kutove [160]. Usporedba normirane radarske površine prema (3.112) i one estimirane modelom GIT, prikazana je tablicom 3.5. Pri tome je, zbog nepoznavanja brzine vjetra, primijenjena ovisnost brzine vjetra i značajne visine valova (3.107).



(a) Horizontalna polarizacija.

(b) Vertikalna polarizacija.

Slika 3.13. Tijek intenziteta procesa smetnje ovisno o polarizaciji za stanje mora od 3 do 4.



(a) Horizontalna polarizacija.

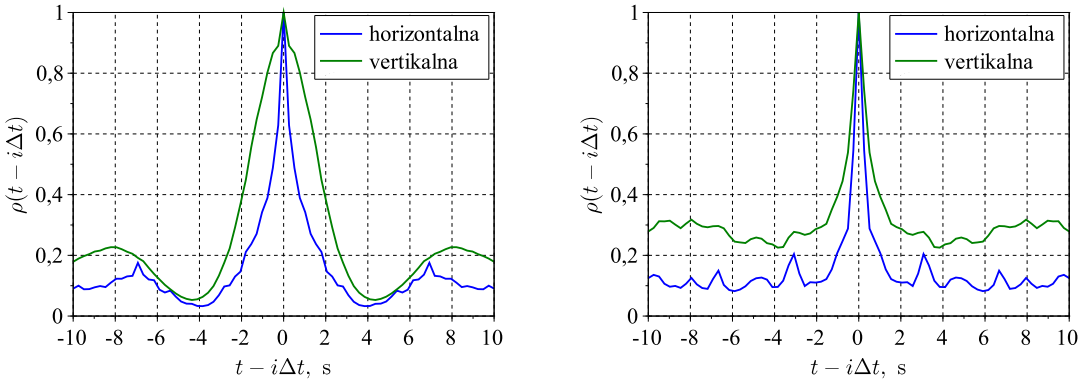
(b) Vertikalna polarizacija.

Slika 3.14. Tijek intenziteta procesa smetnje ovisno o polarizaciji za stanje mora od 4 do 5.

Tablica 3.5. Usporedba radarskog presjeka morske površine s teorijskom vrijednošću prema modelu GIT. Indeksi (H) i (V) označavaju horizontalnu, odnosno vertikalnu polarizaciju.

Zapis	Normirani radarski presjek	Stanje mora	Smjer vjetra	Mjerenje	Model GIT
br. 17	$\eta_0^{(H)}$	3	180°	−67 dB	−64 dB
	$\eta_0^{(V)}$			−54 dB	−58 dB
br. 31	$\eta_0^{(H)}$	4	0°	−53 dB	−40 dB
	$\eta_0^{(V)}$			−56 dB	−40 dB

Na temelju vremena uzimanja uzoraka Δt, dugoročna korelacija amplitude smetnje ilustrirana je slikom 3.15, pri čemu vrijeme korelacije za stanje mora od 3 do 4 iznosi 0,9 s i 2 s za horizontalnu, odnosno vertikalnu polarizaciju. Za stanje mora od 4 do 5, ove vrijednosti su 0,4 s za horizontalnu, odnosno 1,1 s za vertikalnu polarizaciju.



(a) Stanje mora od 3 do 4.

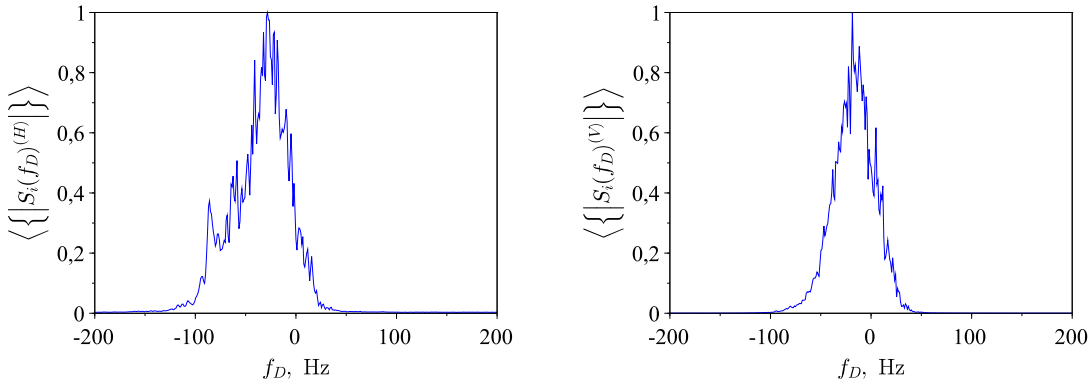
(b) Stanje mora od 4 do 5.

Slika 3.15. Ovisnost dugoročne korelacije amplitude smetnje o polarizaciji i stanju mora.

Estimacije Dopplerovog spektra, periodogrami, prikazani su slikama 3.16 i 3.17. Pri tome je periodogram $|S(f_D)|$ određen uzoračkim očekivanjem individualnih periodograna $|S_i(f_D)|$, normirane brze Fourierove transformacije kao u [215, 216], odnosno

$$|S(f_D)| = \langle \{ |S_i(f_D)|, i = 1, \ldots, N \} \rangle . \tag{3.113}$$

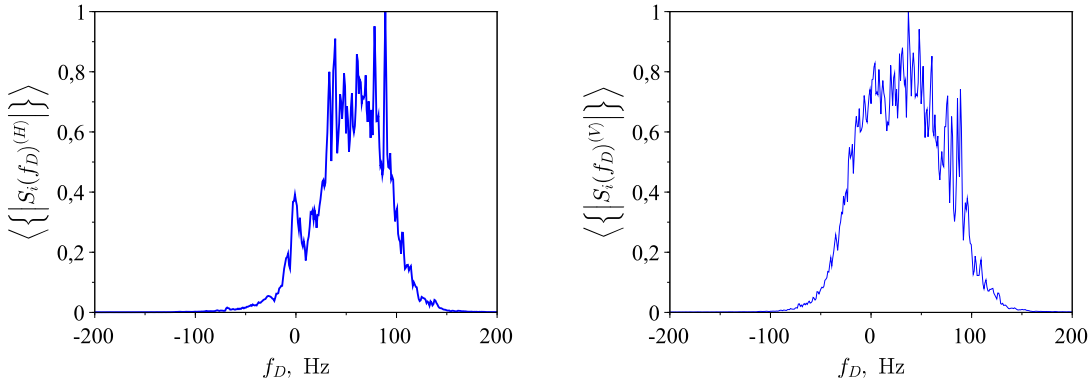
U ovom primjeru, broj uzoraka za brzu Fourierovu transformaciju iznosi 512, a broj individualnih periodograma je $N = 256$. Kako je i navedeno u odjeljku 3.2.3, frekvencijska širina raste porastom stanja mora i općenito je manja pri vertikalnoj nego horizontalnoj polarizaciji. Premda je za ovaj primjer upadni kut malen (0,3°), frekvencijske širine ovisno o stanju mora slijede ovisnost prema istraživanjima za visoki upadni kut [67] (3.67) i (3.68), što je nešto manje od očekivanih vrijednosti za Jadran, vidi sliku 3.7. Frekvencijska širina pri višem stanju mora (slike 3.17a i 3.11b), dodatno je povećana zbog smjera protiv vjetra. Pri tome je periodogram horizontalne polarizacije bimodalan zbog izraženijeg utjecaja kombiniranog djelovanja raspršenja od kresta i lomljenih valova.



(a) Horizontalna polarizacija.

(b) Vertikalna polarizacija.

Slika 3.16. Normirani periodogram ovisno o polarizaciji, za stanje mora od 3 do 4.

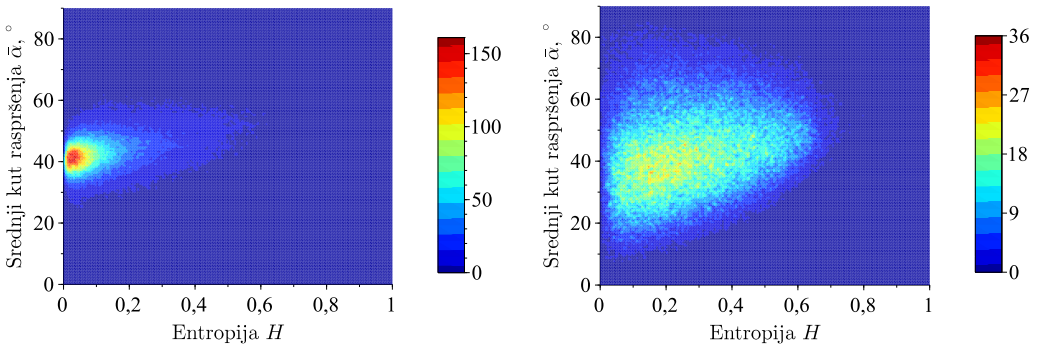


(a) Horizontalna polarizacija.

(b) Vertikalna polarizacija.

Slika 3.17. Normirani periodogram ovisno o polarizaciji, za stanje mora od 4 do 5.

Rezultat dekompozicije metodom $H-\bar{\alpha}$ za tri radijalno susjedna uzorka smetnje te za stanja mora od 3 do 4, odnosno od 4 do 5, vidi odjeljak 3.2.5 i sliku 3.18, ilustriran je u klasifikacijskom prostoru $H-\bar{\alpha}$ kao bivarijantni histogram, pri čemu je relativna frekvencija pojavljivanja ilustrirana paletom boja. Dok je dipolno raspršenje niske entropije sa središtem u približno 0,035 i raspršenja od približno 0,2 dominantno pri nižem stanju mora (od 3 do 4), pomak prema većoj entropiji i Braggovom raspršenju vidljiv je pri višem stanju mora (od 4 do 5), pri čemu je središte najveće frekvencije pojavljivanja pomaknuto u vrijednost entropije od približno 0,2 s nepromijenjenim srednjim kutom. Mala entropija pri nižem stanju mora odgovara intenzitetu smetnje uz neizraženu stohastičku komponentu, vidi ilustraciju tijeka radarskog presjeka na slici 3.13, a pri višem stanju mora, smetnja poprima izraženiji stohastički karakter koji se reflektira u povećanoj entropiji, kako i ilustrira tijek radarskog presjeka prikazan slikom 3.14.

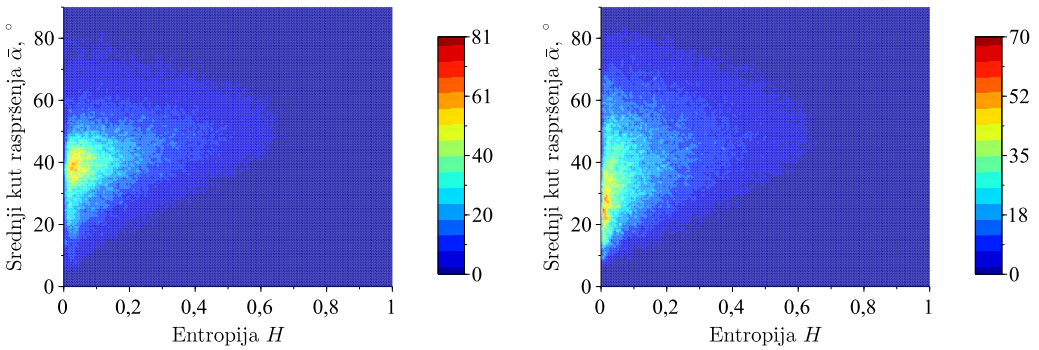


(a) Stanje mora od 3 do 4.

(b) Stanje mora od 4 do 5.

Slika 3.18. Dekompozicija tri radijalno susjedna uzorka smetnje u klasifikacijskom prostoru određenom metodom $H - \bar{\alpha}$.

Usporedbe radi, slikom 3.19 je ilustrirana dekompozicija za tri radijalno susjedne ćelije razlučivosti, od kojih barem jedna sadrži odjek cilja. Pri tome, zbog plutanja na morskoj površini, cilj u određenim trenucima nije primjetljiv, odnosno, kada se nalazi u valnom žlijebu, maskiram je valnim grebenom. U tim trenucima radijalno susjedne ćelije sadrže samo odjek smetnje. Zbog nepostojanja vizualne identifikacije ovakvih događaja, nema podatka o njihovoj učestalosti, odnosno vjerojatnosti pojavljivanja. Prema slici 3.19, vidljivo je raspršenje niske entropije sa središtem u rasponu od približno 0,01 pa do približno 0,02, mehanizma raspršenja u rasponu od dipolnog pa sve do raspršenja anizotropne površine, vidi odjeljak 3.2.5. Premda usporedba dekompozicije odjeka smetnje i cilja prema slikama 3.18 i 3.19 služi kao orijentir (jer je za temeljitu analizu ipak potrebno provesti mjerenja s ostalim vrstama ciljeva i stanjima mora, u ovisnosti o brzini vjetra i značajnoj visini valova), za ovaj se primjer može tvrditi da odjek s entropijom većom od 0,15 najvjerojatnije pripada smetnji.



(a) Stanje mora od 3 do 4.

(b) Stanje mora od 4 do 5.

Slika 3.19. Dekompozicija tri radijalno susjedna uzorka cilja u klasifikacijskom prostoru određenom metodom $H - \bar{\alpha}$.

3.5. Zaključak

U ovom je poglavlju smetnja mora interpretirana s gledišta opisne statistike te s gledišta stohastičkog procesa. Pri tome se pojam smetnja odnosi na elektromagnetsko raspršenje od površinskih valova generiranih vjetrom. Dok je opisna statistika otisak smetnje, opis njene dinamike logičan je korak prema proširenju koncepta kompozitnog modela, fizikalnog opisa koji rezultira amplitudnom K-, u općenitom slučaju KA-razdiobom. Pri tome je dinamika nelinearna, jer smetnja mora uključuje kontinuiranu amplitudnu (linearni proces) i frekvencijsku modulaciju (nelinearni proces), kako je i pokazano u [97]. Opis dinamike uvažava kompozitni model smetnje, intenzitet koji je vremenski sporopromjenjivi gama-proces te vremenski brze amplitudne fluktuacije koje su kompleksni Gaussov proces, rezultirajući nelinearnim stohastičkim diferencijalnim jednadžbama. U ovom su radu izvorne jednadžbe teksture (drugog korijena intenziteta), kompleksne amplitude, korelacije i Dopplerovog spektra [146], modificirane tako da uzimaju u obzir i parametar skaliranja.

Kao znanstveni doprinos, uvažavajući ovisnosti brzine vjetra i značajne visine valova koje su specifične za Jadran, predloženi su modeli radarskog presjeka za Jadransko more i frekvenciju 10 GHz, temeljeni na modelima GIT (za upadni kut do 10°) i IRSG (za upadni kut veći od 10°) te modeli širine Dopplerovog spektra i vremena korelacije, temeljeni na istraživanjima [67] koja su provedena pri visokim upadnim kutovima, kakvi se mogu očekivati u aplikaciji radarskog senzora bespilotne letjelice. Modele svakako treba uzeti kao polazni orijentir jer ih je potrebno verificirati mjerenjima te po potrebi modificirati kako bi bolje pristajali izmjerenim podacima.

Primjerom mjerenja na kraju poglavlja (mjerenja smetnje mora radarom instrumentalne točnosti IPIX koja odgovaraju najučestalijem pojavljivanju stanja mora za Jadran, a to su stanja od 3 do 4 te od 4 do 5), ilustriran je otisak smetnje. Analizirane su komponente otiska kao što su amplitudna razdioba, kratkoročne i dugoročne korelacije, periodogram te klasifikacija metodom Cloude-Pottierove dekompozicije. Analiza rezultata amplitudne razdiobe pokazuje da K-razdioba ne opisuje dovoljno dobro smetnju u području teškog repa te da bi primjena polumarametarske ili neparametarske estimacije razdiobe možda polučila točniji opis.

Poglavlje 4

Pridruživanje podataka uz izraženu smetnju mora

Izvorno je proces pridruživanja bio odvojen od postupka inicijalizacije, potvrde i završetka staze. Na temelju uzastopnih opservacija unutar volumena koji je bio određen apriornim mjerenjem cilja, postupak inicijalizacije i potvrde odlučivao je o početku nove staze, težeći maksimalnoj vjerojatnosti potvrde staze stvarnog cilja uz što kraće vrijeme. Pri tome je vjerojatnost potvrde staze lažnog cilja trebala biti minimalna, kao i vrijeme trajanja takve staze. Postupak završetka staze provodio se prema kriteriju broja opservacija bez detekcije [8]. Moderne metode u proces pridruživanja integriraju mjeru kvalitete praćenja, uobičajeno izraženu kao vjerojatnost postojanja cilja, odnosno vjerojatnost da se prati cilj a ne smetnja te pomoću nje provode postupak inicijalizacije i potvrde staze, odnosno njen završetak ako ona (kvaliteta praćenja) ne ukazuje na postojanje cilja [8]. Fokus ovog poglavlja postavljen je na integrirano pridruživanje podataka primjenom vjerojatnosnog pridruživanja i Viterbijevog algoritma kao okvira za doprinos metodi pridruživanja koja je predložena u poglavlju 5.

4.1. Uvod

Jedna od ranih metoda inicijalizacije, potvrde i završetka staze je detekcijska logika M/N [217], gdje cjelobrojna vrijednost N označava broj uzastopnih opservacija, a M potrebni broj detekcija za potvrdu staze, odnosno broj uzastopnih opservacija bez detekcije za njen završetak. Radne značajke ove metode ocjenjuju se na temelju Markovljevog lanca za nepromjenjivu veličinu volumena valjanosti, pa je stoga analiza značajki za promjenljivu veličinu volumena, u smislu iniciranja lažnih staza, samo približna [34]. Proširenje metode na algoritam kaskadne logike $2/2 \times M/N$ [15, 141], pruža mogućnost ocjene značajki procesa potvrde staze stvarnog i lažnog cilja uz promjenljivi volumen valjanosti, bez potrebe za simulacijom. Vjerojatnosti potvrde staze stvarnog i lažnog cilja ovise o vjerojatnostima detekcije cilja i smetnje unutar volumena

razlučivosti senzora, a veličina volumena valjanosti određena je apriornim mjerenjem. Oznaka $2/2$ znači da su potrebne dvije uzastopne detekcije za inicijalizaciju staze, a oznaka M/N da je dalje potrebno M od N detekcija kako bi se staza potvrdila. Nadogradnja metode na algoritam kompozitne detekcijske logike $M1/N1 \times M2/N2$ [15, 218] omogućuje učinkovitiji proces potvrde staze pod uvjetom da je vrijeme između uzastopnih opservacija, u odnosu na dinamiku gibanja cilja, malo te da je razina smetnje niska, do jedne lažne detekcije unutar volumena valjanosti. Značajke procesa potvrde staze određene su unaprijed definiranim parametrima sustava čime je određen njegov kapacitet praćenja, a za razliku od kaskadne logike, veličina volumena valjanosti ovisi o manevarskim sposobnostima cilja.

Mjera kvalitete praćenja temelji se na nekom od modela postojanja cilja, npr. na modelu neprimjetljivog cilja kao u metodi IMMPDA [34] koja omogućuje ocjenu stvarne vjerojatnosti staze, integriranu u vjerojatnosni okvir pridruživanja. Ako je u procesu inicijalizacije njena vjerojatnost veća od unaprijed zadane, staza se potvrđuje, a ako za vrijeme trajanja staze postane beznačajna, provodi se završetak. Pri tome model neprimjetljivog cilja opisuje cilj s vjerojatnošću detekcije nula, cilj koji je nestao iz volumena motrenja ili cilj za kojeg je estimacija provedena uz pogrešnu hipotezu. U metodi integriranog vjerojatnosnog pridruživanja (IPDA), za mjeru kvalitete praćenja razvijen je koncept postojanja cilja [35]. Predložene su dvije inačice modela od kojih se prva odnosi na cilj koji unutar volumena motrenja ili ne postoji, ili postoji, pri čemu se može detektirati određenom vjerojatnošću. U drugoj inačici, koncept je proširen modelom cilja koji unutar volumena motrenja postoji, ali ga nije moguće detektirati. Metoda također pruža i heurističku estimaciju parametra gustoće smetnje za učinkovitiji proces pridruživanja. Nadogradnja metode omogućuje estimaciju gustoće smetnje provođenjem uvjetnog očekivanja i maksimalne vjerodostojnosti [58, 219], a za razliku od navedenih modela, u [220] je predložen model primjetljivog cilja, definiran kao cilj kojeg senzori uvijek mogu detektirati ako on postoji unutar volumena motrenja. Također, za estimaciju gustoće smetnje primijenjena je metoda uvjetnog očekivanja koja rezultira dvjema inačicama estimatora, temeljenima na poopćenom i usavršenom vjerojatnosnom pridruživanju. Tako prva inačica primjenjuje koncept primjetljivosti kao parametar za inicijalizaciju, potvrdu i završetak staze, dok druga primjenjuje koncept postojanja cilja i prikladna je za praćenje ciljeva koji mogu biti povremeno neprimjetljivi. Budući da je za vrijeme praćenja cilja broj mjerenja unutar volumena valjanosti koja potječu od smetnje najčešće malen, u određenim slučajevima i nejednoliko prostorno raspodijeljen, točnost estimacije gustoće smetnje je slaba. Nadalje, u procesu vjerojatnosnog pridruživanja, parametar gustoće smetnje pojavljuje se kao inverzna vrijednost, pa njegova estimacija može pokazati pristranost. Stoga je u [221] predložena metoda adaptivne estimacije kojom se provodi estimacija s obzirom na volumen koji ovisi o mjerenjima, za razliku od standardnih metoda koje estimaciju temelje na volumenu koji je određen parametrima staze i koji je neovisan o gustoći smetnje i njenoj prostornoj raspodjeli.

Navedene vjerojatnosne metode provode pridruživanje aproksimacijom metode optimalnog Bayesovog pridruživanja metodom GPB1 što znači primjenu samo onih mjerenja iz kurentnog vremenskog okvira. Time se smanjuje kompleksnost koja bi inače rasla tijekom vremena trajanja staze, procesiranjem sve većeg broja opservacija. Nasuprot tome, suboptimalni rekurzivni Viterbijev algoritam, u traženju najvjerodostojnije staze, primjenjuje opservacije i iz kurentnog i iz prethodnog vremenskog okvira. Dok se optimalni Viterbijev algoritam provodi nad grupom sukcesivnih opservacija, nalaženjem slijeda pridruživanja mjerenja stazi uz kriterij najvjerodostojnije staze kroz rešetkasti dijagram kojeg tvore mjerenja grupe, proces praćenja zahtijeva stvarnovremensku estimaciju, pa je stoga iz metode optimalnog Viterbijevog algoritma izvedena njegova rekurzivna inačica.

U nastavku poglavlja, pružen je opis postupka inicijalizacije staze primjenom detekcijske logike, opis mjere kvalitete praćenja integrirane u vjerojatnosni okvir pridruživanja, opis optimalnog Viterbijevog algoritma pridruživanja i izvod njegovog suboptimalnog rekurzivnog rješenja, također uz integriranu mjeru kvalitete praćenja te estimacija prostorne gustoće smetnje. Pri tome je, u vjerojatnosnoj i Viterbijevoj metodi, primijenjen koncept primjetljivosti cilja koji uvijek postoji unutar volumena motrenja. Pokazana je integracija vjerojatnosne i Viterbijeve metode pridruživanja u okvir višemodelne metode estimacije IMM.

4.2. Inicijalizacija i potvrda staze detekcijskom logikom

Kaskadna detekcijska logika sastoji se od dva koraka. Za inicijalizaciju staze, u prvom se koraku zahtijevaju dvije uzastopne detekcije, a za potvrdu, u drugom koraku dodatno M detekcija od ukupno N opservacija. Radi jednostavnosti, ocjena značajki se provodi pod pretpostavkom skoro jednolikog gibanja cilja, opisanog u pravokutnom koordinatnom sustavu linearnom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom (2.3), pod uvjetom da je $\boldsymbol{u}(t) = 0$. Optimalno rješenje jednadžbe za diskretne vremenske trenutke $t_k, k = 1,2,\ldots$ koji odgovaraju diskretnim trenucima opservacije (2.25), izraženo je u formi Kalmanovog filtra, estimacijom vektora stanja $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ i pripadajućom kovarijancom greške $\boldsymbol{P}_k$ u rekurzivnoj formi [141] (vidi i poglavlje 2, odjeljak 2.3.1),

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \bar{\boldsymbol{x}}_k + d_k \boldsymbol{K}_k (\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{H}_k \bar{\boldsymbol{x}}_k), \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{P}_k = \bar{\boldsymbol{P}}_k - d_k \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{S}_k \boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}, \tag{4.2}$$

gdje su s $\bar{\boldsymbol{x}}_k$ i $\bar{\boldsymbol{P}}_k$ označene apriorne estimacije [72]

$$\bar{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \tag{4.3}$$

$$\bar{\boldsymbol{P}}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \boldsymbol{P}_{k-1} \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1} \boldsymbol{Q}_{k-1} \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}, \tag{4.4}$$

rješenja (2.110) i (2.111) za vremenski diskretni sustav, pri čemu je član $\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}$ dan s (2.18), $\boldsymbol{K}_k = \bar{\boldsymbol{P}}_k\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_k^{-1}$ je pojačanje Kalmanovog filtra, rješenje relacije (2.105) za diskretni sustav i $\boldsymbol{S}_k$ je kovarijanca inovacije dana s

$$\boldsymbol{S}_k = \boldsymbol{H}_k\bar{\boldsymbol{P}}_k\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k. \tag{4.5}$$

Indikator detekcije označen je s d_k i definiran kao

$$d_k = \begin{cases} 1, & \text{ako postoji detekcija u } t_k \\ 0, & \text{ako ne postoji detekcija u } t_k \end{cases}. \tag{4.6}$$

Prvom se detekcijom postavlja početni volumen valjanosti na temelju očekivanih manevarskih sposobnosti cilja. Volumen je opisan elipsoidom u slučaju trodimenzionalnog, odnosno elipsom u slučaju dvodimenzionalnog pozicijskog mjerenja. Za primjer površinskih ciljeva, poluosi elipse (a,b) određene su maksimalnim brzinama $\dot{\mathrm{x}}_{max}$ i $\dot{\mathrm{y}}_{max}$ po x-, odnosno y-osi, tako da je

$$a = \dot{\mathrm{x}}_{max}T + \sqrt{\gamma R_{\mathrm{xx}}}, \quad b = \dot{\mathrm{y}}_{max}T + \sqrt{\gamma R_{\mathrm{yy}}}, \tag{4.7}$$

pri čemu su R_{xx} i R_{yy} varijance dvodimenzionalnog mjerenja po x- i y-koordinati (vidi (2.85) i (2.86)), a γ konstanta uobičajene vrijednosti od 4 do 9. Ako se u sljedećoj opservaciji detektira cilj unutar volumena (4.7), inicira se staza i Kalmanov filtar s početnim uvjetima [15]

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{1}{T}(z_2 - z_1) \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}\left(\left[R_{\mathrm{xx}}\ R_{\mathrm{yy}}\right]^{\mathrm{T}}\right) & \frac{1}{T}\mathrm{diag}\left(\left[R_{\mathrm{xx}}\ R_{\mathrm{yy}}\right]^{\mathrm{T}}\right) \\ \frac{1}{T}\mathrm{diag}\left(\left[R_{\mathrm{xx}}\ R_{\mathrm{yy}}\right]^{\mathrm{T}}\right) & \frac{2}{T^2}\mathrm{diag}\left(\left[R_{\mathrm{xx}}\ R_{\mathrm{yy}}\right]^{\mathrm{T}}\right) \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

te ako se u sljedećih N uzoraka pojavi M detekcija, staza se potvrđuje. Pri tome se u obzir uzimaju samo ona mjerenja z_k koja se nalaze unutar volumena valjanosti V_k. Volumen je određen apriornom estimacijom Kalmanovog filtra [8], odnosno

$$V_k(\gamma) = \left\{ z_k : (z_k - \boldsymbol{H}_k\bar{\boldsymbol{x}}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_k^{-1}(z_k - \boldsymbol{H}_k\bar{\boldsymbol{x}}_k) \leq \gamma \right\}, \tag{4.10}$$

gdje je γ prag koji određuje vjerojatnost $P_G = P\big(z_k \in V_k(\gamma)\big)$ da se mjerenje nalazi unutar volumena valjanosti. Za primjer dvodimenzionalnog mjerenja, $V_k(\gamma) = \pi\sqrt{|\gamma\boldsymbol{S}_k|}$, a za trodimenzionalno mjerenje, $V_k(\gamma) = \frac{4}{3}\pi\sqrt{|\gamma\boldsymbol{S}_k|}$.

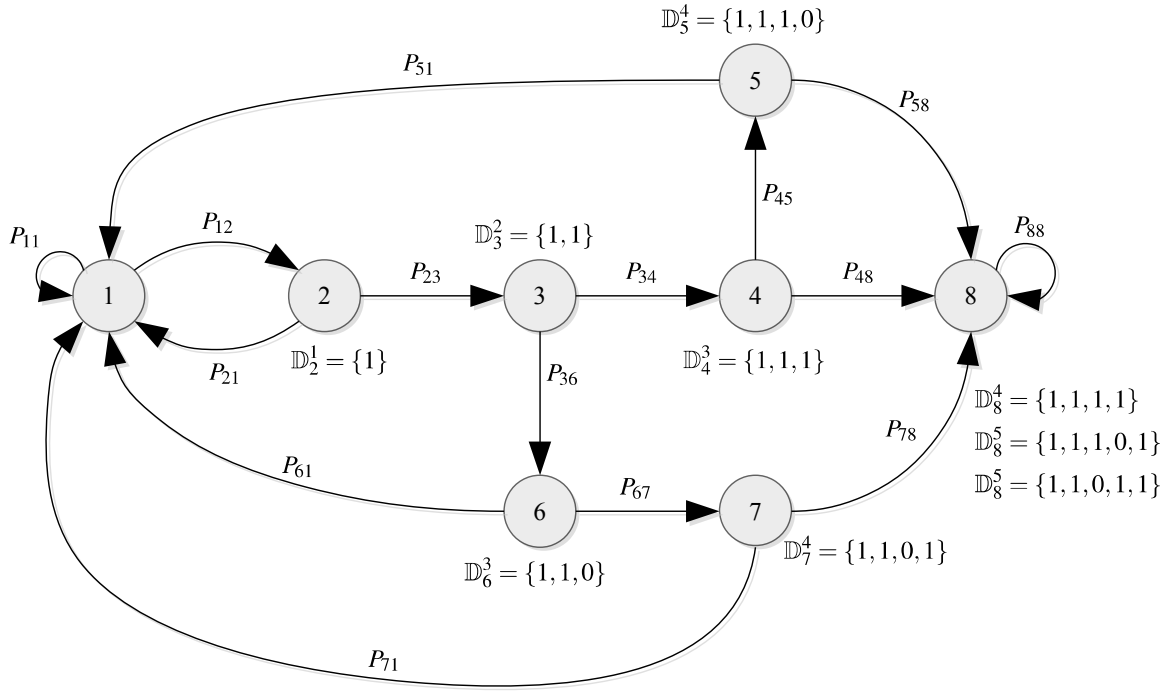
Slika 4.1 ilustrira stanja Markovljevog lanca za kaskadnu detekcijsku logiku $2/2 \times 2/3$. Prijelazne vjerojatnosti

$$P_{12} = P_{23} = P_{34} = P_{48} = P_{58} = P_{67} = P_{78} = P_D P_G, \tag{4.11}$$

$$P_{11} = P_{21} = P_{36} = P_{45} = P_{51} = P_{61} = P_{71} = 1 - P_D P_G, \tag{4.12}$$

$$P_{88} = 1, \tag{4.13}$$

određene su vjerojatnošću detekcije cilja P_D i vjerojatnošću P_G da se mjerenje nalazi unutar volumena valjanosti [141].



Slika 4.1. Ilustracija Markovljevog lanca za kaskadnu detekcijsku logiku $2/2 \times 2/3$.

Neka je definiran skup indikatora detekcije $\mathbb{D}_i^k = \{d_1, \ldots, d_k\}$ za i-to stanje Markovljevog lanca prema slici 4.1 i diskretni vremenski indeks k. Za evaluaciju vjerojatnosti potvrde staze definiran je vektor vjerojatnosti stanja $\boldsymbol{\mu}_k$,

$$\boldsymbol{\mu}_k = \begin{bmatrix} \mu_{1,k} \\ \vdots \\ \mu_{8,k} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

i prijelazna matrica $\boldsymbol{P}$,

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{81} & \dots & P_{88} \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

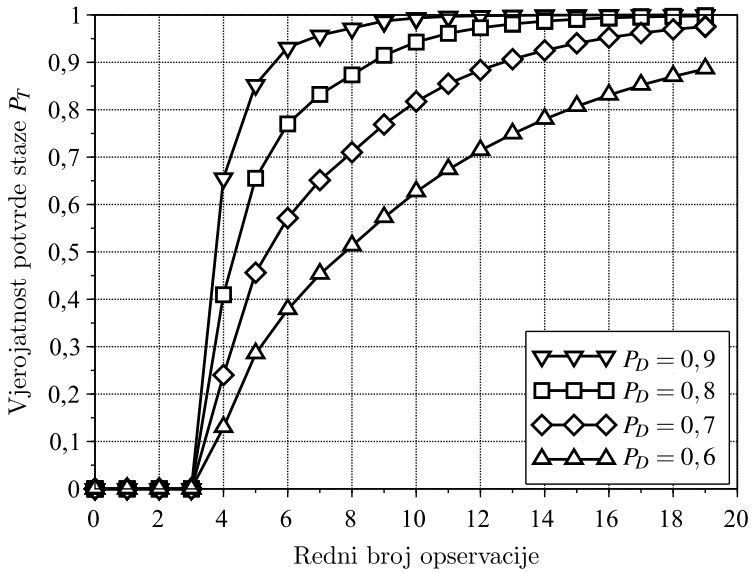
Početna vrijednost komponente vektora stanja $\mu_{1,0}$ pri $k = 0$ je 1, a sve ostale komponente jednake su nuli. Vektor vjerojatnosti propagira s vremenom kao [141]

$$\boldsymbol{\mu}_{k+1} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\mu}_k,\ k = 0, 1, \dots\ , \tag{4.16}$$

a vjerojatnost potvrde staze, kumulativna funkcija razdiobe $p_{T,k} = \mu_{8,k} - \mu_{8,k-1}$, dana je s $P_{T,k} = \mu_{8,k}$, što znači da je prosječno vrijeme potrebno za potvrdu staze jednako

$$\bar{t}_T = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_{T,k}. \tag{4.17}$$

Vjerojatnost potvrde staze provedbom kaskadne logike, ovisno o vjerojatnosti detekcije cilja, ilustrira slika 4.2 za logiku $2/2 \times 2/3$.



Slika 4.2. Vjerojatnost potvrde staze primjenom kaskadne logike $2/2 \times 2/3$ uz različite vjerojatnosti detekcije.

Za evaluaciju vjerojatnosti potvrde staze lažnog cilja pretpostavlja se vjerojatnost lažne detekcije P_{FA} koja je definirana s obzirom na volumen razlučivosti senzora i jedan vremenski okvir, odnosno jedan okret rotirajuće antene. Nadalje, zanemariva je vjerojatnost pojave više od jedne lažne detekcije unutar volumena valjanosti, a svaki volumen razlučivosti unutar jednog okreta antene može inicirati slijed potvrde ili završetka staze [141]. Prema slici 4.1, slijed potvrde

staze započinje u stanju 2, vremenskog indeksa $k = 1$. Stoga je početni uvjet $\mu_{1,1} = 1 - P_{FA}$, $\mu_{2,1} = P_{FA}$ i svi ostali članovi vektora vjerojatnosti stanja jednaki su nuli. Stanje 1 je „apsorbirajuće stanje" jer u njemu završava lažna staza pa je stoga $P_{11} = 1$. Volumen valjanosti, izražen brojem ćelija razlučivosti, nakon prve (i lažne) detekcije ovisi o očekivanim manevarskim sposobnostima cilja, pa je $P_{23} = V_2\left(\dot{\mathrm{x}}_{max}, \dot{\mathrm{y}}_{max}, R_{\mathrm{xx}}, R_{\mathrm{yy}}, \gamma\right) P_{FA}$ i $P_{21} = 1 - P_{23}$ za primjer površinskog cilja. Volumen valjanosti za stanja $i = 3, \ldots, 7$ ovisi o kovarijanci inovacije (4.5) i slijedu detekcija $\mathbb{D}_i^k$, pa su članovi prijelazne matrice:

$$P_{34} = V_3 P_{FA}, P_{36} = 1 - P_{34}, \tag{4.18}$$

$$P_{48} = V_4 P_{FA}, P_{45} = 1 - P_{48}, \tag{4.19}$$

$$P_{58} = V_5 P_{FA}, P_{51} = 1 - P_{58}, \tag{4.20}$$

$$P_{67} = V_6 P_{FA}, P_{61} = 1 - P_{67}, \tag{4.21}$$

$$P_{78} = V_7 P_{FA}, P_{71} = 1 - P_{78}, \tag{4.22}$$

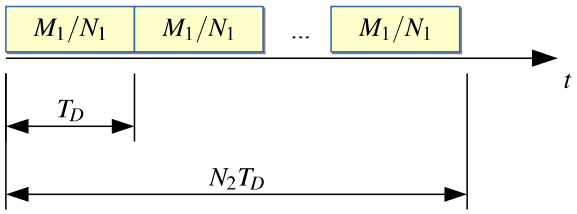
$$P_{88} = 1. \tag{4.23}$$

Vjerojatnost stanja lanca propagira u skladu s (4.16) pri čemu su vremenski indeksi $k = 1, \ldots,$ a slijed potvrde odnosno završetka staze lažnog cilja traje četiri koraka. Vjerojatnost potvrde staze lažnog cilja tako je jednaka $P_F = \mu_{8,5}$, uz prosječno vrijeme trajanja

$$\bar{t}_F = \frac{\sum_{i=2}^{8} \sum_{k=1}^{5} k\, \mu_{i,k}}{\sum_{i=2}^{8} \sum_{k=1}^{5} \mu_{i,k}} \tag{4.24}$$

koje se računa kao prosječna vrijednost trajanja svakog stanja i, $i = 2, \ldots, 8$. Nazivnik u (4.24) je koeficijent radi normiranja razdiobe.

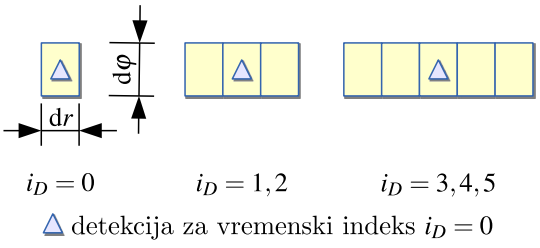
Ako za vrijeme inicijalizacije staze manevar cilja nije izražen ili su njegove manevarske sposobnosti male, za proces potvrde staze prikladna je kompozitna detekcijska logika $M_1/N_1 \times M_2/N_2$ koja se provodi u dva koraka. Kako je ilustrirano slikom 4.3, u prvom koraku od N_1 uzastopnih opservacija ukupnog vremena trajanja T_D, traži se M_1 detekcija (uvjet M_1/N_1), a u drugom je za potvrdu staze potrebno u M_2 od N_2 opservacija zadovoljiti uvjet M_1/N_1. Pri tome volumen za pridruživanje ovisi samo o manevarskim sposobnostima cilja i indeksu vremena zadnje detekcije i_D, kako je to ilustrirano tablicom 4.1 i slikom 4.4 za primjer dvodimenzionalnog mjerenja.



Slika 4.3. Ilustracija kompozitne detekcijske logike $M_1/N_1 \times M_2/N_2$.

Tablica 4.1. Primjer veličine volumena za pridruživanje kaskadne detekcijske logike koji ovisi o indeksu zadnje detekcije i_D.

Indeks vremena od zadnje detekcije	Broj ćelija razlučivosti
1	3
2	3
3	5
4	5
5	5
6	7
7	7
8	9
9	9
10	9
11	11



Slika 4.4. Ilustracija volumena za pridruživanje kaskadne detekcijske logike $M_1/N_1 \times M_2/N_2$ ovisno o indeksu zadnje detekcije i_D. Veličine dr i dφ označavaju razlučivost senzora po udaljenosti i azimutu za dvodimenzionalno mjerenje u polarnom koordinatnom sustavu.

Ocjena značajki kompozitne logike izvedena je na temelju parametara vjerojatnosti detekcije odjeka cilja P_D i lažnog odjeka smetnje P_{FA} po jednom okretu antene. Ocjena se provodi najprije nalaženjem vjerojatnosti potvrde staze cilja bez lažnih odjeka P_T, zatim nalaženjem vjerojatnosti potvrde lažne staze P_F i vjerojatnosti potvrde staze cilja kada postoje odjeci smetnje $P_{T(F)}$ te naposljetku nalaženjem vjerojatnosti potvrde lažne staze u okolici staze cilja $P_{F(T)}$.

Vjerojatnost potvrde staze cilja bez odjeka smetnje dana je Bernoullijevom sumom kao [218]

$$P_T = \sum_{j=M_2}^{N_2} \binom{N_2}{j} P_{M_1/N_1}^{j} (1 - P_{M_1/N_1})^{N_2 - j}, \tag{4.25}$$

gdje je

$$P_{M_1/N_1} = \sum_{i=M_1}^{N_1} \binom{N_1}{i} P_D^{i} (1 - P_D)^{N_1 - i}. \tag{4.26}$$

Za evaluaciju vjerojatnosti potvrde staze kada uz odjek cilja postoje i odjeci smetnje unutar volumena valjanosti $V(i_D)$ (čija je veličina izražena brojem ćelija razlučivosti), potrebno je definirati skup međusobno isključivih događaja $\mathbb{A} = \left\{A_i, i = 1, \ldots, 4 : P\left(\cup_{i=1}^{4} A_i\right) = 1\right\}$:

A_1 nema detekcije

A_2 detekcija samo odjeka cilja

A_3 detekcija najmanje jednog lažnog odjeka

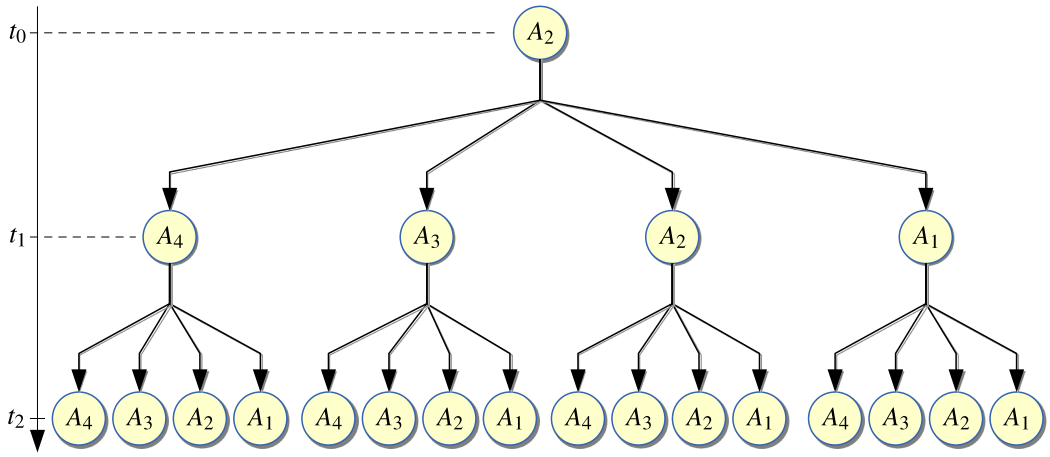
A_4 detekcija odjeka cilja i najmanje jednog lažnog odjeka

pri čemu je vjerojatnost pojave više od jednog odjeka smetnje unutar volumena valjanosti zanemariva. Razvijanje procesa potvrde staze po vremenskim točkama, slika 4.5, vodi vrlo velikom broju mogućih sljedova navedenih događaja jer njihov broj raste eksponencijalno s brojem opservacija, pa bi primjerice, za detekcijsku logiku $2/8 \times 4/4$, na kraju ciklusa detekcije bilo 6544^4 sljedova [218]. Aproksimacijom procesa potvrde staze algoritmom zajedničke povijesti [8, 218], smanjuje se broj mogućih sljedova spajanjem onih sa zajedničkim vektorom povijesti

$$\boldsymbol{i} = [i_D \; i_{D(T)} \; N]^{\mathrm{T}}, \tag{4.27}$$

pri čemu je i_D indeks zadnje detekcije, $i_{D(T)}$ indeks zadnje detekcije koja potječe isključivo od odjeka cilja i N broj detekcija. Vektor (4.27) je dovoljna statistika za detekcijsku logiku $2/8 \times 4/4$ [8], pri čemu je, radi uvjeta $M_1/N_1 = 2/8$, $N \leq 2$. Za ovu detekcijsku logiku, jedan ciklus detekcije sastoji se od četiri ciklusa inicijalne detekcije, svaki trajanja T_D, a ciklus inicijalne detekcije od osam vremenskih okvira (odnosno okreta antene). Detekcijski slijed započinje prvom detekcijom pri čemu je N postavljen u jedan. Na kraju ciklusa inicijalne detekcije, za slijed koji nema više niti jednu detekciju (osim početne) vrijedi $N = 1$, a za sljedove s detekcijama vrijedi $N = 2$ i oni se propuštaju u sljedeći ciklus pri čemu se vrijednost N postavlja u nulu. Staza je potvrđena ako je u četiri uzastopna ciklusa inicijalne detekcije zadovoljen uvjet $2/8$. Ilustracija algoritma zajedničke povijesti za vremenske točke t_0 (prva detekcija), $\bar{t}_1$ (nepo-

sredno prije prve opservacije nakon prve detekcije), t_1 (nakon prve opservacije), $\bar{t}_2$ (neposredno prije druge opservacije), prikazana je tablicom 4.2 [8].



Slika 4.5. Ilustracija eksponencijalno rastućeg broja sljedova za kaskadnu detekcijsku logiku $M_1/N_1 \times M_2/N_2$ i skup međusobno isključivih događaja $\mathbb{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

Tablica 4.2. Ilustracija algoritma zajedničke povijesti.

t_0	$P(t=t_0)$	$\bar{t}_1$	t_1	$P(t=t_1)$	$\bar{t}_2$ Prije spajanja	$\bar{t}_2$ Poslije spajanja	$P(t=\bar{t}_2)$
A_2	P_D	$\boldsymbol{i}=[1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$	A_1	$P_D P(A_1)$	$\boldsymbol{i}=[2\ 2\ 1]^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{i}=[2\ 2\ 1]^{\mathrm{T}}$	$P_D P(A_1)$
			A_2	$P_D P(A_2)$	$\boldsymbol{i}=[1\ 1\ 2]^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{i}=[1\ 1\ 2]^{\mathrm{T}}$	$(P_D+P_{FA})P(A_2)$
			A_3	$P_D P(A_3)$	$\boldsymbol{i}=[1\ 2\ 2]^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{i}=[1\ 2\ 2]^{\mathrm{T}}$	$P_D\big(P(A_3)+P(A_4)\big)$
			A_4	$P_D P(A_4)$	$\boldsymbol{i}=[1\ 2\ 2]^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{i}=[2\ \emptyset\ 1]^{\mathrm{T}}$	$P_{FA} P(A_1)$
A_3	P_{FA}	$\boldsymbol{i}=[1\ \emptyset\ 1]^{\mathrm{T}}$	A_1	$P_{FA} P(A_1)$	$\boldsymbol{i}=[2\ \emptyset\ 1]^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{i}=[1\ \emptyset\ 2]^{\mathrm{T}}$	$P_{FA}\big(P(A_3)+P(A_4)\big)$
			A_2	$P_{FA} P(A_2)$	$\boldsymbol{i}=[1\ 1\ 2]^{\mathrm{T}}$		
			A_3	$P_{FA} P(A_3)$	$\boldsymbol{i}=[1\ \emptyset\ 2]^{\mathrm{T}}$		
			A_4	$P_{FA} P(A_4)$	$\boldsymbol{i}=[1\ \emptyset\ 2]^{\mathrm{T}}$		

Svakom se opservacijom za događaj:

A_1 povećavaju indeksi i_D i $i_{D(T)}$ za 1, a N ostaje nepromijenjen

A_2 vrijednosti indeksa i_D i $i_{D(T)}$ postavljaju u 1, a N povećava za 1

A_3 vrijednost indeksa i_D postavlja u 1, a vrijednosti indeksa $i_{D(T)}$ i N povećavaju za 1 jer nema detekcije odjeka cilja

A_4 vrijednost indeksa i_D postavlja u 1, a vrijednosti $i_{D(T)}$ i N povećavaju za 1. Pod pretpostavkom rješavanja problema višestruke detekcije algoritmom dijeljenja, ovaj događaj formira dvije staze, jednu za cilj, a drugu za lažni odjek.

Vjerojatnost da unutar volumena $V(i_D)$ nema nikakve detekcije jednaka je

$$P(A_1) = \left(1 - \frac{V(i_D)}{V\left(i_{D(T)}\right)} P_D\right)(1 - P_{FA})^{V(i_D)}, \tag{4.28}$$

pri čemu omjer $V(i_D)/V\left(i_{D(T)}\right)$ smanjuje vjerojatnost detekcije odjeka cilja [8]. Nadalje, vjerojatnost detekcije isključivo odjeka cilja jednaka je

$$P(A_2) = \frac{V(i_D)}{V\left(i_{D(T)}\right)} P_D (1 - P_{FA})^{V(i_D)}, \tag{4.29}$$

a vjerojatnost detekcije najmanje jednog lažnog odjeka

$$P(A_3) = \left(1 - (1 - P_{FA})^{V(i_D)}\right)\left(1 - \frac{V(i_D)}{V\left(i_{D(T)}\right)} P_D\right). \tag{4.30}$$

Naposljetku, vjerojatnost detekcije odjeka cilja i najmanje jednog odjeka smetnje jednaka je

$$P(A_4) = \left(1 - (1 - P_{FA})^{V(i_D)}\right) \frac{V(i_D)}{V\left(i_{D(T)}\right)} P_D. \tag{4.31}$$

Kako je vjerojatnost detekcije više od jednog lažnog odjeka unutar volumena valjanosti zanemariva, relacije (4.30) i (4.31) se približno odnose i na događaj detekcije samo jednog lažnog odjeka.

Neka je $\mathbb{B}$ skup sljedova na kraju ciklusa detekcije, $\mathbb{B} = \{B_i, i = 1, 2, \dots\}$, i neka je definiran događaj:

D_i, slijed B_i zadovoljava detekcijsku logiku na kraju ciklusa.

Sljedeće pretpostavke potrebne su za određivanje vjerojatnosti potvrde staze cilja uz postojanje odjeka smetnji $P_{T(F)}$ i vjerojatnosti potvrde lažne staze u okolici staze cilja $P_{F(T)}$:

P1 sljedovi koji se nastavljaju pojavom događaja A_4 spajaju se sa sljedovima koji se nastavljaju pojavom događaja A_2

P2 sljedovi koji se nastavljaju pojavom događaja A_4 spajaju se sa sljedovima koji se nastavljaju pojavom događaja A_3.

Ukupna vjerojatnost potvrde staze $P_T^{(*)}$ kada uz cilj postoji i smetnja jednaka je zbroju vjerojatnosti preko svih sljedova koji zadovoljavaju detekcijsku logiku na kraju ciklusa detekcije,

$$P_T^{(*)} = \sum_{B_i \in \mathbb{B}} P(B_i \,|\, D_i), \tag{4.32}$$

a prema [8], vjerojatnost potvrde staze stvarnog cilja uz postojanje odjeka smetnje jednaka je

$$P_{T(F)} = \sum_{B_i \in \mathbb{B}} P\left(B_i \,|\, D_i, \mathrm{P1}\right), \tag{4.33}$$

pri čemu ova vrijednost može odstupiti od Bernoullijeve sume (4.25) zbog toga što je za detekcijsku logiku npr. $2/8 \times 4/4$ potrebna najmanje jedna detekcija odjeka cilja (a ostale mogu biti zbog smetnje), a za Bernoullijevu sumu (4.25) potrebne su najmanje dvije detekcije u bloku od 8 okreta antene. Vjerojatnost potvrde staze lažnog cilja u okolici stvarnog cilja jednaka je [218]

$$P_{F(T)} = P_T^{(*)} - \sum_{B_i \in \mathbb{B}} P\left(B_i \,|\, D_i, \mathrm{P2}\right), \tag{4.34}$$

pri čemu je ova vrijednost značajno različita od vjerojatnosti potvrde lažne staze P_F (scenarij bez odjeka stvarnog cilja u okolici),

$$P_F = \sum_{B_i \in \mathbb{B}} P\left(B_i \,|\, D_i, P_D = 0\right), \tag{4.35}$$

zbog toga što je uz detekciju odjeka cilja veća vjerojatnost potvrde lažnih staza [218]. Prema [8], algoritam zajedničke povijesti također je prikladan za ocjenu kapaciteta sustava u smislu maksimalnog broja ciljeva koje sustav može pratiti s određenom pouzdanošću, što je omogućeno postavljanjem uvjeta da se volumeni valjanosti susjednih ciljeva ne preklapaju.

4.3. Održavanje staze pridruživanjem podataka

U stvarnosti je vjerojatnost detekcije cilja manja od jedan, a pored odjeka cilja postoje i odjeci smetnje. Za učinkovito održavanje staze (minimalna vjerojatnost pojave lažnih staza, divergencije i sl.), bitna je primjena mjerenja koja potječu od cilja, a ne od smetnje. Učinkoviti pristup kojim se rješava pitanje koje mjerenje pridružiti postojećoj stazi, za visoke omjere snage signala prema smetnji (tipično iznad 15 dB), je metoda najjačeg ili najbližeg susjeda gdje se pridružuje samo ono mjerenje koje je po snazi najjače ili je statistički najbliže apriornoj estimaciji. Za niske omjere snage signala prema smetnji (otprilike 10 dB i manje), pristup vjerojatnosnog pridruživanja, gdje se primjenjuju sva mjerenja uz određenu razinu vjerovanja da svaki od njih potječe od cilja, a ne od smetnje te Viterbijeva metoda, gdje se bira najvjerodostojniji slijed pridruživanja mjerenja stazi, pokazuju bolje rezultate u smislu zadržavanja i gubljenja postojeće staze.

Analiza metoda pridruživanja provedena u nastavku odjeljka pretpostavlja postojanje samo jednog cilja i homogenu prostornu smetnju, pa je vjerojatnost pojave N_{FA} odjeka smetnje unutar

N ćelija razlučivosti senzora opisana binomnom razdiobom [8] kao

$$P(N_{FA}=n)=p_{FA}(n)=\mathscr{B}(n;N,P_{FA})=\binom{N}{n}P_{FA}^{n}(1-P_{FA})^{N-n}, \tag{4.36}$$

pri čemu je s P_{FA} označena vjerojatnost detekcije smetnje unutar ćelije razlučivosti. Prostorna gustoća smetnje λ po volumenu $\mathcal{V}$ tada je

$$\lambda=\frac{E(p_{FA})}{\mathcal{V}}=\frac{NP_{FA}}{\mathcal{V}}. \tag{4.37}$$

U stvarnim primjenama uobičajeno su zadovoljeni uvjeti da je $P_{FA}\ll 1$ i n reda veličine produkta NP_{FA}, pa se prema [113], relacija (4.36) može aproksimirati Poissonovom razdiobom,

$$p_{FA}(n)\approx\mathscr{P}(n;NP_{FA})=\exp(-NP_{FA})\frac{(NP_{FA})^{n}}{n!}=\exp(-\lambda\mathcal{V})\frac{(\lambda\mathcal{V})^{n}}{n!}. \tag{4.38}$$

Alternativno, kada gustoća smetnje nije apriorno poznata, primjenjuje se difuzni model smetnje [11]

$$p_{FA}(n_k)=p_{FA}(n_k-1)=\delta. \tag{4.39}$$

U nastavku odjeljka, analizirana je mjera kvalitete praćenja, integrirana u okvir vjerojatnosnog pridruživanja i okvir Viterbijeve metode, s primjenom višemodelne metode estimacije IMM.

4.3.1. Vjerojatnosna metoda s integriranom mjerom kvalitete praćenja

Model smetnje koja je u prostoru jednoliko raspodijeljena opisan je s (4.37), a za svaki trenutak opservacije $t_k\geq 0$, određeni broj kinematičkih mjerenja $\{z_{k,\imath},\imath=1,\ldots,n_k\}$ nalazi se unutar volumena valjanosti V_k kako je to za primjer dvodimenzionalnog pozicijskog mjerenja ilustrirano slikom 4.6, pri čemu se pretpostavlja da najviše jedno mjerenje potječe od cilja s vjerojatnošću detekcije P_D, a sva ostala od smetnje. Ako je pored kinematičkog mjerenja dostupan i otisak cilja $\{\boldsymbol{\zeta}_{k,\imath},\imath=1,\ldots,n_k\}$, skup mjerenja opisan je s kinematičkom komponentom i komponentom otiska kao $\mathbb{Z}_k=\{z_{k,\imath},\boldsymbol{\zeta}_{k,\imath},\imath=1,\ldots,n_k\}$, pri čemu se pretpostavlja da je, za razliku od šuma mjerenja kinematičke komponente, utjecaj šuma mjerenja komponente otiska zanemariv. Stoga, neka je definiran skup međusobno isključivih događaja $\mathbb{A}_k=\{A_{k,j},j=0,1,\ldots,n_k\}$ da u trenutku t_k kinematičko mjerenje $z_{k,j},j=1,\ldots,n_k$ potječe od cilja, odnosno da sva mjerenja potječu od smetnje [11],

$$A_{k,j}=\begin{cases} z_{k,j}\text{ potječe od cilja}, & j=1,\ldots,n_k \\ \text{niti jedno mjerenje ne potječe od cilja}, & j=0 \end{cases} \tag{4.40}$$

te događaj D_k da je cilj primjetljiv, unija međusobno isključivih događaja,

$$D_k = \bigcup_{j=0}^{n_k} A_{k,j} D_k. \tag{4.41}$$

Skup događaja primjetljivosti cilja do trenutka t_k tvori skup $\mathbb{D}^k = \{D_1, \ldots, D_k\}$, a skup mogućih pridruživanja do trenutka t_k označen je s

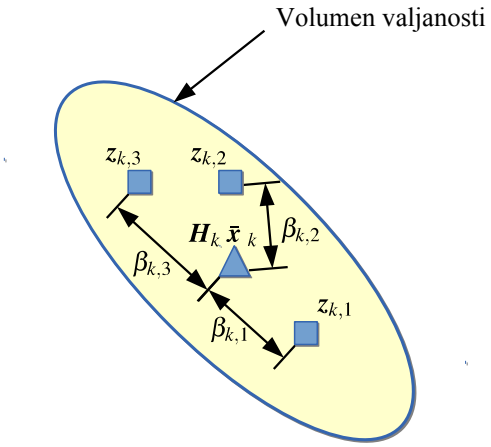
$$\mathbb{A}^k = \{\mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k}, \mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k} = \mathbb{A}^k_1, \ldots, \mathbb{A}^k_N\} \tag{4.42}$$

sa svojstvom da broj mogućih sljedova pridruživanja iznosi $N = \prod_{\kappa=1}^{k}(1+n_\kappa)$ i da je skup indeksa događaja dan s

$$\mathbb{J}^k = \{\mathbb{J}^k_1, \ldots, \mathbb{J}^k_N\} = \{\mathbb{j}^k, \mathbb{j}^k = \mathbb{J}^k_1, \ldots, \mathbb{J}^k_N\}. \tag{4.43}$$

Tako je jedan partikularni slijed događaja $\mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k}$ izražen kao

$$\mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k} = \{\mathbb{A}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}}, A_{k,j}, A_{k,j} \in \mathbb{A}_k\}. \tag{4.44}$$



Slika 4.6. Ilustracija višestrukih dvodimenzionalnih mjerenja $z_{k,1}$, $z_{k,2}$ i $z_{k,3}$ unutar volumena valjanosti s pripadajućim vjerojatnostima pridruživanja $\beta_{k,1}$, $\beta_{k,2}$ i $\beta_{k,3}$. Veličina $\boldsymbol{H}_k\bar{\boldsymbol{x}}_k$ je apriorno mjerenje.

Kako je pokazano u odjeljku 2.3.3, u optimalnoj višemodelnoj metodi estimacije s M modela postoji, do trenutka t_k, M^k mogućih sljedova modela. Skup svih mogućih sljedova opisan je s

$$\mathbb{M}^k = \{\mathbb{M}^k_1, \ldots, \mathbb{M}^k_{M^k}\} = \{\mathbb{M}^k_{\mathbb{i}^k}, \mathbb{M}^k_{\mathbb{i}^k} = \mathbb{M}^k_1, \ldots, \mathbb{M}^k_{M^k}\} \tag{2.276}$$

ili primjenom indeksa modela kao

$$\mathbb{I}^k = \left\{ \mathbb{I}_1^k, \ldots, \mathbb{I}_{M^k}^k \right\} = \left\{ \mathbb{i}^k, \mathbb{i}^k = \mathbb{I}_1^k, \ldots, \mathbb{I}_{M^k}^k \right\}, \tag{2.278}$$

pri čemu je jedan partikularni slijed dan s

$$\mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k = \{ \mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-1}}^{k-1}, m_k = m_i, m_i \in \mathbb{M} \}. \tag{4.45}$$

Poznato je da uvjetno očekivanje minimizira varijancu estimacije [72], pa je optimalna estimacija, uvjetovana partikularnim sljedovima događaja $\mathbb{A}_{\mathbb{j}^k}^k$ i modela $\mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k$, jednaka

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = E\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{D}^k, \mathbb{Z}^k \right) = \sum_{\mathbb{i}^k \in \mathbb{I}^k, \mathbb{j}^k \in \mathbb{J}^k} E\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, \mathbb{D}^k, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k, \mathbb{A}_{\mathbb{j}^k}^k, \mathbb{Z}^k \right) P\left(\mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k, \mathbb{A}_{\mathbb{j}^k}^k \,|\, \mathbb{D}^k, \mathbb{Z}^k \right), \tag{4.46}$$

pri čemu je združena vjerojatnost u rekurzivnom obliku dana s

$$\begin{aligned} P\left(\mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k, \mathbb{A}_{\mathbb{j}^k}^k \,|\, \mathbb{D}^k, \mathbb{Z}^k \right) &= P\left(m_k = m_i, A_{k,j} \,|\, \mathbb{D}^k, \mathbb{Z}^k, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-1}}^{k-1}, \mathbb{A}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1} \right) P\left(\mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-1}}^{k-1}, \mathbb{A}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1} \,|\, \mathbb{D}^k, \mathbb{Z}^k \right) \\ &= \frac{1}{c} p\left(\mathbb{Z}_k \,|\, \mathbb{D}^k, \mathbb{Z}^{k-1}, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-1}}^{k-1}, \mathbb{A}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1}, m_k = m_i, A_{k,j} \right) \cdot \\ &\quad \cdot P\left(\mathbb{M}_{\mathbb{i}^{k-1}}^{k-1}, \mathbb{A}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1} \,|\, \mathbb{D}^{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1} \right), \end{aligned} \tag{4.47}$$

vidi npr. [222]. Metoda klasičnog vjerojatnosnog pridruživanja zasniva se na temelju opservacija iz kurentnog vremenskog okvira što znači aproksimaciju skupa $\{\mathbb{A}_{\mathbb{j}^k}^k, \mathbb{D}^k\}$ sa skupom $\{A_{k,j}, D_k, A_{k,j} \in \mathbb{A}_k, D_k \in \mathbb{D}^k\}$ (primjena metode GPB1), a uz višemodelnu metodu kojom je provedena redukcija hipoteza spajanjem onih koje su za kurentni vremenski okvir jednake (vidi (2.282)), združena vjerojatnost (4.47) postaje

$$\begin{aligned} P\left(\mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k, \mathbb{A}_{\mathbb{j}^k}^k \,|\, \mathbb{D}^k, \mathbb{Z}^k \right) = P\left(\mathbb{A}_{\mathbb{j}^k}^k \,|\, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k, \mathbb{D}^k, \mathbb{Z}^k \right) P\left(\mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k \,|\, \mathbb{D}^k, \mathbb{Z}^k \right) &\approx P\left(A_{k,j} \,|\, D_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^k \right) \cdot \\ &\quad \cdot P\left(m_k = m_i \,|\, D_k, \mathbb{Z}^k \right). \end{aligned} \tag{4.48}$$

Tako je estimacija (4.46) aproksimirana s

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k \approx \sum_{m_i \in \mathbb{M}} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} \mathcal{M}_k^{(i)}, \tag{4.49}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} = E\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, D_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^k \right) &= \sum_{A_{k,j} \in \mathbb{A}_k} E\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, D_k, A_{k,j}, m_k = m_i, \mathbb{Z}^k \right) P\left(A_{k,j} \,|\, D_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^k \right) \\ &= \sum_{A_{k,j} \in \mathbb{A}_k} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i,j)} \beta_{k,j}^{(i)} \end{aligned} \tag{4.50}$$

estimacija pod hipotezom da je model m_i stvarni mod gibanja u trenutku t_k, a $\beta_{k,j}^{(i)} = P\left(A_{k,j} \,|\, D_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^k\right)$ uvjetna vjerojatnost događaja (4.40), odnosno vjerojatnost pridruživanja [8]. Estimacija opisana s (4.50) osnova je metode vjerojatnosnog pridruživanja i predstavlja srednju vrijednost preko svih estimacija pod hipotezom da svako od $\{z_{k,\iota}, \iota = 1, \ldots, n_k\}$ mjerenja pripada cilju uz razinu vjerovanja $\beta_{k,\iota}^{(i)}, \iota = 1, \ldots, n_k$, odnosno da nijedno mjerenje ne pripada cilju uz razinu vjerovanja $\beta_{k,0}$. Razlučivanje mjerenja koja potječu od smetnje u odnosu na ono koje potječe od cilja provodi se primjenom različitosti kinematičkih razdioba te dodatno, primjenom različitosti razdioba otiska. Stoga,

$$\beta_{k,j}^{(i)} = P\left(A_{k,j} \,|\, D_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^k\right) = P\left(A_{k,j} \,|\, D_k, \mathbb{Z}_k, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right), \tag{4.51}$$

a pomoću Bayesove formule,

$$\beta_{k,j}^{(i)} = \frac{1}{c} p\left(\mathbb{Z}_k \,|\, D_k, A_{k,j}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) P\left(A_{k,j} \,|\, D_k, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right). \tag{4.52}$$

Razdioba kinematičkog mjerenja koje potječe od cilja opisana je, pod pretpostavkom linearnog Gaussovog sustava, s

$$\begin{aligned} p(z_{k,j} \,|\, D_k, A_{k,j}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}) &= e_{k,j}^{(i)} \\ &= \frac{1}{P_G \sqrt{|2\pi \boldsymbol{S}_k^{(i)}|}} \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left(\left(z_{k,j} - \boldsymbol{H}_k^{(i)} \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}\right)^T \left(\boldsymbol{S}_k^{(i)}\right)^{-1} \left(z_{j,k} - \boldsymbol{H}_k^{(i)} \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}\right)\right) \\ &= P_G^{-1} \mathcal{N}\left(\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}; 0, \boldsymbol{S}_k^{(i)}\right), \quad j = 1, \ldots, n_k, \end{aligned} \tag{4.53}$$

pri čemu je $\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}$ inovacija, jednaka $z_{k,j} - \boldsymbol{H}_k^{(i)} \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}$. Stoga je vjerodostojnost mjerenja, uzevši u obzir i razdiobu otiska cilja $p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\cdot)$ i smetnje $p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\cdot)$,

$$p(\mathbb{Z}_k \,|\, D_k, A_{k,j}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}) = \begin{cases} V_k^{1-n_k} \ell_{k,j} e_{k,j}^{(i)} \displaystyle\prod_{\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota} \in \mathbb{Z}_k} p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}), & j = 1, \ldots, n_k \\ V_k^{-n_k} \displaystyle\prod_{\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota} \in \mathbb{Z}_k} p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}), & j = 0 \end{cases}, \tag{4.54}$$

pri čemu je s $\ell_{k,j}$ označen omjer vjerodostojnosti $p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,j}) / p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,j})$. Vjerojatnost događaja A_j, uvjetovana ukupnim brojem mjerenja $\nu = n$ unutar volumena valjanosti, izvedena je u [8]. Dok je ukupni broj valjanih mjerenja ν slučajna varijabla i n njena realizacija, N_{FA} označava broj lažnih mjerenja koji može biti ili $n-1$ (jedno mjerenje pripada cilju, ostala su

smetnja), ili 0 (sva mjerenja potječu od smetnje). Tako je vjerojatnost događaja A_j, uvjetovana pojavom n mjerenja, jednaka

$$\begin{aligned} P(A_j \,|\, D, \nu = n) &= P(A_j \,|\, D, N_{FA} = n-1, \nu = n)\, P(N_{FA} = n-1 \,|\, D, \nu = n) + \\ &\quad + P(A_j \,|\, D, N_{FA} = n, \nu = n)\, P(N_{FA} = n \,|\, D, \nu = n) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n} \cdot P(N_{FA} = n-1 | D, \nu = n) + 0 \cdot P(N_{FA} = n | D, \nu = n)\}, & j = 1, \ldots, n \\ 0 \cdot P(N_{FA} = n-1 | D, \nu = n) + 1 \cdot P(N_{FA} = n | D, \nu = n), & j = 0 \end{cases}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} P(N_{FA} = n-1 \,|\, D, \nu = n) &= \frac{P(\nu = n \,|\, D, N_{FA} = n-1) P(N_{FA} = n-1 \,|\, D)}{P(\nu = n \,|\, D)} \\ &= \frac{P_D P_G \, p_{FA}(n-1)}{P(\nu = n \,|\, D)}, \end{aligned} \tag{4.56}$$

pri čemu je $p_{FA}(\cdot)$ razdioba broja lažnih mjerenja i $P_D P_G$ vjerojatnost da je odjek cilja detektiran i da se vrijednost njegovog mjerenja nalazi unutar volumena valjanosti [8]. Vjerojatnost da sva mjerenja potječu od smetnje jednaka je

$$\begin{aligned} P(N_{FA} = n \,|\, D, \nu = n) &= \frac{P(\nu = n \,|\, D, N_{FA} = n)\, P(N_{FA} = n \,|\, D)}{P(\nu = n \,|\, D)} \\ &= \frac{(1 - P_D P_G)\, p_{FA}(n)}{P(\nu = n \,|\, D)}, \end{aligned} \tag{4.57}$$

gdje je

$$P(\nu = n \,|\, D) = P_D P_G \, p_{FA}(n-1) + (1 - P_D P_G)\, p_{FA}(n). \tag{4.58}$$

Primjenom (4.56) i (4.57), vjerojatnost događaja $A_{k,j}$ koji je uvjetovan brojem valjanih mjerenja za trenutak t_k iznosi

$$\begin{aligned} P(A_{k,j} \,|\, D_k, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}) &= P(A_{k,j} \,|\, D_k, n_k) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n_k} \frac{P_D P_G}{P_D P_G + (1 - P_D P_G) \frac{p_{FA}(n_k)}{p_{FA}(n_k - 1)}}, & j = 1, \ldots, n_k \\ \frac{p_{FA}(n_k)}{p_{FA}(n_k - 1)} \frac{1 - P_D P_G}{P_D P_G + (1 - P_D P_G) \frac{p_{FA}(n_k)}{p_{FA}(n_k - 1)}}, & j = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.59}$$

Za Poissonov model smetnje prema (4.38) i gustoću prostorne smetnje λ_k kao parametrom razdiobe,

$$P(A_{k,j}\,|\,D_k,n_k)=\begin{cases}\frac{P_DP_G}{P_DP_Gn_k+(1-P_DP_G)\,\lambda_kV_k}, & j=1,\ldots,n_k\\ \frac{(1-P_DP_G)\,\lambda_kV_k}{P_DP_Gn_k+(1-P_DP_G)\,\lambda_kV_k}, & j=0\end{cases}, \tag{4.60}$$

a za difuzni (neparametarski) model prema (4.39),

$$P(A_{k,j}\,|\,D_k,n_k)=\begin{cases}\frac{1}{n_k}P_DP_G, & j=1,\ldots,n_k\\ 1-P_DP_G, & j=0\end{cases}, \tag{4.61}$$

pri čemu su parametarski (4.60) i difuzni (4.61) model povezani uzoračkom gustoćom smetnje $\lambda_k=n_k/V_k$. Drugim riječima, dok primjena difuznog modela implicira estimaciju gustoće smetnje s n_k/V_k, točnija estimacija se postiže ili primjenom uvjetnog očekivanja broja mjerenja zbog smetnje [58, 219, 220] ili implicitno kroz estimaciju amplitudne razdiobe smetnje [63], vidi također odjeljak 4.4 te poglavlje 5. Uvrštenjem (4.38), (4.54) i (4.61) u (4.52) slijedi vjerojatnost pridruživanja za Poissonov model smetnje,

$$\beta_{k,j}^{(i)}=\begin{cases}e_{k,j}^{(i)}\ell_{k,j}\left(b_k+\sum_{\{z_{k,\iota},\zeta_{k,\iota}\}\in\mathbb{Z}_k}e_{k,\iota}^{(i)}\ell_{k,\iota}\right)^{-1}, & j=1,\ldots,n_k\\ b_k\left(b_k+\sum_{\{z_{k,\iota},\zeta_{k,\iota}\}\in\mathbb{Z}_k}e_{k,\iota}^{(i)}\ell_{k,\iota}\right)^{-1}, & j=0\end{cases}, \tag{4.62}$$

gdje je

$$b_k=\lambda_k\frac{1-P_DP_G}{P_DP_G} \tag{4.63}$$

i konstanta c u (4.52) jednaka

$$c=\sum_{A_{k,j}\in\mathbb{A}_k}p(\mathbb{Z}_k\,|\,D_k,A_{k,j},n_k,m_k=m_i,\mathbb{Z}^{k-1})P(A_{k,j}\,|\,D_k,n_k,m_k=m_i,\mathbb{Z}^{k-1}). \tag{4.64}$$

Vjerojatnost pridruživanja za difuzni model proizlazi zamjenom $\lambda_k=n_k/V_k$ u (4.63).

Prema (4.41), vjerojatnost primjetljivosti cilja jednaka je

$$\mathcal{D}_k=P(D_k\,|\,\mathbb{Z}^k)=P(D_k,A_{k,0}\,|\,\mathbb{Z}^k)+\sum_{j=1}^{n_k}P(D_k,A_{k,j}|\mathbb{Z}^k), \tag{4.65}$$

a znajući da mjerenja ili sva potječu od smetnje (bez obzira na to je li cilj primjetljiv ili ne) ili jedno mjerenje potječe od cilja i sva ostala od smetnje (što implicira i primjetljivost cilja), vrijedi

$$P(A_{k,0}\,|\,\mathbb{Z}^k)+\sum_{j=1}^{n_k}P(D_k,A_{k,j}\,|\,\mathbb{Z}^k)=1. \tag{4.66}$$

Budući da je prema [68] apriorna vjerojatnost da mjerenja ne potječu od cilja jednaka

$$P(A_{k,0}\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}) = 1 - P_D P_G\,\bar{\mathcal{D}}_k, \tag{4.67}$$

pri čemu je $\bar{\mathcal{D}}_k = P(D_k\,|\,\mathbb{Z}^{k-1})$ apriorna vjerojatnost primjetljivosti cilja, apriorna vjerojatnost da je cilj primjetljiv ali da niti jedno mjerenje ne potječe od njega iznosi

$$P(D_k, A_{k,0}\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}) = (1 - P_D P_G)\,\bar{\mathcal{D}}_k. \tag{4.68}$$

Apriorna vjerojatnost da jedno mjerenje potječe od cilja i ostala od smetnje je

$$P(A_{k,j}\,|\,D_k, \mathbb{Z}^{k-1}) = \frac{P_D P_G}{n_k}, \tag{4.69}$$

a vjerojatnost da niti jedno mjerenje ne potječe od cilja jednaka je

$$\begin{aligned} P(A_{k,0}\,|\,\mathbb{Z}^k) &= \frac{1}{c_k} p(\mathbb{Z}_k\,|\,A_{k,0}, n_k, \mathbb{Z}^{k-1})\, P(n_k\,|\,A_{k,0}, \mathbb{Z}^{k-1})\, P(A_{k,0}\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}) \\ &= \frac{\bar{n}_k\big(1 - P_D P_G\,\bar{\mathcal{D}}_k\big)}{c_k V_k^{n_k}} \prod_{\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota} \in \mathbb{Z}_k} p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}), \end{aligned} \tag{4.70}$$

pri čemu je konstanta c_k jednaka $p(\mathbb{Z}_k\,|\,\mathbb{Z}^{k-1})$. Nadalje, vjerojatnost da niti jedno mjerenje ne potječe od cilja iako je on primjetljiv (samo nije detektiran), jednaka je

$$\begin{aligned} P(D_k, A_{k,0}\,|\,\mathbb{Z}^k) &= \frac{1}{c_k} p(\mathbb{Z}_k\,|\,A_{k,0}, D_k, n_k, \mathbb{Z}^{k-1})\, P(n_k\,|\,A_{k,0}, D_k, \mathbb{Z}^{k-1})\, P(D_k, A_{k,0}\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}) \\ &= \frac{\bar{n}_k (1 - P_D P_G)\,\bar{\mathcal{D}}_k}{c_k V_k^{n_k}} \prod_{\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota} \in \mathbb{Z}_k} p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}), \end{aligned} \tag{4.71}$$

a vjerojatnost da jedan odjek potječe od cilja i ostali od smetnje,

$$\begin{aligned} P(D_k, A_{k,j}\,|\,\mathbb{Z}^k) &= \frac{1}{c_k} p(\mathbb{Z}_k\,|\,A_{k,j}, D_k, n_k, \mathbb{Z}^{k-1})\, P(n_k\,|\,A_{k,j}, D_k, \mathbb{Z}^{k-1})\, P(D_k, A_{k,j}\,|\,\mathbb{Z}^{k-1}) \\ &= \frac{P_D P_G \bar{n}_k \bar{\mathcal{D}}_k \sum_{m_i \in \mathbb{M}} P(m_k = m_i\,|\,D_{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}) \ell_{k,j} e_{k,j}^{(i)}}{c_k n_k V_k^{n_k - 1}} \prod_{\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota} \in \mathbb{Z}_k} p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}), \end{aligned} \tag{4.72}$$

pa iz (4.65) i (4.66) proizlazi vjerojatnost primjetljivosti cilja, integrirana u kontekst vjerojatnosnog pridruživanja i Poissonov model smetnje (4.38),

$$\mathcal{D}_k = \begin{cases} \dfrac{1 - P_D P_G \Big(1 - \frac{1}{\lambda_k} \sum_{m_i \in \mathbb{M}} P(m_k = m_i\,|\,D_{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}) \sum_{\{z_{k,\iota}, \boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}\} \in \mathbb{Z}_k} \ell_{k,\iota} e_{k,\iota}^{(i)}\Big)}{1 - P_D P_G \bar{\mathcal{D}}_k \Big(1 - \frac{1}{\lambda_k} \sum_{m_i \in \mathbb{M}} P(m_k = m_i\,|\,D_{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}) \sum_{\{z_{k,\iota}, \boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}\} \in \mathbb{Z}_k} \ell_{k,\iota} e_{k,\iota}^{(i)}\Big)} \bar{\mathcal{D}}_k, & n_k > 0 \\ \dfrac{1 - P_D P_G}{1 - P_D P_G \bar{\mathcal{D}}_k} \bar{\mathcal{D}}_k, & n_k = 0 \end{cases}. \tag{4.73}$$

Vjerojatnost primjetljivosti cilja pod hipotezom difuznog modela smetnje provodi se zamjenom λ_k s n_k/V_k. Prema [68], vjerojatnost primjetljivosti cilja unutar volumena motrenja propagira u skladu s Markovljevim svojstvom modela kao

$$\bar{\mathcal{D}}_{k+1} = P(D_{k+1}|D_k)\,\mathcal{D}_k + P(D_{k+1}|\bar{D}_k)(1-\mathcal{D}_k), \tag{4.74}$$

pri čemu su prijelazne vjerojatnosti $P(D_{k+1}|D_k)$ i $P(D_{k+1}|\bar{D}_k)$ parametri dizajna filtra.

Optimalni linearni estimator u smislu minimiziranja varijance greške je Kalmanov filtar, pa je estimacija $\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i,j)}$ u relaciji (4.50), pod hipotezom da je model m_i stvarni mod gibanja u t_k te uz apriornu estimaciju $\bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}$, jednaka [15]

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i,j)} = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} + \boldsymbol{K}_k^{(i)}(\boldsymbol{z}_{k,j} - \boldsymbol{H}_k^{(i)}\bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}) = \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} + \boldsymbol{K}_k^{(i)}\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}, & j = 1,\ldots,n_k \\ \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}, & j = 0 \end{cases}, \tag{4.75}$$

odnosno

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} = \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} + \boldsymbol{K}_k^{(i)} \sum_{z_{k,\iota}\in\mathbb{Z}_k} \tilde{\boldsymbol{z}}_{k,\iota}^{(i)} \beta_{k,\iota}^{(i)} = \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} + \boldsymbol{K}_k^{(i)}\tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)} \tag{4.76}$$

uz kovarijancu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_k^{(i)} &= E\left(\left(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}\right)\left(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} | D_k, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^k\right) \\ &= \sum_{A_{k,j}\in\mathbb{A}_k} E\left(\left(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}\right)\left(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} | D_k, A_{k,j}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^k\right)\beta_{k,j}^{(i)} \\ &= \sum_{A_{k,j}\in\mathbb{A}_k} \beta_{k,j}^{(i)}\boldsymbol{P}_k^{(i,j)} + \tilde{\boldsymbol{P}}_k^{(i)}, \end{aligned} \tag{4.77}$$

gdje je $\tilde{\boldsymbol{P}}_k^{(i)}$ kovarijanca raspršenja dana s [8]

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_k^{(i)} = \sum_{A_{k,j}\in\mathbb{A}_k} \beta_{k,j}^{(i)}\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i,j)}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i,j)}\right)^{\mathrm{T}} - \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4.78}$$

Kovarijanca estimacije pod hipotezom događaja $A_{k,0}$ da nijedno mjerenje ne potječe od cilja jednaka je

$$\boldsymbol{P}_k^{(i,0)} = E\left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)}\left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} | D_k, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right), \tag{4.79}$$

pri čemu je $\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)} = \boldsymbol{x}_k - \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}$. Za nalaženje ove kovarijance potrebno je poznavati razdiobu rezidualnog mjerenja $\tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)}$ koje potječe od cilja zato jer se (4.79) može pisati kao [223]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_k^{(i,0)} &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)} \left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} p\left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)} \,|\, D_k, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \mathrm{d}\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_z}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)} \left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} p\left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)} \,|\, \tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}, D_k, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \mathrm{d}\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)} \right) \\ &\quad p\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \,|\, D_k, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \mathrm{d}\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Znajući da je greška estimacije općenito $\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}} - \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{z}}$, razdioba greške apriorne estimacije, uvjetovana mjerenjem koje potječe od cilja, je

$$p\left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)} \,|\, \tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}\right) = \mathscr{N}\left(\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k^{(i)}; \boldsymbol{K}_k^{(i)} \tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}, \mathbf{P}_k^{(i)}\right) \tag{4.81}$$

zbog toga što je

$$p\left(\tilde{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} \,|\, \tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}\right) = \mathscr{N}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}; 0, \mathbf{P}_k^{(i)}\right). \tag{4.82}$$

Uvrštenjem (4.81) u (4.80) slijedi

$$\boldsymbol{P}_k^{(i,0)} = \int_{\mathbb{R}^{n_z}} \left(\mathbf{P}_k^{(i)} + \boldsymbol{K}_k^{(i)} \tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{K}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} \right) p\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \,|\, D_k, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \mathrm{d}\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}. \tag{4.83}$$

Razdioba rezidualnog mjerenja $\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}$ uvjetovana događajem $A_{k,0}$, znajući da cilj ili nije detektiran (indeks detekcije d_k jednak je 0) ili je detektiran ($d_k = 1$), ali se nalazi izvan volumena valjanosti, jednaka je

$$\begin{aligned} p\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \,|\, D_k, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) &= p\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \,|\, D_k, d_k = 1, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \cdot \\ &\quad \cdot P\left(d_k = 1 \,|\, D_k, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) + \\ &\quad + p\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \,|\, D_k, d_k = 0, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \cdot \\ &\quad \cdot P\left(d_k = 0 \,|\, D_k, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right). \end{aligned} \tag{4.84}$$

Primjenom Bayesovog pravila na (4.84) te uvažavajući neovisnosti događaja $A_{k,0}$ i d_k o modelu m_i, povijesti mjerenja $\mathbb{Z}^{k-1}$ i broju mjerenja n_k, proizlazi

$$\begin{aligned} p\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \,|\, D_k, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) &= \frac{1}{P\left(A_{k,0}, n_k \,|\, D_k\right)} \cdot \\ &\quad \cdot \Bigg(p\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \,|\, D_k, d_k = 1, A_{k,0}, m_k = m_i, n_k, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \cdot \\ &\quad \cdot P\left(A_{k,0}, n_k \,|\, D_k, d_k = 1\right) P\left(d_k = 1 \,|\, D_k\right) + \\ &\quad + p\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \,|\, D_k, d_k = 0, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \cdot \\ &\quad \cdot P\left(A_{k,0}, n_k \,|\, D_k, d_k = 0\right) P\left(d_k = 0 \,|\, D_k\right) \Bigg). \end{aligned} \tag{4.85}$$

Neka je definirana indikatorska funkcija

$$\mathbf{1}_{V_k^{(i)}}\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \in V_k^{(i)} \\ 0, & \text{ako je } \tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \notin V_k^{(i)} \end{cases}. \tag{4.86}$$

Razdioba rezidualnog mjerenja (4.85) tada je, vidi također (4.55) i (4.57),

$$\begin{aligned} p\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} \,|\, D_k, A_{k,0}, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = \frac{1}{(1-P_D P_G)\, p_{FA}(n_k)} \Bigg(& \frac{1}{1-P_G} \mathcal{N}\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}; 0, \boldsymbol{S}_k^{(i)}\right) \cdot \\ & \cdot \left(1 - \mathbf{1}_{V_k^{(i)}}\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}\right)\right)(1-P_G)\, p_{FA}(n_k)\, P_D + \\ & + \mathcal{N}\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}; 0, \boldsymbol{S}_k^{(i)}\right) p_{FA}(n_k)(1-P_D) \Bigg) \\ = \frac{1 - P_D \mathbf{1}_{V_k^{(i)}}\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}\right)}{1-P_D P_G} & \mathcal{N}\left(\tilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}; 0, \boldsymbol{S}_k^{(i)}\right) \end{aligned} \tag{4.87}$$

što uvrštenjem u (4.83) daje

$$\boldsymbol{P}_k^{(i,0)} = \bar{\boldsymbol{P}}_k^{(i)} + \frac{P_D P_G (1 - c_\gamma)}{1 - P_D P_G} \boldsymbol{K}_k^{(i)} \boldsymbol{S}_k^{(i)} \left(\boldsymbol{K}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{4.88}$$

pri čemu je c_γ omjer nepotpunih gama-funkcija [220],

$$c_\gamma = \frac{\Gamma_{\gamma/2}\left(\frac{n_z}{2}+1\right)}{\frac{n_z}{2}\Gamma_{\gamma/2}\left(\frac{n_z}{2}\right)}, \tag{4.89}$$

i

$$\Gamma_p(r) = \int_0^p x^{r-1} \exp(-x)\, \mathrm{d}x. \tag{4.90}$$

Uz beskonačno veliki volumen valjanosti, kovarijanca $\boldsymbol{P}_k^{(i,0)}$ postaje jednaka apriornoj kovarijanci $\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(i)}$, a prema [219, 220],

$$\sum_{A_{k,j} \in \mathbb{A}_k} \beta_{k,j}^{(i)} \boldsymbol{P}_k^{(i,j)} = \beta_{k,0}^{(i)} \boldsymbol{P}_k^{(i,0)} + \left(1 - \beta_{k,0}^{(i)}\right) \mathbf{P}_k^{(i)}, \tag{4.91}$$

uz zamjenu $\beta_{k,0}^{(i)}$ s $1 - \sum_{j=1}^{n_k} \beta_{k,j}^{(i)}$ i

$$\mathbf{P}_k^{(i)} = \bar{\boldsymbol{P}}_k^{(i)} - \boldsymbol{K}_k^{(i)} \left(\boldsymbol{S}_k^{(i)}\right)^{-1} \left(K_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4.92}$$

Kovarijanca raspršenja (4.78) može se pisati kao

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_k^{(i)} = \sum_{A_{k,j}\in\mathbb{A}_k} \beta_{k,j}^{(i)} \left(\bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} + \boldsymbol{K}_k^{(i)}\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}\right)\left(\bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} + \boldsymbol{K}_k^{(i)}\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} - \\ - \left(\bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} + \boldsymbol{K}_k^{(i)} \sum_{A_{k,j}\in\mathbb{A}_k} \beta_{k,j}^{(i)}\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}\right)\left(\bar{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} + \boldsymbol{K}_k^{(i)} \sum_{A_{k,j}\in\mathbb{A}_k} \beta_{k,j}^{(i)}\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4.93}$$

Kako za vjerojatnosti pridruživanja vrijedi da je $\sum_{j=0}^{n_k}\beta_{k,j}^{(i)} = 1$, uz $\sum_{z_{k,j}\in\mathbb{Z}_k}\beta_{k,j}^{(i)}\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)} = \tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)}$, kovarijanca raspršenja postaje

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_k^{(i)} = \boldsymbol{K}_k^{(i)} \left(\sum_{z_{k,j}\in\mathbb{Z}_k} \beta_{k,j}^{(i)}\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}\left(\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} - \tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)}\left(\tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{K}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{4.94}$$

pa je primjenom (4.91) i (4.94), kovarijanca estimacije (4.77) jednaka

$$\boldsymbol{P}_k^{(i)} = \beta_{k,0}^{(i)}\boldsymbol{P}_k^{(i,0)} + \left(1-\beta_{k,0}^{(i)}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{P}}_k^{(i)} - \boldsymbol{K}_k^{(i)}\boldsymbol{S}_k^{(i)}\left(\boldsymbol{K}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\right) + \\ + \boldsymbol{K}_k^{(i)}\left(\sum_{z_{k,j}\in\mathbb{Z}_k} \beta_{k,j}^{(i)}\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}\left(\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} - \tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)}\left(\tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{K}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4.95}$$

Metoda vjerojatnosnog pridruživanja s integriranom mjerom kvalitete praćenja uklapa se, primjenom početnog uvjeta $m_k = m_i$ u relaciji rekurzivne estimacije (4.49), u okvir metode IMM, vidi odjeljak 2.3.3, pri čemu je jedan ciklus rekurzije, $\forall m_i, m_j \in \mathbb{M}$, opisan koracima [16, 68]:

K1 inicijalizacija s

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)} = \sum_{m_j\in\mathbb{M}} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(j)} P\left(m_{k-1} = m_j \,|\, m_k = m_i, D_{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}\right), \tag{2.298}$$

$$\boldsymbol{P}_{k-1}^{(i*)} = \sum_{m_j\in\mathbb{M}} \left(\boldsymbol{P}_{k-1}^{(j)} + \left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(j)} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)}\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(j)} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)}\right)^{\mathrm{T}}\right) \cdot \\ \cdot P\left(m_{k-1} = m_j \,|\, m_k = m_i, D_{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \tag{2.301}$$

i apriorna vjerojatnost modela

$$P\left(m_k = m_i \,|\, D_{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = \sum_{m_j\in\mathbb{M}} P_{ji}\,\mathcal{M}_{k-1}^{(j)}, \tag{2.300}$$

$$P\left(m_{k-1} = m_j \,|\, m_k = m_i, D_{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = \frac{P_{ji}\,\mathcal{M}_{k-1}^{(j)}}{P\left(m_k = m_i \,|\, D_{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}\right)}, \tag{2.299}$$

pri čemu je vjerojatnost $P_{ji} = P(m_k = m_i \,|\, m_{k-1} = m_j), m_i, m_j \in \mathbb{M}$, parametar dizajna filtra

K2 estimacija prema (4.76),

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} = \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)} + \boldsymbol{K}_k^{(i)} \tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)}, \tag{4.76}$$

$$\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(i)} = \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)} \boldsymbol{P}_{k-1}^{(i*)} \left(\boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{(i)} \boldsymbol{Q}_{k-1}^{(i)} \left(\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2.306}$$

$$\boldsymbol{S}_k^{(i)} = \boldsymbol{H}_k^{(i)} \bar{\boldsymbol{P}}_k^{(i)} \left(\boldsymbol{H}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k^{(i)}, \tag{2.305}$$

$$\boldsymbol{K}_k^{(i)} = \bar{\boldsymbol{P}}_k^{(i)} \left(\boldsymbol{H}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{S}_k^{(i)}\right)^{-1}, \tag{2.304}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_k^{(i)} = {} & \beta_{k,0}^{(i)} \boldsymbol{P}_k^{(i,0)} + \left(1 - \beta_{k,0}^{(i)}\right) \left(\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(i)} - \boldsymbol{K}_k^{(i)} \boldsymbol{S}_k^{(i)} \left(\boldsymbol{K}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\right) + \\ & + \boldsymbol{K}_k^{(i)} \left(\sum_{z_{k,j} \in \mathbb{Z}_k} \beta_{k,j}^{(i)} \tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)} \left(\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,j}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} - \tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)} \left(\tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} \right) \left(\boldsymbol{K}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{4.95}$$

K3 vjerodostojnost mjerenja

$$\begin{aligned} \Lambda_k^{(i)} &= p\left(\mathbb{Z}_k \,|\, D_k, n_k, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \\ &= p\left(\mathbb{Z}_k \,|\, D_k, n_k, m_k = m_i, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(i*)}\right) \\ &= \sum_{A_{k,j} \in \mathbb{A}_k} p\left(\mathbb{Z}_k \,|\, D_k, A_{k,j}, n_k, m_k = m_i, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(i*)}\right) \beta_{k,j}^{(i)} \end{aligned} \tag{4.96}$$

i vjerojatnost modela

$$\mathcal{M}_k^{(i)} = \frac{\Lambda_k^{(i)} \sum\limits_{m_j \in \mathbb{M}} P_{ji}\, \mathcal{M}_{k-1}^{(j)}}{\sum\limits_{m_i, m_j \in \mathbb{M}^2} \Lambda_k^{(i)} P_{ji}\, \mathcal{M}_{k-1}^{(j)}}, \tag{2.307}$$

pri čemu je za parametarski opisanu smetnju (4.38), vjerodostojnost $\Lambda_k^{(i)}$ dana primjenom (4.60), (4.53) i (4.63) u (*2.307*),

$$\Lambda_k^{(i)} = \frac{P_D P_G V_k^{1-n_k}}{P_D P_G n_k + (1 - P_D P_G) V_k \lambda_k} \left(b_k + \sum_{\{z_{k,\iota}, \boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}\} \in \mathbb{Z}_k} e_{k,\iota}^{(i)} \ell_{k,\iota} \right) \prod_{\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota} \in \mathbb{Z}_k} p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}), \tag{4.97}$$

što uz zamjenu λ_k s n_k/V_k daje vjerodostojnost za neparametarski (difuzni) model smetnje

K4 krajnja estimacija,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \sum_{m_i \in \mathbb{M}} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} \mathcal{M}_k^{(i)}, \tag{4.98}$$

$$\boldsymbol{P}_k = \sum_{m_i \in \mathbb{M}} \left(\boldsymbol{P}_k^{(i)} + \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} - \hat{\boldsymbol{x}}_k\right) \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)} - \hat{\boldsymbol{x}}_k\right)^{\mathrm{T}} \right) \mathcal{M}_k^{(i)} \tag{4.99}$$

K5 vjerojatnost primjetljivosti cilja pod hipotezom Poissonova modela smetnje,

$$\mathcal{D}_k = \begin{cases} \frac{1-P_D P_G\left(1-\frac{1}{\lambda_k}\sum_{m_i\in\mathbb{M}} P(m_k=m_i\,|\,D_{k-1},\mathbb{Z}^{k-1})\sum_{\{z_{k,\iota},\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}\}\in\mathbb{Z}_k}\ell_{k,\iota}e_{k,\iota}^{(i)}\right)}{1-P_D P_G\bar{\mathcal{D}}_k\left(1-\frac{1}{\lambda_k}\sum_{m_i\in\mathbb{M}} P(m_k=m_i\,|\,D_{k-1},\mathbb{Z}^{k-1})\sum_{\{z_{k,\iota},\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}\}\in\mathbb{Z}_k}\ell_{k,\iota}e_{k,\iota}^{(i)}\right)}\bar{\mathcal{D}}_k, & n_k > 0 \\ \frac{1-P_D P_G}{1-P_D P_G\bar{\mathcal{D}}_k}\bar{\mathcal{D}}_k, & n_k = 0 \end{cases}, \quad (4.73)$$

a pod hipotezom difuznog modela smetnje, vjerojatnost primjetljivosti cilja proizlazi iz (4.73) zamjenom λ_k s n_k/V_k.

U pravilu se estimacija pod hipotezom da je u trenutku t_k mod gibanja m_i, $\forall m_i \in \mathbb{M}$, provodi istim skupom mjerenja $\mathbb{Z}_k$, pa je volumen valjanosti V_k, prostor u opservacijskoj domeni, određen kao $V_k = \cup_{m_i\in\mathbb{M}} V_k^{(i)}$, pri čemu je volumen valjanosti $V_k^{(i)}$ određen kovarijancom inovacije (2.305). Veličina volumena V_k, uzevši u obzir moguća preklapanja pojedinačnih volumena $V_k^{(i)}$ pri jako izraženoj smetnji, dana je aproksimacijom [68, 70]

$$V_k = \max\left(n_k\frac{\sum_{m_i\in\mathbb{M}} V_k^{(i)}}{\sum_{m_i\in\mathbb{M}} n_k^{(i)}}, \max_i\left(V_k^{(i)}\right)\right),\ n_k > 0, \quad (4.100)$$

pri čemu je $n_k^{(i)}$ broj mjerenja unutar volumena valjanosti $V_k^{(i)}$ i n_k ukupni broj valjanih mjerenja dan kao $n_k = |\mathbb{Z}_k|$.

Dok u točnosti estimacije pri jako izraženoj smetnji ne postoje značajna odstupanja opisane metode IPDA, uklopljene u okvir višemodelne estimacije IMM, i metode IMMPDA [34] koja kvalitetu praćenja ocjenjuje kroz vjerojatnost neprimjetljivog cilja (primjenom uvjeta da je $P_D = 0$ u (4.97), iz čega proizlazi vjerodostojnost neprimjetljivog cilja kao $\Lambda_k^{(i)} = V_k^{-n_k}\prod_{z_{k,\iota}\in\mathbb{Z}_k} p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota})$), u pogledu vjerojatnosti potvrde lažne staze metoda IPDA značajno je bolja, pa tako npr. za gustoću smetnje $\lambda = 10^{-4}$ m^{-2} ostvaruje oko deset puta manju vjerojatnost potvrde lažne staze [68]. Prema [220], staza se potvrđuje u trenutku t_k ako je vjerojatnost postojanja cilja u prethodnom trenutku $\mathcal{D}_{k-1} = 1$ i nikad se ne potvrđuje ako u zadanom trenutku nema niti jednog valjanog mjerenja i vrijedi da je $\mathcal{D}_{k-1} < 1$. U realnim slučajevima kada je $\mathcal{D}_{k-1} < 1$ i postoji barem jedno valjano mjerenje, vjerojatnost potvrde ovisna je o gustoći smetnje λ_k i vjerodostojnosti valjanih mjerenja (4.54). S obzirom na početno mjerenje u trenutku t_0, za svako od n_1 mjerenja čija se vrijednost za trenutak t_1 nalazi unutar volumena valjanosti (4.7), provodi se inicijalizacija posebne staze i Kalmanovog filtra prema (4.8) i (4.9). Naredne opservacije uz visoku vjerojatnost potvrđuju stazu stvarnog cilja i završavaju one inicirane smetnjom, pri čemu je vjerojatnost potvrde staze lažnog cilja niska. Kako staze mogu imati zajednička mjerenja zbog preklapanja volumena valjanosti, dok se ne razluči ona stvarnog cilja, primjenjuje se neka od metoda pridruživanja prikladna za istovremeno praćenje više ciljeva. Prednost metode združenog integriranog vjerojatnosnog pridruživanja podataka (JIPDA) [70] je u tome što pri određivanju vjerojatnosti primjetljivosti cilja primjenjuje jednak broj hipoteza kao i metoda JPDA (koja uvijek pretpostavlja primjetljivost cilja), a u slučaju staze samo jednog

cilja postaje identična metodi IPDA koja je opisana u ovoj sekciji. Prijelazne vjerojatnosti primijenjene u opisu propagacije vjerojatnosti primjetljivosti cilja (4.74) trebaju zadovoljiti uvjet potvrde cilja

$$P(\text{cilj je primjetljiv}) = \frac{(1-P_D P_G)P(D_{k+1}|D_k)}{1-P_D P_G P(D_{k+1}|D_k)}, \quad P(D_{k+1}|\bar{D}_k) < P(D_{k+1}|D_k), \tag{4.101}$$

pri čemu rezultati simulacije pokazuju da je pravilan odabir parametra $P(D_{k+1}|D_k)$ ključan [220]. Staza se potvrđuje u t_k ako je aposteriorna vjerojatnost primjetljivosti cilja $\mathcal{D}_{k-1}$ veća od (4.101) i u kurentnoj opservaciji postoje valjana mjerenja, a završava ako je apriorna vjerojatnost primjetljivosti cilja $\bar{\mathcal{D}}_k$ u trenutku t_k manja od

$$P(\text{cilj nije primjetljivi}) = \frac{(1-P_D P_G)\bar{\mathcal{D}}_1}{1-P_D P_G \bar{\mathcal{D}}_1}, \tag{4.102}$$

ali samo ako u kurentnoj opservaciji (u trenutku t_k) ne postoji nijedno valjano mjerenje ili se s visokom sigurnošću pretpostavlja da sva valjana mjerenja potječu od smetnje što implicira da vjerodostojnost mjerenja bez otiska cilja $\sum_{m_i\in\mathbb{M}} P(m_k = m_i \,|\, D_{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}) \sum_{\boldsymbol{z}_{k,\iota}\in\mathbb{Z}_k} e_{k,\iota}^{(i)}$ mora biti znatno manja od vrijednosti gustoće smetnje λ_k.

4.3.2. Viterbijeva metoda s integriranom mjerom kvalitete praćenja

Viterbijev algoritam, izvorno primijenjen na telekomunikacijske probleme [19], u primjeni pridruživanja podataka nalazi najvjerodostojniji slijed pridruživanja mjerenja postojećoj stazi. Izvorno je grupni algoritam jer pridruživanje provodi nad grupom podataka iz različitih vremena opservacija, kroz određeni vremenski interval. U okviru metode najvjerodostojnijeg pridruživanja podataka predložen je u [31] i proširen integriranom mjerom kvalitete praćenja u [224]. U [69], koncept Viterbijevog pridruživanja primijenjen je na istovremeno praćenje više ciljeva, integracijom metode testiranja višestrukih hipoteza, a metodički prikaz algoritma, s primjenom na praćenje jednog i istovremeno praćenje više ciljeva, pružen je u [36]. Za razliku od [36, 69] gdje je uveden koncept postojanja cilja, u ovom je radu primijenjen koncept njegove primjetljivosti [220]. Cilj koji je primjetljiv uvijek se može detektirati s vjerojatnošću detekcije P_D, a ako nije primjetljiv, njegova detekcija nije moguća iako se on i dalje nalazi unutar volumena motrenja. Dok primjena koncepta postojanja cilja zahtijeva, ako algoritam ukaže na to, završetak ili ponovnu provedbu inicijalizacije staze, primjenom koncepta primjetljivosti nema potrebe za tim što je pogodno u slučajevima praćenja kada cilj povremeno postaje neprimjenljiv.

Neka je na temelju skupa mjerenja $\mathbb{Z}_k = \{\boldsymbol{z}_{k,\iota}, \boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}, \iota = 1,\ldots,n_k\}$ u trenutku t_k, unutar volumena promatranja $\mathcal{V}_k$, dan skup međusobno isključivih događaja $\mathbb{A}_k = \{A_{k,j}, j = -1,0,\ldots,n_k\}$ koji su definirani kao

$$A_{k,j} = \begin{cases} \text{mjerenje } \{z_{k,j}, \boldsymbol{\zeta}_{k,j}\} \text{ potječe od cilja,} & j = 1,\ldots,n_k \\ \text{niti jedno mjerenje ne potječe od cilja, a cilj je primjetljiv,} & j = 0 \\ \text{niti jedno mjerenje ne potječe od cilja i cilj nije primjetljiv,} & j = -1 \end{cases} . \tag{4.103}$$

Koncept slijeda pridruživanja mjerenja postojećoj stazi ilustriran je slikom 4.7 usmjerenim rešetkastim dijagramom, gdje su čvorovi događaji $\{A_{k,j}, j = -1,0,\ldots,n_k\}$, a lukovi prijelazne vjerodostojnosti iz događaja indeksa $j_{k-1} = \mathrm{j}$ (prethodna opservacija), u događaj indeksa $j_k = \mathrm{i}$ (kurentna opservacija). Skup mogućih sljedova dan je s

$$\mathbb{A}^k = \{\mathbb{A}^k_1,\ldots,\mathbb{A}^k_N\} = \{\mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k}, \mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k} = \mathbb{A}^k_1,\ldots,\mathbb{A}^k_N\}, \tag{4.42}$$

pri čemu je $N = \prod_{\kappa=1}^{k}(2+n_\kappa)$ broj mogućih sljedova, a $\mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k}$ jedan partikularni slijed događaja,

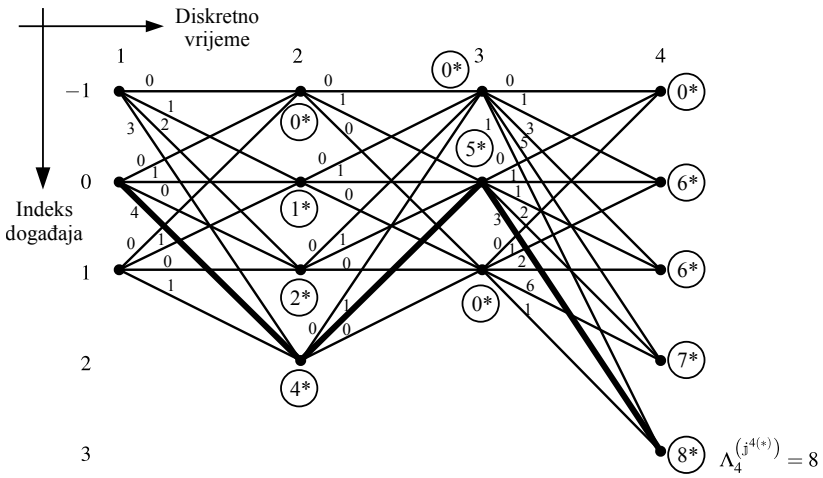
$$\mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k} = \{A_{1,j_1},\ldots,\mathbb{A}_{k,j_k}\}. \tag{4.104}$$

Skup indeksa koji odgovara (4.42) dan je s

$$\mathbb{J}^k = \{\mathbb{J}^k_1,\ldots,\mathbb{J}^k_N\} = \{\mathbb{j}^k, \mathbb{j}^k = \mathbb{J}^k_1,\ldots,\mathbb{J}^k_N\}, \tag{4.43}$$

pri čemu je

$$\mathbb{j}^k = \{j_1,\ldots,j_k\} = \{j_\kappa, j_\kappa = -1,0,\ldots,n_\kappa, \kappa = 1,\ldots,k\}. \tag{4.105}$$



Slika 4.7. Usmjereni rešetkasti dijagram ilustrira Viterbijevu metodu odabira najvjerodostojnijeg slijeda pridruživanja mjerenja stazi $\mathbb{j}^{4(*)}$ (debela linija) između, s vremenom rastućeg, broja sljedova. Broj pored čvora označava logaritamsku prijelaznu vjerodostojnost iz događaja indeksa $j_{k-1} = \mathrm{j}$ u događaj indeksa $j_k = \mathrm{i}$, a broj sa zvjezdicom maksimalnu logaritamsku vjerodostojnost za taj čvor. Logaritamska vjerodostojnost slijeda $\mathbb{j}^k$ izražena je zbrojem logaritamskih vjerodostojnosti duž staze kroz rešetkasti dijagram.

Kao i u metodi vjerojatnosnog pridruživanja, vidi odjeljak 4.3.1, primjenom metode optimalne višemodelne estimacije s M modela, do trenutka t_k postoji M^k mogućih sljedova. Skup svih mogućih sljedova modela opisan je s

$$\mathbb{M}^k = \{\mathbb{M}_1^k, \ldots, \mathbb{M}_{M^k}^k\} = \{\mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k, \mathbb{M}_{\mathbb{i}^k}^k = \mathbb{M}_1^k, \ldots, \mathbb{M}_{M^k}^k\}, \tag{2.276}$$

odnosno primjenom indeksa kao

$$\mathbb{I}^k = \left\{\mathbb{I}_1^k, \ldots, \mathbb{I}_{M^k}^k\right\} = \left\{\mathbb{i}^k, \mathbb{i}^k = \mathbb{I}_1^k, \ldots, \mathbb{I}_{M^k}^k\right\}. \tag{2.278}$$

Optimalno pridruživanje, uz poznatu povijest vektora stanja $\mathbb{x}^k = \{\boldsymbol{x}_\kappa, \kappa = 1, \ldots, k\}$ i mjerenja $\mathbb{Z}^k = \{\mathbb{Z}_\kappa, \kappa = 1, \ldots, k\}$, nalaženje je skupa indeksa tako da je združena vjerodostojnost $p(\mathbb{A}_{\mathbb{j}^k}^k, \mathbb{Z}^k \,|\, \mathbb{x}^k)$ maksimalna, odnosno

$$\mathbb{j}^{k(*)} = \arg\max_{\mathbb{j}^k} \left(p(\mathbb{A}_{\mathbb{j}^k}^k, \mathbb{Z}^k \,|\, \mathbb{x}^k)\right). \tag{4.106}$$

Budući da stvarno stanje praćenog cilja nije poznato, nalaženje slijeda indeksa uvjetovano je skupovima poznatih estimacija $\hat{\mathbb{x}}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1}$ i kovarijanci $\mathbb{P}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1}$, pod hipotezom slijeda događaja koji su definirani skupom indeksa $\mathbb{j}^{k-1}$ te uz činjenicu da se pridruživanje u trenutku t_k provodi na temelju apriornih mjerenja $\bar{\mathbb{Z}}_{\mathbb{j}^k}$ [36]. Tako se (4.106) aproksimira s

$$\mathbb{j}^{k(*)} = \arg \max_{\{j_1, \ldots, j_k\}} \left(p\left(A_{1,j_1}, \ldots, A_{k,j_k}, \mathbb{Z}_1, \ldots, \mathbb{Z}_k \,|\, \hat{\mathbb{x}}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1}, \mathbb{P}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1}\right)\right), \tag{4.107}$$

pri čemu je $\hat{\mathbb{x}}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1} = \left\{\hat{\boldsymbol{x}}_1^{(\mathbb{j}^1)}, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathbb{j}^{k-1})}\right\}$ i $\mathbb{P}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1} = \left\{\boldsymbol{P}_1^{(\mathbb{j}^1)}, \ldots, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathbb{j}^{k-1})}\right\}$. U stvarnovremenskoj problematici, estimacija se provodi neposredno nakon opservacije pa se optimalno pridruživanje svodi na određivanje događaja (čvora) koji je u kurentnom trenutku najvjerodostojniji, a uvjetovan je cjelokupnom poviješću estimacije staze i njene kovarijance. U rekurzivnom obliku ovisi o vjerodostojnosti partikularnog čvora (npr. j) iz prethodne opservacije i vjerodostojnosti događaja koji opisuje prijelaz iz tog (partikularnog) čvora u kurentni čvor (npr. i). Stoga je definiran partikularni slijed događaja $\mathbb{A}_{\{\mathbb{j}^{k-1}, \mathrm{i}\}}^k$ s posljednjim članom koji je događaj indeksa $j_k = \mathrm{i}$, izražen kao

$$\mathbb{A}_{\{\mathbb{j}^{k-1}, \mathrm{i}\}}^k = \mathbb{A}_{\{\mathbb{j}^{k-2}, \mathrm{j}\}}^{k-1} \cap A_{k,\mathrm{i}}, \tag{4.108}$$

čija je vjerodostojnost dana s

$$
\begin{aligned}
p\left(\mathbb{A}^{k}_{\{\mathbb{j}^{k-1},\mathrm{i}\}}\mathbb{Z}^{k}\,|\,\hat{\mathbb{x}}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}},\mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}}\right) &= p\left(\mathbb{A}^{k-1}_{\{\mathbb{j}^{k-2},\mathrm{j}\}},A_{k,\mathrm{i}},\mathbb{Z}_k,\mathbb{Z}^{k-1}\,|\,\hat{\mathbb{x}}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}},\mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}}\right)\\
&= p\left(A_{k,\mathrm{i}},\mathbb{Z}_k\,|\,\mathbb{A}^{k-1}_{\{\mathbb{j}^{k-2},\mathrm{j}\}},\mathbb{Z}^{k-1},\hat{\mathbb{x}}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}},\mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}}\right)\cdot\\
&\quad\cdot p\left(\mathbb{A}^{k-1}_{\{\mathbb{j}^{k-2},\mathrm{j}\}},\mathbb{Z}^{k-1}\,|\,\hat{\mathbb{x}}^{k-2}_{\mathbb{j}^{k-2}},\mathbb{P}^{k-2}_{\mathbb{j}^{k-2}}\right)\\
&\approx p\left(A_{k,\mathrm{i}},\mathbb{Z}_k\,|\,A_{k-1,\mathrm{j}},\hat{\boldsymbol{x}}^{(\mathrm{j})}_{k-1},\boldsymbol{P}^{(\mathrm{j})}_{k-1}\right)\cdot\\
&\quad\cdot p\left(\mathbb{A}^{k-1}_{\{\mathbb{j}^{k-2},\mathrm{j}\}},\mathbb{Z}^{k-1}\,|\,\hat{\mathbb{x}}^{k-2}_{\mathbb{j}^{k-2}},\mathbb{P}^{k-2}_{\mathbb{j}^{k-2}}\right)\\
&= \Lambda_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\})}\,p\left(\mathbb{A}^{k-1}_{\{\mathbb{j}^{k-2},\mathrm{j}\}},\mathbb{Z}^{k-1}\,|\,\hat{\mathbb{x}}^{k-2}_{\mathbb{j}^{k-2}},\mathbb{P}^{k-2}_{\mathbb{j}^{k-2}}\right)
\end{aligned}
\tag{4.109}
$$

pod pretpostavkom da estimacija (pa tako i događaj) za čvor j u trenutku t_{k-1} ne ovisi o slijedu pridruživanja i estimacije do tog trenutka (vidi također (2.284) za metodu redukcije hipoteza GPB1), odnosno

$$
\left\{\mathbb{A}^{k-1}_{\{\mathbb{j}^{k-2},\mathrm{j}\}},\hat{\mathbb{x}}^{k-1}_{\{\mathbb{j}^{k-2},\mathrm{j}\}},\mathbb{P}^{k-1}_{\{\mathbb{j}^{k-2},\mathrm{j}\}}\right\} \approx \left\{A_{k-1,\mathrm{j}},\hat{\boldsymbol{x}}^{(\mathrm{j})}_{k-1},\boldsymbol{P}^{(\mathrm{j})}_{k-1}\right\} \tag{4.110}
$$

[36]. Prvi član na desnoj strani u (4.109) je prijelazna vjerodostojnost, a s drugim je provedena rekurzija. Skup indeksa najvjerodostojnijeg slijeda koji završava s događajem $A_{k,\mathrm{i}}$ dan je s

$$
\{\mathbb{j}^{k-1(*)},\mathrm{i}\} = \arg\max_{\mathbb{j}^{k-1}}\left(p\left(\mathbb{A}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}},A_{k,\mathrm{i}},\mathbb{Z}_k,\mathbb{Z}^{k-1}\,|\,\hat{\mathbb{x}}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}},\mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}}\right)\right),\ \mathrm{i}=-1,0,\ldots,n_k, \tag{4.111}
$$

uz vjerodostojnost koja je označena s $\Lambda_k^{(\mathrm{i})}$. Primjenom rekurzije (4.109), vjerodostojnost čvora i je

$$
\Lambda_k^{(\mathrm{i})} \approx \max_{j=-1,0,\ldots,n_{k-1}}\left(\Lambda_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\})}\,\Lambda_{k-1}^{(\mathrm{j})}\right) = \Lambda_k^{(\{\mathrm{j}^{(*)},\mathrm{i}\})}\,\Lambda_{k-1}^{(\mathrm{j}^{(*)})},\ \mathrm{i}=-1,0,\ldots,n_k, \tag{4.112}
$$

što je dinamičko programiranje sa širenjem prema naprijed. Indeks najvjerodostojnijeg čvora u kurentnom trenutku tako je

$$
\mathrm{i}^{(*)} = \arg\max_{\mathrm{i}=-1,0,\ldots,n_k}\left(\Lambda_k^{(\mathrm{i})}\right), \tag{4.113}
$$

što je ekvivalentno nalaženju skupa indeksa najvjerodostojnijeg slijeda

$$
\mathbb{j}^{k(*)} = \arg\max_{\mathbb{j}^k}\left(p\left(\mathbb{A}^{k}_{\mathbb{j}^k},\mathbb{Z}^{k}\,|\,\hat{\mathbb{x}}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}},\mathbb{P}^{k-1}_{\mathbb{j}^{k-1}}\right)\right). \tag{*4.107*}
$$

Prema (4.46), estimacija pod uvjetom partikularnog slijeda događaja $\mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k}$ i modela $\mathbb{M}^k_{\mathbb{i}^k}$ je

$$
\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathbb{j}^k)} = E\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k},\mathbb{Z}^k\right) = \sum_{\mathbb{i}^k\in\mathbb{I}^k} E\left(\boldsymbol{x}_k\,|\,\mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k},\mathbb{M}^k_{\mathbb{i}^k},\mathbb{Z}^k\right) P\left(\mathbb{M}^k_{\mathbb{i}^k}\,|\,\mathbb{A}^k_{\mathbb{j}^k},\mathbb{Z}^k\right), \tag{4.114}
$$

a za trenutak t_k, uz aproksimaciju $\mathbb{A}^k_{\{\mathbb{j}^{k-2},\mathrm{j},\mathrm{i}\}} \approx \{A_{k-1,\mathrm{j}}, A_{k,\mathrm{i}}\}$ i višemodelnu metodu koja reducira broj hipoteza spajanjem onih istih u kurentnom vremenskom okviru, estimacija (4.114) aproksimirana je s

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\})} \approx E\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, A_{k-1,\mathrm{j}}, A_{k,\mathrm{i}}, \mathbb{Z}^k\right) = \sum_{m_i \in \mathbb{M}} E\left(\boldsymbol{x}_k \,|\, m_k = m_i, A_{k-1,\mathrm{j}}, A_{k,\mathrm{i}}, \mathbb{Z}^k\right) P\left(m_k = m_i \,|\, A_{k,\mathrm{i}}, \mathbb{Z}^k\right). \tag{4.115}$$

Pod hipotezom da model m_i odgovara stvarnom modu gibanja u trenutku t_k, prijelazna vjerodostojnost (prvi član na desnoj strani u (4.109)), može se izraziti kao [37]

$$\begin{aligned}\Lambda_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\})} &= \sum_{m_i \in \mathbb{M}} p\left(A_{k,\mathrm{i}}, \mathbb{Z}_k \,|\, m_k = m_i, A_{k-1,\mathrm{j}}, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j})}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j})}\right) P\left(m_k = m_i \,|\, A_{k-1,\mathrm{j}}, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j})}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j})}\right) \\ &= \sum_{m_i \in \mathbb{M}} \Lambda_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\},i)} \bar{\mathcal{M}}_k^{(\mathrm{j},i)},\end{aligned} \tag{4.116}$$

pri čemu je

$$\bar{\mathcal{M}}_k^{(\mathrm{j},i)} = \sum_{m_j \in \mathbb{M}} P\left(m_k = m_i \,|\, m_{k-1} = m_j\right) P\left(m_{k-1} = m_j \,|\, A_{k-1,\mathrm{j}}, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j})}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j})}\right) = \sum_{m_j \in \mathbb{M}} P_{ji}\, \mathcal{M}_{k-1}^{(\mathrm{j},j)} \tag{4.117}$$

prema Chapman-Kolmogorovljevom pravilu uz $P_{ji} = P\left(m_k = m_i \,|\, m_{k-1} = m_j\right),\ \forall m_i, m_j \in \mathbb{M},\ k > 0$ kao parametrom dizajna filtra. Prvi član na desnoj strani u (4.116), prijelazna vjerodostojnost, može se izraziti pomoću vjerodostojnosti mjerenja $\mathcal{L}_{k,\mathrm{i}}^{(\mathrm{j},i)}$ i vjerojatnosti pridruživanja $\beta_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\})}$, tako da je

$$\begin{aligned}\Lambda_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\},i)} &= p\left(\mathbb{Z}_k \,|\, m_k = m_i, A_{k,\mathrm{i}}, A_{k-1,\mathrm{j}}, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j})}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j})}\right) P\left(A_{k,\mathrm{i}} \,|\, m_k = m_i, A_{k-1,\mathrm{j}}, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j})}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j})}\right) \\ &= \mathcal{L}_{k,\mathrm{i}}^{(\mathrm{j},i)}\, \beta_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\})}.\end{aligned} \tag{4.118}$$

Za svaki događaj $A_{k-1,\mathrm{j}}$, vjerodostojnost $\beta_k^{(\{\mathrm{j},-1\})}$ znači da sva kurentna mjerenja potječu od smetnje i da cilj nije primjetljiv, $\beta_k^{(\{\mathrm{j},0\})}$ da su sva mjerenja smetnja i da je cilj primjetljiv te $\beta_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\})}, \mathrm{i} = 1, \ldots, n_k$, da jedno mjerenje potječe od cilja i ostala od smetnje. Kako bi se smanjila računalna složenost, ne uzimaju se u obzir mjerenja čija je vjerodostojnost zanemariva. To je ostvareno primjenom volumena valjanosti čvora j, jednakog za sve modele višemodelne estimacije pri čemu broj valjanih mjerenja iznosi $n_k^{(\mathrm{j})}$, a indeksi valjanih mjerenja tvore skup $\mathbb{j}_k^{(\mathrm{j})}$. Tako je vjerojatnost pridruživanja dana, $\forall \mathrm{j} \in \{-1, 0, \ldots, n_{k-1}\}$, s [36]

$$\beta_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\})} = \begin{cases} \frac{1}{c} p_{FA}\left(n_k^{(\mathrm{j})}\right)(1-\bar{\mathcal{D}}_k), & \mathrm{i}=-1 \\ \frac{1}{c} p_{FA}\left(n_k^{(\mathrm{j})}\right)(1-P_D P_G)\,\bar{\mathcal{D}}_k, & \mathrm{i}=0 \\ \frac{1}{c} p_{FA}\left(n_k^{(\mathrm{j})}-1\right)\frac{P_D P_G}{n_k^{(\mathrm{j})}}\bar{\mathcal{D}}_k, & \mathrm{i}\in\mathbb{j}_k^{(\mathrm{j})} \end{cases}, \tag{4.119}$$

a iz uvjeta $\beta_k^{(\{\mathrm{j},-1\})} + \beta_k^{(\{\mathrm{j},0\})} + \sum_{\mathrm{i}\in\mathbb{j}_k^{(\mathrm{j})}} \beta_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\})} = 1$, proizlazi vrijednost koeficijenta normiranja kao

$$c = p_{FA}\left(n_k^{(\mathrm{j})}-1\right)\left(\frac{\lambda_k V_k^{(\mathrm{j})}}{n_k^{(\mathrm{j})}} + \left(1-\frac{\lambda_k V_k^{(\mathrm{j})}}{n_k^{(\mathrm{j})}}\right) P_D P_G \bar{\mathcal{D}}_k\right). \tag{4.120}$$

Prijelazna vjerodostojnost ovisna o modelu gibanja tako je, pod pretpostavkom jednolike (unutar volumena valjanosti) razdiobe smetnje, $\forall \mathrm{j} \in \{-1, 0, \ldots, n_{k-1}\}$,

$$\Lambda_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\},i)} = \begin{cases} V_k^{-n_k^{(\mathrm{j})}} \beta_k^{(\{\mathrm{j},-1\})} \prod\limits_{\iota\in\mathbb{j}_k^{(\mathrm{j})}} p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}), & \mathrm{i}=-1 \\ V_k^{-n_k^{(\mathrm{j})}} \beta_k^{(\{\mathrm{j},0\})} \prod\limits_{\iota\in\mathbb{j}_k^{(\mathrm{j})}} p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\iota}), & \mathrm{i}=0 \\ V_k^{1-n_k^{(\mathrm{j})}} \beta_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\})} e_{k,\mathrm{i}}^{(\mathrm{j},i)} \ell_{k,\mathrm{i}} \prod\limits_{\mathrm{i}\in\mathbb{j}_k^{(\mathrm{j})}} p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\mathrm{i}}), & \mathrm{i}\in\mathbb{j}_k^{(\mathrm{j})} \end{cases}, \tag{4.121}$$

pri čemu je, u skladu s oznakama prema (4.53), $\ell_{k,\mathrm{i}} = \frac{p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\mathrm{i}})}{p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\boldsymbol{\zeta}_{k,\mathrm{i}})}$, $e_{k,\mathrm{i}}^{(\mathrm{j},i)} = P_G^{-1}\mathcal{N}\left(\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,\mathrm{i}}^{(\mathrm{j},i)}; 0, \boldsymbol{S}_k^{(\mathrm{j},i)}\right)$ i $\boldsymbol{S}_k^{(\mathrm{j},i)}$ kovarijanca inovacije prema (4.128).

Viterbijeva metoda pridruživanja, uklopljena u okvir višemodelne metode estimacije IMM primjenom početnog uvjeta $m_k = m_i$ u relaciji rekurzivne estimacije (4.115), za jedan ciklus rekurzije i partikularni čvor $\mathrm{j} = -1, 0, \ldots, n_{k-1}$ te $\forall m_i, m_j \in \mathbb{M}$ i trenutak t_k, opisana je koracima:

K1 inicijalizacija prema (2.298), uvjetovana događajem $A_{k-1,\mathrm{j}}$ s aproksimacijom da inicijalizacija ovisi samo o estimaciji za čvor j u trenutku t_{k-1}, neovisno o stazi koja je dovela do tog čvora,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j},i*)} &= E\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \,|\, A_{k-1,\mathrm{j}}, \mathbb{Z}^{k-1}, m_k = m_i\right) \\ &= \sum_{m_j\in\mathbb{M}} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j},j)} P\left(m_{k-1} = m_j \,|\, m_k = m_i, A_{k-1,\mathrm{j}}, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j})}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j})}\right) \end{aligned} \tag{4.122}$$

i

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j},i*)} = \sum_{m_j\in\mathbb{M}} &\left(\boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j},j)} + \left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j},j)} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j},i*)}\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j},j)} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j},i*)}\right)^{\mathrm{T}}\right) \cdot \\ &\cdot P\left(m_{k-1} = m_j \,|\, m_k = m_i, A_{k-1,\mathrm{j}}, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j})}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j})}\right) \end{aligned} \tag{4.123}$$

uz

$$P\left(m_{k-1}=m_j\,|\,m_k=m_i,A_{k-1,\mathrm{j}},\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j})},\boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j})}\right)=\frac{P_{ji}\,\mathcal{M}_{k-1}^{(\mathrm{j},j)}}{\sum_{m_j\in\mathbb{M}}P_{ji}\,\mathcal{M}_{k-1}^{(\mathrm{j},j)}},\tag{4.124}$$

$$\mathcal{M}_{k-1}^{(\mathrm{j},j)}=P\left(m_{k-1}=m_j\,|\,A_{k-1,\mathrm{j}},\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j})},\boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j})}\right),\tag{4.125}$$

pri čemu su prijelazne vjerojatnosti modela $P_{ji}=P(m_k=m_i\,|\,m_{k-1}=m_j)$ parametar dizajna filtra

K2 apriorna estimacija pod pretpostavkom linearnog modela gibanja,

$$\bar{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{j},i)}=\boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j},i*)},\tag{4.126}$$

$$\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(\mathrm{j},i)}=\boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)}P_{k-1}^{(\mathrm{j},i*)}\left(\boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{(i)}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{(i)}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}},\tag{4.127}$$

$$\boldsymbol{S}_k^{(\mathrm{j},i)}=\boldsymbol{H}_k^{(i)}\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(\mathrm{j},i)}\left(\boldsymbol{H}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_k^{(i)}\tag{4.128}$$

te proračun volumena valjanosti za određivanje skupa indeksa $\mathbb{j}_k^{(\mathrm{j})}$,

$$V_k^{(\mathrm{j})}=\max\left(n_k^{(\mathrm{j})}\frac{\sum_{m_i\in\mathbb{M}}V_k^{(\mathrm{j},i)}}{\sum_{m_i\in\mathbb{M}}n_k^{(\mathrm{j},i)}},\max_i\left(V_k^{(\mathrm{j},i)}\right)\right),\ n_k^{(\mathrm{j})}>0,\tag{*4.100*}$$

gdje je ukupni broj valjanih mjerenja $n_k^{(\mathrm{j})}$ za čvor j dan s

$$n_k^{(\mathrm{j})}=\left|\left\{\boldsymbol{z}_{k,\imath}:\boldsymbol{z}_{k,\imath}\in\cup_{m_i\in\mathbb{M}}V_k^{(\mathrm{j},i)},\imath=1,\ldots,n_k\right\}\right|\tag{4.129}$$

i $n_k^{(\mathrm{j},i)}$ je broj mjerenja u trenutku t_k koja se nalaze unutar volumena valjanosti $V_k^{(\mathrm{j},i)}$, određenog kovarijancom inovacije (4.128), odnosno

$$V_k^{(\mathrm{j},i)}=\left\{\boldsymbol{z}_{k,\imath}:\left(\boldsymbol{z}_{k,\imath}-\bar{\boldsymbol{z}}_k^{(\mathrm{j},i)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{S}_k^{(\mathrm{j},i)}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{z}_{k,\imath}-\bar{\boldsymbol{z}}_k^{(\mathrm{j},i)}\right)\leq\gamma\right\},\tag{4.130}$$

pri čemu indeksi mjerenja koja se nalaze unutar volumena $V_k^{(\mathrm{j})}$ tvore skup $\mathbb{j}_k^{(\mathrm{j})}$

K3 prijelazne vjerodostojnosti (4.116) za indekse $\mathrm{i}=-1,0,\mathbb{j}_k^{(\mathrm{j})}$, izražene prijelaznom vjerodostojnošću pod hipotezom $m_k=m_i$ (4.121) i apriornom vjerojatnošću modela (4.117), pri čemu je, zbog Markovljeva svojstva modela primjetljivosti cilja, apriorna vjerojatnost $\bar{\mathcal{D}}_k$ dana s

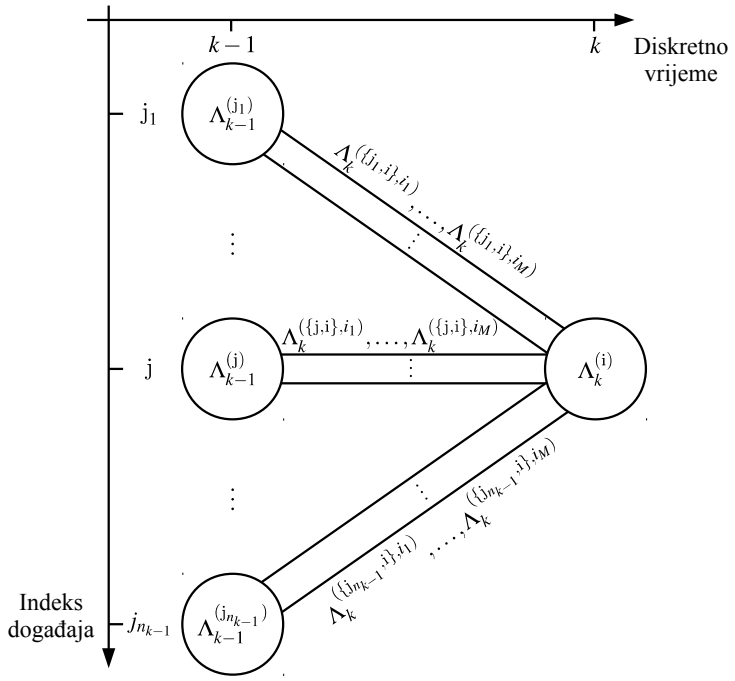
$$\bar{\mathcal{D}}_k=P(D_k\,|\,D_{k-1})\,\mathcal{D}_{k-1}+P(D_k\,|\,\bar{D}_{k-1})\,(1-\mathcal{D}_{k-1})\tag{*4.74*}$$

uz prijelazne vjerojatnosti $P(D_k\,|\,D_{k-1})$ i $P(D_k\,|\,\bar{D}_{k-1})$ koje su parametri dizajna filtra [36], a za indekse $\mathrm{i}\notin\mathbb{j}_k^{(\mathrm{j})}$, prijelazna vjerodostojnost jednaka je 0.

Za svaki partikularni čvor $\mathrm{i} = -1, 0, \ldots, n_k$, provodi se korak:

K4 određivanje indeksa najvjerodostojnije staze koja vodi na partikularni čvor kurentne opservacije, vidi sliku 4.8,

$$\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}) = \arg \max_{\mathrm{j}=-1,0,\ldots,n_{k-1}} \left(\Lambda_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\})} \Lambda_{k-1}^{(\mathrm{j})} \right). \tag{4.131}$$



Slika 4.8. Detalj usmjerenog rešetkastog dijagrama koji ilustrira Viterbijevu metodu pridruživanja primijenjenu u višemodelnom okviru estimacije.

Aposteriorna estimacija, pod hipotezom da je model m_i stvarni mod gibanja u t_k, ovisi o indeksu čvora kurentne opservacije i stazi koja je do njega dovela. Za indeks $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, n_k\}$, čvor je događaj da partikularno mjerenje potječe od cilja i sva ostala mjerenja od smetnje pa je stoga aposteriorna estimacija korekcija apriorne. Čvor $\mathrm{i} = 0$ je događaj da sva mjerenja potječu od smetnje, ali da je cilj primjetan, tako da je u ovom slučaju aposteriorna estimacija jednaka apriornoj (4.126) s kovarijancom (4.88), vidi odjeljak 4.3.1. Čvor indeksa $\mathrm{i} = -1$ je događaj da cilj nije primjetan što znači da je aposteriorna estimacija jednaka apriornoj (4.126), ali uz kovarijancu (4.127). Stoga se, $\forall \mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}) \in \{-1, 0, \ldots, n_{k-1}\}$ i $\forall \mathrm{i} \in \{-1, 0, \ldots, n_k\}$, provode koraci:

K5 aposteriorna estimacija,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{i},i)} = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)}, & \mathrm{i} = -1, 0 \\ \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)} + \boldsymbol{K}_k^{(\mathrm{i},i)} \left(\boldsymbol{z}_{k,\mathrm{i}} - \boldsymbol{H}_k^{(i)} \bar{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)} \right), & \mathrm{i} \in \{1, \ldots, n_k\} \end{cases}, \tag{4.132}$$

$$\boldsymbol{K}_k^{(\mathrm{i},i)} = \bar{\boldsymbol{P}}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)} \left(\boldsymbol{H}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{S}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)}\right)^{-1}, \tag{4.133}$$

$$\boldsymbol{P}_k^{(\mathrm{i},i)} = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{P}}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)}, & \mathrm{i} = -1 \\ \bar{\boldsymbol{P}}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)} + \frac{P_D P_G (1-c_\gamma)}{1-P_D P_G} \boldsymbol{K}_k^{(\mathrm{i},i)} \boldsymbol{S}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)} \left(\boldsymbol{K}_k^{(\mathrm{i},i)}\right)^{\mathrm{T}}, & \mathrm{i} = 0 \\ \bar{\boldsymbol{P}}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)} - \boldsymbol{K}_k^{(\mathrm{i},i)} \boldsymbol{S}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)} \left(\boldsymbol{K}_k^{(\mathrm{i},i)}\right)^{\mathrm{T}}, & \mathrm{i} \in \{1,\ldots,n_k\} \end{cases} \tag{4.134}$$

K6 određivanje vjerojatnosti modela,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k^{(\mathrm{i},i)} &= P\left(m_k = m_i \,|\, A_{k,\mathrm{i}}, A_{k-1,\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i})}, \mathbb{Z}^k\right) \\ &\approx \frac{1}{c_1} p\left(\mathbb{Z}_k \,|\, m_k = m_i, A_{k,\mathrm{i}}, A_{k-1,\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i})}, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}))}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}))}\right) \cdot \\ &\quad \cdot P\left(m_k = m_i \,|\, A_{k,\mathrm{i}}, A_{k-1,\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i})}, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}))}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}))}\right) \\ &= \frac{1}{c_2} \mathcal{L}_{k,\mathrm{i}}^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)} P\left(A_{k,\mathrm{i}} \,|\, A_{k-1,\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i})}, m_k = m_i, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}))}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}))}\right) \cdot \\ &\quad \cdot P\left(m_k = m_i \,|\, A_{k-1,\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i})}, \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}))}, \boldsymbol{P}_{k-1}^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}))}\right) \\ &= \frac{1}{c_2} \mathcal{L}_{k,\mathrm{i}}^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)} \beta_k^{(\{\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),\mathrm{i}\})} \bar{\mathcal{M}}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)} \end{aligned} \tag{4.135}$$

iz čega proizlazi

$$\mathcal{M}_k^{(\mathrm{i},i)} = \frac{\Lambda_k^{(\{\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),\mathrm{i}\},i)} \bar{\mathcal{M}}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),i)}}{\sum_{m_\iota \in \mathbb{M}} \Lambda_k^{(\{\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),\mathrm{i}\},\iota)} \bar{\mathcal{M}}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),\iota)}} \tag{4.136}$$

i prijelazne vjerodostojnosti

$$\Lambda_k^{(\{\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),\mathrm{i}\})} = \sum_{m_\iota \in \mathbb{M}} \Lambda_k^{(\{\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),\mathrm{i}\},\iota)} \bar{\mathcal{M}}_k^{(\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),\iota)}. \tag{4.137}$$

Prijelazne vjerodostojnosti $\Lambda_k^{(\{\mathrm{j},-1\})}$ i $\Lambda_k^{(\{-1,\mathrm{i}\})}$ ne ovise o modelu gibanja, opisane su s (4.121), pa su završni koraci Viterbijeve metode pridruživanja:

K7 određivanje indeksa najvjerodostojnijeg čvora,

$$\mathrm{i}^{(*)} = \arg \max_{\mathrm{i}=-1,0,\ldots,n_k} \left(\Lambda_k^{(\{\mathrm{j}^{(*)}(\mathrm{i}),\mathrm{i}\})} \Lambda_{k-1}^{(\mathrm{j}^{(*)})}\right) \tag{4.113}$$

K8 te krajnja estimacija,

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{m_i \in \mathbb{M}} \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{i}^{(*)},i)} \mathcal{M}_k^{(\mathrm{i}^{(*)},i)}, \tag{4.138}$$

$$\boldsymbol{P}_k = \sum_{m_i \in \mathbb{M}} \left(\boldsymbol{P}_k^{(\mathrm{i}^{(*)},i)} + \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{i}^{(*)},i)} - \hat{\boldsymbol{x}}_k \right) \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\mathrm{i}^{(*)},i)} - \hat{\boldsymbol{x}}_k \right)^{\mathrm{T}} \right) \mathcal{M}_k^{(\mathrm{i}^{(*)},i)}. \tag{4.139}$$

U [36] je pokazano da maksimizacija aposteriorne vjerojatnosti slijeda koji završava događajem $A_{k,\mathrm{i}}, \mathrm{i} = -1, 0, \ldots, n_k$, zadovoljava nejednakost

$$\max_{\mathbb{j}^{k-1}} \left(P\left(A_{k,\mathrm{i}}, \mathbb{A}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1} \,|\, \mathbb{Z}^k, \hat{\mathbb{x}}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1}, \mathbb{P}_{\mathbb{j}^{k-1}}^{k-1} \right) \right) \leq \frac{\Lambda_k^{(\mathrm{i})}}{\sum_{\iota=-1}^{n_k} \Lambda_k^{(\iota)}}, \tag{4.140}$$

a suma preko svih događaja $\{A_{k,0}, \ldots, A_{k,n_k}\}$ (koji impliciraju primjetljivost) određuje vjerojatnost primjetljivosti cilja u volumenu promatranja kao

$$\mathcal{D}_k = \frac{\sum_{\mathrm{i}=0}^{n_k} \Lambda_k^{(\mathrm{i})}}{\sum_{\iota=-1}^{n_k} \Lambda_k^{(\iota)}} \tag{4.141}$$

te se može smatrati mjerom kvalitete praćenja jer pruža vjerojatnost da je staza rezultat praćenja cilja, a ne smetnje. Inicijalizacija staze provodi se početnim vjerojatnostima, $\forall A_{0,\mathrm{i}}, \mathrm{i} = -1, 0, \ldots, n_0$, kao [36]

$$P\left(A_{0,\mathrm{i}}\right) = \begin{cases} 1 - \bar{\mathcal{D}}_0, & \mathrm{i} = -1 \\ (1 - P_D)\bar{\mathcal{D}}_0, & \mathrm{i} = 0 \\ \frac{P_D \bar{\mathcal{D}}_0}{n_0}, & \mathrm{i} > 0 \end{cases}, \tag{4.142}$$

i potvrđuje u trenutku t_k ako u kurentnoj opservaciji postoje mjerenja te ako je zadovoljen uvjet

$$\mathcal{D}_{k-1} > P(\text{cilj je primjetljiv}), \tag{4.143}$$

pri čemu je, kao i u metodi IPDA,

$$P(\text{cilj je primjetljiv}) = \frac{(1 - P_D P_G) P(D_{k+1}|D_k)}{1 - P_D P_G P(D_{k+1}|D_k)}, \quad P(D_{k+1}|\bar{D}_k) < P(D_{k+1}|D_k). \tag{4.101}$$

Staza se završava ako je zadovoljen uvjet da je apriorna vjerojatnost primjetljivosti cilja $\bar{\mathcal{D}}_k$ manja od

$$P(\text{cilj nije primjetljiv}) = \frac{(1 - P_D P_G)\bar{\mathcal{D}}_1}{1 - P_D P_G \bar{\mathcal{D}}_1} \tag{4.102}$$

i da u trenutku t_k ili ne postoje mjerenja ili indeks najvjerodostojnijeg čvora $\mathrm{i}^{(*)} = -1$ u koraku K7 prethodne opservacije (u t_{k-1}) ukazuje na visoku vjerojatnost da cilj više nije primjetljiv. Prema [225], vjerojatnost primjetljivosti cilja $\mathcal{D}_k$ teži prema

$$\mathcal{D}_k = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4cP_DP_G\big(P(D_{k+1}\,|\,D_k) - P(D_{k+1}\,|\,\bar{D}_k)\big)}}{2P_DP_G\big(P(D_{k+1}\,|\,D_k) - P(D_{k+1}\,|\,\bar{D}_k)\big)}, \tag{4.144}$$

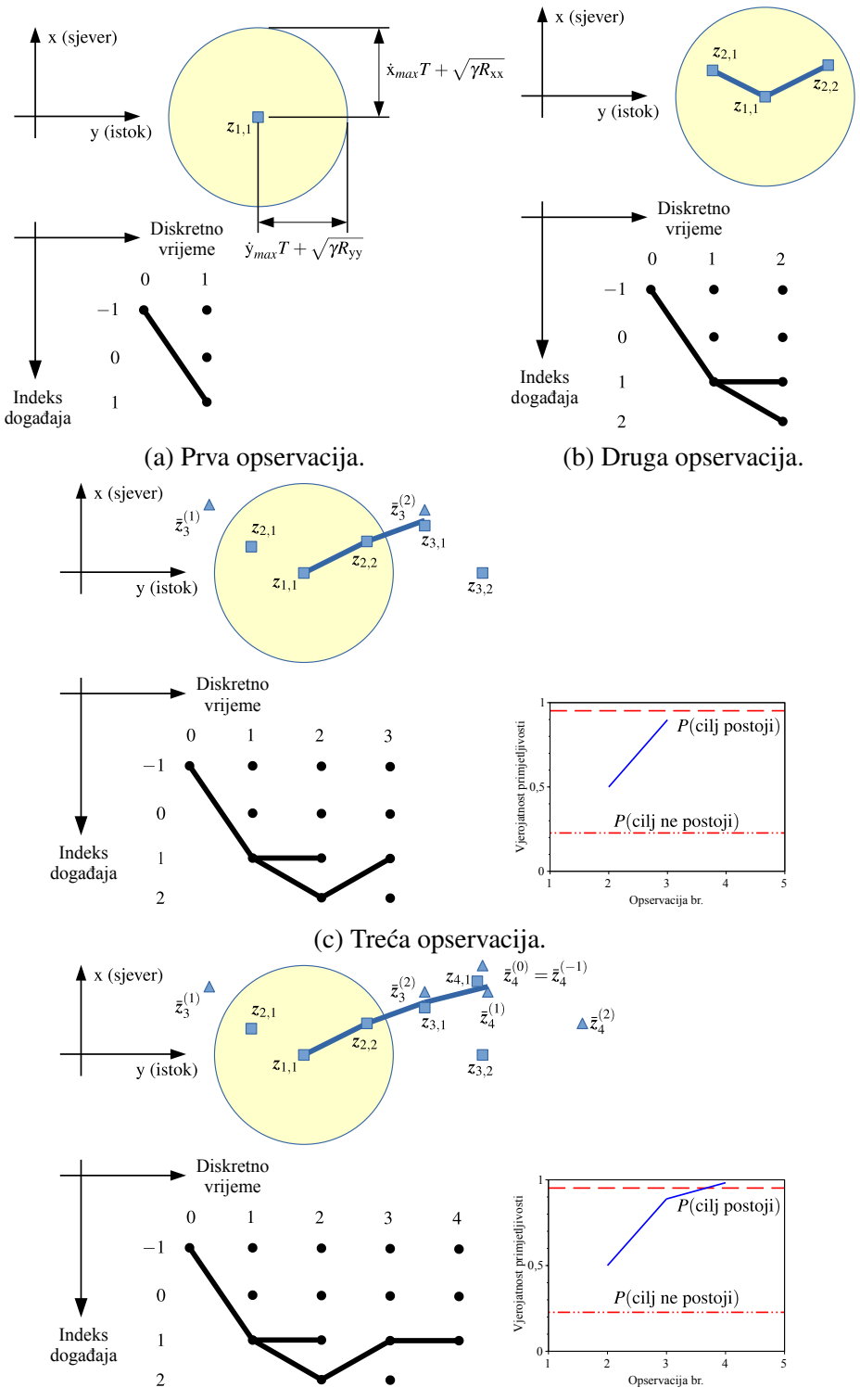
$$b = (1 - P_DP_G)\big(P(D_{k+1}\,|\,D_k) - P(D_{k+1}\,|\,\bar{D}_k)\big) - 1 + P_DP_GP(D_{k+1}\,|\,\bar{D}_k), \tag{4.145}$$

$$c = (1 - P_DP_G)P(D_{k+1}\,|\,\bar{D}_k), \tag{4.146}$$

pri uzastopnim opservacijama bez mjerenja koja potječu od cilja i mora biti manja od (4.102) kako bi se ovakva staza naposljetku završila.

Za razliku od metode IPDA koja je opisana u odjeljku 4.3.1, Viterbijevom se metodom, pod hipotezom postojanja samo jednog cilja, staza inicira u trećem opservacijskom ciklusu na temelju najvjerodostojnijeg čvora kako je to ilustrirano slikom 4.9. Pri tome je za drugi ciklus opservacije, volumen valjanosti određen očekivanim manevarskim sposobnostima cilja (4.7), za svako mjerenje je provedena inicijalizacija Kalmanovog filtra primjenom metode dvije točke prema (4.8) i (4.9) te je vjerodostojnost svih mjerenja u tom trenutku jednaka. Mjerenja trećeg opservacijskog ciklusa određuju najvjerodostojniji čvor te sukladno tome, stazu.

Prednost primjene koncepta primjetljivosti cilja koji je opisan u [220], primijenjen i u vjerojatnosnoj metodi [34, 35] (vidi odjeljak 4.3.1), za razliku od koncepta postojanja cilja koji je primijenjen u [36], je u tome što koncept primjetljivosti uvijek podrazumijeva postojanje cilja pa je tako moguća estimaciju i za događaj $A_{k,-1}$. Naime, vjerodostojnost čvorova i $= -1, 0$ raste sa slijedom uzastopnih opservacija bez mjerenja koja potječu od cilja te se može desiti da je najvjerodostojniji čvor u trenutku t_k upravo čvor -1, ali da je apriorna vjerojatnost $\bar{\mathcal{D}}_k$ još uvijek značajna. Odluka o završetku staze isključivo na temelju ovog događaja najvjerojatnije je preuranjena te ju je bolje odgoditi za nekoliko vremenskih okvira jer će naredne opservacije potvrditi ili završetak staze ako apriorna vjerojatnost $\bar{\mathcal{D}}_k$ ne bude više značajna ili, u suprotnome, njen nastavak. Ako je primijenjen koncept postojanja cilja kao u [36], za svako mjerenje u t_{k+1} nakon što je najvjerodostojniji čvor u t_k jednak -1, potrebno je ponovno provesti inicijalizaciju staze kako je to ilustrirano slikom 4.9. Nasuprot tome, budući da uz koncept primjetljivosti cilja postoji estimacija za događaj $A_{k,-1}$, činjenica da je najvjerodostojniji čvor jednak -1 nema nikakvog utjecaja na tijek određivanja najvjerodostojnije staze kroz rešetkasti dijagram te naredne opservacije ili potvrđuju njen završetak ako je $\bar{\mathcal{D}}_k < P(\text{cilj nije primjetljiv})$, ili njen nastavak.



(a) Prva opservacija.

(b) Druga opservacija.

(c) Treća opservacija.

(d) Potvrda staze.

Slika 4.9. Ilustracija procesa potvrde staze Viterbijevom metodom.

4.4. Estimacija prostorne gustoće smetnje

Vjerojatnosna i Viterbijeva metoda pridruživanja, opisane u odjeljcima 4.3.1 i 4.3.2, primjenjuju parametar volumne gustoće smetnje λ, definiran s (4.37) pod pretpostavkom Poissonove

razdiobe smetnje (4.38), aproksimacije binomne razdiobe (4.36) koja opisuje detekciju smetnje u n od N senzorskih ćelija razlučivosti. Aproksimacija je valjana kada je vjerojatnost detekcije smetnje $P_{FA} \ll 1$ i broj smetnji N_{FA} reda veličine NP_{FA}. Budući da je gustoća smetnje rijetko unaprijed poznata, primjena difuznog modela smetnje (4.39) rezultira uzoračkom vrijednošću gustoće smetnje $\lambda_k = n_k/V_k$ u izrazima za vjerojatnost pridruživanja (4.62) i (4.119) te za vjerojatnost primjetljivosti cilja (4.73), pri čemu je n_k broj mjerenja unutar volumena valjanosti V_k za trenutak opservacije t_k. Točnija estimacija gustoće smetnje postiže se primjenom metode uvjetnog očekivanja i metode maksimiziranja vjerodostojnosti [58], pri čemu se u prvoj metodi pretpostavlja gustoća smetnje kao slučajna varijabla, rezultat stohastičkog procesa, a u drugoj kao nepoznati parametar. Alternativno, estimacija se može provesti primjenom metode momenata kao u [35] koja je u osnovi heuristička metoda jer ne primjenjuje nikakvu optimizaciju kriterija, ili estimacijom amplitudne razdiobe smetnje. Pri tome estimacija amplitudne razdiobe može biti parametarska, poput estimacije parametara K-razdiobe metodom momenata ili metodom najveće vjerodostojnosti [23], neparametarska poput estimacije jezgrenim estimatorom [61, 226] ili poluparametarska primjenom neuronskih mreža kao u [63], što je tema poglavlja 5.

U nastavku odjeljka, opisane su metode estimacije uvjetnim očekivanjem i maksimiziranjem vjerodostojnosti, metode momenata i jezgrene estimacije, primjenom referentne razdiobe te primjenom unakrsne provjere najmanjih kvadrata i pristrane unakrsne provjere. Pri tome je broj mjerenja koja potječu od cilja slučajna varijabla označena s N_T i pretpostavlja se da najviše jedno mjerenje potječe od cilja. U ovisnosti o tome je li za estimaciju u trenutku t_k primijenjen skup opservacija $\mathbb{Z}^{k-1}$, skup $\{\mathbb{Z}^{k-1}, n_k\}$ ili skup $\mathbb{Z}^k$, razlikuju se vjerojatnosti $P_{T(1),k}$, $P_{T(2),k}$ i $P_{T(3),k}$, da u svakom trenutku unutar volumena valjanosti postoji najviše jedno mjerenje koje potječe od cilja, odnosno

$$P_{T(1),k} = P\left(N_{T,k} = 1 \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right), \tag{4.147}$$

$$P_{T(2),k} = P\left(N_{T,k} = 1 \,|\, n_k, \mathbb{Z}^{k-1}\right), \tag{4.148}$$

$$P_{T(3),k} = P\left(N_{T,k} = 1 \,|\, \mathbb{Z}^{k}\right). \tag{4.149}$$

Odgovarajuće razdiobe broja mjerenja koja potječu od cilja opisane su s

$$P\left(N_{T,k} = n \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = P_{T(1),k}\delta(n-1) + \left(1 - P_{T(1),k}\right)\delta(n), \tag{4.150}$$

$$P\left(N_{T,k} = n \,|\, n_k, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = P_{T(2),k}\delta(n-1) + \left(1 - P_{T(2),k}\right)\delta(n), \tag{4.151}$$

$$P\left(N_{T,k} = n \,|\, \mathbb{Z}^{k}\right) = P_{T(3),k}\delta(n-1) + \left(1 - P_{T(3),k}\right)\delta(n), \tag{4.152}$$

pri čemu je Kroneckerova delta dana s [58]

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}. \tag{4.153}$$

Metoda uvjetnog očekivanja pretpostavlja vrijednost gustoće smetnje kao rezultat stohastičkog procesa i primjenu kriterija minimalne varijance greške [72]. Pri tome se pretpostavlja da realizacija stohastičkog procesa smetnje u trenutku t_k prethodi opservaciji $\mathbb{Z}_k$ za taj trenutak. Broj mjerenja koja potječu od smetnje, uvjetovan skupom opservacija iz prethodnog vremenskog okvira (okreta rotirajuće antene), prema (4.37) jednak je $\bar{N}_{FA,k} = E(N_{FA,k} \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}) = \lambda_k V_k$, vidi pretpostavku A2 u [58]. Estimacija gustoće smetnje, uvjetovana prethodnim opservacijama i kurentnim brojem mjerenja unutar volumena valjanosti, određena je s vjerojatnošću (4.148) kao [58]

$$\hat{\lambda}_{CM(2),k} = E\left(\lambda_k \,|\, n_k, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = \frac{1}{V_k}\left(n_k - P_{T(2),k}\right),\ n_k > 0, \tag{4.154}$$

pri čemu je vjerojatnost $P_{T(2),k}$ dana s

$$P_{T(2),k} = \frac{r_k \frac{n_k}{V_k}}{\lambda_k + r_k \frac{n_k}{V_k}} \tag{4.155}$$

uz

$$r_k = \frac{P_{T(1),k}}{1 - P_{T(1),k}} \tag{4.156}$$

i

$$P_{T(1),k} = P_D P_G \bar{\mathcal{D}}_k \tag{4.157}$$

[220]. Zbog dodatnih informacija koje su sadržane u kurentnoj opservaciji $\mathbb{Z}_k$, estimacija gustoće smetnje

$$\hat{\lambda}_{CM(3),k} = E\left(\lambda_k \,|\, \mathbb{Z}^k\right) = \frac{1}{V_k}\left(n_k - P_{T(3),k}\right),\ n_k > 0 \tag{4.158}$$

je točnija. Pri tome je $P_{T(3),k}$ dan s

$$P_{T(3),k} = \frac{r_k e_k}{\lambda_k + r_k e_k}, \tag{4.159}$$

gdje je s e_k je označena dovoljna skalarna statistika, sažetak svih informacija koje su sadržane u prethodnim opservacijama,

$$e_k = \begin{cases} p\left(\mathbb{Z}_k \,|\, N_{T,k} = 1, \mathbb{Z}^{k-1}\right), & n_k > 0 \\ 0, & n_k = 0 \end{cases}. \tag{4.160}$$

Za višemodelnu estimaciju s primjenom otiska cilja vrijedi

$$e_k = \begin{cases} \sum_{m_i \in \mathbb{M}} P(m_k = m_i \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}) \sum_{\{z_{k,\iota}, \zeta_{k,\iota}\} \in \mathbb{Z}_k} \ell_{k,\iota} e_{k,\iota}^{(i)}, & n_k > 0 \\ 0, & n_k = 0 \end{cases}, \tag{4.161}$$

pri čemu je za linearni Gaussov sustav, $e_{k,j}^{(i)}$ opisan s (4.53). U posebnom slučaju kada je $n_k = 0$, metoda uvjetnog očekivanja rezultira nulom, odnosno

$$E\left(\lambda_k \,|\, n_k = 0, \mathbb{Z}^k\right) = V_k^{-1} E\left(N_{FA,k} \,|\, n_k = 0, \mathbb{Z}^k\right) = V_k^{-1} E\left(N_{FA,k} \,|\, n_k = 0, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = 0, \tag{4.162}$$

pri čemu $n_k = 0$ implicira da je i $N_{FA,k} = 0$ [58]. U ovom slučaju estimacija nije valjana zbog toga što je vjerojatnost događaja bez mjerenja uvijek veća od nule uz $P_{T(1),k} < 1$,

$$P\left(n_k = 0 \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = P\left(N_{FA,k} = 0 \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right) P\left(N_{T,k} = 0 \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = \exp(-\lambda_k V_k)\left(1 - P_{T(1),k}\right) \tag{4.163}$$

te događaj bez mjerenja ne znači i da je gustoća smetnje prema Poissonovoj razdiobi u tom trenutku nula. U ovom se slučaju estimacija mora provesti nekom drugom metodom, npr. maksimiziranjem vjerodostojnosti ili metodom najmanjih kvadrata. Prema [58], estimacija metodom uvjetnog očekivanja neovisna je o razdiobi gustoće smetnje te se provodi u dva koraka. U prvom se koraku, prema (4.155) i (4.159), provodi apriorna estimacija računanjem vjerojatnosti $P_{T(2),k}(\bar{\lambda}_{CM(2),k})$ i $P_{T(3),k}(\bar{\lambda}_{CM(3),k})$, pri čemu je pretpostavljen model gustoće smetnje prema kojemu je $\bar{\lambda}_{CM(2),k} = \hat{\lambda}_{CM(2),k-1}$ odnosno $\bar{\lambda}_{CM(3),k} = \hat{\lambda}_{CM(3),k-1}$, a u drugome se koraku, prema (4.154) odnosno (4.158), provodi estimacija. Uvođenje estimacije gustoće smetnje u (4.155) i (4.159) znači utjecaj njene varijance na točnost estimacije staze i pripadajuću kovarijancu, međutim, autori u [58] vjeruju da ovaj utjecaj nije značajan. Početna vrijednost estimacija $\hat{\lambda}_{CM,0}$ za trenutak t_0 određena je npr. metodom maksimizacije vjerodostojnosti prema (4.164) odnosno (4.165).

Metoda maksimizacije vjerodostojnosti estimira nepoznati parametar gustoće smetnje ili maksimiziranjem marginalne vjerodostojnosti prema

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{MML(1),k} &= \arg\max_{\lambda_k \geq 0} \left(P\left(n_k \,|\, \lambda_k, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \right) \\ &= \frac{n_k}{2V_k} \left(1 - r_k + \sqrt{(1-r_k)^2 + 4 r_k \frac{n_k - 1}{n_k}} \right), \; n_k > 0, \end{aligned} \tag{4.164}$$

odnosno

$$\hat{\lambda}_{MML(2),k} = \arg\max_{\lambda_k \geq 0} \left(p\left(\mathbb{Z}_k \,|\, \lambda_k, \mathbb{Z}^{k-1} \right) \right)$$
$$= \frac{n_k}{2V_k} \left(1 - r_k \frac{e_k V_k}{n_k} + \sqrt{\left(1 - r_k \frac{e_k V_k}{n_k} \right)^2 + 4 r_k \frac{e_k V_k}{n_k} \frac{n_k - 1}{n_k}} \right), \; n_k > 0, \tag{4.165}$$

ili maksimiziranjem združene vjerodostojnosti [58]

$$\{\hat{\lambda}_{ML,i(k)}, i = 1, \ldots, k\} = \arg \max_{\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}} \left(p\left(\mathbb{Z}^k \,|\, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \right) \right), \tag{4.166}$$

gdje je s $\hat{\lambda}_{ML,i(k)}$ označena estimacija za trenutak t_i provedena uzorcima $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Nedostatak metode maksimiziranja združene vjerodostojnosti za stvarnovremensku primjenu je u tome što se za svaki trenutak t_k treba provesti estimacija skupa $\{\hat{\lambda}_{ML,i(k)}, i = 1, \ldots, k\}$ za sve vremenske točke $t_i, i = 1, \ldots, t_k$ prema (4.166), osim ako nije poznat izraz za rekurziju. Kao i za metode uvjetnog očekivanja (4.154) i (4.158), vrijednost gustoće smetnje određena maksimiziranjem marginalne vjerodostojnosti za poseban slučaj $n_k = 0$ nije valjana jer je

$$\hat{\lambda}_{MML(1),k} = \hat{\lambda}_{MML(2),k} = \arg\max_{\lambda_k \geq 0} \left(P\left(N_{FA,k} = 0 \,|\, \mathbb{Z}^{k-1} \right) P\left(N_{T,k} = 0 \,|\, \mathbb{Z}^{k-1} \right) \right)$$
$$= \arg\max_{\lambda \geq 0} \left(\exp\left(-\lambda_k V_k \right) \left(1 - P_{T(1),k} \right) \right) = 0, \tag{4.167}$$

a prema (4.163) postoji vjerojatnost događaja bez mjerenja za bilo koju vrijednost gustoće smetnje koja je veća od nule. Primjena metode maksimizacije združene vjerodostojnosti na skup opservacija $\{\mathbb{Z}_N, \mathbb{Z}_{N+1}, \ldots, \mathbb{Z}_k\}$, pri čemu za partikularnu opservaciju $\mathbb{Z}_N$ vrijedi da je $n_N > 0$, rezultira invarijantnom gustoćom smetnje unutar intervala $[t_N, t_k]$ prema izrazu

$$\hat{\lambda}_{ML(1)} = \arg\max_{\lambda \geq 0} \left(P\left(n_N, n_{N+1} = n_{N+2} = \cdots = n_k = 0 \,|\, n_N > 0, \lambda, \mathbb{Z}^{N-1} \right) \right)$$
$$= \frac{n_N}{2V_N} \left(\frac{V_N}{\sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa} - r_N + \sqrt{\left(\frac{V_N}{\sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa} - r_N \right)^2 + 4 r_N \frac{V_N}{\sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa} \frac{n_N - 1}{n_N}} \right), \tag{4.168}$$

odnosno

$$\hat{\lambda}_{ML(2)} = \arg\max_{\lambda \geq 0} \left(P\left(\mathbb{Z}_N, \mathbb{Z}_{N+1} = \mathbb{Z}_{N+2} = \cdots = \mathbb{Z}_k = \emptyset \,|\, \mathbb{Z}_N \neq \emptyset, \lambda, \mathbb{Z}^{N-1} \right) \right)$$
$$= \frac{n_N}{2V_N} \left(\frac{V_N}{\sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa} - r_N \frac{e_N V_N}{n_N} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\left(\frac{V_N}{\sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa} - r_N \frac{e_N V_N}{n_N} \right)^2 + 4 r_N \frac{e_N V_N}{n_N} \frac{V_N}{\sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa} \frac{n_N - 1}{n_N}} \right). \tag{4.169}$$

Pri tome zbog $V_N < \sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa$ vrijedi ili $\hat{\lambda}_{ML(1)} < \lambda_{MML(1),N}$, odnosno $\hat{\lambda}_{ML(2)} < \lambda_{MML(2),N}$, ili $\hat{\lambda}_{ML(1)} = \hat{\lambda}_{MML(1),N} = 0$, odnosno $\hat{\lambda}_{ML(2)} = \hat{\lambda}_{MML(2),N} = 0$. Primjena metode maksimiziranja marginalne vjerodostojnosti prema (4.164) i (4.165), uz uvjet da opservacija u trenutku t_k sadrži samo jedno mjerenje te da vrijedi $r_k \geq 1$ odnosno $r_k \frac{e_k V_k}{n_k} \geq 1$, rezultira estimacijom $\hat{\lambda}_{MML(1),k} = \hat{\lambda}_{MML(2),k} = 0$. Iako navedeni uvjeti ukazuju na to da mjerenje vjerojatno potječe od cilja pa stoga ne postoje smetnje, to se ipak ne može tvrditi s potpunom sigurnošću. Također, ako u (4.168) i (4.169) vrijedi da je $n_N = 1$ i $r_N \geq V_N / \sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa$, odnosno $r_N \frac{e_N V_N}{n_N} \geq V_N / \sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa$, estimacija rezultira s $\hat{\lambda}_{ML(1)} = \hat{\lambda}_{ML(2)} = 0$, jer ako vrijedi da je $r_N \geq 1 \geq V_N / \sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa$, estimacija provedena maksimiziranjem marginalne vjerodostojnosti jednaka je nuli, pa je posljedično i estimacija provedena maksimiziranjem združene vjerodostojnosti jednaka nuli ($\hat{\lambda}_{MML(1),N} = \hat{\lambda}_{MML(2),N} = 0$) zbog toga što mjerenja $n_{N+1} = \cdots = n_k = 0$ nameću zaključak da je $\hat{\lambda}_{ML(1)} \leq \hat{\lambda}_{MML(1),N}$, odnosno $\hat{\lambda}_{ML(2)} \leq \hat{\lambda}_{MML(2),N}$. Ako vrijedi da je $1 > r_N \geq V_N / \sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa$, odnosno da je $1 > r_N \frac{e_N V_N}{n_N} \geq V_N / \sum_{\kappa=N}^{k} V_\kappa$, mjerenja $n_{N+1} = \cdots = n_k = 0$ nameću zaključak da je $\hat{\lambda}_{ML(1)} = \hat{\lambda}_{ML(2)} = 0$ zbog toga što su vrijednosti $\hat{\lambda}_{MML(1),N}$ i $\hat{\lambda}_{MML(2),N}$ dovoljno malene [58].

Estimacija gustoće smetnje metodom momenata se provodi primjenom određivanja uzoračke srednje vrijednosti broja mjerenja koja potječu od smetnje. Metoda je heuristička jer ne primjenjuje optimizaciju nekog kriterija, pa je očekivanje broja lažnih odjeka (razlika očekivanja broja ukupnih odjeka i broja odjeka od cilja), jednaka

$$E\left(N_{FA,k} \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right) = E\left(n_k \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right) - E\left(N_{T,k} \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \approx n_k - P_{T(1),k}, \tag{4.170}$$

pri čemu je očekivanje $E\left(n_k \,|\, \mathbb{Z}^{k-1}\right)$ zamijenjeno s uzoračkom vrijednošću n_k. Iz (4.170), proizlazi [35]

$$\lambda_k = V_k^{-1}\left(n_k - P_{T(1),k}\right). \tag{4.171}$$

Prema (4.37), gustoća prostorne smetnje u trenutku t_k jednaka je $\lambda_k = P_{FA}/V_r$, gdje je V_r volumen razlučivosti senzora i P_{FA} vjerojatnost pojave smetnje u n od N ćelija razlučivosti senzora (4.36). Ako se s $p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\cdot) = p_{FA}(\cdot)$ označi razdioba otiska pod hipotezom postojanja samo smetnje, nepoznata i vremenski nepromjenjiva jednodimenzionalna amplitudna razdioba, onda vrijedi da je

$$P_{FA} = \int_Z^\infty p_{FA}(\zeta)\mathrm{d}\,\zeta. \tag{4.172}$$

Prema [227], pod pretpostavkom da je razdioba $p_{FA}(\zeta)$ kontinuirana i da su njene prve derivacije razvijene oko bilo koje točke ζ malene, može se estimirati klasom konzistentnih estimatora predloženih u [61]. Skup mjerenja $\mathbb{Z}^k$ do trenutka t_k, $\mathbb{Z}^k = \{\mathbb{Z}_\kappa, \kappa = 1,\ldots,k\}$, $\mathbb{Z}_\kappa = \{z_{\kappa,\iota}, \zeta_{\kappa,\iota}, \iota = 1,\ldots,n_\kappa\}$, pored kinematičkih komponenti $\{z_{\kappa,\iota}, \kappa = 1,\ldots,k, \iota = 1,\ldots,n_\kappa\}$, sadrži i komponente otiska, u ovom slučaju amplitude odjeka $\{\zeta_{\kappa,\iota}, \kappa = 1,\ldots,k, \iota = 1,\ldots,n_\kappa\}$. Tako je estimacija razdiobe za trenutak t_k, uvjetovana skupom mjerenja $\mathbb{Z}^k$, dana s (vidi i (2.201))

$$\hat{p}_{FA,k}(\zeta\,|\,\mathbb{Z}^k) = \frac{1}{\sigma\sum_{\kappa=1}^{k} n_\kappa}\sum_{\kappa=1}^{k}\sum_{\iota=1}^{n_\kappa}\mathscr{K}\left(\frac{\zeta-\zeta_{\kappa,\iota}}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma n}\sum_{i=1}^{n}\mathscr{K}\left(\frac{\zeta-\zeta_i}{\sigma}\right), \tag{4.173}$$

pri čemu je radi jednostavnosti pisanja skup $\{\zeta_{\kappa,\iota}, \kappa = 1,\ldots,k, \iota = 1,\ldots,n_\kappa\}$ zamijenjen sa skupom $\{\zeta_i, i = 1,\ldots,n = \sum_{\kappa=1}^{k} n_\kappa\}$. S $\mathscr{K}(\cdot)$ označena je jezgrena funkcija, simetrična unimodalna probabilistička funkcija sa svojstvima (2.204) – (2.206), a skup $\mathbb{Z}^k$ čine mjerenja bez ograničenja na amplitudni detekcijski prag Z, što znači da se primjenjuju sva mjerenja unutar volumena motrenja (najčešće volumena valjanosti), bez obzira na to jesu li ili nisu detektirana. Prema (4.173), estimacija razdiobe zbroj je pojedinačnih razdioba s devijacijom (parametrom skaliranja) σ koja je ovisna o ukupnom broju uzoraka n, a pristranost i varijanca takve estimacije jednake su

$$E\left(\hat{p}_{FA,k}\left(\zeta\,|\,\mathbb{Z}^k\right)\right) - p_{FA}(\zeta) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 p_{FA}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^2}\sigma^2\mu_2(\mathscr{K}) + o\left(\sigma^2\right), \tag{4.174}$$

$$\mathrm{var}\left(\hat{p}_{FA,k}\left(\zeta\,|\,\mathbb{Z}^k\right)\right) = \frac{1}{n\sigma}R(\mathscr{K})\,p_{FA}(\zeta) + o\left(\frac{1}{n\sigma}\right), \tag{4.175}$$

za jezgrene funkcije drugog reda (moment drugog reda funkcije različit je od nule) [125]. Pri tome je s $\mu_2(\mathscr{K})$ označen drugi moment jezgrene funkcije $\mathscr{K}(\cdot)$, s $o(\sigma^2)$ greška aproksimacije koja je linearno razmjerna σ^2 i s $R(\mathscr{K})$ valovitost jezgrene funkcije pri čemu je funkcija $R(\cdot)$ definirana kao

$$R\big(f(x)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2\mathrm{d}x. \tag{4.176}$$

Za konzistentnost estimacije potrebno je zadovoljiti uvjet da pristranost (4.174) i varijanca estimacije (4.175) teže nuli povećanjem broja uzoraka, odnosno [61]

$$\lim_{n\to\infty}\sigma = 0, \tag{2.207}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\big(\hat{p}_{FA,k}(\zeta\,|\,\mathbb{Z}^k)\big) = p_{FA}(\zeta), \tag{2.208}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\sigma = \infty. \tag{2.209}$$

Mjera točnosti aproksimacije je očekivanje integrirane kvadratne greška (MISE), pa primjenom (4.174) i (4.175) slijedi

$$e_{MISE} = E\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}(F),k}\left(\zeta\,|\,\mathbb{Z}^k\right) - p_{FA}(\zeta)\right)^2\mathrm{d}\zeta\right) = e_{AMISE} + o(n^{-1},\sigma^5), \tag{4.177}$$

pri čemu je s

$$e_{AMISE} = \frac{1}{4}R\left(\frac{\mathrm{d}^2 p_{FA}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^2}\right)\mu_2(\mathscr{K})^2\sigma^4 + \frac{R(\mathscr{K})}{n\sigma} \tag{4.178}$$

označena asimptotska vrijednost očekivanja srednje kvadratne greške. Minimalna vrijednost integrirane asimptotske srednje kvadratne greške (4.178) postiže se uz vrijednost parametra

$$\sigma_{AMISE}^{(*)} = \left(\frac{R(\mathscr{K})}{n\mu_2(\mathscr{K})^2 R\left(\frac{\mathrm{d}^2 p_{FA}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^2}\right)} \right)^{1/5}, \tag{4.179}$$

odnosno Epanečnjikovu jezgrenu funkciju (2.212) [228]. Za razliku od [229], gdje je za određivanje parametra $\sigma_{AMISE}^{(*)}$ kao referentna (ali u stvarnosti nepoznata) razdioba $p_{FA}(\cdot)$ primijenjena normalna razdioba, u ovom je radu radi boljeg usklađivanja s pretpostavljenom razdiobom smetnje odjeka od mora primijenjena Rayleighova razdioba s parametrom snage smetnje η, definirana kao

$$\mathscr{R}(\zeta;\eta) = \frac{\zeta}{\eta}\exp\left(\frac{\zeta^2}{2\eta}\right) \quad \zeta,\eta \geq 0, \tag{4.180}$$

pa je stoga [63]

$$R\left(\frac{\mathrm{d}^2 p_{FA}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{16\eta^{5/2}}. \tag{4.181}$$

Pod pretpostavkom Gaussove jezgrene funkcije,

$$\mathscr{K}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{4.182}$$

asimptotska vrijednost očekivanja integrirane kvadratne greške tada je

$$\sigma_{AMISE}^{(*)} = \left(\frac{16}{30\pi n}\right)^{1/5}\sqrt{\eta}. \tag{4.183}$$

Nepoznata snaga smetnje η u (4.183) može se zamijeniti uzoračkom vrijednošću $\hat{\eta}_k$, uvjetovanu uzorcima iz (nepoznate, ali pretpostavljeno Rayleighove) razdiobe $p_{FA}(\zeta)$, kao

$$\hat{\eta}_k = \frac{2}{4-\pi}\mathrm{var}\big(\{\zeta_i, i=1,\ldots,n\}\big). \tag{4.184}$$

Metoda unakrsne provjere najmanjih kvadrata [230, 231], poznata kao nepristrana unakrsna provjera (UCV), minimizira integriranu kvadratnu grešku (ISE),

$$e_{ISE} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\hat{p}_{FA,k}\left(\zeta\,|\,\mathbb{Z}^k\right) - p_{FA}(\zeta)\right)^2 \mathrm{d}\zeta, \tag{4.185}$$

odnosno objektivnu funkciju koju čine članovi (4.185) ovisni o parametru σ,

$$f_{UCV}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{p}_{FA,k}\left(\zeta\,|\,\mathbb{Z}^k\right)^2\mathrm{d}\zeta - 2\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{p}_{FA,k}\left(\zeta\,|\,\mathbb{Z}^k\right)p_{FA}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \tag{4.186}$$

Dok je primjenom (4.173) prvi član u (4.186) jednak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}_{FA,k}\left(\zeta \,|\, \mathbb{Z}^k\right)^2 \mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{n^2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}\left(\frac{\zeta-\zeta_i}{\sigma}\right) \mathscr{K}\left(\frac{\zeta-\zeta_j}{\sigma}\right) \mathrm{d}\,\zeta, \tag{4.187}$$

drugi član u objektivnoj funkciji (4.186) očekivanje je funkcije $\hat{p}_{FA,k}(\cdot)$ s obzirom na skup uzoraka $\{\zeta_i, i = 1,\ldots,n\}$, pa slijedi da je njegova vrijednost dana s $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{p}_{FA,k}(\zeta_i \,|\, \mathbb{Z}^k)$, ali budući da je estimacija razdiobe $\hat{p}_{FA,k}(\cdot)$ funkcija skupa ulaznih podataka, partikularna estimacija $\hat{p}_{FA,k}(\zeta_i \,|\, \mathbb{Z}^k)$ zamjenjuje se estimacijom $\hat{p}^{(-i)}_{FA,k}(\zeta_i \,|\, \mathbb{Z}^k)$ koja je provedena bez podatka ζ_i, odnosno

$$\hat{p}^{(-i)}_{FA,k}(\zeta_i \,|\, \mathbb{Z}^k) = \frac{1}{(n-1)\sigma} \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \mathscr{K}\left(\frac{\zeta_i-\zeta_j}{\sigma}\right), \tag{4.188}$$

iz čega proizlazi da je drugi član na desnoj strani (4.186) estimiran nepristranom estimacijom [232]

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{p}^{(-i)}_{FA,k}\left(\zeta_i \,|\, \mathbb{Z}^k\right). \tag{4.189}$$

Objektivna funkcija (4.186) tada je

$$\begin{aligned} f_{UCV}(\sigma) = {} & \frac{1}{n\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}(x)^2\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{n^2\sigma}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}(x)\mathscr{K}\left(x-\frac{\zeta_i-\zeta_j}{\sigma}\right)\mathrm{d}\,x - \\ & -\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \mathscr{K}\left(\frac{\zeta_i-\zeta_j}{\sigma}\right) \\ \approx {} & \frac{R(\mathscr{K})}{n\sigma} + \\ & +\frac{1}{n^2\sigma}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}(x)\mathscr{K}\left(x-\frac{\zeta_i-\zeta_j}{\sigma}\right)\mathrm{d}\,x - 2\mathscr{K}\left(\frac{\zeta_i-\zeta_j}{\sigma}\right)\right), \end{aligned} \tag{4.190}$$

a za posebni slučaj Gaussove jezgrene funkcije (4.182),

$$\begin{aligned} f_{UCV}(\sigma) = {} & \frac{1}{2n\sigma\sqrt{\pi}} + \frac{1}{n^2\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\exp\left(-\frac{(\zeta_i-\zeta_j)^2}{4\sigma^2}\right) - \right. \\ & \left. -2\sqrt{2}\exp\left(-\frac{(\zeta_i-\zeta_j)^2}{2\sigma^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.191}$$

Objektivna funkcija (4.190) minimizirana je parametrom $\sigma^{(*)}_{UCV}$, rješenjem jednadžbe

$$\frac{\mathrm{d}\, f_{UCV}(\sigma)}{\mathrm{d}\,\sigma} = \frac{1}{n\sigma^2\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\left(\frac{\left(\zeta_i-\zeta_j\right)^2}{2\sigma^2}-1\right)\exp\left(-\frac{\left(\zeta_i-\zeta_j\right)^2}{4\sigma^2}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\sqrt{2}\left(\frac{\left(\zeta_i-\zeta_j\right)^2}{\sigma^2}-1\right)\exp\left(-\frac{\left(\zeta_i-\zeta_j\right)^2}{2\sigma^2}\right)\right)\right) = 0. \tag{4.192}$$

Prema [126], očekivanje objektivne funkcije $f_{UCV}(\cdot)$ jednako je

$$E\left(f_{UCV}(\sigma)\right) = \frac{R(\mathscr{K})}{n\sigma}+\frac{1}{4}\sigma^4\mu_2(\mathscr{K})^2 R\left(\frac{\mathrm{d}^2\, p_{FA}(\zeta)}{\mathrm{d}\,\zeta^2}\right)-R\left(p_{FA}(\zeta)\right)+o(n^{-1})$$
$$= e_{AMISE}-R\left(p_{FA}(\zeta)\right)+o(n^{-1}) \tag{4.193}$$

te stoga metoda UCV estimira nepoznatu veličinu

$$R\left(\frac{\mathrm{d}^2\, p_{FA}(\zeta)}{\mathrm{d}\,\zeta^2}\right). \tag{4.194}$$

U istome je radu predložena metoda pristrane unakrsne provjere (BCV), estimacija asimptotske kvadratne greške e_{AMISE} u (4.193), zamjenom (4.194) s

$$R\left(\frac{\mathrm{d}^2\,\hat{p}_{FA,k}\left(\zeta\,|\,\mathbb{Z}^k\right)}{\mathrm{d}\,\zeta^2}\right)-R\left(\frac{\mathrm{d}^2\,\mathscr{K}}{\mathrm{d}\,\zeta^2}\right) \tag{4.195}$$

[125]. Objektivna funkcija za metodu BCV tako je

$$f_{BCV}(\sigma) = \frac{R(\mathscr{K})}{n\sigma}+\frac{1}{4}\sigma^4\mu_2(\mathscr{K})\left(R\left(\frac{\mathrm{d}^2\,\hat{p}_{FA,k}\left(\zeta\,|\,\mathbb{Z}^k\right)}{\mathrm{d}\,\zeta^2}\right)-R\left(\frac{\mathrm{d}^2\,\mathscr{K}}{\mathrm{d}\,\zeta^2}\right)\right)$$
$$= \frac{R(\mathscr{K})}{n\sigma}+\frac{\mu_2(\mathscr{K})^2}{4n^2\sigma}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^2\,\mathscr{K}(x)}{\mathrm{d}\,x^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2\,\mathscr{K}(x-\frac{\zeta_i-\zeta_j}{\sigma})}{\mathrm{d}\,x^2}\right)\mathrm{d}x, \tag{4.196}$$

jer je uz $x=\frac{\zeta-\zeta_j}{\sigma}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathscr{K}\left(\frac{\zeta-\zeta_j}{\sigma}\right)}{\mathrm{d}\,\zeta^2} = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\mathrm{d}^2\,\mathscr{K}(x)}{\mathrm{d}x^2} \tag{4.197}$$

te je u posebnom slučaju za Gaussovu jezgru

$$f_{BCV}(\sigma) = \frac{2}{2n\sigma\sqrt{\pi}}+$$
$$+\frac{1}{64n^2\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\left(\frac{\zeta_i-\zeta_j}{\sigma}\right)^4-12\left(\frac{\zeta_i-\zeta_j}{\sigma}\right)^2+12\right)\exp\left(-\frac{\left(\zeta_i-\zeta_j\right)^2}{4\sigma^2}\right). \tag{4.198}$$

Minimum objektivne funkcije (4.196) postiže se uz vrijednost parametra $\sigma_{BCV}^{(*)}$, rješenjem jednadžbe

$$\frac{\mathrm{d}\, f_{BCV}(\sigma)}{\mathrm{d}\,\sigma} = \frac{1}{2n\sigma^2\sqrt{\pi}}\left(-1+\frac{1}{32n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{\left(\zeta_i-\zeta_j\right)^6}{2\sigma^6}-11\frac{\left(\zeta_i-\zeta_j\right)^4}{\sigma^4}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+42\frac{\left(\zeta_i-\zeta_j\right)^2}{\sigma^2}-12\right)\exp\left(-\frac{\left(\zeta_i-\zeta_j\right)^2}{4\sigma^2}\right)\right)=0. \tag{4.199}$$

U [126] je pokazano da veličine

$$n^{1/10}\left(\frac{\sigma_{BCV}^{(*)}}{\sigma_{AMISE}^{(*)}}-1\right) \tag{4.200}$$

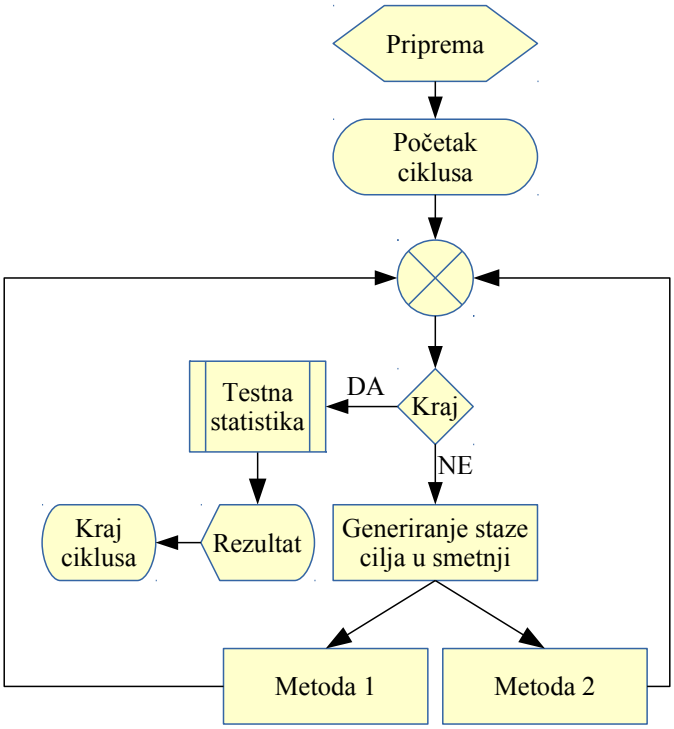
i

$$n^{1/10}\left(\frac{\sigma_{UCV}^{(*)}}{\sigma_{AMISE}^{(*)}}-1\right) \tag{4.201}$$

asimptotski teže normalnim razdiobama $\mathscr{N}\left(0,\sigma^2_{\sigma_{BCV}}\right)$ odnosno $\mathscr{N}\left(0,\sigma^2_{\sigma_{UCV}}\right)$, pri čemu su varijance $\sigma^2_{\sigma_{UCV}}$ i $\sigma^2_{\sigma_{BCV}}$ ovisne samo o nepoznatoj razdiobi $p_{FA}(\cdot)$ i jezgrenoj funkciji $\mathscr{K}(\cdot)$, a $\sigma_{UCV}^{(*)}$ i $\sigma_{BCV}^{(*)}$ konvergiraju prema $\sigma_{AMISE}^{(*)}$ razmjerno s $n^{-1/10}$. Prema [233], omjer varijanci $\sigma^2_{\sigma_{UCV}}/\sigma^2_{\sigma_{BCV}} \approx 15,7$ za Gaussovu jezgrenu funkciju što ukazuje na veću varijabilnost parametra $\sigma_{UCV}^{(*)}$ (rezultat metode UCV) u odnosu na parametar $\sigma_{BCV}^{(*)}$ (rezultat metode BCV).

4.5. Primjer

S obzirom na primarni cilj, maksimalnu vjerojatnost zadržavanja staze, i sekundarni, što veću točnost estimacije, namjera ovog primjera je pružanje odgovora na tri pitanja. Prvo pitanje glasi: koja od metoda pridruživanja, vjerojatnosna ili Viterbijeva, bolje ispunjava zadane ciljeve? Drugo i treće pitanje glase: je li pri tome svrsishodna primjena parametarskog modela smetnje i njegovog otiska (kao i otiska cilja)? Potvrdni odgovori na potonja pitanja impliciraju estimaciju vrijednosti parametra gustoće smetnje i omjera vjerodostojnosti, čineći proces praćenja složenijim. Stoga su u ovom primjeru uspoređene značajke vjerojatnosne metode IPDA (vidi odjeljak 4.3.1) i Viterbijeve metode ST-VDA (vidi odjeljak 4.3.2). Kako je ilustrirano slikom 4.10, usporedba je provedena ocjenom statističkih značajki metoda pri uvjetima slabo i jako izražene smetnje odjeka mora, estimacijom velikog broja staza stohastičkog karaktera i gibanja cilja s kinematičkim svojstvima kako je opisano u odjeljku 2.4. Primarni cilj, optimalni omjer vjerojatnosti zadržavanja i gubljenja staze stvarnoga cilja, proveden je kroz implementaciju integrirane mjere kvalitete praćenja, odnosno vjerojatnost primjetljivosti cilja.



Slika 4.10. Ilustracija usporedbe metoda ocjenom njihovih statističkih značajki.

U poglavlju 3, smetnja mora je opisana kao složeni stohastički proces dugoročnih i kratkoročnih amplitudnih fluktuacija, tipičnih vremena korelacija, s obzirom na ćeliju razlučivosti, od nekoliko sekundi za dugoročne te nekoliko milisekundi za kratkoročne fluktuacije. Značajke radarskog senzora s nepromjenjivom frekvencijom odašiljanja i okretnom antenom su takve da je za obasjavanje volumena valjanosti potrebno par desetaka milisekundi, uz vrijeme obasjavanja cilja par milisekundi i period između dvaju obasjavanja nekoliko sekundi. To znači da je za vrijeme obasjavanja cilja intenzitet smetnje izrazito koreliran i bitno veći od termičkog šuma. Amplitude reflektirane energije od cilja i kapilarnih te kratkih gravitacijskih valova također su (za to vrijeme) korelirane, pa su stoga kratkoročne razdiobe otiska, amplitudne razdiobe, za vrijeme obasjavanja cilja dobro opisane prvim Swerlingovim modelom [73],

$$p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}(\zeta\,|\,\eta) = p_{FA}(\zeta\,|\,\eta) = \mathscr{R}(\zeta;\eta) = \frac{\zeta}{\eta}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\eta}\right), \quad \eta > 0 \wedge \zeta \geq 0, \tag{3.32}$$

$$p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\zeta\,|\,\eta) = \mathscr{R}(\zeta;\eta+d) = \frac{\zeta}{\eta+d}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2(\eta+d)}\right), \quad \eta > 0 \wedge \zeta, d \geq 0, \tag{4.202}$$

jer su fluktuacije amplitude odjeka cilja i proces kratkoročnih fluktuacija smetnje Gaussovi procesi čiji zbroj također rezultira Gaussovim procesom varijance $\mathrm{diag}\left([(\eta+d)\ (\eta+d)]^{\mathrm{T}}\right)$. Pri tome d označava snagu odjeka cilja, a η intenzitet smetnje. Dugoročne fluktuacije intenziteta smetnje opisane su gama-razdiobom, parametra oblika i skaliranja ν i β,

$$\mathcal{G}(\eta;\nu,\beta)=\frac{\eta^{\nu-1}\exp\left(-\frac{2\eta}{\beta}\right)}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\nu}\Gamma(\nu)},\quad \eta,\nu,\beta>0. \tag{3.31}$$

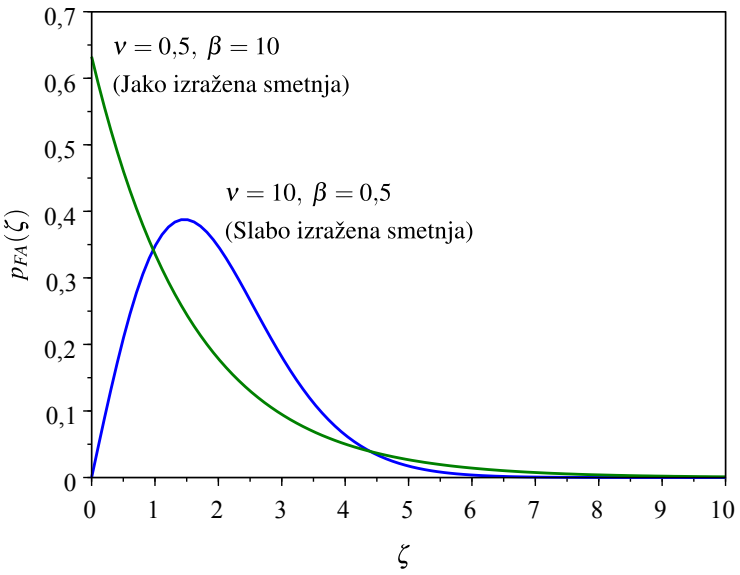
Marginalizacija uvjetne razdiobe (3.32) po η primjenom (3.31) rezultira K-razdiobom smetnje,

$$\begin{aligned} p_{FA}(\zeta) &= \int_0^\infty p_{FA}(\zeta\,|\,\eta)\,\mathcal{G}(\eta;\nu,\beta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{4\zeta^{\nu}}{\sqrt{\beta^{\nu+1}}\Gamma(\nu)}K_{\nu-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\beta}}\right),\quad \zeta,\beta,\nu>0, \end{aligned} \tag{3.33}$$

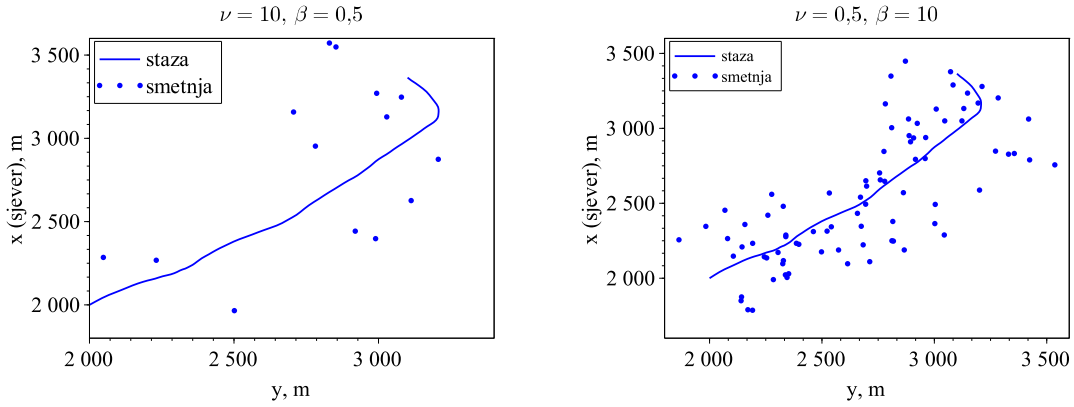
pri čemu je s $K_{(\cdot)}(\cdot)$ označena modificirana Besselova funkcija druge vrste,

$$K_p(x)=\frac{x^p}{2^{p+1}}\int_0^\infty r^{-p-1}\exp(-r)\exp\left(-\frac{x^2}{4r}\right)\mathrm{d}r. \tag{3.34}$$

Karakter smetnje određen je parametrom oblika ν. Kada je njegova vrijednost približno veća od 10, smetnja je slabo izražena i amplitudna razdioba (3.33) približno je Rayleighova, a kada je manja od 0,5, smetnja je jako izražena, s razdiobom koja pokazuje obilježje teškog repa, vidi sliku 4.11. Dok je vjerojatnost detekcije slabo izražene smetnje niska, kako je to ilustrirano slikom 4.12a, pri jako izraženoj smetnji izrazito je visoka, slika 4.12b.



Slika 4.11. Ilustracija utjecaja parametra oblika ν na razdiobu smetnje.



(a) Slabo izražena smetnja.

(b) Jako izražena smetnja.

Slika 4.12. Ilustracija utjecaja parametra oblika ν na karakter smetnje. Prag detekcije Z postavljen je tako da za slabo izraženu smetnju s parametrom oblika $\nu \gg 10$ vrijedi $P_{FA} = \int_Z^\infty p_{FA}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0{,}01$. Smetnja je generirana samo duž staze.

Amplitudna razdioba otiska cilja u smetnji K-razdiobe proizlazi marginalizacijom razdiobe (4.202) po η primjenom (3.31), odnosno

$$\begin{aligned} p_{\zeta(T)}(\zeta) &= \frac{\zeta}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\nu}\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{\eta^{\nu-1}}{\eta+d} \exp\left(-\frac{2\eta}{\beta} - \frac{\zeta^2}{2(\eta+d)}\right) \mathrm{d}\eta \\ &= \frac{\zeta}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\nu}\Gamma(\nu)} \int_0^\infty f(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \quad d \geq 0 \wedge \zeta, \beta, \nu > 0 \end{aligned} \tag{4.203}$$

i dobro je aproksimirana Rayleighovom razdiobom, osobito za visoke vrijednosti parametra $\mathcal{R}$, omjera snage signala d prema srednjoj snazi smetnje $\bar{\eta}$, vidi sliku 4.13. Kako je navedeno u [41], numerička integracija izraza (4.203) je izazovna zbog toga što vrijednost podintegralne funkcije $f(\eta)$, ovisno o vrijednostima parametara, može vrlo brzo težiti beskonačnosti kako $\eta \to 0$, odnosno vrlo sporo težiti nuli kako $\eta \to \infty$. Nadalje, primjena stohastičkog uzorkovanja teško je provediva zbog toga što Rayleighova i gama-razdioba imaju različite efektivne nosače funkcija, a zbog složenosti oblika funkcije, teško je na jedinstven način odrediti integracijske točke. Stoga je u istome radu predložena metoda nalaženja integracijskih točaka funkcije $f(r = 1/\sqrt{\eta})$, tako da (4.203) postaje

$$p_{\zeta(T)}(\zeta) = \frac{2\zeta}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\nu}\Gamma(\nu)} \int_0^\infty f(r)\,\mathrm{d}r, \tag{4.204}$$

pri čemu je $f(r)$ jednak

$$f(r) = \frac{r^{1-2\nu}}{1+r^2 d} \exp\left(-\frac{2}{r^2\beta} - \frac{\zeta^2 r^2}{2(1+r^2 d)}\right). \tag{4.205}$$

Integracijske točke $\mathbb{r} = \{r_i, i = 1,2,\dots\}$ trebaju biti odabrane tako da dobro definiraju i asimptotska obilježja funkcije $f(r)$ i njezino ponašanje u okolici maksimuma. Prema [41], funkcija ima samo jedan maksimum, pa iz uvjeta $\mathrm{d}f(r)/\mathrm{d}r = 0$ proizlazi

$$-r^6\beta d^2\left(1+2\nu\right)+r^4\Big(4d^2-\beta\left(\zeta^2+4\nu d\right)\Big)+r^2\Big(\beta\left(1-2\nu\right)+8d\Big)+4=0, \tag{4.206}$$

tako da je skup $\mathbb{r}_L$ s N_L integracijskih točaka u okolici maksimuma r_{max} dan kao

$$\mathbb{r}_L = \left\{\frac{2ir_{max}}{N_L}, i = 1,\dots,N_L\right\}. \tag{4.207}$$

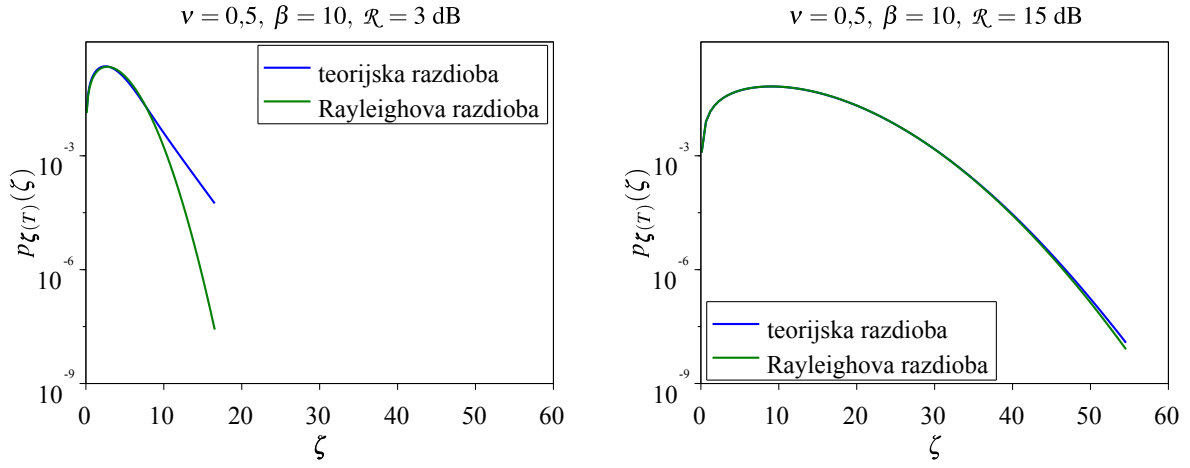
Skup $\mathbb{r}_U$ s N_U točaka koje dobro definiraju asimptotska obilježja funkcije $f(r)$ dan je kao

$$\mathbb{r}_U = \left\{2r_{max}\left(1+\frac{1}{N_L}\exp\left(c(i-1)\right)\right), i = 1,\dots,N_U\right\}, \tag{4.208}$$

pri čemu je

$$c = \frac{1}{N_U}\left(\frac{1}{\nu}\log_{\mathrm{e}}\left(\frac{r_{max}^{\nu}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)-\log_{\mathrm{e}}\left(\frac{2r_{max}}{N_L}\right)\right) \tag{4.209}$$

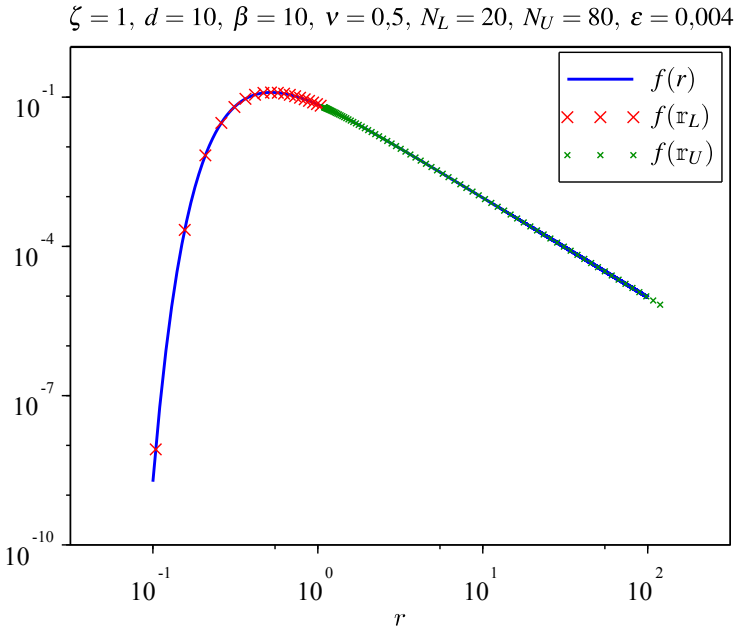
i ε član koji određuje gornju granicu skupa. Primjer nalaženja integracijskih točaka (4.207) i (4.208) ilustriran je slikom 4.14 pri čemu su primijenjene preporučene vrijednosti za parametre N_L, N_U i ε prema [41].



(a) Niska vrijednost parametra $\mathcal{R}$.

(b) Visoka vrijednost parametra $\mathcal{R}$.

Slika 4.13. Ilustracija aproksimacije amplitudne razdiobe otiska cilja (4.203) s Rayleighovom razdiobom, ovisno o vrijednosti parametra $\mathcal{R}$, omjera snage signala d prema srednjoj snazi smetnje $\bar{\eta} = \nu\beta/2$.



Slika 4.14. Ilustracija određivanja integracijskih točaka funkcije $f(r)$ skupovima $\mathbb{r}_L$ i $\mathbb{r}_U$ prema [41].

Kako se usporedba metoda provodi ocjenom njihovih statističkih značajki uz višestruka mjerenja zbog postojanja smetnje, tako se za svaki trenutak opservacije t_k, unutar volumena motrenja $\mathcal{V}_k$, generira skup odjeka $\{\zeta_{k,i}, i = 1,\ldots,\mathcal{V}_k/V_r\}$ (pri čemu je V_r volumen razlučivosti senzora), s amplitudama koje podliježu razdiobi otiska smetnje $p_{FA}(\zeta)$ (3.33). Amplitude skupa određene su nelinearnom transformacijom bez memorije $\zeta = f(u)$, gdje je u slučajna varijabla jednolike razdiobe $\mathscr{U}$ unutar intervala $(0,1)$. Primjenom svojstva da je [113]

$$p_{FA}(\zeta) = \frac{\mathscr{U}(u)}{\left|\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\right|} \tag{4.210}$$

te ako je $f(u)$ monotono rastuća funkcija, iz

$$p_{FA}(\zeta) = \frac{\mathscr{U}(u)}{\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}} \tag{4.211}$$

proizlazi

$$\int_0^u \mathscr{U}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^\zeta p_{FA}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \tag{4.212}$$

Uvrštenje (3.33) u (4.212) rezultira s

$$u = 1 - \frac{2\zeta^\nu}{\beta^{\nu/2}\Gamma(\nu)} K_\nu\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\beta}}\right), \tag{4.213}$$

pa se amplitude iznad praga detekcije Z, parametra koji je određen s dizajniranom vjerojatnošću detekcije smetnje $P_{FA} = \frac{2Z^{\nu}}{\beta^{\nu/2}\Gamma(\nu)} K_{\nu}\left(2Z/\sqrt{\beta}\right)$, mogu generirati uzorcima jednolike razdiobe $u \sim \mathscr{U}(1-P_{FA},1)$ i numeričkim rješavanjem (4.213) po ζ, a uzorci s amplitudama ispod Z, generiranjem uzoraka $u \sim \mathscr{U}(0,1-P_{FA})$ i rješavanjem (4.213). Na sličan način, aproksimacijom razdiobe otiska cilja Rayleighovom razdiobom te uvrštenjem (4.202) u (4.212), proizlazi amplituda odjeka cilja kao $\zeta = \sqrt{-2\bar{\eta}\,(1+\mathcal{R})\log_{\mathrm{e}}(1-u)}$, $u \sim \mathscr{U}(0,1)$.

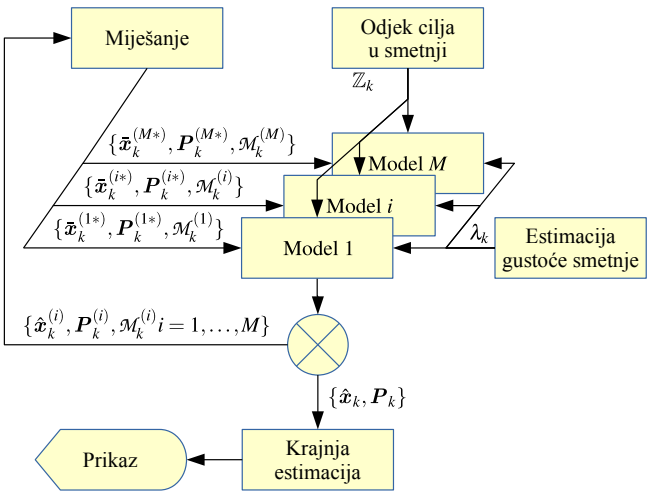
Kako je ilustrirano slikom 4.15, vjerojatnosna i Viterbijeva metoda pridruživanja uklopljene su u višemodelni okvir estimacije IMM u kojem se, radi numeričke stabilnosti računanja i propagacije matrica kovarijanci te zbog nelinearnosti modela, primjenjuje drugokorijensko kubaturno Kalmanovo filtriranje, vidi dodatak D.1. Pravilna evaluacija vjerojatnosti $\mathcal{M}_k^{(i)}, i = 1,\ldots,M = |\mathbb{M}|$ da je model gibanja m_i u trenutku t_k stvarni mod gibanja, zahtijeva jednak skup mjerenja $\mathbb{Z}_k$ za sve filtre posebno. Tako se smetnja generira unutar volumena

$$V_k = \mu \max_{i=1,\ldots,M}\left(V_k^{(i)}\right) \tag{4.214}$$

sa središtem u [234]

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{z}}_k &= \sum_{m_i,m_j\in\mathbb{M}} E\left(\boldsymbol{z}_k \,|\, m_k = m_i, m_{k-1} = m_j, D_{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}\right) P\left(m_k = m_i, m_{k-1} = m_j \,|\, D_{k-1}, \mathbb{Z}^{k-1}\right) \\ &= \sum_{m_i,m_j\in\mathbb{M}} \boldsymbol{H}_k^{(i)} \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^{(i)} \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(j)} P_{ji}\, \mathcal{M}_{k-1}^{(j)},\end{aligned} \tag{4.215}$$

pri čemu μ označava koeficijent multiplikacije, uobičajeno 10, $V_k^{(i)}$ volumen valjanosti filtra i za trenutak t_k, a broj odjeka smetnje unutar volumena V_k u skladu je s Poissonovom razdiobom (4.38).



Slika 4.15. Ilustracija uklapanja metode pridruživanja u višemodelni okvir estimacije.

U ovom se primjeru estimacija provodi u pravokutnom sustavu NED, s mjerenjima u polarnom sustavu, vidi odjeljak 2.2. Kako je gibanje površinskog cilja modelirano s tri segmenta, od kojih su prvi i treći nemanevrirajuće gibanje kovarijance procesnog šuma $\boldsymbol{Q}_x = Q_x\boldsymbol{I}_2, Q_x = 0{,}3\ \mathrm{m^2 s^{-3}}$, vidi (2.36), a drugi manevar trajanja 20 s, skoro kružno gibanje opisano srednjom kutnom brzinom $\bar{\omega} = 157\ \mathrm{mrad\,s^{-1}}$ i procesnim šumom obodne i kutne brzine $\sigma^2_{\dot{\mathbf{x}}} = 0{,}6\ \mathrm{m^2 s^{-3}}$, odnosno $\sigma^2_{\omega} = 0{,}0001\ \mathrm{rad^2 s^{-3}}$, vidi (2.66) i odjeljak 2.4 te sliku 2.23a za primjer jedne realizacije staze, tako i višemodelni okvir estimacije IMM primjenjuje dva modela gibanja (površinskog) cilja. Prvi modelira nemanevrirajuće gibanje s parametrom procesnog šuma $Q_x = 0{,}3\ \mathrm{m^2 s^{-3}}$ (vidi odjeljak 2.1.2), a drugi manevrirajuće gibanje opisano krivocrtnim modelom gibanja (2.68) – (2.75). Pri tome je vektor stanja za nemanevrirajuće gibanje dan s (2.30), a za manevrirajuće gibanje je proširen komponentama tangencijalne $a_t(t)$ i normalne $a_n(t)$ akceleracije kao

$$\boldsymbol{x}(t) = \left[\mathbf{x}(t)\ \dot{\mathbf{x}}(t)\ a_t(t)\ a_n(t)\right]^{\mathrm{T}}, \tag{4.216}$$

pa je prijelazna matrica diskretiziranog sustava (2.70) modificirana kao u [41],

$$\boldsymbol{\Phi}^{(*)}_k(\boldsymbol{x}_k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_k & \boldsymbol{\Lambda}_k(\boldsymbol{x}_k) \\ \boldsymbol{O}_{22} & \mathrm{diag}\,(\boldsymbol{\rho}) \end{bmatrix}, \tag{4.217}$$

uz koeficijent korelacije $\boldsymbol{\rho} = \exp\left(\circ - \left(\boldsymbol{\tau}^{\circ -1}_{\mathbf{x}} T\right)\right)$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}} = \left[\tau_t\ \tau_n\right]^{\mathrm{T}}$, pri čemu je, slično Singerovom modelu, prvi član vektora $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}$ vrijeme korelacije tangencijalne akceleracije, a drugi član vrijeme korelacije normalne akceleracije. Diskretizirana jednadžba gibanja (2.70) tako je modificirana kao

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}^{(*)}_k(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{w}_k, \tag{4.218}$$

s kovarijancom procesnog šuma [41]

$$\boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{41} \\ \sigma^2_t\left(1 - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_t}\right)\right) \\ \sigma^2_n\left(1 - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_n}\right)\right) \end{bmatrix}, \tag{4.219}$$

gdje su sa σ^2_t i σ^2_n označene varijance procesnog šuma tangencijalne i normalne komponente akceleracije. Model manevra je okret, pa primjenom jednakih razmatranja koja su provedena za određivanje parametara Singerovog modela u odjeljku 2.4 proizlazi vrijeme korelacije $\tau_n = 20$ s, uz varijancu procesnog šuma normalne komponente akceleracije $\sigma^2_n = 8{,}3\ \mathrm{m^2 s^{-4}}$. Jednake vrijednosti primijenjene su i za komponentu tangencijalne akceleracije, $\tau_t = 20$ s i $\sigma^2_t = 8{,}3\ \mathrm{m^2 s^{-4}}$,

iako nemaju fizikalnu osnovu s obzirom na pretpostavljeni manevar. Trajanje manevra pretpostavljeno je 10 uzoraka, a za ocjenu utjecaja primjene parametarskog modela gustoće smetnje 50 uzoraka. Tako prema (2.335) vjerojatnost zadržavanja u modu manevrirajućeg gibanja iznosi $P_{22} = 0{,}9$ odnosno $P_{22} = 0{,}98$ za parametarski model smetnje, a kao i u primjeru u odjeljku 2.4, vjerojatnost zadržavanja u modu nemanevrirajućeg gibanja P_{11} nije kritična, pa je stoga odabrana vrijednost 0,95 odnosno 0,9 za parametarski model gustoće smetnje.

Mjerenje se provodi u polarnom koordinatnom sustavu radijalne i azimutne razlučivosti $\Delta r = 25$ m i $\Delta\varphi = 1°$, u čijem je središtu senzor radijalne i azimutne razlučivosti $\mathrm{d}r = 25$ m i $\mathrm{d}\varphi = 4°$. Pod pretpostavkom jednolike razdiobe pozicije odjeka cilja unutar volumena razlučivosti $V_r = \Delta r \Delta\varphi$, ekvivalentni Gaussov šum mjerenja opisan je matricom kovarijance $\boldsymbol{R} = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}\Delta r^2/12 & \Delta\varphi^2/12\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)$.

Metode IPDA i ST-VDA su parametrizirane prijelaznim vjerojatnostima $P(D_{k+1}\,|\,D_k)$ i $P(D_{k+1}\,|\,\bar{D}_k)$ te početnom vjerojatnošću primjetljivosti cilja $\mathcal{D}_0$. Vrijednosti ovih parametara određuju vrijednosti kriterija potvrde odnosno završetka staze, pri čemu se od obje metode pridruživanja zahtijeva brza detekcija lažne staze, tipično kroz nekoliko opservacija, uz maksimalnu vjerojatnost zadržavanja staze stvarnog cilja. Kako vjerojatnosna metoda pretpostavlja stalnu primjetljivost cilja, tako je $P(D_{k+1}\,|\,\bar{D}_k) = 0$, a parametar $P(D_{k+1}\,|\,D_k)$ određuje vjerojatnost zadržavanja staze stvarnog cilja i vrijeme detekcije lažne staze. Što je njegova vrijednost bliže jedinici, vjerojatnost zadržavanja staze stvarnog cilja je veća, ali uz dulje vrijeme detekcije lažne staze što znači da je broj onih koje nisu detektirane kao takve unutar vremena trajanja staze znatan. U ovom je primjeru, za pojavu jedne do dvije lažne staze u 50.000 realizacija u jako izraženoj smetnji, prijelazna vjerojatnost $P(D_{k+1}\,|\,D_k) = 0{,}95$, a uz početnu vjerojatnost $\mathcal{D}_0 = 0{,}5$, vrijednost kriterija potvrde staze za trenutak t_k određen je s (4.101) te iznosi

$$\mathcal{D}_{k-1} > P(\text{cilj je primjetljiv}) = 0{,}792, \tag{4.220}$$

što znači da se staza potvrđuje u trenutku t_k ako je zadovoljen uvjet (4.220) i u trenutku t_k postoje mjerenja. Završetak staze u trenutku t_k nastupa kada je zadovoljen uvjet da je, prema (4.102),

$$\bar{\mathcal{D}}_k < P(\text{cilj nije primjetljiv}) = 0{,}154 \tag{4.221}$$

i ne postoje mjerenja u tom trenutku. U [220] je pokazano da vjerojatnost primjetljivosti cilja (4.73), uz prijelazne vrijednosti (4.74), postaje zanemariva nakon treće uzastopne opservacije bez mjerenja, što potvrđuje heuristički postupak završetka staze ako u tri uzastopne opservacije ne postoje mjerenja koja se mogu pridružiti postojećoj stazi. Tako je slijed aposteriorne vjerojatnosti primjetljivosti $\mathcal{D}_k$ i njene apriorne vrijednosti $\bar{\mathcal{D}}_{k+1}$ za vrijednosti parametara $P(D_{k+1}\,|\,D_k) = 0{,}95$ i $P(D_{k+1}\,|,\bar{D}_k) = 0$ te za vjerojatnost detekcije $P_D^{(R)} = 0{,}8$ (pod hipotezom Rayleighove razdiobe amplitude odjeka cilja) i veličinu volumena valjanosti $\gamma = 16$

($P_G = 0{,}9997$), prema (4.73) i (4.74), dan tablicom 4.3 i nakon treće opservacije bez mjerenja apriorna vjerojatnost zadovoljava uvjet (4.221) prekida staze.

Tablica 4.3. Slijed aposteriorne i apriorne vjerojatnosti primjetljivosti u metodi IPDA.

Opservacija bez mjerenja	Aposteriorna vjerojatnost	Apriorna vjerojatnost
	$\mathcal{D}_k = P\left(D_k \,|\, \mathbb{Z}^k, n_k \neq 0\right) = 0{,}9$	$\bar{\mathcal{D}}_{k+1} = 0{,}855$
1	$\mathcal{D}_{k+1} = P\left(D_{k+1} \,|\, \mathbb{Z}^{k+1}, n_{k+1} = 0\right) = 0{,}541$	$\bar{\mathcal{D}}_{k+2} = 0{,}514$
2	$\mathcal{D}_{k+2} = P\left(D_{k+2} \,|\, \mathbb{Z}^{k+2}, n_{k+2} = 0\right) = 0{,}175$	$\bar{\mathcal{D}}_{k+3} = 0{,}166$
3	$\mathcal{D}_{k+3} = P\left(D_{k+3} \,|\, \mathbb{Z}^{k+3}, n_{k+3} = 0\right) = 0{,}038$	$\bar{\mathcal{D}}_{k+4} = 0{,}0365$

Viterbijeva metoda dozvoljava prijelaz iz neprimjetljivog u primjetljiv cilj, pa je otprilike jednaka vjerojatnost pojave lažnih staza kao i za vjerojatnosnu metodu ostvarena uz vrijednost parametara $P(D_{k+1} \,|\, D_k) = 0{,}99$ i $P(D_{k+1} \,|, \bar{D}_k) = 0{,}1$. Dok su kriteriji potvrde staze i za Viterbijevu metodu i za vjerojatnosnu metodu jednaki, njen završetak u trenutku t_k provodi se ili kada je zadovoljen uvjet (4.221) i ne postoje mjerenja u t_k ili kada je zadovoljen uvjet (4.221) a najvjerodostojniji čvor u trenutku t_{k-1} je bio -1. Prema [225], vjerojatnost primjetljivosti kada sva mjerenja u opservaciji potječu od smetnje dana je s

$$\mathcal{D}_k \approx \frac{1 - P_D P_G}{1 - P_D P_G \bar{\mathcal{D}}_k} \bar{\mathcal{D}}_k \tag{4.222}$$

što je vjerojatnost primjetljivosti (4.73) vjerojatnosne metode za slučaj $n_k = 0$. S obzirom na vrijednosti parametara $P(D_{k+1} \,|\, D_k)$ i $P(D_{k+1} \,|, \bar{D}_k)$, detekcija lažne staze nešto je sporija nego metodom IPDA, pa je za vjerojatnost detekcije $P_D^{(R)} = 0{,}8$ i $P_G \approx 1$, slijed aposteriorne i apriorne vjerojatnosti primjetljivosti, pod pretpostavkom opservacija bez mjerenja koja potječu od cilja, dan tablicom 4.4 što znači najvjerojatniji završetak staze nakon četvrte opservacije, vidi (4.221), jer su najvjerodostojniji čvorovi u ovom slučaju 0 (događaj da sva mjerenja potječu od smetnje) i -1 (događaj da cilj nije primjetljiv), a svi ostali imaju zanemarivu vjerodostojnost. Pri tome, prema (4.144), asimptotska vjerojatnost primjetljivosti $\mathcal{D}_k$ za uzastopne opservacije bez mjerenja koja potječu od cilja iznosi $0,0278$, što je manje od uvjeta (4.221).

Tablica 4.4. Slijed aposteriorne i apriorne vjerojatnosti primjetljivosti u metodi ST-VDA.

Opservacija bez mjerenja	Aposteriorna vjerojatnost	Apriorna vjerojatnost
	$\mathcal{D}_k = 0{,}9$	$\bar{\mathcal{D}}_{k+1} = 0{,}904$
1	$\mathcal{D}_{k+1} = 0{,}645$	$\bar{\mathcal{D}}_{k+2} = 0{,}674$
2	$\mathcal{D}_{k+2} = 0{,}293$	$\bar{\mathcal{D}}_{k+3} = 0{,}361$
3	$\mathcal{D}_{k+3} = 0{,}101$	$\bar{\mathcal{D}}_{k+4} = 0{,}190$
4	$\mathcal{D}_{k+4} = 0{,}045$	$\bar{\mathcal{D}}_{k+5} = 0{,}140$

Radi jednostavnosti, Viterbijeva metoda opisana u odjeljku 4.3.2 koracima K1 – K8, modificirana je kao i u [31], primjenom za sve čvorove jedinstvenog volumena motrenja $\mathcal{V}_k$. Za trenutak t_k, ovaj volumen unija je volumena valjanosti svakog čvora posebno,

$$\mathcal{V}_k = \cup_{\mathrm{j}=-1,0,\ldots,n_{k-1}} V_k^{(\mathrm{j})}, \tag{4.223}$$

a njegova veličina, uzevši u obzir moguća preklapanja volumena pojedinih čvorova, aproksimirana je primjenom metode [68, 70] koja je razvijena za vjerojatnosnu metodu i višemodelnu estimaciju,

$$\mathcal{V}_k = \max\left(n_k \frac{\sum_{\mathrm{j}=-1,0,\ldots,n_{k-1}} V_k^{(\mathrm{j})}}{\sum_{\mathrm{j}=-1,0\ldots,n_{k-1}} n_k^{(\mathrm{j})}}, \max_{\mathrm{j}} \left(V_k^{(\mathrm{j})} \right) \right), \; n_k > 0, \tag{*4.100*}$$

pri čemu je $n_k^{(\mathrm{j})}$ broj mjerenja unutar volumena valjanosti $V_k^{(\mathrm{j})}$ koji je dan s (4.100) i

$$n_k = \left| \left\{ z_{k,\imath} : z_{k,\imath} \in \mathcal{V}_k, \imath = 1,2,\ldots \right\} \right| \tag{4.224}$$

je ukupni broj mjerenja. Normiranje prijelazne vjerodostojnosti (4.121) s $\Lambda_k^{(\{\mathrm{j},0\},i)}$ kao u [31] rezultira s

$$\Lambda_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\},i)} = \begin{cases} \frac{1-\bar{\mathcal{D}}_k}{(1-P_D)\bar{\mathcal{D}}_k}, & \mathrm{i} = -1 \\ 1, & \mathrm{i} = 0 \\ \frac{\mathcal{V}_k P_D e_{k,\mathrm{i}}^{(\mathrm{j},i)} \ell_{k,\mathrm{i}} p_{FA}(n_k - 1)}{n_k p_{FA}(n_k)(1-P_D)}, & \mathrm{i} = 1,\ldots,n_k \end{cases}, \tag{4.225}$$

pri čemu je $P_G = 1$ jer se mjerenja uvijek nalaze unutar volumena $\mathcal{V}_k$. U posebnom slučaju Poissonove razdiobe (4.38), normirana prijelazna vjerodostojnost u čvor mjerenja postaje

$$\Lambda_k^{(\{\mathrm{j},\mathrm{i}\},i)} = \frac{P_D e_{k,\mathrm{i}}^{(\mathrm{j},i)} \ell_{k,\mathrm{i}}}{\lambda_k (1-P_D)}, \quad \mathrm{i} = 1,\ldots,n_k \; . \tag{4.226}$$

Usporedba značajki je podijeljena u tri zasebne cjeline. U prvoj su uspoređene značajke samih metoda IPDA i ST-VDA, a u drugoj i trećoj su ispitani utjecaji parametarskog modela smetnje odnosno statistike otiska na značajke metode ST-VDA. Za svaku je cjelinu provedena statistička analiza nad ukupno 50.000 estimacija stohastičkih staza manevrirajućeg gibanja cilja, za deset karakterističnih vrijednosti omjera snage signala prema smetnji $\mathcal{R}$. Pri tome je, za svaki omjer $\mathcal{R}$ posebno, broj staza podijeljen u $N = 50$ segmenata s $M = 100$ realizacija, a raspon omjera se u grubo kreće od malih ($\mathcal{R} < 10$ dB), preko umjerenih (10 dB $< \mathcal{R} <$ 15 dB), pa do velikih ($\mathcal{R} > 15$ dB).

Kriterijska funkcija za usporedbu vjerojatnosti zadržavanja staze stvarnog cilja P_{TT} definirana je kao

$$C(P_{TT}) = \frac{n_{TT}}{M}, \tag{4.227}$$

pri čemu je n_{TT} broj estimacija koje pripadaju stvarnom cilju i za koje kroz cijelo vrijeme trajanja staze nije zadovoljen uvjet (4.221). Ocjena ove značajke primjenom metode 1 i metode 2 provodi se testiranjem hipoteze H0(P_{TT}) da je vjerojatnost zadržavanja staze primjenom metode 2 bolja od one primjenom metode 1, a hipoteza je prihvaćena ako je testna statistika, vidi dodatak C.1,

$$\mathcal{T}(P_{TT}) = \frac{\overline{\Delta J}(P_{TT})}{\sigma_{\overline{\Delta J}(P_{TT})}} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta C_i(P_{TT})}{\sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\Delta C_i(P_{TT}) - \overline{\Delta J}(P_{TT})\right)^2}} \tag{4.228}$$

uz

$$\Delta C(P_{TT}) = C(P_{TT})^{(2)} - C(P_{TT})^{(1)}, \tag{4.229}$$

veća od granice značajnosti $d = 1{,}65$ što odgovara pouzdanosti testa 95 % za Gaussovu razdiobu veličine (4.229).

Kriterijska funkcija kojom se ocjenjuje točnost estimacije je njena kvadratna greška pozicije $\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2$ i brzine $\|\tilde{\dot{\mathbf{x}}}\|^2$, usrednjena kroz partikularni segment gibanja (nemanevrirajuće gibanje, manevar),

$$C(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2) = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1}\sum_{\kappa=k_1}^{k_2}\tilde{\mathbf{x}}_\kappa^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{x}}_\kappa, \tag{2.337}$$

$$C(\|\tilde{\dot{\mathbf{x}}}\|^2) = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1}\sum_{\kappa=k_1}^{k_2}\tilde{\dot{\mathbf{x}}}_\kappa^{\mathrm{T}}\tilde{\dot{\mathbf{x}}}_\kappa, \tag{2.338}$$

pri čemu je k_1 početak i k_2 kraj partikularnog segmenta. Kao i za vjerojatnost zadržavanja staze stvarnog cilja, ocjena ove značajke primjenom metode 1 i metode 2 provodi se testiranjem estimacija, ali samo onih koje su zajednički zadržane obim metodama (uvjet (4.221) nije ispunjen ni metodom 1 niti metodom 2 kroz cijelo vrijeme trajanja staze), pri čemu broj ovakvih staza iznosi $n \leq MN$. Testne statistike tako su jednake

$$\mathcal{T}\left(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2\right) = \frac{\overline{\Delta J}(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)}{\sigma_{\overline{\Delta J}(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta C_i(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta C_i(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2) - \overline{\Delta J}(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)\right)^2}}, \tag{4.230}$$

$$\mathcal{T}\left(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2\right) = \frac{\overline{\Delta J}(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2)}{\sigma_{\overline{\Delta J}(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2)}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta C_i(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2)}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta C_i(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2) - \overline{\Delta J}(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2)\right)^2}}, \tag{4.231}$$

pri čemu su

$$\Delta C(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2) = C(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)^{(1)} - C(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)^{(2)}, \tag{4.232}$$

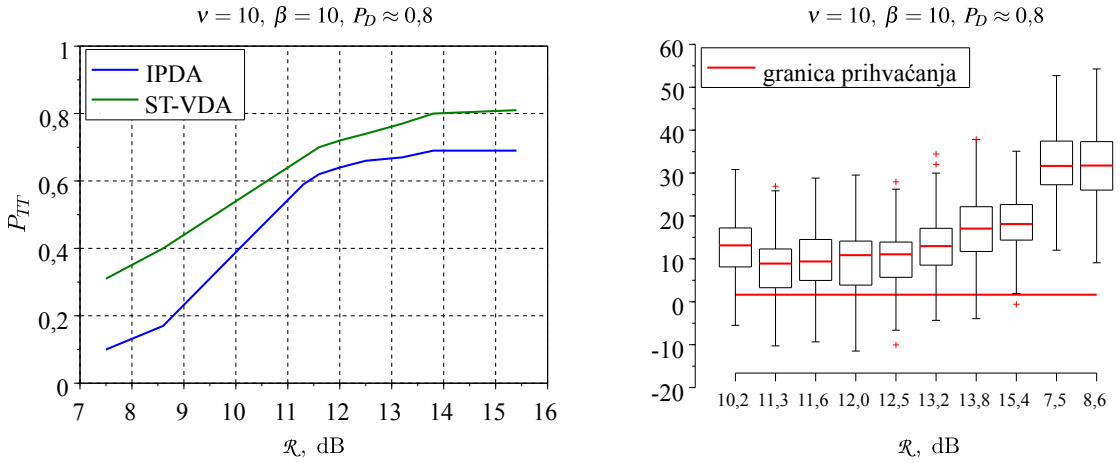
$$\Delta C(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2) = C(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2)^{(1)} - C(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2)^{(2)}. \tag{4.233}$$

Tako se hipoteza H0$(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)$ da je točnost estimacije pozicije metodom 2 veća od one metodom 1 prihvaća ako je testna statistika (4.230) veća od granice značajnosti $d = 1{,}65$, za pouzdanost testa 95 % i Gaussovu razdiobu veličine (4.232). Na sličan se način, testnom statistikom (4.231), testira hipoteza H0$(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2)$ da je točnost estimacije brzine metodom 2 veća od one metodom 1.

U ovom primjeru, Kolmogorov-Smirnovljev test normalnosti za razinu značajnosti $\alpha = 0{,}05$ ukazuje da razdioba (4.227) ne odstupa od normalne, a prema središnjem graničnom teoremu, vidi npr. [113], razdiobe (4.232) i (4.233) teže Gaussovoj, ali nisu testirane na normalnost.

Rezultati statističke analize prve cjeline prikazani su slikama 4.16 – 4.20. Dok su slikama 4.16a i 4.17a prikazane ovisnosti vjerojatnosti zadržavanja staze P_{TT} o omjeru $\mathcal{R}$, normirana razdioba $\{\Delta C_i(P_{TT})/\sigma_{\overline{\Delta J}(P_{TT})}, i = 1,\ldots,N\}$ prikazana je slikama 4.16b i 4.17b. Pri tome je za prikaz normirane razdiobe primijenjen dijagram pravokutnika čija visina odgovara interkvartilu rezultata, odnosno razlici gornjeg kvartila Q_3 (75 % rezultata manje je ili jednako ovoj granici) i donjeg kvartila Q_1 (25 % rezultata manje je ili jednako ovoj granici), a crvena linija unutar pravokutnika označava medijan Q_2. Gornji držač predstavlja vrijednost $\mathrm{Q}_3 + 1{,}5(\mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_1)$ a donji vrijednost $\mathrm{Q}_1 - 1{,}5(\mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_1)$. Statistička analiza pokazuje da je potvrđena hipoteza H0(P_{TT}) (metoda ST-VDA bolja je od metode IPDA u pogledu vjerojatnosti zadržavanja staze), i to u cijelom rasponu omjera $\mathcal{R}$ te za slabo i jako izraženu smetnju. To je jednim dijelom odraz primijenjene koncepcije primjetljivosti cilja u Viterbijevoj metodi kojom se dozvoljava prijelaz iz neprimjetljivog u primjetljiv cilj (vjerojatnost $P(D_{k+1}|,\bar{D}_k)$ veća je od nule) radi kojega je kriterij završetka staze nešto blaži, što znači da se određeni broj staza, koje bi inače metoda IPDA prekinula, ipak nastavlja. Međutim, testna statistika za točnost estimacije odbacuje hipoteze H0$(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)$ i H0$(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2)$ (točnost estimacije po poziciji i brzini metodom ST-VDA veća je nego one primjenom metode IPDA), po svim segmentima gibanja (osim točnosti pozicije u 3. segmentu za male $\mathcal{R}$) i u cjelokupnom rasponu omjera snage signala prema smetnji, slike 4.18 i 4.19, što znači da je u pravilu točnost estimacije metodom IPDA veća, kako je to ilustrirano slikom 4.20 za jedan partikularni $\mathcal{R}$. Pri tome razlika u gustoćama smetnje λ odražava obilježje teškog repa razdiobe jako izražene smetnje jer je za fiksnu vrijednost praga detekcije

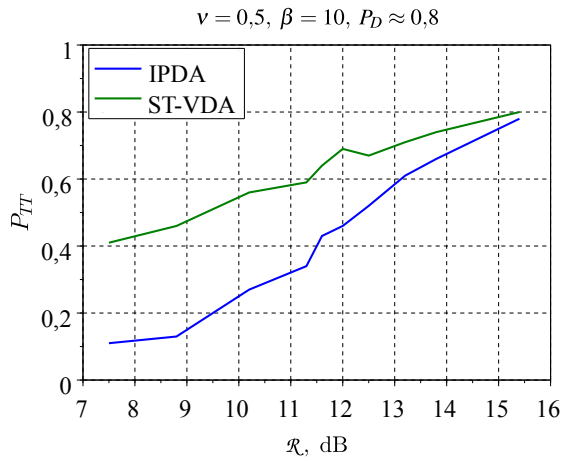
Z (određenu uvjetom da je, pod hipotezom Rayleighove smetnje, $P_D^{(R)} = 0{,}8$), vjerojatnost detekcije smetnje veća, vidi sliku 4.11. Razlog manje točnosti estimacije metodom ST-VDA leži u prirodi najvjerodostojnijeg pridruživanja u odnosu na metodu IPDA, gdje je (krajnja) estimacija rezultat usrednjavanja preko svih mogućih realizacija koje određuju kurentna mjerenja. Metodom ST-VDA bira se najvjerodostojnija staza koja u nekim slučajevima vodi preko čvora (mjerenja) koji potječe od smetnje, što znači da je u tom trenutku, u odnosu na grešku estimacije metodom IPDA, greška izraženija (i u metodi IPDA realizacija ovakve staze može imati visoku vjerojatnost, ali je zbog usrednjavanja krajnja greška u pravilu ublažena). Kako se u analizi promatra estimacija velikog broja staza, ovakva odstupanja su statistički ravnomjerno raspoređena duž staze čime je i srednja kvadratna greška estimacije metodom ST-VDA veća nego metodom IPDA.



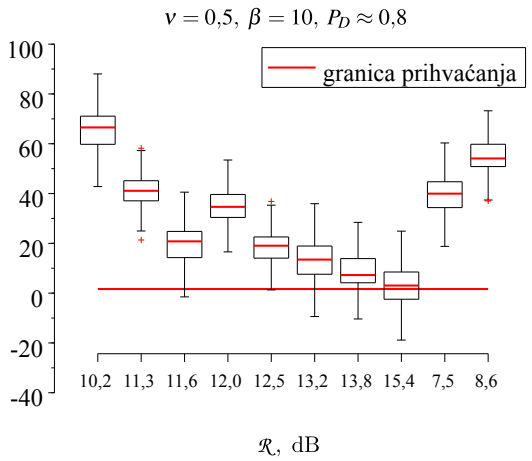
(a) Usporedba vjerojatnosti.

(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 4.16. Usporedba vjerojatnosti zadržavanja staze stvarnog cilja P_{TT} između metoda IPDA i ST-VDA za slučaj slabo izražene smetnje približno Rayleighove razdiobe. Obje metode primjenjuju difuzni model smetnje i ne primjenjuju statistiku otiska. Gibanje cilja opisuje model prema odjeljku 2.4.

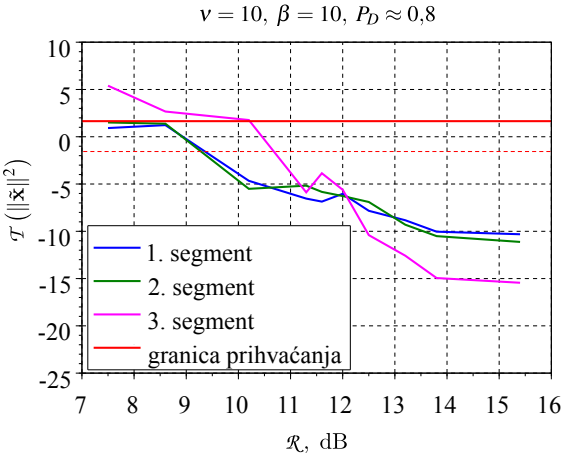


(a) Usporedba vjerojatnosti.

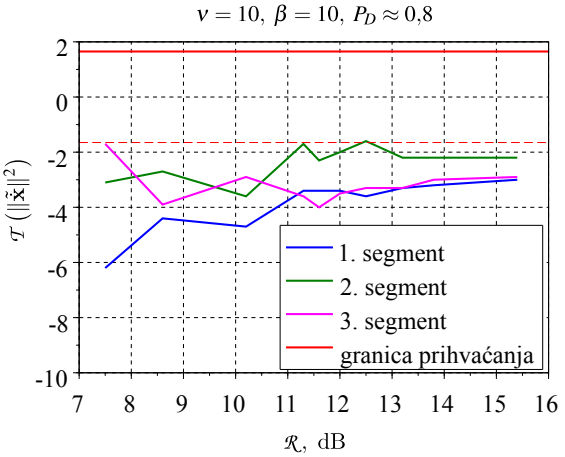


(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 4.17. Usporedba vjerojatnosti zadržavanja staze stvarnog cilja P_{TT} između metoda IPDA i ST-VDA za slučaj jako izražene smetnje s obilježjem teškog repa. Obje metode primjenjuju difuzni model smetnje i ne primjenjuju statistiku otiska. Gibanje cilja opisuje model prema odjeljku 2.4.

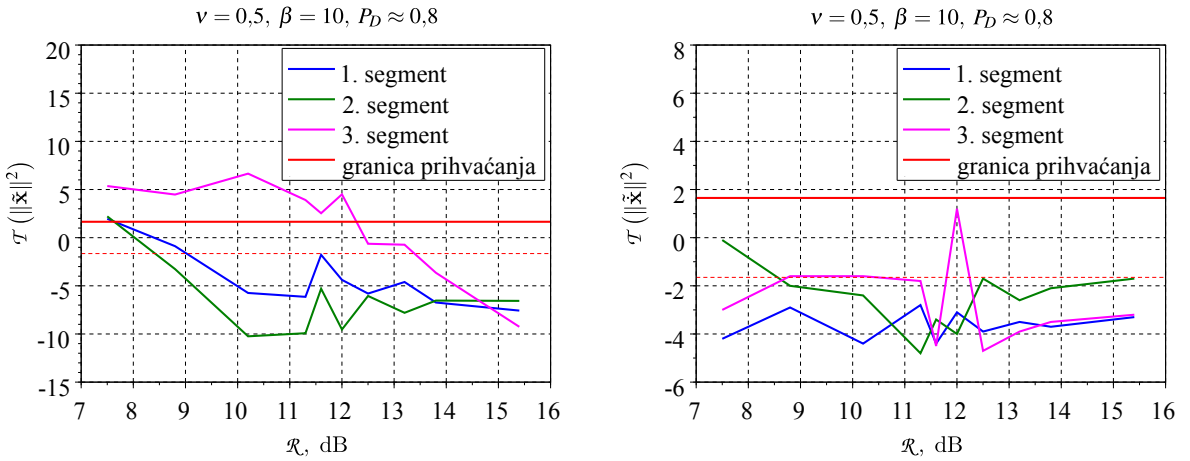


(a) Pozicija.



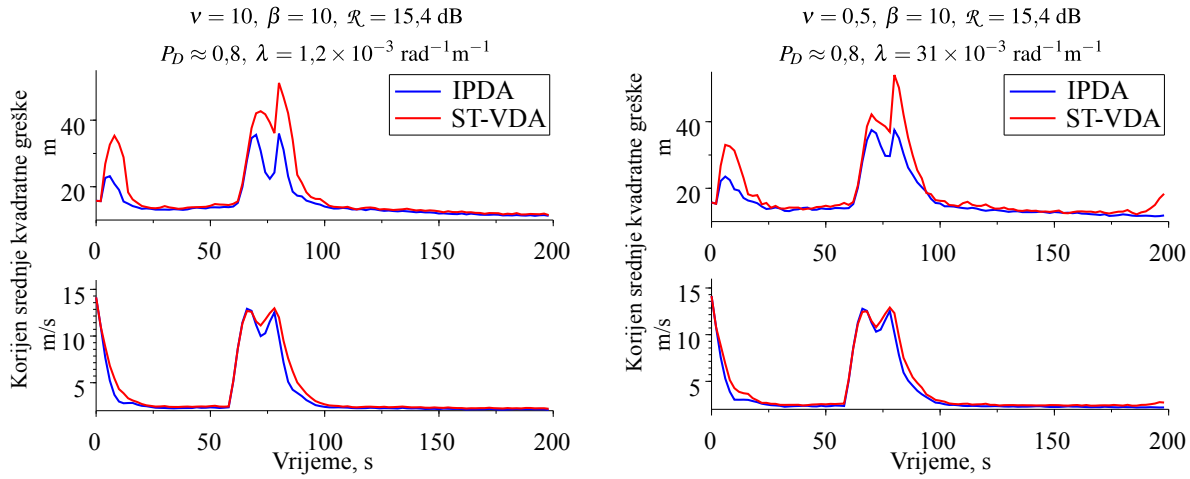
(b) Brzina.

Slika 4.18. Testna statistika po segmentima gibanja za hipoteze H0($\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2$) i H0($\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2$) da je točnost estimacije pozicije i brzine metodom ST-VDA veća nego primjenom metode IPDA, pri uvjetima slabo izražene smetnje. Pri tome su 1. i 3. segmenti gibanja nemanevrirajuće gibanje, a 2. segment gibanja je manevar. Obje metode primjenjuju difuzni model smetnje i ne primjenjuju statistiku otiska.



(a) Pozicija. (b) Brzina.

Slika 4.19. Testna statistika po segmentima za hipoteze $\mathrm{H0}(\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2)$ i $\mathrm{H0}(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|^2)$ da je točnost estimacije pozicije i brzine metodom ST-VDA veća nego primjenom metode IPDA, pri uvjetima jako izražene smetnje. Pri tome su 1. i 3. segmenti gibanja nemanevrirajuće gibanje, a 2. segment gibanja je manevar. Obje metode primjenjuju difuzni model smetnje i ne primjenjuju statistiku otiska.

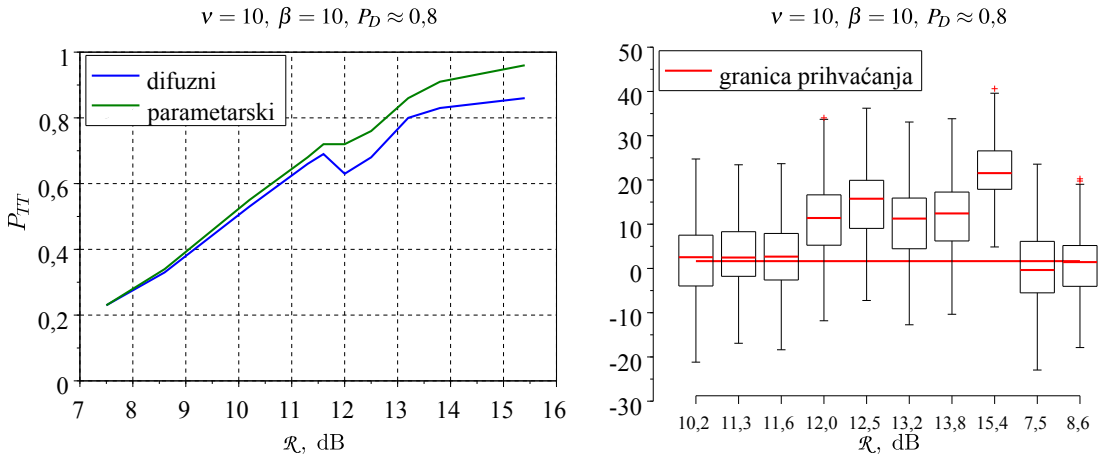


(a) Slabo izražena smetnja. (b) Jako izražena smetnja.

Slika 4.20. Ilustracija usporedbe točnosti estimacije pozicije i brzine između metoda IPDA i ST-VDA za (a) slabo izraženu smetnju i (b) jako izraženu smetnju, pri čemu je u obje metode primijenjen difuzni model smetnje.

Budući da je u prvoj cjelini analize verificiran boljitak metode ST-VDA u odnosu na metodu IPDA s obzirom na primarni kriterij vjerojatnosti zadržavanja staze, u drugoj je cjelini analize ispitan utjecaj primjene difuznog i parametarskog modela na značajke ove metode. Tako su postavljene hipoteze $\mathrm{H0}(P_{TT})$, $\mathrm{H0}(\|\tilde{\mathbf{x}}\|)$ i $\mathrm{H0}(\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}\|)$ da su i vjerojatnost zadržavanja staze stvarnog cilja i točnost estimacije primjenom parametarskog modela veće. Razlika između difuznog i parametarskog modela je u tome što difuzni model pretpostavlja uzoračku vrijednost gustoće

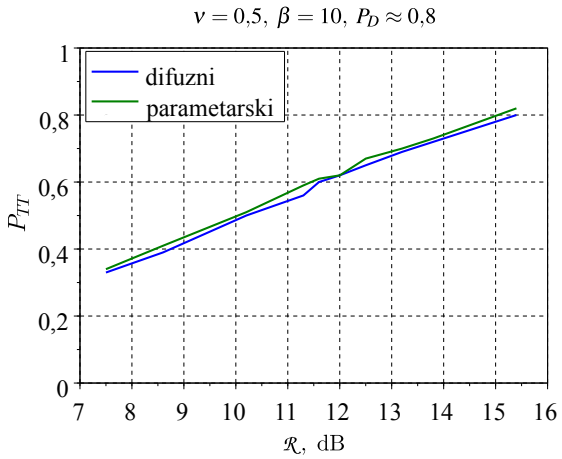
smetnje $\lambda_k = n_k/V_k$ (određenu brojem mjerenja n_k unutar volumena valjanosti V_k), a parametarskim se modelom primjenjuje njena stvarna vrijednost, $\lambda_k = P_{FA}/V_r$, određena vjerojatnošću detekcije smetnje $P_{FA} = \int_Z^\infty p_{FA}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ i volumenom razlučivosti senzora $V_r = \frac{1}{4}\pi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ koji je aproksimiran elipsoidom. Rezultati statističke analize prikazani su slikama 4.21 – 4.24, a slikama 4.25 i 4.26 je ilustrirana točnost estimacije za primjer visokog i umjerenog omjera snage signala prema smetnji $\mathcal{R}$. Rezultati pokazuju da kod slabo izražene smetnje razlike nestaju pri niskim vrijednostima omjera $\mathcal{R}$, jer zbog velikog broja mjerenja unutar volumena valjanosti, difuzni model dovoljno dobro opisuje stvarni karakter smetnje. Razlike su vidljive i u točnosti estimacije (posebno pozicijske) te u segmentu brzine za vrijeme manevra, ali također nestaju sa smanjenjem omjera $\mathcal{R}$, slika 4.23. Kod jako izražene smetnje, dobitak u vjerojatnosti zadržavanja staze primjenom parametarskog modela je minimalan, slika 4.22, ali je nešto veći za estimaciju pozicije te brzine za vrijeme manevra i za visoke omjere $\mathcal{R}$, slika 4.24. Manifestacija jako izražene smetnje je razdioba teškog repa, pri čemu povećani broj odjeka smetnje unutar volumena valjanosti (u odnosu na broj koji bi ostvarila slabo izražena smetnja), gotovo poništava utjecaj primjene parametarskog modela. U zaključku, pri velikom broju odjeka smetnji, difuznim se modelom potpuno zadovoljavajuće opisuje karakter smetnje.



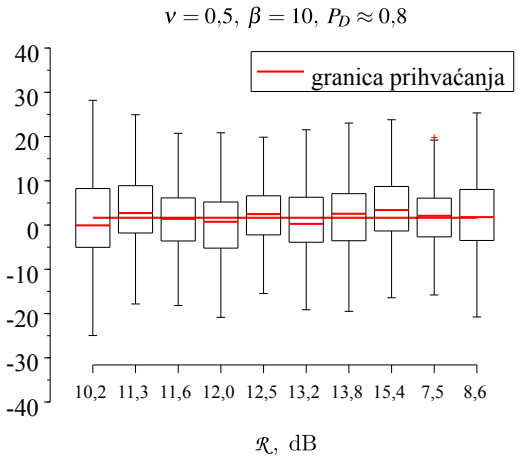
(a) Usporedba vjerojatnosti.

(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 4.21. Usporedba vjerojatnosti zadržavanja staze stvarnog cilja primjenom difuznog i parametarskog modela smetnje u metodi ST-VDA za slučaj slabo izražene smetnje približno Rayleighove razdiobe, bez primjene statistike otiska.

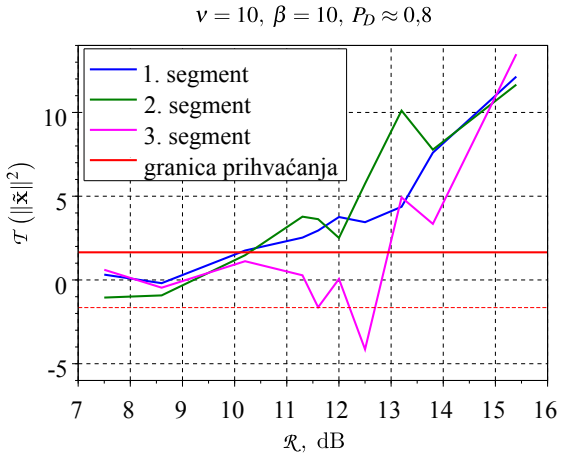


(a) Usporedba vjerojatnosti.

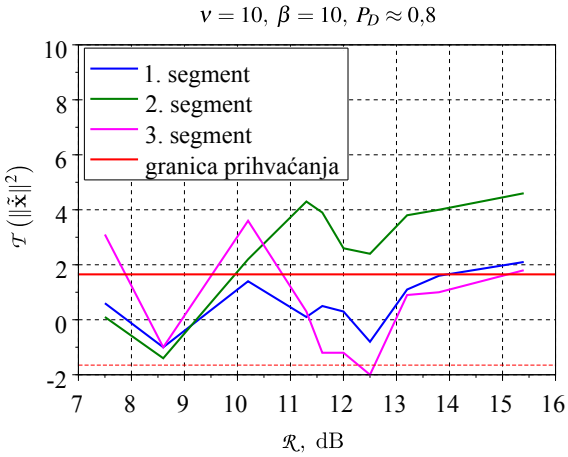


(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 4.22. Usporedba vjerojatnosti zadržavanja staze stvarnog cilja primjenom difuznog i parametarskog modela smetnje u metodi ST-VDA za slučaj jako izražene smetnje, bez primjene statistike otiska.

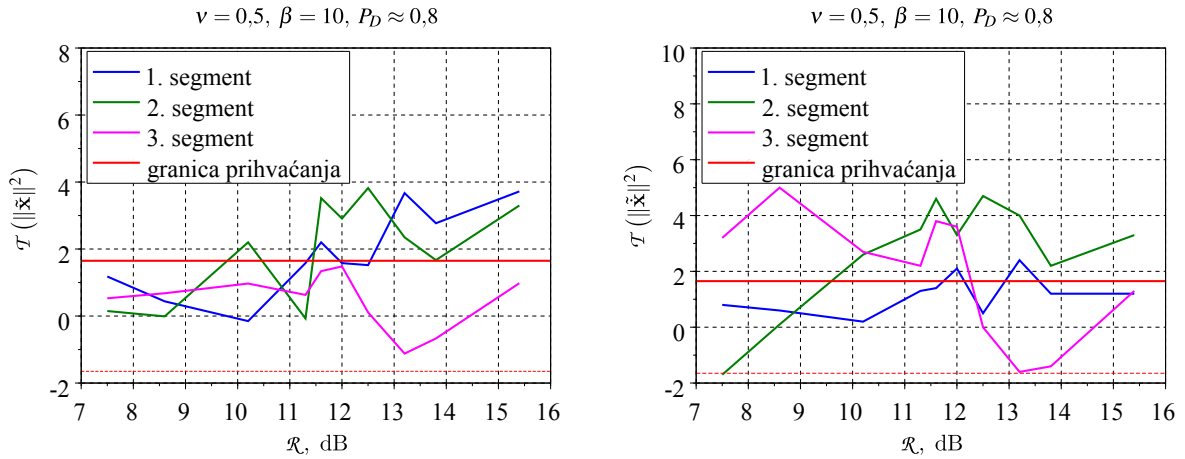


(a) Pozicija.



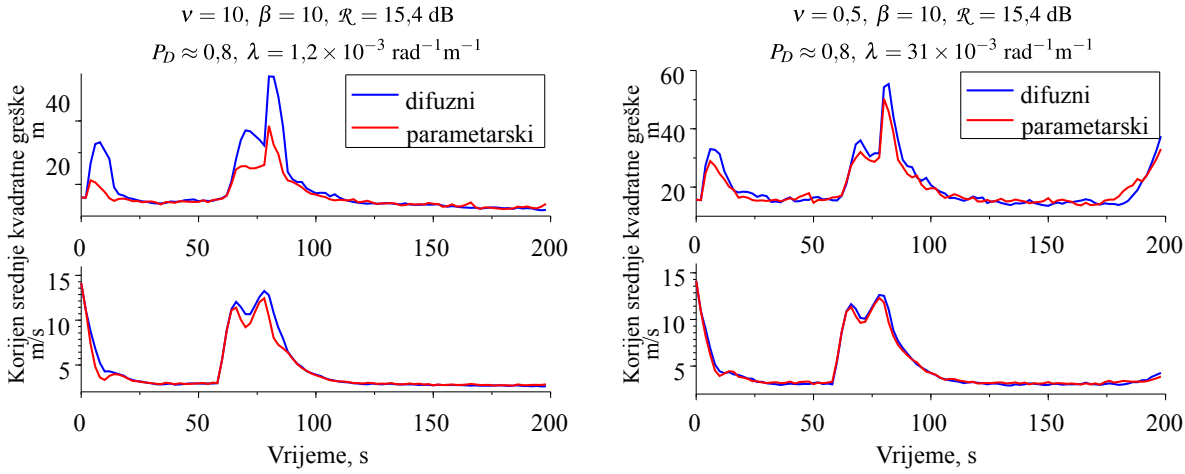
(b) Brzina.

Slika 4.23. Testna statistika po segmentima gibanja za hipoteze H0($\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2$) i H0($\|\tilde{\dot{\mathbf{x}}}\|^2$) da je točnost estimacije pozicije i brzine primjenom parametarskog modela smetnje veća nego primjenom difuznog modela u metodi ST-VDA, pri uvjetima slabo izražene smetnje i bez primjene statistike otiska. Pri tome su 1. i 3. segmenti gibanja nemanevrirajuće gibanje, a 2. segment gibanja je manevar.



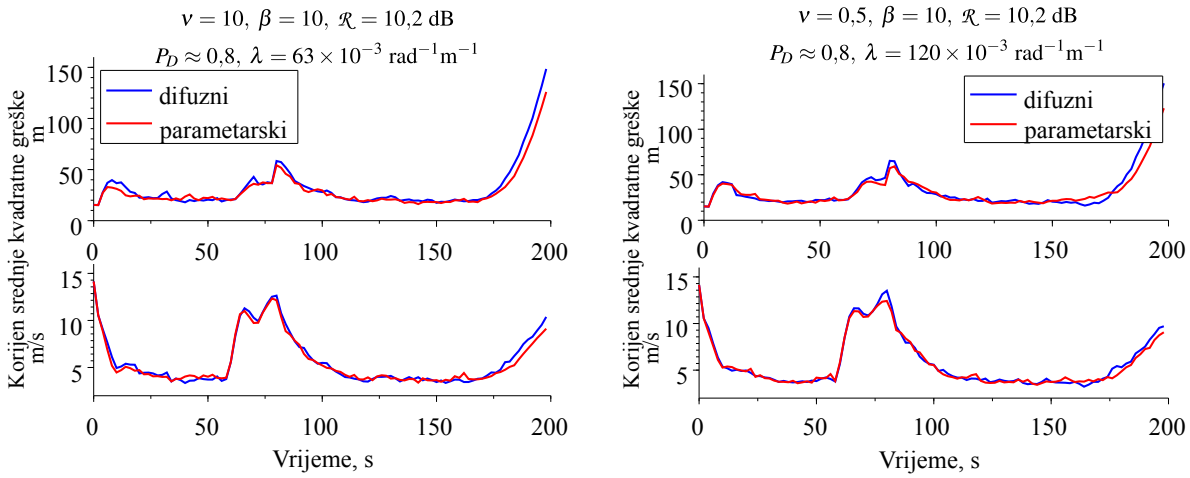
(a) Pozicija. (b) Brzina.

Slika 4.24. Testna statistika po segmentima gibanja za hipoteze H0($\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2$) i H0($\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2$) da je točnost estimacije pozicije i brzine primjenom parametarskog modela smetnje veća nego primjenom difuznog modela u metodi ST-VDA, pri uvjetima jako izražene smetnje bez primjene statistike otiska. Pri tome su 1. i 3. segmenti gibanja nemanevrirajuće gibanje, a 2. segment gibanja je manevar.



(a) Slabo izražena smetnja. (b) Jako izražena smetnja.

Slika 4.25. Ilustracija usporedbe točnosti estimacije pozicije i brzine primjenom difuznog i parametarskog modela smetnje u metodi ST-VDA, uz visoki omjer snage signala prema smetnji te za (a) slabo izraženu smetnju i (b) jako izraženu smetnju.

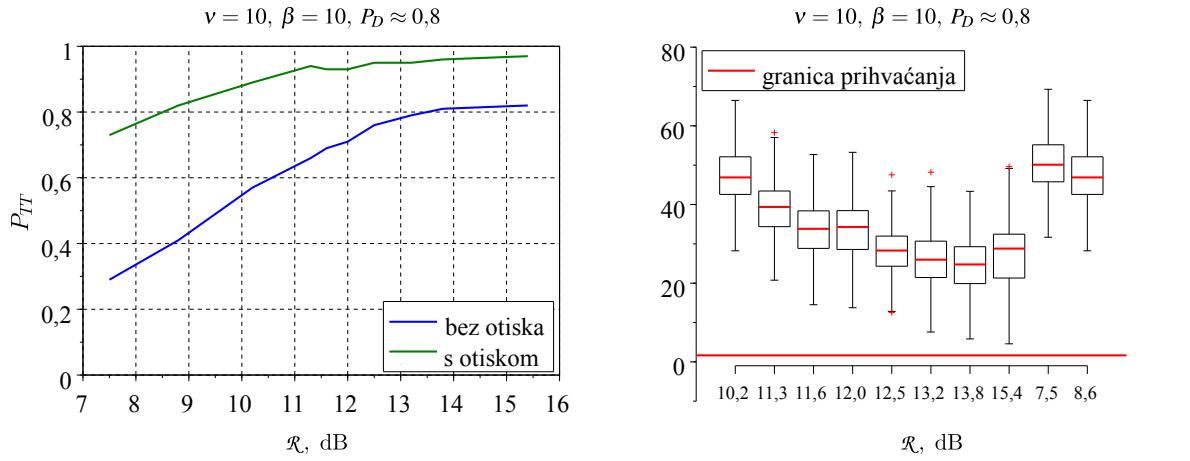


(a) Slabo izražena smetnja.

(b) Jako izražena smetnja.

Slika 4.26. Ilustracija usporedbe točnosti estimacije pozicije i brzine primjenom difuznog i parametarskog modela smetnje u metodi ST-VDA, uz umjereni omjer snage signala prema smetnji te za (a) slabo izraženu smetnju i (b) jako izraženu smetnju.

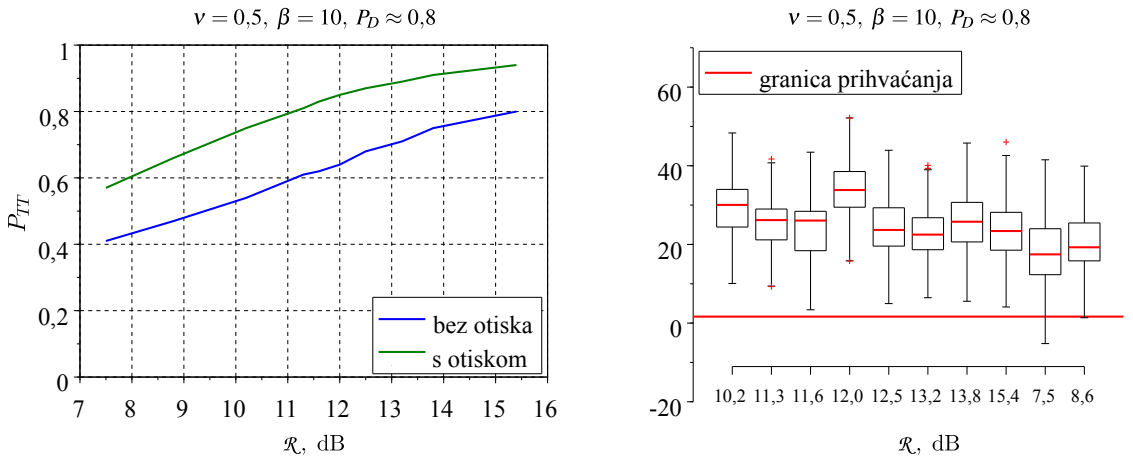
U trećoj i posljednjoj cjelini, provedena je analiza utjecaja primjene otiska na značajke metode ST-VDA pri čemu je primijenjen difuzni model smetnje. Rezultati statističke analize prikazani su slikama 4.27 i 4.28 za vjerojatnost zadržavanja staze te slikama 4.29 i 4.30 za točnost estimacije. Posebno, slika 4.31 ilustrira točnost estimacije za jednu partikularnu umjerenu vrijednost omjera $\mathcal{R}$. Rezultati statističke analize pokazuju da su i vjerojatnost zadržavanja staze i točnost estimacije primjenom otiska bolji za sve segmente gibanja i karaktere smetnje. Stoga primjena statistike otiska ima veliki potencijal za poboljšanje svih značajki metode zbog toga što značajno pomaže u diskriminaciji između mjerenja smetnje i cilja.



(a) Usporedba vjerojatnosti.

(b) Normirana razdioba rezultata.

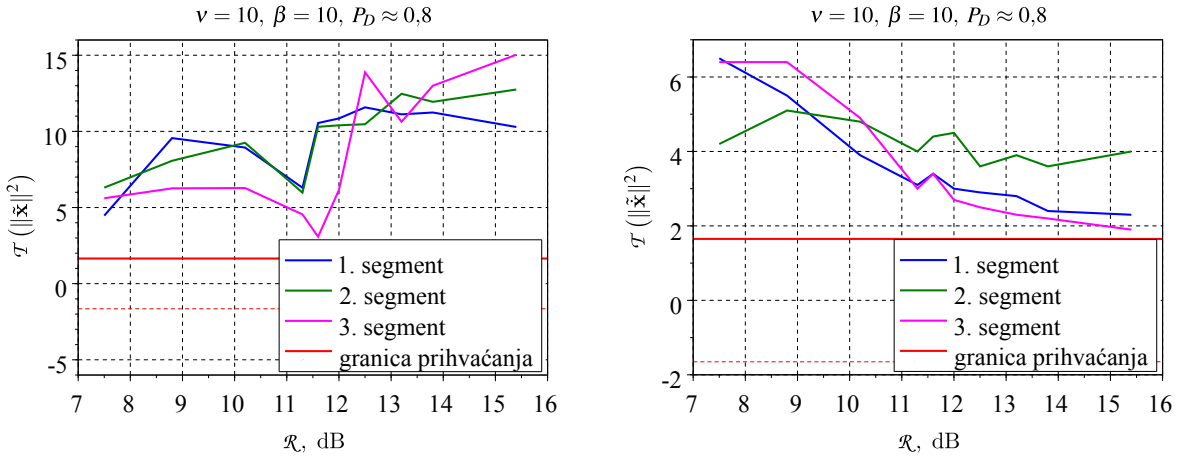
Slika 4.27. Utjecaj primjene statistike otiska na vjerojatnost zadržavanja staze stvarnog cilja metodom ST-VDA, pri čemu je primijenjen difuzni model smetnje uz slabo izraženu smetnju približno Rayleighove razdiobe.



(a) Usporedba vjerojatnosti.

(b) Normirana razdioba rezultata.

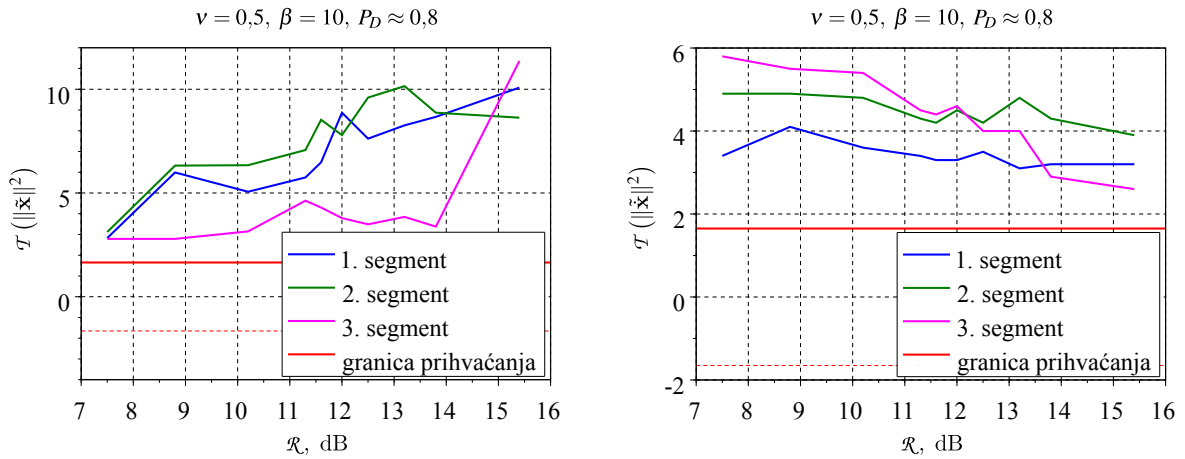
Slika 4.28. Utjecaj primjene statistike otiska na vjerojatnost zadržavanja staze stvarnog cilja metodom ST-VDA, pri čemu je primijenjen difuzni model smetnje uz jako izraženu smetnju s razdiobom teškog repa.



(a) Pozicija.

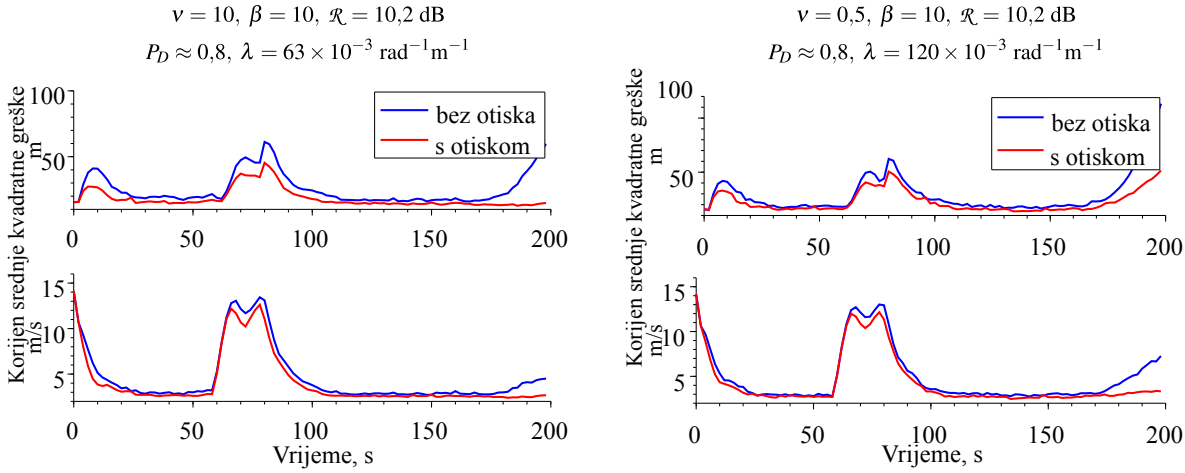
(b) Brzina.

Slika 4.29. Testna statistika po segmentima gibanja za hipoteze H0($\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2$) i H0($\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2$) da je točnost estimacije pozicije i brzine primjenom statistike otiska veća pri uvjetima slabo izražene smetnje. Pri tome su 1. i 3. segmenti gibanja nemanevrirajuće gibanje, a 2. segment gibanja je manevar. Metoda ST-VDA primjenjuje difuzni model smetnje.



(a) Pozicija. (b) Brzina.

Slika 4.30. Testna statistika po segmentima gibanja za hipoteze H0($\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2$) i H0($\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2$) da je točnost estimacije pozicije i brzine primjenom statistike otiska veća pri uvjetima jako izražene smetnje. Pri tome su 1. i 3. segmenti gibanja nemanevrirajuće gibanje, a 2. segment gibanja je manevar. Metoda ST-VDA primjenjuje difuzni model smetnje.



(a) Slabo izražena smetnja. (b) Jako izražena smetnja.

Slika 4.31. Ilustracija usporedbe točnosti estimacije pozicije i brzine primjenom otiska smetnje u metodi ST-VDA uz umjereni omjer snage signala prema smetnji te za (a) slabo izraženu smetnju i (b) jako izraženu smetnju.

4.6. Zaključak

Fokus ovog poglavlja postavljen je na proces pridruživanja, nužnost kada opservacija rezultira višestrukim mjerenjima pri čemu nije sa sigurnošću poznato koja mjerenja potječu od smetnje, a koje mjerenje potječe od cilja. Kao uvod u metodički opis vjerojatnosnog i Viterbijevog koncepta pridruživanja, u početnoj sekciji poglavlja opisana je detekcijska logika i njena izvedenica,

kompozitna logika, kao instrument održavanja staze, izvorno odvojen od procesa pridruživanja. Pri tome pojam održavanja staze podrazumijeva njenu inicijalizaciju, potvrdu i završetak, u skladu s nekim unaprijed postavljenim kriterijima. Ograničenje detekcijske logike i njenih izvedenica je pretpostavka o zanemarivoj vjerojatnosti pojave više od jednoga mjerenja koje potječe od smetnje unutar volumena valjanosti, a vjerojatnosna i Viterbijeva metoda pridruživanja nadilaze ovo ograničenje, primjenjujući integriranu mjeru kvalitete praćenja koja preuzima ulogu instrumenta održavanja staze. Dok je u vjerojatnosnoj metodi primijenjen koncept stalne primjetljivosti cilja, koncept Viterbijeve metode dopušta povremenu neprimjetljivost, a upravo ovo svojstvo rezultira boljitkom značajke vjerojatnosti zadržavanja staze cilja (u osnovi komplementa vjerojatnosti prekida staze), u odnosu na vjerojatnosnu metodu, zbog nešto blažeg kriterija završetka staze, kako je to pokazano u primjeru na kraju poglavlja. Pokazano je da se obje metode mogu lako uklopiti u okvir višemodelne estimacije IMM, jer se, prema rezultatima analize u odjeljku 2.4., ovom metodom ostvaruje najveća točnost estimacije cilja čije gibanje u određenom segmentu poprima karakter manevra. Kako je smetnja najčešće modelirana Poissonovim modelom i gustoćom smetnje kao parametrom, završna sekcija poglavlja obrađuje metode njegove (parametra) estimacije, poput metode uvjetnog očekivanja i maksimiziranja vjerodostojnosti, metode momenata ili, promjenom paradigme, metode estimacije same razdiobe smetnje. U odnosu na uobičajenu pretpostavku Gaussove razdiobe, u ovome je radu, za metodu jezgrene estimacije, izveden izraz za integriranu asimptotsku srednju kvadratnu grešku pod pretpostavkom Rayleighove razdiobe.

U primjeru na kraju poglavlja, provedena je analiza značajki vjerojatnosne i Viterbijeve metode pridruživanja, u nastojanju pružanja odgovora na pitanje: koja je od metoda, vjerojatnosna ili Viterbijeva, prikladnija za scenarij praćenja manevrirajućeg cilja u smetnji uzrokovane odjecima mora? Pri tome je kriterij prikladnosti sažet u tri stavke: što veća vjerojatnost zadržavanja staze (komplement vjerojatnosti gubljenja staze); što veća točnost estimacije; detekcija staze lažnog cilja kroz nekoliko opservacija. S obzirom na postavljene zahtjeve, analiza je podijeljena u tri zasebne sekcije i provedena za različite vrijednosti parametra vjerojatnosti detekcije smetnje, u rasponu od male, reda veličine 0,0001, pa do velike, reda veličine 0,1.

U prvoj sekciji analize, provedena je usporedba vjerojatnosne i Viterbijeve metode pridruživanja, pri čemu rezultati pokazuju da, s obzirom na parametar pojave jedne do dvije staze lažnog cilja u određenom vremenskom intervalu, Viterbijeva metoda rezultira većom vjerojatnošću zadržavanja staze, uz prosječno veću grešku estimacije. Potonja značajka nije kritična i nastaje zbog same prirode Viterbijeve metode kojom se određuje najvjerodostojnija staza, a koja ponekad vodi preko čvora (mjerenja) koje potječe od smetnje. U takvim je točkama staze greška estimacije, u odnosu na vjerojatnosnu metodu, izraženija, ali je u preostalom dijelu, gdje najvjerodostojnija staza vodi preko čvorova koji potječu od cilja, razlika u greškama estimacije beznačajna. Budući da je analiza provedena nad velikim brojem staza, ovakve točke

su statistički jednoliko raspoređene duž staze, pa je posljedično i prosječna greška estimacije veća. U zaključku, Viterbijeva je metoda prikladnija od vjerojatnosne s obzirom na vjerojatnost zadržavanja staze i točnost estimacije.

U drugoj je sekciji analiziran utjecaj primjene difuznog i parametarskog modela smetnje na značajke Viterbijeve metode. Rezultati pokazuju da je pri slabo izraženoj smetnji (amplitudna razdioba dobro je aproksimirana Rayleighovom) te za visoke do umjerene omjere snaga signala prema smetnji, primjenom parametarskog modela ostvaren boljitak u pogledu vjerojatnosti zadržavanja staze cilja te veća točnost estimacije u segmentu manevra. Boljitak je iscrpljen već pri umjerenim do niskim omjerima, jer tada difuzni model dovoljno dobro opisuje stvarni karakter smetnje, rezultirajući u beznačajnom dobitku parametarskog modela. U drugoj krajnosti, pri jako izraženoj smetnji, kada amplitudna razdioba pokazuje obilježje teškog repa, boljitak zbog primjene parametarskog modela je beznačajan u cijelom rasponu omjera snaga signala prema smetnji.

U trećoj je sekciji analize pokazan veliki potencijal primjene statistike otiska na poboljšanje svih značajki metode pridruživanja. Već sa samo amplitudnom značajkom, postignuta je značajna diskriminacija odjeka koji potječu od smetnje od odjeka koji potječe od cilja, što se odražava u značajno većoj vjerojatnosti zadržavanja staze i značajno većom točnošću estimacije. Primjenom ostalih statističkih značajki otiska, poput Dopplerove frekvencije i, u slučaju senzora visoke razlučivosti, geometrijskog otiska cilja, postigla bi se još bolja diskriminacija.

Stoga, znanstveni je doprinos u ovome poglavlju metodički izvod vjerojatnosnog i Viterbijevog pridruživanja, u sklopu višemodelnog okvira estimacije IMM i integrirane mjere kvalitete praćenja. U Viterbijevoj je metodi pridruživanja primijenjen koncept povremene neprimjetljivosti cilja te koncept zajedničkog volumena promatranja, jednakog za sve modele i sve čvorove (mjerenja) kurentne opservacije. Izvorni doprinos je usporedba i verifikacija boljitka ovakve forme Viterbijevog algoritma u odnosu na vjerojatnosnu metodu IPDA, u kontekstu vjerojatnosti zadržavanja staze prilikom praćenja jednog manevrirajućeg cilja u izraženoj smetnji mora. Također, doprinos je i nalaženje optimalne širine jezgrene funkcije pod pretpostavkom Rayleighove amplitudne razdiobe.

Sažeto, analizom je dokazana svrsishodnost primjene statistike otiska te u određenoj mjeri i parametarskog modela. U tom je kontekstu iskazana potreba za estimacijom prvenstveno amplitudne razdiobe smetnje, pri čemu je estimacija razdiobe primjenom neuronske mreže fokus sljedećeg poglavlja. Neuronska mreža, hibrid parametarske i neparametarske metode, prikladna je zbog svojstva univerzalne aproksimacije, što znači da može aproksimirati bilo koju funkciju sa željenom točnošću, uz kontroliranu kompleksnost.

Poglavlje 5

Primjena neuronskih mreža u procesu pridruživanja

U svrhu dodatne zaštite obalnog pojasa od zlonamjernih plovila, uobičajeno nisko zamjetljivih i visoko manevrirajućih, nedovoljna kvaliteta radarskog pokrivanja (glavnih radarskih sustava) u područjima koja su određena specifičnom topologijom terena, opcionalno se može povećati uvođenjem komercijalno dostupnih (COTS) radarskih senzora na prigodne lokacije. U velikoj su većini to impulsni radari, s mehanički rotirajućom antenom te logaritamskim prijemnikom na čijem je izlazu dostupna amplituda odjeka, bez informacije o fazi. Stoga je ublažavanje utjecaja odjeka od mora na proces praćenja malih (u smislu radarskog presjeka) i visoko manevrirajućih ciljeva razumno provesti u procesu detekcije i/ili u okviru procesa pridruživanja. Poznavanje statistike smetnje (ili otiska, u smislu amplitudne razdiobe te vremenske i prostorne korelacije), važno je za učinkovitost i robusnost ovih procesa, u kontekstu ostvarivanja malog broja lažnih staza i visoke vjerojatnosti zadržavanja staze stvarnog cilja, čak i pri uvjetima izraženih smetnji i manevrirajućeg gibanja cilja.

U poglavlju 3, opisani su fizikalni mehanizmi koji dovode do nastanka smetnje, uobičajeno opisane složenim Gaussovim procesom kratkoročnih i dugoročnih amplitudnih fluktuacija. Tradicionalno je komponenta dugoročnih fluktuacija amplitude opisana gama-razdiobom intenziteta teksture (odnosno radarskog presjeka, vidi (3.31)). U [189] je pokazano da vrijeme korelacije komponente kratkoročnih fluktuacija amplitude iznosi par milisekundi, a dugoročnih par sekundi pri čemu je prostorna korelaciju reda veličine metra. Komponenta smetnje s kratkoročnim fluktuacijama rezultat je raspršenja elektromagnetske energije od malih kapilarnih valova (valne duljine reda veličine centimetra ili manje), koji su rezultat djelovanja lokalnog vjetra pri čemu je umirujuća sila površinska napetost. Komponenta smetnje s dugoročnim fluktuacijama rezultat je raspršenja elektromagnetske energije od velikih gravitacijskih valova, valne duljine reda veličine metra pa naviše. Nastanak ovih valova povezan je s djelovanjem lokalnog ili udaljenog (izvan zone promatranja) vjetra, pri čemu je gravitacijska sila primarna umirujuća

sila. U [97] je pokazano da otkrivena hibridna amplitudna i frekvencijska modulacija rezultira nelinearnim procesom smetnje. Dok je amplitudna modulacija rezultat stalne promjene nagiba morske površine koja sadrži male kapilarne valove, frekvencijska je primarno rezultat promjene orbitalne brzine valnih čestica koje čine valnu krestu. Temeljem navedenih saznanja, model složenog procesa smetnje proširen je u model nelinearnog stohastičkog procesa, opisan nelinearnim stohastičkim jednadžbama (3.94), (3.97) i (3.103) [145]. Primijenjena vremena korelacija su ili u osnovi izvedena iz elektromagnetizma, što se odnosi na komponentu kratkoročnih fluktuacija, ili određena statističkim osobinama morske površine u slučaju komponente dugoročnih fluktuacija. Amplitudna razdioba je K-razdioba (3.33), prvotno opisana u kontekstu fizikalne interpretacije odjeka smetnje mora [22]. Pri tome se smatra da je broj odjeka unutar ćelije razlučivosti konačan i raspodijeljen u skladu s negativnom binomnom razdiobom čija srednja vrijednost teži beskonačnosti [23, 25]. Iako ovaj model dosta dobro opisuje određena mjerenja (iz mnoštva objavljene literature na ovu temu, vidi npr. [26, 66, 152, 155, 159] te popis literature u navedenim radovima), nedavna mjerenja provedena visokorazlučivim radarom (vidi npr. [28, 196–198]), pokazuju prisutnost igličastih odjeka, događaja koji su povezani primarno s fenomenom lomljenih valova [161]. Ovakvi odjeci utječu na rep amplitudne razdiobe jer je vjerojatnost pojavljivanja tako velikih amplituda viša od očekivane, odnosno rep razdiobe je teži. Utjecaj igličastih odjeka uzet je u obzir u amplitudnoj KA-razdiobi [27], nadogradnji modela klasične K-razdiobe, gdje se njihov broj tretira kao rezultat Poissonovog procesa. U [235], utjecaj igličastih odjeka uzet je u obzir kreiranjem mješavine dviju K-razdioba, od kojih je jedna asocirana s mehanizmom Braggovog raspršenja, a druga s pojavom igličastih odjeka. Nedavno je u [188] pokazano da modeliranje intenziteta teksture (radarskog presjeka) prema inverznoj Gaussovoj razdiobi rezultira izvrsnim slaganjem s dokumentiranim mjerenjima. Dobro slaganje također je postignuto i Paretovom razdiobom (ova razdioba rezultat je modeliranja intenziteta teksture inverznom gama-razdiobom). Također i prema rezultatima mjerenja u [197], u određenim slučajevima Paretova razdioba pokazuje bolje slaganje repa nego razdioba gdje je intenzitet teksture modeliran inverznom Gaussovom razdiobom. A u [236] je pokazano da rezultati dokumentiranih mjerenja bolje pristaju razdiobi prema frakcionalnoj diferenciji Paretove razdiobe nego (klasičnoj) Paretovoj razdiobi.

U prethodnom je odlomku istaknuta ovisnost težine repa amplitudne razdiobe o različitim modelima intenziteta teksture (radarskog presjeka), pri čemu primjena svakog modela ima uporište u rezultatima određenog skupa mjerenja. Situacija je još složenija za Jadransko more, jer po autorovom saznanju ne postoje objavljeni podaci o statistici elektromagnetskog raspršenja. Kako je istaknuto u uvodnom dijelu poglavlja 3, može se očekivati kvalitativna ovisnost statistike raspršenja kao i za potpuno razvijeno more, ocean, ali kvantitativna ovisnost (npr. ovisnost vrijednosti parametra oblika razdiobe o stanju mora, značajnoj visini valova i sl.), nije poznata. Specifičnost Jadrana su površinski vjetrovni valovi ograničeni privjetrištem i trajanjem vjetra.

Navedene značajke rezultiraju time da je Jadran većinom nerazvijeno more i da su valovi zbog ovog razloga strmiji i kraće valne duljine nego što bi bili u oceanu. Usporedbe radi, mjerenja provedena pod uvjetima ograničenog privjetrišta i nerazvijenoga mora na lokacijama Toulona (Francuska), u Sredozemlju, te Tarantskoga zaljeva (Italija) [3], pokazuju da u određenim slučajevima Paretova razdioba pokazuje bolje slaganje s mjerenjima nego K-razdioba, ali i da nije uočena ovisnost vrijednosti parametra oblika o azimutu te da je njegova vrijednost općenito veća nego u slučaju potpuno razvijenoga mora [5].

U poglavlju 4, u proces pridruživanja je uveden otisak smetnje (opisan parametrom volumne gustoće) te otisak cilja. U ovom se poglavlju pojam otiska smetnje i cilja proširuje te se prvenstveno odnosi na amplitudnu razdiobu odjeka jer mjerena amplituda prirodno (i najčešće) proizlazi iz samoga procesa opservacije, a poznavanje amplitudne razdiobe smetnje određuje i njenu volumnu gustoću. Parametarski pristup estimaciji amplitudne razdiobe kao (jedne od komponenti) otiska uključuje njen apriorni model, opisan parametrima čije se vrijednosti estimiraju na temelju mjerenja, npr. amplitudna Rayleighova i K-razdioba primjer su parametriziranog apriornog modela smetnje. A radi lakše matematičke manipulacije, optimalni Neyman-Pearsonov test [237] u slučaju smetnje koja nije Gaussova, uobičajeno se zamjenjuje nekom drugom (neoptimalnom, ali statistički dovoljnom) testnom statistikom koja ovisi isključivo o apriornom modelu smetnje. Ali, u tom se slučaju smetnja može manifestirati drukčijom statistikom (drukčijim otiskom) od očekivane zbog razlike između apriornog modela i njenog stvarnog karaktera, tako da je pristup s parametrizacijom apriornog modela učinkovit jedino ako je evaluacija parametara izvediva i ako apriorni model odgovara stvarnosti. Ako odstupa, kao npr. pri učestaloj pojavi igličastih odjeka, model se evaluira pogrešno što u konačnici slabi radne značajke procesa detekcije i pridruživanja, npr. vjerojatnost gubitka staze praćenog cilja može biti povišena zbog ili previše odjeka smetnje unutar volumena valjanosti ili zbog smanjene vjerojatnosti detekcije, sve u odnosu na dizajnirane vrijednosti. Stoga u ovom poglavlju promjena paradigme opisa smetnje vodi poluparametarskom pristupu i primjeni neuronskih mreža kao robusnoj alternativi uobičajenoj parametarskoj estimaciji. Dok poluparametarska estimacija pretpostavlja određenu općenitu funkcionalnu ovisnost razdiobe otiska, arhitektura neuronske mreže s velikim brojem adaptivnih parametara (čiji broj može biti varijabilan, ovisno o veličini podataka), omogućuje fleksibilnost u aproksimaciji. Ovakav pristup primijenjen je npr. za estimaciju funkcionalne ovisnosti u problemu nelinearne regresije, čije se rješavanje svodi na estimaciju uvjetne razdiobe [227]. Pored estimacije razdiobe otiska, primjena neuronskih mreža u svrhu ublažavanja efekata smetnje može premostiti nedostatke u metodi parametrizacije apriornog modela, jer mreža uči statistiku smetnje u stvarnom vremenu, odnosno, može biti unaprijed naučena različitim statistikama. Npr. u [238], mreža s radijalnim baznim funkcijama (RBF) je na temelju dostupnih podataka smetnje primijenjena u modeliranju nelinearne dinamike smetnje odjeka mora, pri čemu se smetnja smatra kaotičnim procesom. Također i u [239],

gdje je neuronska mreža, temeljem unaprijed snimljenih podataka smetnje, primijenjena u estimaciji amplitudne razdiobe Riceove inverzne Gaussove razdiobe (RiIG, koja se ne može izvesti analitički) te su takve estimacije primijenjene za određivanje praga detekcije. U [240], mreže radijalnih baznih funkcija i višeslojnih perceptrona (MLP) su primijenjene u procesu detekcije pri čemu su unaprijed naučene statistici smetnje prema K-razdiobi uz različite vrijednosti parametra oblika te omjera snage signala prema smetnji, u vjeri da ove vrijednosti predstavljaju dobar model očekivane smetnje odjeka mora i snage signala. U [241], metoda jezgrene estimacije (KDE) [61], unaprijed naučena sa stvarnim podacima smetnje, implementirana je u proces detekcije primjenom različitih jezgrenih funkcija. Interesantan pristup nekoherentnoj detekciji površinskog cilja s malim radarskim presjekom primjenom konvolucijske neuronske mreže (CNN) opisuje [242]. Učenje mreže provedeno je slijedom dvodimenzionalnih slika (intenzitet odjeka ovisno o ćeliji razlučivosti i rednom broju impulsa), pri čemu je pozicija odjeka površinskog cilja označena. Ovako naučena mreža izvlači bitne značajke odjeka koji potječe od mora i odjeka koji potječe od cilja, povećavajući time vjerojatnost detekcije u odnosu na ustaljene metode koje primjenjuju konstantnu stopu lažnih detekcija (CFAR). U [243], detekcija specifičnog cilja unutar grupe, u smetnji uzrokovanoj odjecima od morske površine, provedena je na temelju prepoznavanja, primjenom neuronske mreže i stroja s potpornim vektorima (SVM) na radijalni profil visoke razlučivosti (ovisnost snage odjeka o radijalnoj udaljenosti uz fiksni azimut). Učenje mreže i stroja s potpornim vektorima, s mrežom RBF kao jezgrom, provedeno je generiranim radijalnim profilima odjeka cilja. Rezultati pokazuju da je, pri niskim omjerima snage signala prema smetnji, stopa prepoznavanja viša uz metodu SVM. Detekcija cilja nepoznatog Dopplerovog frekvencijskog pomaka, također u smetnji uzrokovanoj odjecima od morske površine, poboljšana je (u odnosu na ustaljenu metodu Dopplerovog pretprocesiranja u okviru metode CFAR), primjenom mreže MLP, naučene s generiranim uzorcima smetnje [244]. Prednost ovakvog pristupa je u tome što mreža MLP reducira varijaciju snage smetnje tako da je vrijednost praga detekcije fiksna što opet omogućuje primjenu klasičnog nekoherentnog CFAR-detektora. Prednost je također i to što nema ograničenja s obzirom na statistiku smetnje. Provedena analiza sa stvarnim podacima smetnje od mora pokazuje da su, u usporedbi s konvencionalnim CFAR-prijemnikom uz Dopplerovo pretprocesiranje, ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije bliže dizajniranim vrijednostima tako da se ovim pristupom bolje aproksimira optimalni Neyman-Pearsonov detektor. Neuronska mreža je također uspješno primijenjena i u [245], u svrhu redukcije smetnje odjeka mora u konvencionalnom nekoherentnom radarskom sustavu. U [246], amplitudna razdioba odjeka i njihova vremenska korelacija primijenjena je u obalnom nekoherentnom radarskom sustavu za detekciju kopnenih masiva i njihovo isključivanje iz zone motrenja, na način da se odjek svake ćelije razlučivosti primjenom mreže MLP klasificira kao onaj koji potječe od kopna ili onaj koji potječe od mora. Dok je amplitudna razdioba odjeka od kopna modelirana Weibullovom razdiobom, amplitudna razdioba odjeka

od mora modelirana je K-razdiobom. A u [247], za učenje neuronske mreže su primijenjeni analizirani podaci elektromagnetske refleksije od leda, tako da u primjeni koherentne detekcije nefluktuirajućeg odjeka cilja (u okruženju smetnje odjeka leda prema amplitudnoj Weibullovoj razdiobi), ovako naučena mreža pokazuje poboljšanje i robusnost u usporedbi s konvencionalnom aproksimacijom optimalnog Neyman-Pearsonovog detektora.

Fokus ovoga poglavlja postavljen je na primjenu neuronskih mreža za specifični cilj estimacije amplitudne razdiobe. Estimacija se provodi u sklopu procesa detekcije i pridruživanja, partikularno u segmentu nekoherentne detekcije te u segmentu diskriminacije odjeka smetnje od odjeka cilja. Kako je to pokazano primjerom u odjeljku 4.5, pravilna primjena (amplitudne) statistike značajno povećava vjerojatnost zadržavanja staze praćenog cilja u scenariju izražene smetnje i manevra. A iz mnoštva dostupne literature koja se odnosi na estimaciju razdiobe vjerojatnosti primjenom neuronskih mreža, vidljiva je raznolikost metoda. Neke primjenjuju arhitekturu acikličke slojevite mreže i algoritam sa širenjem pogreške unazad kao u [248], gdje je za estimaciju razdiobe vjerojatnosti primijenjena metoda maksimiziranja vjerodostojnosti uzoraka učenjem bez nadzora. Kako je aktivacijska funkcija eksponencijalna, uloga slojevite mreže je aproksimacija logaritma razdiobe. Jednak pristup primijenjen je i u [249], ali s tom razlikom što su početne vrijednosti koeficijenata mreže (prije postupka maksimizacije vjerodostojnosti uzoraka) rezultat učenja pod nadzorom, s obzirom na točke dobivene metodom jezgrene estimacije. Na taj je način ostvarena bolja konvergencija estimacije k nuli na rubovima ulazne domene nepoznate razdiobe. Princip jezgrene metode estimacije primijenjen je i u [250], pri čemu su rezultati klasične metode k najbližih susjeda točke učenja acikličke slojevite mreže. Umjesto razdiobe, u [251] je predložena metoda estimacije funkcije distribucije glatkom interpolacijom kumulativa vjerojatnosti uzoraka, također acikličkom slojevitom mrežom. Metoda je proširena stohastičkim učenjem (kumulativa vjerojatnosti uzoraka) u [71], gdje je također predložena i metoda generiranja slučajne varijable prema razdiobi koja je, umjesto deterministčkim funkcionalnim oblikom, određena samo uzorcima izvučenim iz te (nepoznate) razdiobe. Dok je u [71] za učenje funkcije distribucije broj neurona određen veličinom skupa za učenje, u [252] je predložena metoda koja za estimaciju funkcije razdiobe primjenjuje stohastičko učenje kumulativa vjerojatnosti uzoraka kao i u [71], ali s brojem neurona koji ovisi o statistici ulaznih podataka. U [253] je za estimaciju multivarijatne razdiobe predložena metoda maksimizacije izlazne entropije acikličke slojevite mreže sa sigmoidalnom aktivacijskom funkcijom, pri čemu se maksimizacija provodi s obzirom na ulazne koeficijente. Jednaka arhitektura mreže primijenjena je i za estimaciju uvjetne razdiobe izlaznih varijabli mreže [254], ali s koeficijentima koji su rezultat minimizacije Kullback-Leiblerove divergencije što je ekvivalentno maksimizaciji entropije, odnosno Shannonovog indeksa [255]. Određeni broj metoda varijante su arhitekture radijalnih mreža, kao u [256], gdje je za estimaciju razdiobe primijenjen pristup sa sumom baznih razdioba unutar klasifikacijskog okvira tako da su vrijednosti parametara re-

zultat maksimizacije vjerodostojnosti uzoraka. Metoda estimacije razdiobe radijalnom mrežom za izlazne (zavisne) varijable modificirana je u [257] na način da su parametri mreže RBF estimirani acikličkom slojevitom mrežom. Sličan pristup primijenjen je u [258] za multivarijatni slučaj izlaznih (i moguće koreliranih) varijabli. Koncept miješane radijalne i acikličke slojevite mreže dodatno je modificiran u [259] za posebni slučaj periodičkih izlaznih (i zavisnih) varijabli. Estimacija uvjetne funkcije razdiobe izlaznih varijabli mreže primjenom jezgrene metode predložena je u [260]. Za razliku od estimacije razdiobe primjenom acikličkih slojevitih i radijalnih mreža koje su u osnovi poluparametarske, primjer neparametarske estimacije dan je u [261]. Metoda se temelji na samoorganiziranju i u konvergenciji rezultira jednakovjerojatnom kvantizacijom ulaznog prostora, tako da je u svakoj točki (ulaznog prostora) razdioba težinskih vektora razmjerna nepoznatoj ulaznoj razdiobi. Metoda samoorganiziranja primijenjena je i u [262], pri čemu je nepoznata razdioba izražena sumom baznih razdioba koje ne trebaju nužno biti homogene, s parametrima koji su rezultat minimizacije Kullback-Leiblerove divergencije. Pri tome je prvi sloj mreže sličan Kohonenovoj samoorganizirajućoj mapi [263], a za svaku se iteraciju pobjednički neuron odabire na temelju maksimalne aposteriorne vjerojatnosti. U posebnom slučaju velikog skupa ulaznih podataka, u [264] je primijenjen princip samoorganizirajuće inkrementalne mreže i jezgrene estimacije što čini ovu metodu neparametarskom. Metoda kompetitivnog učenja primijenjena u [265] rezultira jednakovjerojatnom kvantizacijom ulaznog prostora, pružajući adaptivni mehanizam za estimaciju nestacionarnih razdioba. Estimacija razdiobe nestacionarnog procesa provedena je i u [266], primjenom dinamičkih Bayesovih mreža (DBN), partikularno modela diskretnog Markovljeva lanca. U prvoj inačici metode, prijelazne vjerojatnosti estimirane su jezgrenom metodom, pri čemu su vrijednosti parametara rezultat maksimizacije vjerodostojnosti uzoraka. U drugoj inačici, pogodnoj za stvarnovremensku estimaciju, mreža je konstruirana uz pomoć vektora aposteriornih vjerojatnosti stanja procesa, čije su vrijednosti estimirane slijedom uzoraka primjenom jednostavnog rekurzivnog pravila. Naposljetku, za estimaciju multivarijatne Gaussove razdiobe, u [267, 268] je primijenjena metoda vjerojatnosne analize glavnih komponenti.

Ostatak je poglavlja posvećen razradi metode implementacije radijalne i acikličke slojevite mreže (metoda neuronske mreže) u procesu estimacije amplitudne razdiobe smetnje. A u odjeljcima 5.1.2 i 5.2.2, primjerima su pokazane implementacije metode (neuronske mreže) u segmentu nekoherentne detekcije te, posebno u odjeljku 5.1.2, implementacija u segmentu diskriminacije odjeka smetnje od odjeka cilja u okviru Viterbijevog procesa pridruživanja, vidi odjeljak 4.3.2. Kako bi se pokazala robusnost metode, provedeno je testiranje sljedećih hipoteza:

H1 vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena metodom neuronske mreže nije značajno lošija od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom ispravnog modela

H2 vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena metodom neuronske mreže značajno je bolja od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom pogrešnog modela.

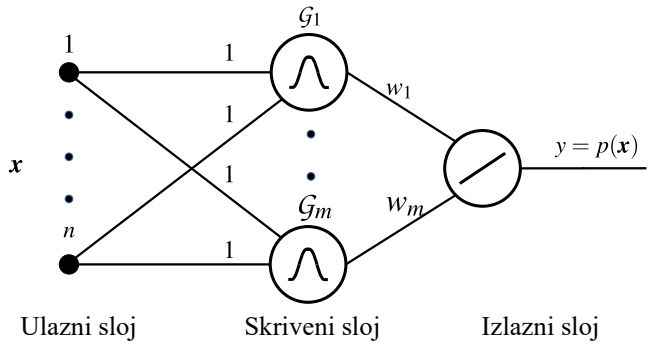
Prihvaćanje hipoteza H1 i H2 (u određenom rasponu vrijednosti parametara dizajna), pokazuje robusnost metode neuronske mreže, u smislu da značajke poput vjerojatnosti detekcije te vjerojatnosti zadržavanja i gubljenja staze u scenariju izražene smetnje i manevra nisu značajno lošije pri usporedbi sa značajkama metode parametrizacije apriornog modela, u scenariju podudaranja stvarnog karaktera smetnje i apriornog modela, ali su značajno bolje pri nepodudaranju. U ovom zadnjem slučaju, pokazano je i bolje slaganje operativnih karakteristika prijemnika (ROC) s dizajniranim vrijednostima. Također, metoda neuronske mreže nije ograničena samo na stacionarnu smetnju što znači da zaobilazi nedostatke koji se javljaju pri nepodudaranju apriornog modela i stvarnog karaktera smetnje.

Naposljetku, u odjeljku 5.3 je provedena usporedba metoda glatke interpolacije kumulativa vjerojatnosti (SIC) [71] i njene inkrementalne inačice (ISIC) koja je pogodna za slijedno učenje, partikularno za scenarij estimacije razdiobe odjeka cilja kada je broj dostupnih uzoraka malen. Usporedba obuhvaća točnost estimacije i ostvarenu vjerojatnost lažne detekcije (u ovisnosti o dizajniranoj vrijednosti) te odgovarajuću normiranu devijaciju ostvarenih vrijednosti. Također je provedena usporedba točnosti estimacije razdiobe odjeka cilja metodom radijalne mreže s maksimizacijom očekivanja te metodom ISIC, za različite omjere snage signala prema snazi smetnje. U završnom dijelu odjeljka 5.3, provedeno je testiranje hipoteza H1 i H2, u kontekstu primjene omjera vjerodostojnosti u segmentu diskriminacije odjeka smetnje od odjeka cilja, unutar procesa pridruživanja implementiranog Viterbijevom metodom prema odjeljku 4.3.2.

5.1. Implementacija radijalne mreže

Dok se kod acikličkih mreža učenje promatra u kontekstu stohastičke aproksimacije, odnosno minimizacije srednje kvadratne greške, kod radijalnih se mreža (RBF) promatra u kontekstu aproksimacije multivarijatne funkcije, odnosno nalaženju multidimenzionalne površine koja, u statističkom smislu, najbolje pristaje podacima za učenje [269]. Radijalna mreža, slika 5.1, opisana je ulaznim slojem koji povezuje mrežu i okolinu, skrivenim slojem gdje se provodi nelinearna transformacija ulaznog vektora u skriveni prostor pomoću djelovanja baznih funkcija te izlaznim linearnim slojem u kojem se težinski kombiniraju odzivi mreže na ulazni vektor. Kako je pokazano u [270, 271], pod umjerenim uvjetima koji su postavljeni pred baznu funkciju, radijalna mreža može aproksimirati svaku nelinearnu funkciju unutar zadane točnosti, a kako tradicionalne metode učenja ne zahtijevaju iteracije (nasuprot algoritmu sa širenjem pogreške unazad), ne postoje problemi konvergencije. Radijalna mreža može se promatrati u kontekstu implementacije mrežom višeslojnih perceptrona (MLP), ali uz povećanu dimenziju ulaza [272].

Za razliku od mreže MLP čiji je odziv određen globalnim djelovanjem svih neurona, odziv radijalne mreže određen je djelovanjem lokalnih, u kontekstu geometrijske sličnosti s ulaznim vektorom, polja neurona u skrivenom sloju. U kontekstu klasifikacije, radijalna mreža odvaja grupe pomoću hipersfera, dok mreža MLP odvaja grupe s proizvoljno oblikovanim hiperplohama [273].



Slika 5.1. Struktura radijalne mreže za estimaciju razdiobe ulaznog vektora $\boldsymbol{x}$.

Kako je istaknuto u uvodnom dijelu ovog poglavlja, ideja primjene radijalne mreže za poboljšanje radnih značajki procesa pridruživanja (u smetnji nepoznate statistike) je estimacija otiska smetnje, u ovom radu amplitudne razdiobe (vidi odjeljak 4.5 za ostvareni boljitak u smetnji poznate statistike). Usporedbe radi, klasičan pristup metodom apriornog modela smetnje prema K-razdiobi zahtijeva evaluaciju parametara oblika i razmjera. Dok se estimacija parametra oblika u ovom slučaju najčešće provodi uobičajenom metodom momenata (MM) ili metodom maksimizacije vjerodostojnosti (ML), estimacija vrijednosti parametra skaliranja slijedi iz estimirane vrijednosti parametra oblika. Budući da metoda ML zahtijeva evaluaciju Besselovih funkcija i numeričku optimizaciju, u [23] se sugerira metoda MM iako ona u određenim slučajevima ne pruža rješenje. Ako razdioba ima teški rep, odnosno visoku izglednost pojave velikih vrijednosti amplituda, metoda MM zahtijeva numeričko pretraživanje, a evaluacija omjera vjerodostojnosti, ako se u procesu pridruživanja primjenjuje dodatna diskriminacija odjeka smetnje i cilja na temelju njihove amplitudne razdiobe, također zahtijeva i numeričku integraciju [41, 274], što je za male vrijednosti parametra oblika, odnosno jako izraženu smetnju, izazovno. Nasuprot tome, estimacija amplitudne razdiobe metodom radijalnih mreža provodi se sumacijom radijalno simetričnih i unimodalnih probabilističkih funkcija poznate statistike te je stoga određivanje praga detekcije i omjera vjerodostojnosti trivijalno. Sličan pristup primijenjen je i u [275], gdje je detekcija malih objekata, prostorno raspodijeljenih kroz nekoliko ćelija razlučivosti, temeljena na estimaciji amplitudne razdiobe smetnje primjenom metode jezgrene estimacije (KDE). U [63], mreža RBF je primijenjena za estimaciju amplitudne razdiobe odjeka smetnje i cilja. Glavni razlog za primjenu metode RBF umjesto metode KDE je činjenica da

potonja najčešće rezultira „valovitom" estimacijom, osobito pri repu razdiobe, što nije prihvatljivo zbog toga što rep razdiobe određuje prag detekcije. Povećanjem vrijednosti parametra skaliranja (širine jezgrene funkcije, u osnovi parametra regularizacije), izglađuje se estimacija, ali pod cijenu gubitka važnih informacija sadržanih u repu razdiobe.

U sljedećem je odjeljku pružen pregled najvažnijih osobina mreže RBF u primjeni estimacije razdiobe. Ocijenjene su najvažnije značajke estimacije te je u odjeljku 5.1.2 provedena usporedba s metodom apriornog modela na primjeru stvarnih podataka radara IPIX, vidi primjer u odjeljku 3.4. Dva su partikularna razloga za to. Prvi je razlog činjenica da je statistika smetnje nepoznata jer ne postoji jedinstveni model amplitudne razdiobe koji dovoljno dobro opisuje stvarnu razdiobu za sve testne ćelije i polarizacije, vidi slike 3.10 i 3.11 koje ilustriraju navedeno. Drugi je razlog činjenica da su podaci prikupljeni za stanja mora od 3 do 4 te od 4 do 5, a to su prema tablici 3.1 stanja mora koja se u Jadranu javljaju u preko dvije trećine vremena (stanje mora 0 nije uzeto u obzir jer je pri tom stanju smetnja zanemariva). Iako za početak ovi podaci mogu poslužiti, ipak treba napomenuti da je za statistiku odjeka smetnje pored visine valova bitna i njihova struktura. Tako je nepoznato ima li u Jadranu pri partikularnim visinama valova više onih lomljenih (koji rezultiraju igličastim odjecima), više onih s izraženom bijelom valnom krestom, morskom pjenom i sl., u odnosu na valove jednake visine u oceanu. U nastavku je odjeljka 5.1.2 analizirana točnost estimacije te implementacija adaptivne mreže RBF za estimaciju amplitudne razdiobe, u kontekstu usporedbe s jezgrenom metodom. Pri tome su, u prvoj inačici metode, parametri radijalne mreže određeni metodom maksimiziranja vjerodostojnosti [276]. U drugoj je inačici za određivanje parametra skaliranja radijalne funkcije primijenjena metoda nepristrane unakrsne provjere [126], izvorno namijenjena estimaciji razdiobe jezgrenom metodom, dok su središta određena metodom Lindea, Buzoa i Greya, (LBG) [277]. Dodatno je, za svaku komponentu posebno, parametar skaliranja adaptiran heurističkim pristupom prema [278]. Usporedba točnosti estimacije i računalne složenosti provedena je na primjeru K- i Paretove razdiobe. Nadalje, opisana je metoda implementacije mreže RBF u procesu detekcije i pridruživanja te je pokazana robusnost metode za scenarij praćenja manevrirajućeg cilja u okolini jako izražene smetnje.

5.1.1. Primjena u estimaciji amplitudne razdiobe

Kako je spomenuto u prethodnom odjeljku, amplitudna razdioba smetnje nepoznate statistike estimira se potpuno iz prikupljenih uzoraka te aproksimira funkcionalnim oblikom sume baznih razdioba. Primjena ovakve aproksimacije je opravdana, jer se svaka omeđena i kontinuirana razdioba vjerojatnosti može, za zadanu točnost, aproksimirati konačnom sumom baznih razdioba [279], što je konzistentno sa svojstvom mreže RBF kao univerzalnoga aproksimatora [271] zbog toga što se estimacija razdiobe može shvatiti kao poseban slučaj aproksimacije funkcije. Prednost mreže RBF u odnosu na neparametarsku metodu poput jezgrene estimacije (KDE) je

mogućnost sažimanja informacija grupiranjem. Postavljanjem estimacije razdiobe u klasifikacijski okvir kao u [256], omogućuje estimaciju parametara mreže metodom najveće vjerodostojnosti, koja se može shvatiti i kao metoda samoorganizacije.

U [280] su prepoznata dva bitna pitanja povezana s aproksimacijom nepoznate razdiobe sumom baznih razdioba. Prvo je kvaliteta aproksimacije, odnosno koliko dobro određena klasa baznih razdioba može aproksimirati nepoznatu razdiobu. Drugo se odnosi na kvalitetu estimacije, odnosno ovisnost značajki estimatora (npr. estimatora koji provodi metodu maksimalne vjerodostojnosti) o veličini skupa podataka za učenje. Tako iz [280] proizlazi da je za zadanu klasu baznih razdioba, metodu estimacije njihovih parametara i veličinu skupa podataka za učenje, ukupna očekivana greška estimacije ograničena članom koji opisuje adekvatnost baznih razdioba u aproksimaciji nepoznate razdiobe te članom koji opisuje utjecaj veličine skupa podataka na estimator.

Prema [280], klasa svih kontinuiranih n-dimenzionalnih razdioba s kompaktnim nosačem funkcije $\mathbb{X}_{\boldsymbol{\zeta}} \in \mathbb{R}^n$, definirana je kao

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\zeta}} = \left\{ p_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot) \,|\, p_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot) \in C(\mathbb{X}_{\boldsymbol{\zeta}}), p_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot) \geq 0, \int_{\mathbb{X}_{\boldsymbol{\zeta}}} p_{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\zeta}) \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = 1 \right\}, \tag{5.1}$$

gdje $C(\cdot)$ označava prostor funkcija. Funkcije $p_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$ su nepoznate kontinuirane razdiobe ograničene domenom $\mathbb{X}_{\boldsymbol{\zeta}}$ za koje je aproksimacija (baznim razdiobama) valjana. Klasa $\mathbb{P}^{(\mathrm{b})}_{\boldsymbol{\zeta}} \subset \mathbb{P}_{\boldsymbol{\zeta}}$ je klasa odozdo omeđenih nepoznatih razdioba,

$$\mathbb{P}^{(\mathrm{b})}_{\boldsymbol{\zeta}} = \left\{ p^{(\mathrm{b})}_{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\zeta}) \in \mathbb{P}_{\boldsymbol{\zeta}} \,|\, p^{(\mathrm{b})}_{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\zeta}) \geq \mathrm{b} > 0, \forall \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{X}_{\boldsymbol{\zeta}} \right\}, \tag{5.2}$$

koje se smatraju dopuštenima za aproksimaciju, pri čemu b označava neku pozitivnu konstantu. Na sličan je način definirana klasa baznih razdioba,

$$\mathbb{Q} = \left\{ q(\cdot) \,|\, q(\cdot) \in C(\mathbb{R}^n), q(\cdot) > 0, \int_{\mathbb{R}^n} q(\boldsymbol{\zeta}) \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = 1 \right\}, \tag{5.3}$$

gdje je $\mathbb{R}^n$ kompaktni nosač klase $\mathbb{Q}$. Nadalje, $\mathbb{Q}^{(\mathrm{b})} \subset \mathbb{Q}$ je klasa odozdo omeđenih baznih razdioba, radijalno simetričnih i unimodalnih funkcija,

$$\mathbb{Q}^{(\mathrm{b})} = \left\{ q^{(\mathrm{b})}(\boldsymbol{\zeta}) \in \mathbb{Q} \,|\, q^{(\mathrm{b})}(\boldsymbol{\zeta}) \geq \mathrm{b} > 0, \forall \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{X}_{\boldsymbol{\zeta}} \right\}, \tag{5.4}$$

čija parametrizacija kao

$$\mathbb{Q}^{(\mathrm{b,r})}_{\upsilon} = \left\{ q^{(\mathrm{b,r})}_{\upsilon}(\cdot) \in \mathbb{Q}^{(\mathrm{b})} \,|\, q^{(\mathrm{b,r})}_{\upsilon}(\cdot) \equiv \sigma^{-n} q^{(\mathrm{b})} \left(\frac{\| \cdot - \boldsymbol{\mu} \|}{\sigma} \right), \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{X}_{\boldsymbol{\zeta}}, \sigma \in \mathbb{R} : \sigma \geq \mathrm{r} > 0 \right\} \tag{5.5}$$

definira klasu baznih razdioba mreže RBF. Pri tome $\|\cdot\|$ označava euklidsku normu, $\boldsymbol{\mu}$ vektor središta i r neku pozitivnu konstantu. Budući da je za sve dimenzije primijenjeno jednako skaliranje σ, prije dovođenja podataka na ulaz mreže potrebno je provesti njihovo izbjeljivanje (dekorelaciju te izjednačenje kovarijance po dimenzijama). Tako je parametrizirana klasa aproksimacijskih razdioba dana s

$$\mathbb{Q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})} = \left\{ q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot) \,|\, q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot \,|\, \mathcal{G}_i; \boldsymbol{\upsilon}_i)\, w_i, q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot) \in \mathbb{Q}_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}, w_i > 0, \sum_{i=1}^{m} w_i = 1 \right\}, \quad (5.6)$$

pri čemu je svaka i-ta komponenta mješavine označena s $\mathcal{G}_i$ i definirana vektorom parametara $\boldsymbol{\upsilon}_i = (\boldsymbol{\mu}_i, \sigma_i)$. Apriorna vjerojatnost odabira komponente $\mathcal{G}_i$ označena je s $w_i = P(\mathcal{G}_i)$, a puni skup parametara definiran je s $\mathbb{Y} = \{\{w_i\}, \{\boldsymbol{\upsilon}_i\}, i = 1, \ldots, m\}$. Vrijednosti parametara mogu se odrediti npr. metodom maksimiziranja vjerodostojnosti uzoraka $\bar{\Lambda}^{(*)}\left(\mathbb{Y} \,|\, \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}\right)$,

$$\hat{\mathbb{Y}}_N = \arg\max_{\mathbb{Y}} \left(\bar{\Lambda}^{(*)}\left(\mathbb{Y} \,|\, \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}\right) \right), \quad (5.7)$$

gdje je $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}} = \left\{ \boldsymbol{\zeta}_j, j = 1, \ldots, N \right\}$ skup mjerenja n-dimenzionalnog otiska smetnje $\boldsymbol{\zeta}$, u ovom slučaju amplitude odjeka. Kako $N \to \infty$, maksimizacija vjerodostojnosti uzoraka (5.7) maksimizira i Shannonov indeks [255]

$$\bar{\Lambda}(\mathbb{Y}) = \int_{\mathbb{X}_{\boldsymbol{\zeta}}} p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\boldsymbol{\zeta}) \log_{\mathrm{e}}\left(q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\boldsymbol{\zeta})\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = E\left(\log_{\mathrm{e}}\left(q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\boldsymbol{\zeta})\right) \right), \quad (5.8)$$

što je stvarna estimacija parametara maksimizacijom vjerodostojnosti, jednaka minimiziranju Kullback-Leiblerove divergencije [248]

$$d_{KL}\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\cdot) \,\|\, q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot)\right) = \int_{\mathbb{X}_{\boldsymbol{\zeta}}} p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\boldsymbol{\zeta}) \log_{\mathrm{e}}\left(\frac{p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\boldsymbol{\zeta})}{q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\boldsymbol{\zeta})} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}. \quad (5.9)$$

Budući da je razdioba $p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\cdot)$ nepoznata, očekivanje (logaritma) vjerodostojnosti uzoraka (5.8) jednako je

$$\bar{\Lambda}^{(*)}\left(\mathbb{Y} \,|\, \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}\right) = \left\langle \left\{ \log_{\mathrm{e}}\left(q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\left(\boldsymbol{\zeta}_j\right) \right) \right\} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \log_{\mathrm{e}}\left(q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\boldsymbol{\zeta}_j) \right), \quad (5.10)$$

gdje je $q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\boldsymbol{\zeta}) = \sum_{i=1}^{m} q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}(\boldsymbol{\zeta} \,|\, \mathcal{G}_i; \boldsymbol{\upsilon}_i)\, w_i$. Ako se s $\mathbb{Y}_\infty$ označi asimptotska vrijednost skupa parametara kako $N \to \infty$ te s $q_{\upsilon,\infty}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot) = q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot; \mathbb{Y}_\infty)$ i $\hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot) = q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot; \hat{\mathbb{Y}}_N)$, vrijedi da $\bar{\Lambda}^{(*)}\left(\mathbb{Y} \,|\, \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}\right) \to E\left(\log_{\mathrm{e}}\left(q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\boldsymbol{\zeta}) \right) \right)$ kako $N \to \infty$ te je valjana trokutna nejednakost

$$d\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\cdot),\hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot)\right)\leq d\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\cdot),q_{\upsilon,\infty}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot)\right)+d\left(q_{\upsilon,\infty}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot),\hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot)\right), \tag{5.11}$$

gdje je $d(\cdot)$ neka generička mjera udaljenosti (metrika). Iz [280] proizlazi da je ukupna očekivana greška aproksimacije za dovoljno veliki skup podataka $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}$ od N uzoraka te dovoljno veliki broj baznih razdioba m, omeđena s

$$E\left(d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\cdot),\hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot)\right)\right)\leq \mathrm{p}+o\left(\frac{c}{m}\right)+o\left(\frac{l}{N}\right), \tag{5.12}$$

pri čemu točnost aproksimacije p ovisi o donjoj međi r. Pozitivna konstanta c određena je klasama funkcija (5.2) i (5.4), a l ovisi o značajkama estimatora i može se aproksimirati s mn za dovoljno veliki m. S $d_H^2(\cdot)$ je označena kvadrirana Hellingerova udaljenost,

$$d_H^2\big(p(\cdot),q(\cdot)\big)=\int\left(\sqrt{p(\boldsymbol{\zeta})}-\sqrt{q(\boldsymbol{\zeta})}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta},\quad 0\leq\frac{1}{2}d_H^2(\cdot)\leq 1, \tag{5.13}$$

koja se primjenjuje zato što je, za razliku od uobičajene Kullback-Leiblerove divergencije (ili relativne entropije)

$$d_{KL}\big(p(\cdot)\,\|\,q(\cdot)\big)=\int p(\boldsymbol{\zeta})\log_{\mathrm{e}}\left(\frac{p(\boldsymbol{\zeta})}{q(\boldsymbol{\zeta})}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}, \tag{5.9}$$

stvarna metrika koja zadovoljava uvjet nejednakosti trokuta. Kvadrirana Hellingerove udaljenosti omeđena je odozgo s Kullback-Leiblerovom divergencijom,

$$d_H^2\big(p(\cdot),q(\cdot)\big)\leq d_{KL}\big(p(\cdot)\,\|\,q(\cdot)\big), \tag{5.14}$$

za bilo koje razdiobe $p(\cdot)$ i $q(\cdot)$ [280]. Nejednakost (5.12) ukazuje da ukupna kvaliteta aproksimacije ovisi o broju baznih razdioba i veličini skupa podataka. U nastavku ovog odjeljka, istražena je navedena ovisnost.

Rješavanje (5.7) može se učinkovito provesti postavljanjem problema nalaženja vrijednosti parametara u okvir klasifikacije. Budući da uzorci mjerenja nisu označeni (nije poznata pripadnost određenog uzorka partikularnoj grupi), uvodi se skup slučajnih varijabli $\mathbb{1}=\big\{\mathbf{1}_j,j=1,\ldots,N\big\}$, gdje vektor $\mathbf{1}_j=\big(1_{j1},\ldots,1_{jm}\big)$ indicira koji je uzorak generiran kojom partikularnom komponentom, odnosno

$$1_{ji}=\begin{cases}1, & \boldsymbol{\zeta}_j\sim q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot;\boldsymbol{\upsilon}_i)\\ 0, & \boldsymbol{\zeta}_j\sim q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot;\boldsymbol{\upsilon}_\iota),\ \iota\neq i\end{cases}. \tag{5.15}$$

Tako se skup $\mathbb{1}$ tretira kao skrivena varijabla što omogućuje primjenu algoritma maksimizacije očekivanja (EM) [276] za rješavanje (5.7). Uvođenjem skrivene varijable $\mathbb{1}$, vjerodostojnost (5.10) je preformulirana u oblik

$$\bar{\Lambda}^{(*)}\left(\mathbb{Y}\,|\,\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}},\mathbb{1}\right)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}1_{ji}\log_{\mathrm{e}}\left(q_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\left(\boldsymbol{\zeta}_j\,|\,\mathbf{1}_j;\mathbb{Y}\right)P(\mathbf{1}_j;\mathbb{Y})\right) \tag{5.16}$$

te se može riješiti metodom iteracija. Tako za iteracijski korak κ, očekivanje vjerodostojnosti (5.16) uz fiksne parametre $\mathbb{Y}_\kappa$ rezultira s

$$Q(\mathbb{Y}\,|\,\mathbb{Y}_\kappa)=E\left(\bar{\Lambda}^{(*)}\left(\mathbb{Y}\,|\,\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}},\mathbb{1}\right)\,|\,\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}},\mathbb{Y}_\kappa\right), \tag{5.17}$$

a u koraku maksimizacije se nalaze parametri $\mathbb{Y}_{\kappa+1}$ koji maksimiziraju očekivanje $\mathrm{Q}(\mathbb{Y}\,|\,\mathbb{Y}_\kappa)$, odnosno

$$\mathbb{Y}_{\kappa+1}=\arg\max_{\mathbb{Y}}\left(Q(\mathbb{Y}\,|\,\mathbb{Y}_\kappa)\right), \tag{5.18}$$

što su vrijednosti za sljedeći korak iteracije. U posebnom slučaju Gaussovih baznih razdioba,

$$q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}(\cdot\,|\,\mathcal{G}_i;\boldsymbol{\upsilon}_i)=\mathscr{N}\left(\cdot;\boldsymbol{\mu}_i,\sigma_i^2\boldsymbol{I}_n\right), \tag{5.19}$$

ovim je algoritmom osigurana globalna konvergencija, a u [281] je pokazano da za dovoljno mala preklapanja između susjednih komponenti, algoritam aproksimira Newton–Raphsonovu metodu [108, 282]. Korak očekivanja svodi se na rješavanje $E\left(1_{ji}\,|\,\boldsymbol{\zeta}_j,\mathbb{Y}_\kappa\right)$ te rezultira odgovornošću (aposteriornom vjerojatnošću da je i-ta komponenta generirala uzorak j)

$$P_{\kappa+1}\left(\mathcal{G}_i\,|\,\boldsymbol{\zeta}_j\right)=\frac{P_\kappa(\mathcal{G}_i)\,\sigma_{i,\kappa}^{-n}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_{i,\kappa}^{-2}\|\boldsymbol{\zeta}_j-\boldsymbol{\mu}_{i,\kappa}\|^2\right)}{\sum_{\iota=1}^{m}P_\kappa(\mathcal{G}_\iota)\,\sigma_{\iota,\kappa}^{-n}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_{\iota,\kappa}^{-2}\|\boldsymbol{\zeta}_j-\boldsymbol{\mu}_{\iota,\kappa}\|^2\right)}, \tag{5.20}$$

pri čemu je $i=1,\ldots,m$ i $j=1,\ldots,N$. Primjena koraka maksimizacije (5.18) i odgovornosti (5.20) određuje središta baznih razdioba,

$$\boldsymbol{\mu}_{i,\kappa+1}=\frac{\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\zeta}_j P_{\kappa+1}\left(\mathcal{G}_i\,|\,\boldsymbol{\zeta}_j\right)}{\sum_{j=1}^{N}P_{\kappa+1}\left(\mathcal{G}_i\,|\,\boldsymbol{\zeta}_j\right)} \tag{5.21}$$

i skaliranje

$$\sigma_{i,\kappa+1}=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}P_{\kappa+1}\left(\mathcal{G}_i\,|\,\boldsymbol{\zeta}_j\right)\|\boldsymbol{\zeta}_j-\boldsymbol{\mu}_{i,\kappa+1}\|^2}{\sum_{j=1}^{N}P_{\kappa+1}\left(\mathcal{G}_i\,|\,\boldsymbol{\zeta}_j\right)}}. \tag{5.22}$$

Naposljetku, aposteriorna vjerojatnost odabira komponente $\mathcal{G}_i$ je

$$P_{\kappa+1}(\mathcal{G}_i)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}P_{\kappa+1}\left(\mathcal{G}_j\,|\,\boldsymbol{\zeta}_j\right). \tag{5.23}$$

Koraci (5.20) – (5.23) se ponavljaju sve dok se ne postigne konvergencija vjerodostojnosti

$$\bar{\Lambda}^{(*)}(\mathbb{Y}\,|\,\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\log_{\mathrm{e}}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{P(\mathcal{G}_i)}{(2\pi)^{n/2}\,\boldsymbol{\sigma}_i^n}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_i^{-2}\|\boldsymbol{\zeta}_j-\boldsymbol{\mu}_i\|^2\right)\right) \tag{5.24}$$

prema maksimumu uz proizvoljnu točnost.

U posebnom slučaju Gaussovih baznih razdioba (5.19) te kada se, uz pomoć pripadnosti uzorka $\boldsymbol{\zeta}_j$ grupi $\mathbb{G}_i$, odgovornost (5.20) definira kao

$$P(\mathcal{G}_i\,|\,\boldsymbol{\zeta}_j) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{\zeta}_j \in \mathbb{G}_i \\ 0, & \boldsymbol{\zeta}_j \notin \mathbb{G}_i \end{cases}, \tag{5.25}$$

nalaženje središta baznih razdioba $\{\boldsymbol{\mu}_i, i=1,\ldots,m\}$ ekvivalentno je algoritmu k-srednjih vrijednosti [283], odnosno metodi Lindea, Buzoa i Greya (LBG) koja je izvorno razvijena za kodiranje govora [277]. Potonjom se metodom najprije određuje minimalna udaljenost u κ-toj iteraciji kao

$$\bar{d}_{\kappa} = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{\zeta}_j\in\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}}\min_{\boldsymbol{\mu}_{\kappa}\in\mathbb{Y}_{\kappa}}\left(d(\boldsymbol{\zeta}_j,\boldsymbol{\mu}_{\kappa})\right), \tag{5.26}$$

pri čemu je za partikularno središte $\boldsymbol{\mu}_{i,\kappa}$ i uzorak $\boldsymbol{\zeta}_j$, udaljenost $d(\cdot)$ definirana kao

$$d(\boldsymbol{\zeta}_j,\boldsymbol{\mu}_{i,\kappa}) = \|\boldsymbol{\zeta}_j-\boldsymbol{\mu}_{i,\kappa}\|. \tag{5.27}$$

Zatim se središta grupa reorganiziraju metodom centroida, tako da je

$$\boldsymbol{\mu}_{i,\kappa+1} = \frac{1}{|\mathbb{G}_{i,\kappa}|}\sum_{\boldsymbol{\zeta}_{\iota}\in\mathbb{G}_{i,\kappa}}\boldsymbol{\zeta}_{\iota}, \tag{5.28}$$

pri čemu je grupa $\mathbb{G}_{i,\kappa}$ opisana skupom uzoraka $\{\boldsymbol{\zeta}_{\iota}, \iota=1,\ldots,|\mathbb{G}_{i,\kappa}|\}$ koji su bliži partikularnom središtu $\boldsymbol{\mu}_{i,\kappa}$ nego ostalim središtima, odnosno

$$\mathbb{G}_{i,\kappa} = \left\{\boldsymbol{\zeta}_{\iota} : i = \arg\min_{\{\boldsymbol{\mu}_{j,\kappa}, j=1,\ldots,m\}}\left(d(\boldsymbol{\zeta}_{\iota},\boldsymbol{\mu}_{j,\kappa})\right), \forall\boldsymbol{\zeta}_{\iota}\in\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}\right\}. \tag{5.29}$$

Naposljetku se provjerava nejednakost

$$\frac{\bar{d}_{\kappa}-\bar{d}_{\kappa+1}}{\bar{d}_{\kappa+1}} \leq \mathrm{d} \tag{5.30}$$

te ukoliko je zadovoljena, iteracija se zaustavlja. Pri tome d označava neku proizvoljnu konstantu. Primjena (5.28) i (5.25) na (5.22) i (5.23) rezultira s

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{|\mathbb{G}_{i,\kappa+1}|} \sum_{\boldsymbol{\zeta}_\iota \in \mathbb{G}_{i,\kappa+1}} \|\boldsymbol{\zeta}_\iota - \boldsymbol{\mu}_{i,\kappa+1}\|^2}, \tag{5.31}$$

$$w_i = \frac{|\mathbb{G}_{i,\kappa+1}|}{N}. \tag{5.32}$$

Metoda estimacija razdiobe s parametrima mreže prema (5.28), (5.31) i (5.32) smanjuje računalnu složenost, ali zato najčešće rezultira „valovitom" estimacijom, slično kao i metoda jezgrene estimacije [61] u slučaju neadekvatnoga skaliranja. Kao i kod jezgrene metode, parametar skaliranja djeluje kao regularizacijski parametar, pa tako, alternativno, može biti jednak za sve grupe te se može estimirati npr. metodom nepristrane unakrsne provjere (UCV), vidi odjeljak 4.4 za primjenu u kontekstu jezgrene estimacije. Metodom UCV [230, 232] nalazi se globalni parametar skaliranja $\sigma^{(*)}$, jednak za sve jezgre, koji minimizira objektivnu funkciju [126]

$$f_{UCV}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\boldsymbol{\zeta})^2 \,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\zeta} - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\boldsymbol{\zeta})\, p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\boldsymbol{\zeta}) \,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\zeta}. \tag{*4.186*}$$

U posebnom slučaju univarijatne razdiobe, razvoj prvog člana rezultira s

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta)^2 \,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} q^{(\mathrm{b})}\left(\frac{\zeta-\mu_i}{\sigma}\right) w_i\right)^2 \mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{m} w_j f_{ij}(\sigma), \tag{5.33}$$

pri čemu je

$$f_{ij}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} q^{(\mathrm{b})}\left(\frac{\zeta-\mu_i}{\sigma}\right) q^{(\mathrm{b})}\left(\frac{\zeta-\mu_j}{\sigma}\right) \mathrm{d}\,\zeta. \tag{5.34}$$

Ako se nepoznata razdioba $p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\cdot)$ razvije oko središta $\{\mu_i, i = 1,\ldots,m\}$, može se pisati $p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} w_i \delta(\zeta - \mu_i)$, pa razvoj drugog člana jednadžbe (4.186) daje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta)\, p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\zeta) \,\mathrm{d}\,\zeta = \sum_{i=1}^{m} w_i \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta) = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\}} q^{(\mathrm{b})}\left(\frac{\mu_i-\mu_j}{\sigma}\right). \tag{5.35}$$

Tako (4.186) postaje

$$\begin{aligned} f_{UCV}(\sigma) = &\frac{R\left(q^{(\mathrm{b})}\right)\sum_{i=1}^{m} w_i^2}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} q^{(\mathrm{b})}(\zeta)\, q^{(\mathrm{b})}\left(\zeta - \frac{\mu_i-\mu_j}{\sigma}\right)\mathrm{d}\zeta - \right. \\ &\left. - 2q^{(\mathrm{b})}\left(\frac{\mu_i-\mu_j}{\sigma}\right)\right), \end{aligned} \tag{5.36}$$

što za Gaussove bazne razdiobe rezultira s [63]

$$f_{UCV} = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i^2}{2\sigma\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=i+1}^{m} w_j \left(\exp\left(-\frac{(\mu_i - \mu_j)^2}{4\sigma^2} \right) - \right.$$
$$\left. - 2\sqrt{2} \exp\left(-\frac{(\mu_i - \mu_j)^2}{2\sigma^2} \right) \right). \tag{5.37}$$

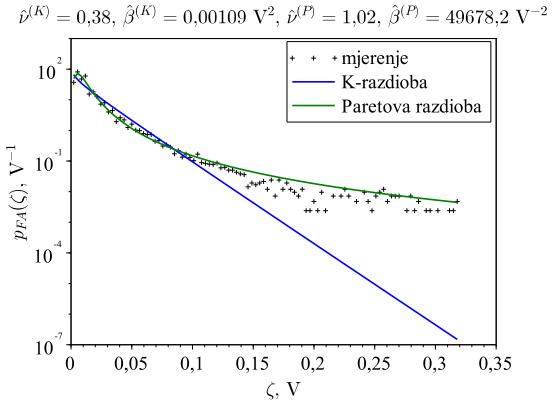
Pri tome je $R(\cdot)$ definiran s (4.176). Optimalna vrijednost parametra skaliranja $\sigma^{(*)}$ rješenje je $\frac{\mathrm{d}f_{UCV}}{\mathrm{d}\sigma} = 0$ i jednaka je za sve bazne razdiobe. Alternativno se vrijednost parametra skaliranja može adaptirati za svaku i-tu komponentu posebno, npr. primjenom heurističkog pristupa prema [278] kao

$$\sigma_i = \sigma^{(*)} \left(\frac{\sum_{l=1}^{m} q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})} \left(\mu_i; \boldsymbol{\upsilon}_l^{(*)} \right) w_l}{\left(\prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{m} q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})} \left(\mu_i; \boldsymbol{\upsilon}_l^{(*)} \right) w_l \right) \right)^{1/m}} \right)^{-\alpha}, \tag{5.38}$$

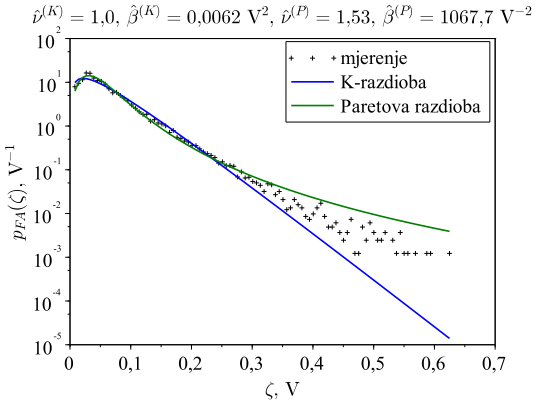
pri čemu je apriorna vjerojatnost w_l dana s (5.32), $\boldsymbol{\upsilon}_l^{(*)} = \left(\mu_l, \sigma^{(*)} \right)$, a α je parametar dizajna sa svojstvom da je $0 \leq \alpha \leq 1$, uobičajene vrijednosti $\alpha = 1/2$.

5.1.2. Primjer primjene mreže RBF u procesu nekoherentne detekcije

Kako je u nedavnoj literaturi pokazano [197], pojava intenzivnog broja igličastih odjeka dovodi do težeg repa amplitudne razdiobe. U njenom se modeliranju ovaj efekt uzima u obzir primjenom adekvatnog modela radarskog presjeka (ili intenziteta teksture složenog Gaussovog procesa, vidi odjeljak 3.2.2). Evidentna razlika između različitih modela ilustrirana je slikom 5.2, na primjeru stvarnih podataka radara IPIX [213, 214], prikupljenih pri stanjima mora od 3 do 4 (slika 5.2a) te od 4 do 5 (slika 5.2b), za testnu ćeliju br. 14, vidi također i odjeljak 3.4 za detaljniji opis podataka. S obzirom na karakter smetnje, vidi primjer u odjeljku 4.5, obje razdiobe pripadaju jako izraženoj smetnji mora. Kako je i navedeno u uvodnom dijelu poglavlja, ovaj je primjer odabran zbog toga što su, prema tablici 3.1, ovo stanja mora koja se u Jadranu javljaju u preko dvije trećine vremena, pri čemu nije uzeto u obzir stanje 0 jer je smetnja tada zanemariva. A zbog toga što ne postoji jedinstvena razdioba koja dovoljno dobro opisuje amplitudnu razdiobu za sve testne ćelije i polarizacije, primjer je prikladan kao ilustracija primjene mreže RBF za poluparametarsku estimaciju razdiobe.



(a) Horizontalna polarizacija, stanje mora $3-4$.



(b) Vertikalna polarizacija, stanje mora $4-5$.

Slika 5.2. Ilustracija utjecaja modela radarskog presjeka na rep amplitudne razdiobe. Dok model prema gama-razdiobi rezultira K-razdiobom (3.33), model prema inverznoj gama-razdiobi rezultira Paretovom razdiobom (3.44).

U nastavku ovog odjeljka analizira se točnost estimacije karakterističnih razdioba ilustriranih slikom 5.2, K-razdiobe prema slici 5.2b i Paretove razdiobe prema slici 5.2a (razdiobe težeg repa čime je uzet u obzir efekt povećanog broja igličastih odjeka). Vrijednosti parametara razdioba, estimiranih metodom maksimalne vjerodostojnosti za K-razdiobu [194] te metodom [zlog(z)] za Paretovu razdiobu [170], pri čemu je u oba slučaja zanemaren utjecaj termičkog šuma što je opravdano za azimutnu i radijalnu razlučivost radarskog senzora IPIX od $0{,}9°$ i 30 m, prikazuje tablica 5.1. Budući da nikakva apriorna saznanja o konstanti p i značajkama estimatora l nisu poznata, vidi (5.12), ovisnost očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti o broju uzoraka (uz dani broj baznih razdioba) te ovisnost o broju baznih razdioba (uz dani broj uzoraka), provedena je simulacijom u amplitudnoj i logaritamskoj domeni, pri čemu se pod „amplitudna domena" smatra funkcionalna ovisnost i-te komponente u obliku

$$q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta \mid \mathcal{G}_i; \boldsymbol{\upsilon}_i) = \mathcal{N}\left(\zeta; \mu_i, \sigma_i^2\right), \tag{5.19}$$

dok je u „logaritamskoj domeni" ta ovisnost dana kao

$$q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta \mid \mathcal{G}_i; \boldsymbol{\upsilon}_i) = \frac{1}{\zeta \sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\log_{\mathrm{e}}\left(\mathrm{c}^{-1}\zeta\right) - \mu_i\right)^2}{2\sigma_i^2}\right), \tag{5.39}$$

što je Gaussova razdioba nakon transformacije $\zeta^{(*)} = \log_{\mathrm{e}}(\mathrm{c}^{-1}\zeta)$, pri čemu je konstanta $\mathrm{c} = 1$ V. Mjerne veličine parametara središta μ i skaliranja σ u (5.19) (za ovaj primjer) su Volti, a u (5.39) nemaju mjernu veličinu. Dok vrijednosti parametara simulacije prikazuje tablica 5.2, shematski prikaz ilustrira slika 5.3. Parametri mreže $\mathbb{Y}$ estimirani su najprije maksimiziranjem vjerodostojnosti uzoraka (5.10) metodom maksimizacije očekivanja (EM), primjenom koraka

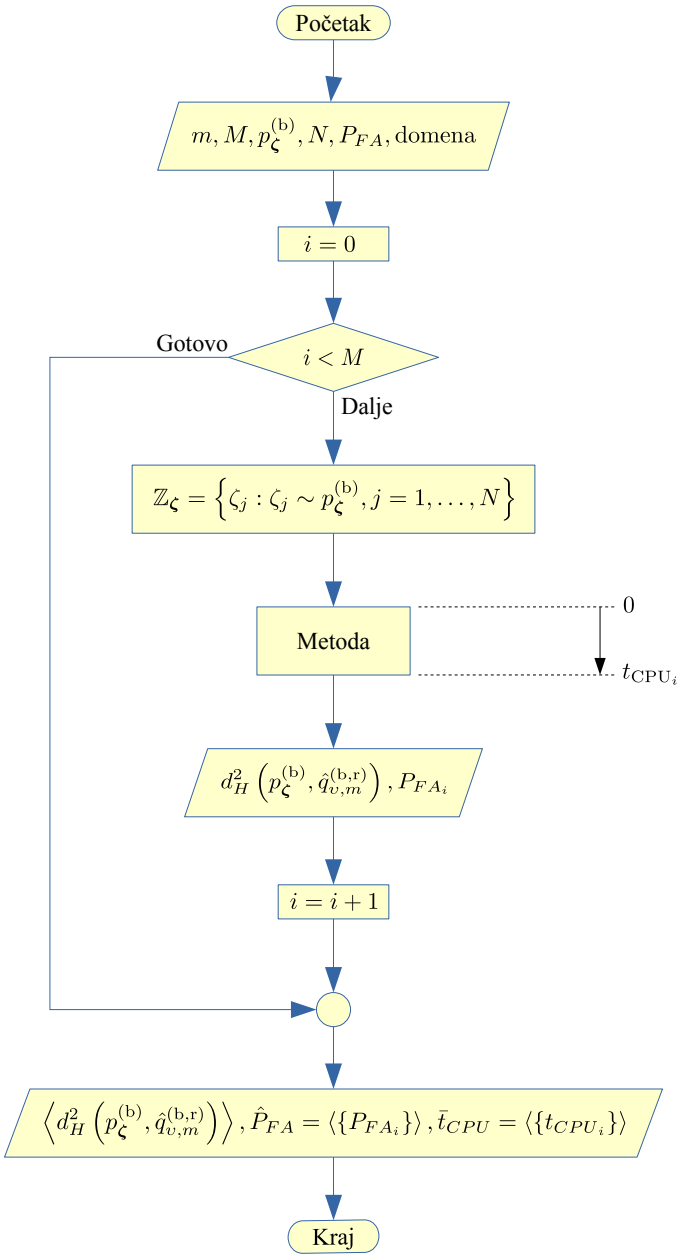
(5.20) – (5.23) kroz određeni broj iteracija, sve dok nije postignuta konvergencija vjerodostojnosti (5.24) prema maksimumu za zadanu točnost. Zatim su parametri $\mathbb{Y}$ estimirani primjenom metode LBG (koraci (5.26) – (5.30)), uz parametar skaliranja koji minimizira integriranu kvadratnu grešku (ISE) metodom UCV te uz adaptaciju UCV$^{(*)}$ prema (5.38). Pri tome su težinski koeficijenti izlaznog sloja mreže dani s (5.32). Rezultati navedenih metoda uspoređeni su s rezultatima metode jezgrene estimacije (KDE), u kontekstu točnosti te računalne složenosti i ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA} = \langle\{P_{FA_i}\}\rangle$, u ovisnosti o dizajniranoj vjerojatnosti lažne detekcije P_{FA}. Pri tome je s $\{P_{FA_i}, i = 1,\ldots,M\}$ označen skup od M realizacija. Budući da je simulacija provedena primjenom alata za numeričko računanje Scilab [284] pomoću kojeg je računalna složenost izražena kroz procesorsko vrijeme t_{CPU} posvećeno određenoj metodi (bez utjecaja pozadinskih procesa), radi reference se navodi operativni sustav openSUSE Leap 15.1 [285] i Intelova procesorska platforma „Ivy Bridge" [286].

Tablica 5.1. Parametri razdioba ovisno o modelu radarskog presjeka (intenziteta teksture) za primjer ilustriran slikom 5.2. Vrijednosti istaknute masnim slovima parametri su razdiobe koja najbolje pristaje mjerenjima.

Stanje mora	Model razdiobe			
	K-razdioba (3.33)		Paretova razdioba (3.44)	
	Oblik, $\hat{\nu}^{(K)}$	Skaliranje, $\hat{\beta}^{(K)}$	Oblik, $\hat{\nu}^{(P)}$	Skaliranje, $\hat{\beta}^{(P)}$
$3-4$ (slika 5.2a)	0,38	0,00109 V^2	**1,02**	**49678,19 V^{-2}**
$4-5$ (slika 5.2b)	**1,0**	**0,00620 V^2**	1,53	1067,66 V^{-2}

Tablica 5.2. Parametri simulacije za određivanje točnosti estimacije (ovisno o broju baznih razdioba i broju uzoraka) te računalnog opterećenja.

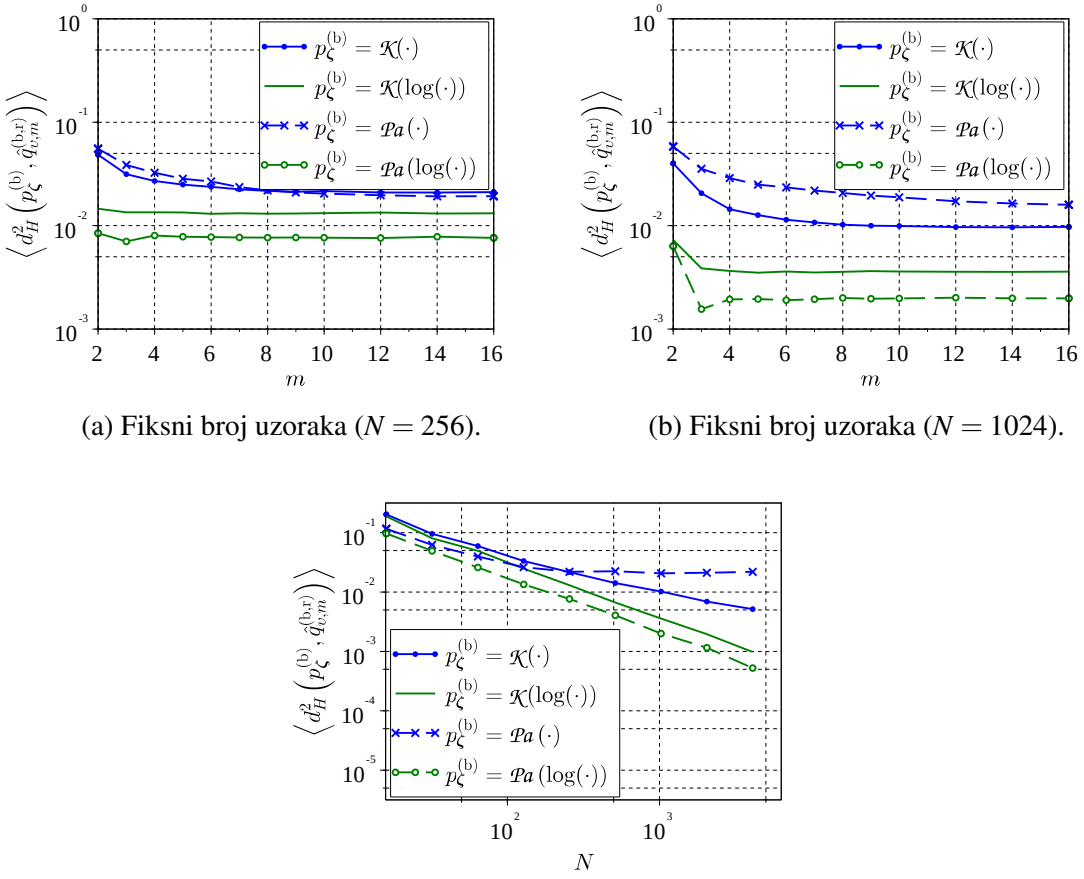
Parametar	Vrijednost	Opis
m	$2,\ldots,256$	Broj baznih komponenti za fiksni broj uzoraka N
	$4,8$	Broj baznih komponenti za promjenjivi broj uzoraka N
M	100	Broj stohastičkih realizacija
$p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}$	$\mathcal{K}$	Referentna K-razdioba
	$\mathcal{P}a$	Referentna Paretova razdioba
$\nu^{(K)}$	1,00	Parametar oblika za referentnu K-razdiobu
$\nu^{(P)}$	1,02	Parametar oblika za referentnu Paretovu razdiobu
$\beta^{(K)}$	0,0062 V^2	Parametar skaliranja za referentnu K-razdiobu
$\beta^{(P)}$	49678,2 V^{-2}	Parametar skaliranja za referentnu Paretovu razdiobu
N	$256,1024$	Broj uzoraka za promjenjivi broj baznih komponenti
	$16,\ldots,2048$	Broj uzoraka za fiksni broj baznih komponenti
P_{FA}	$10^{-4}-10^{-1}$	Dizajnirana vjerojatnost lažne detekcije
$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}$	–	Skup uzoraka referentne razdiobe
–	$\log(\cdot)$	Logaritamska domena
–	$(\cdot)$	Amplitudna domena
–	10^{-6}	Kriterij konvergencije za metode EM i UCV$^{(*)}$
–	10^{-4}	Tolerancija za evaluaciju integrala (5.13)
d	10^{-3}	Tolerancija određivanja središta metodom LBG (5.30)
α	0,5	Parametar za adaptivno skaliranje u metodi UCV$^{(*)}$
–	200	Maksimalni broj iteracija za metodu EM
–	EM	Metoda maksimiziranja vjerodostojnosti primjenom maksimizacije očekivanja
–	UCV	Metoda nepristrane unakrsne provjere
–	UCV$^{(*)}$	Metoda nepristrane unakrsne provjere s adaptacijom skaliranja
–	KDE	Metoda jezgrene estimacije



Slika 5.3. Shematski prikaz simulacije za određivanje točnosti estimacije $d_H^2(\cdot)$ i računalnog opterećenja t_{CPU}, ovisno o broju baznih razdioba m, broju uzoraka N te primijenjenoj metodi radijalne mreže (maksimizacija vjerodostojnosti (EM), unakrsna provjera (UCV) i njena adaptacija (UCV$^{(*)}$) te jezgrena estimacija (KDE)).

Razlike u točnosti estimacije razdioba koje najbolje pristaju stvarnim podacima smetnje (slika 5.2, vrijednosti parametara prema tablici 5.2), izražene očekivanjem kvadrata Hellingerove udaljenosti (5.12), za različite bazne razdiobe i različite metode estimacije, ilustrirane su slikom 5.4 (metoda maksimizacije vjerodostojnosti) i slikom 5.5 (jezgrena metoda, nepristrana unakrsna provjera i njena adaptacija). Za metodu maksimizacije vjerodostojnosti, analiza jednadžbe (5.12) pokazuje da očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti pada kako broj uzoraka raste, ali nije očito da povećanje broja komponenti naposljetku vodi smanjenju gre-

ške. Područje zasićenja, ilustrirano slikama 5.4a i 5.4b, ukazuje na navedeno. Za analizirane razdiobe smetnje, mrežom RBF s maksimiziranjem vjerodostojnosti u logaritamskoj se domeni općenito postiže točnija estimacija, a zasićenje nastupa pri broju komponenti $m \geq 4$, uz $N = 256$ i $N = 1024$ uzoraka. A prema slici 5.6, brzina konvergencije očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti za metodu maksimizacije vjerodostojnosti u logaritamskoj domeni pokazuje ovisnost kao približno $o\left(1/N\right)$, što je u skladu s (5.12). Nasuprot tome, metoda jezgrene estimacije pokazuje sporiju konvergenciju, kao približno $o\left(1/N^{0,7}\right)$, kako je to ilustrirano slikom 5.7.

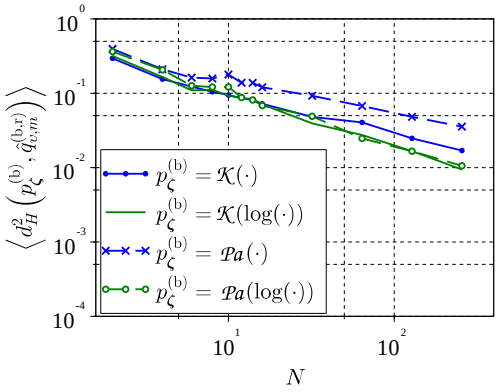


(a) Fiksni broj uzoraka ($N = 256$).

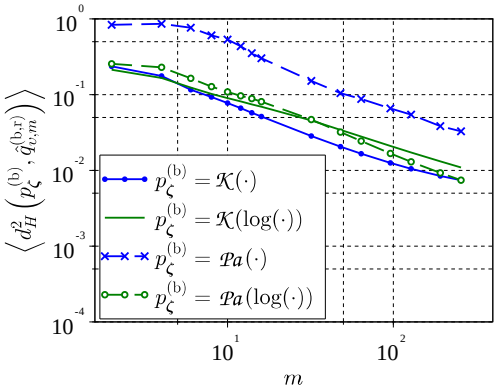
(b) Fiksni broj uzoraka ($N = 1024$).

(c) Fiksni broj komponenti ($m = 8$).

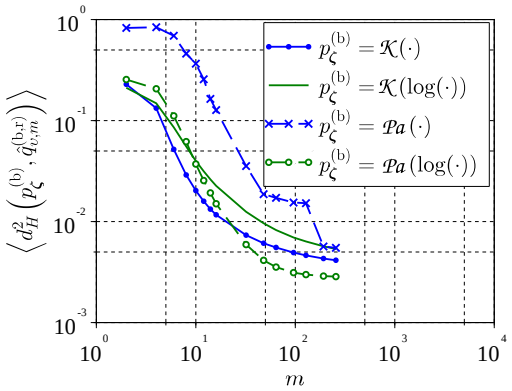
Slika 5.4. Ovisnost očekivane kvadrirane Hellingerove udaljenosti o broju komponenti m uz $N = 256$ i $N = 1024$ uzoraka (slike 5.4a i 5.4b) te o broju uzoraka N uz $m = 8$ komponenti (slika 5.4c). S $\mathcal{K}(\cdot)$ je označena K-razdioba (3.33), a s $\mathcal{P}a(\cdot)$ Paretova razdioba (3.44). Argument razdiobe $\log(\cdot)$ naglašava estimaciju parametara mreže u logaritamskoj domeni. Estimacija je provedena maksimiziranjem vjerodostojnosti metodom maksimizacije očekivanja.



(a) Jezgrena estimacija.

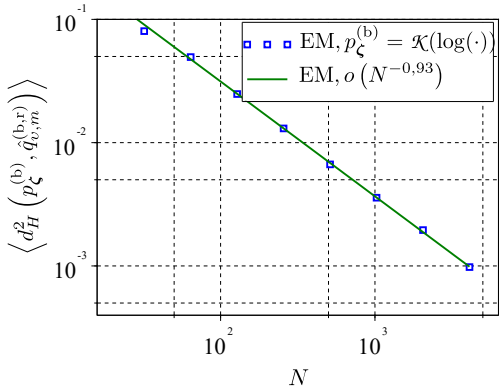


(b) Metoda UCV ($N = 1024$).

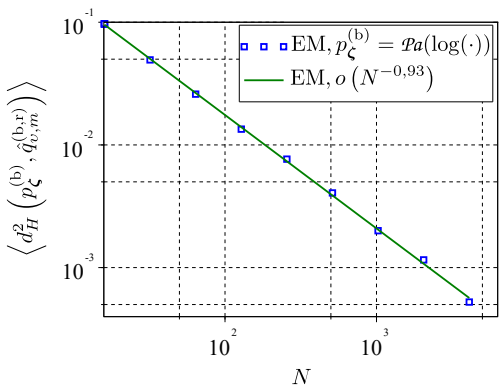


(c) Adaptacija metode UCV ($N = 1024$).

Slika 5.5. Ovisnost očekivane kvadrirane Hellingerove udaljenosti o broju uzoraka za jezgrenu metodu (slika 5.5a) te o broju komponenti m za metodu UCV uz $N = 1024$ uzoraka (slike 5.5b i 5.5c). S $\mathcal{K}(\cdot)$ je označena K-razdioba (3.33), a s $\mathcal{P}a(\cdot)$ Paretova razdioba (3.44). Argument razdiobe $\log(\cdot)$ naglašava estimaciju parametara mreže u logaritamskoj domeni.

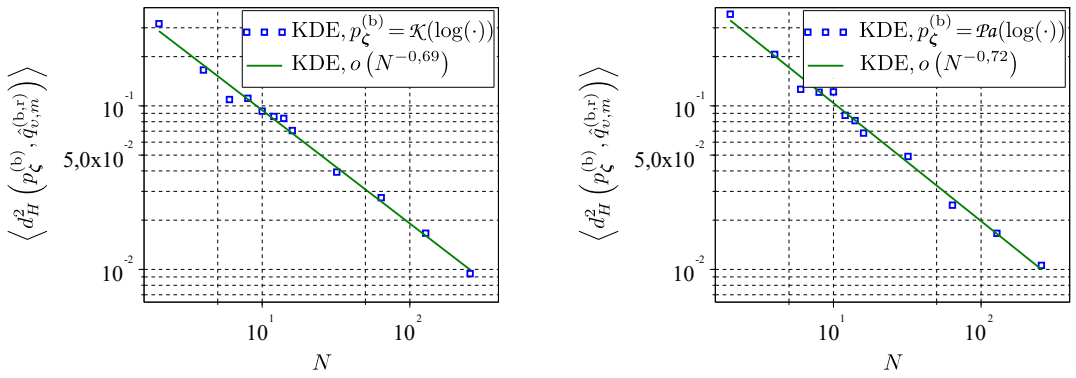


(a) K-razdioba.



(b) Paretova razdioba.

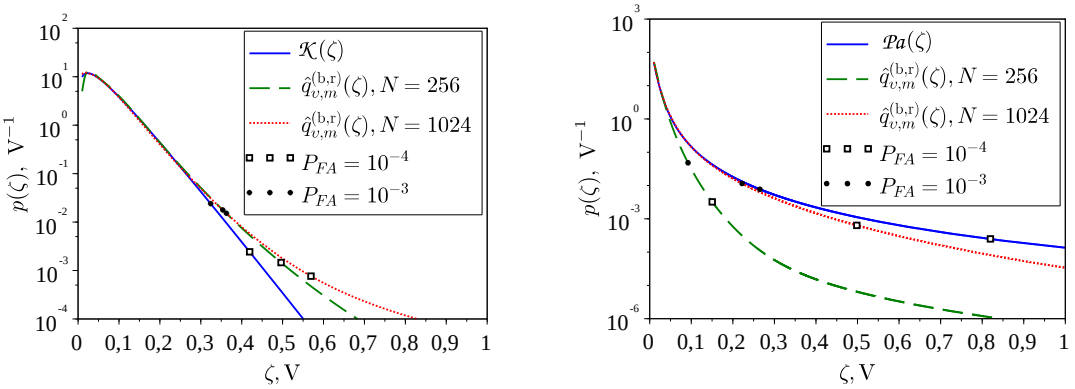
Slika 5.6. Konvergencija očekivane kvadrirane Hellingerove udaljenosti ovisno o broju uzoraka za metodu maksimizacije vjerodostojnosti u logaritamskoj domeni uz $m = 8$ komponenti. Pri tome je s $\mathcal{K}(\cdot)$ označena K-razdioba (3.33), a s $\mathcal{P}a(\cdot)$ Paretova razdioba (3.44). Argument $\log(\cdot)$ naglašava estimaciju u logaritamskoj domeni.



(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

Slika 5.7. Konvergencija očekivane kvadrirane Hellingerove udaljenosti ovisno o broju uzoraka za metodu jezgrene estimacije u logaritamskoj domeni. Pri tome je s $\mathcal{K}(\cdot)$ označena K-razdioba (3.33), a s $\mathcal{P}a(\cdot)$ Paretova razdioba (3.44). Argument $\log(\cdot)$ naglašava estimaciju u logaritamskoj domeni.

Očite razlike u estimaciji razdiobe koje su ovisne o broju uzoraka ilustrirane su slikom 5.8 za jednu tipičnu realizaciju i estimaciju u logaritamskoj domeni. Za rječu pojavu igličastih odjeka (lakši rep K-razdiobe), ostvarena vjerojatnost lažne detekcije primjenom većeg broja uzoraka manja je od dizajnirane jer je prag detekcije viši od potrebnog. A za razdiobu s težim repom (češća pojava igličastih odjeka, odnosno Paretova razdioba), veći broj uzoraka rezultira točnijom estimacijom.

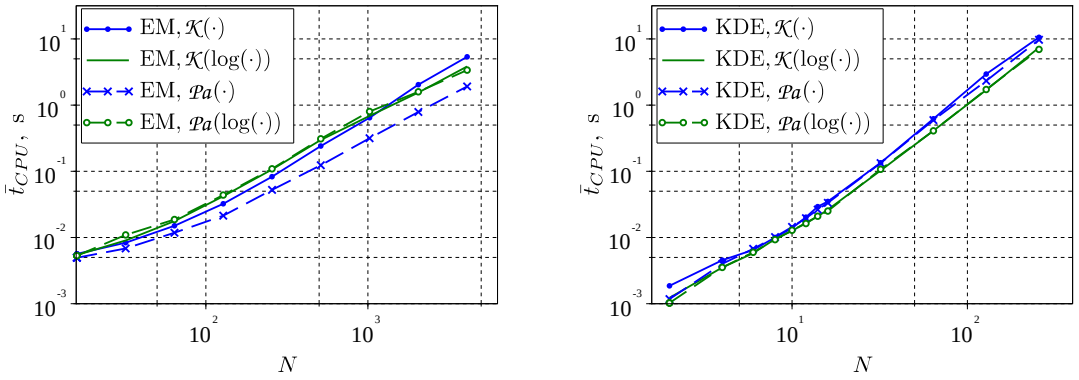


(a) Estimacija K-razdiobe. (b) Estimacija Paretove razdiobe.

Slika 5.8. Usporedba estimacije u ovisnosti o broju uzoraka. Estimacija je provedena radijalnom mrežom s $m = 4$ komponente, metodom maksimiziranja vjerodostojnosti u logaritamskoj domeni. Kvadrati i kružnice označavaju vrijednosti razdiobe pri detekcijskom pragu koji je ovisan o dizajniranoj vjerojatnosti lažne detekcije P_{FA}.

U kontekstu usporedbe računalne složenosti, metoda jezgrene estimacije kojom se ostvaruje približno jednaka točnost kao i metodom maksimizacije vjerodostojnosti (broj uzoraka $N = 256$, broj komponenti $m = 8$ i estimacija u logaritamskoj domeni, vidi slike 5.4a i 5.5a),

računalno je složenija, kako je to ilustrirano slikom 5.9, pri čemu je računalna složenost izražena kroz prosječno vrijeme $\bar{t}_{CPU}$ koje je procesor posvetio isključivo računanju parametara. Za metodu maksimizacije vjerodostojnosti, to su iterativni koraci (5.20) – (5.23) do konvergencije vjerodostojnosti (5.24) k maksimumu koji je određen s relativnom točnošću 10^{-6}. Za metodu jezgrene estimacije, to je nalaženje vrijednosti $\sigma^{(*)}$ kvazi-Newtonovom metodom [269] koja minimizira objektivnu funkcija (5.37) s relativnom točnošću 10^{-6}. Pri tome su metode implementirane primjenom biblioteka Fortranovih rutina BLAS i LAPACK [287]. Dok je računalna složenost metode jezgrene estimacije $O(N^2)$ [288], slika 5.9b, složenost metode maksimizacije vjerodostojnosti ovisi o broju iteracija, ali se iz rezultata simulacije, slika 5.9a, može aproksimirati s $O(N)$ (točnije, s $O\left(N^{1,2}\right)$).

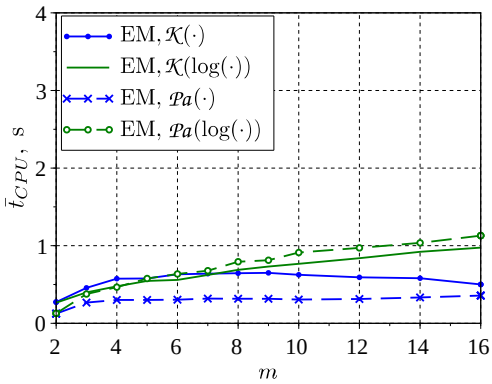


(a) Metoda maksimizacije vjerodostojnosti.

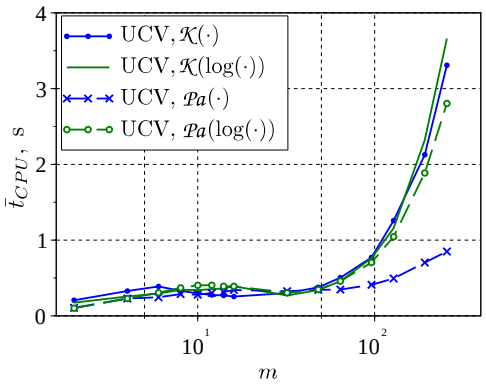
(b) Metoda jezgrene estimacije.

Slika 5.9. Usporedba računalne složenosti pri estimaciji K- i Paretove razdiobe metodom maksimiziranja vjerodostojnosti (primjenom metode maksimizacije očekivanja (EM)) te metodom jezgrene estimacije (KDE). Pri tome se radijalna mreža sastoji od $m = 8$ komponenti, a s $\log(\cdot)$ je naglašena estimacija u logaritamskoj domeni. Oznake $\mathcal{K}(\cdot)$ i $\mathcal{P}a(\cdot)$ odnose se na estimaciju K- odnosno Paretove razdiobe.

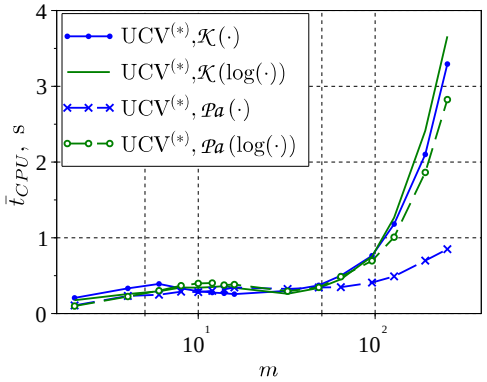
Kako je ilustrirano slikama 5.10b i 5.10c, računalna složenost metoda unakrsne provjere naglo se povećava pri broju komponenti $m \gtrsim 64$ (osim pri estimaciji Paretove razdiobe u amplitudnoj domeni gdje je povećanje izraženo pri $m \gtrsim 256$ komponenti), a za manje vrijednosti, približno je jednako računalnoj složenosti metode maksimizacije vjerodostojnosti uz 4 do 8 komponenti, slika 5.10a. Premda je ovisna o broju iteracija, složenost se (metoda unakrsne provjere) može aproksimirati s $O(m^2)$, a za metodu maksimizacije vjerodostojnosti, s $O(m)$. Motiv usporedbe metoda maksimizacije vjerodostojnosti i unakrsnih provjera je odabir one kojom se ostvaruje veća točnost estimacije, uz približno jednaku računalnu složenost. Tako pregled ostvarene točnosti estimacije metodama maksimizacije vjerodostojnosti (slika 5.4b) i unakrsnih provjera (slike 5.5b i 5.5c), pokazuje veću točnost estimacije (u logaritamskoj domeni) metodom maksimizacije vjerodostojnosti pri broju komponenti od 4 do 8 nego metodama unakrsnih provjera uz $m = 32$ komponente.



(a) Metoda maksimizacije vjerodostojnosti.



(b) Metoda nepristrane unakrsne provjere.

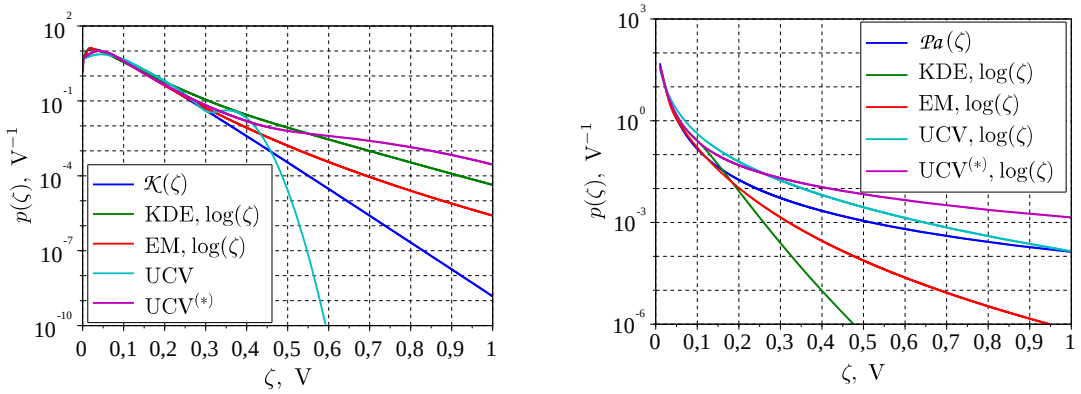


(c) Metoda s adaptacijom parametra skaliranja.

Slika 5.10. Usporedba računalne složenosti pri estimaciji K- i Paretove razdiobe metodama maksimiziranja vjerodostojnosti (primjenom metode maksimizacije očekivanja (EM)) te metodama nepristrane unakrsne provjere (UCV) odnosno (UCV$^{(*)}$) za adaptivni parametar skaliranja. Pri tome je za sve metode broj uzoraka jednak ($N = 1024$). Argument $\log(\cdot)$ naglašava estimaciju u logaritamskoj domeni, a s $\mathcal{K}(\cdot)$ i $\mathcal{P}a(\cdot)$ je istaknuta estimacija K- odnosno Paretove razdiobe.

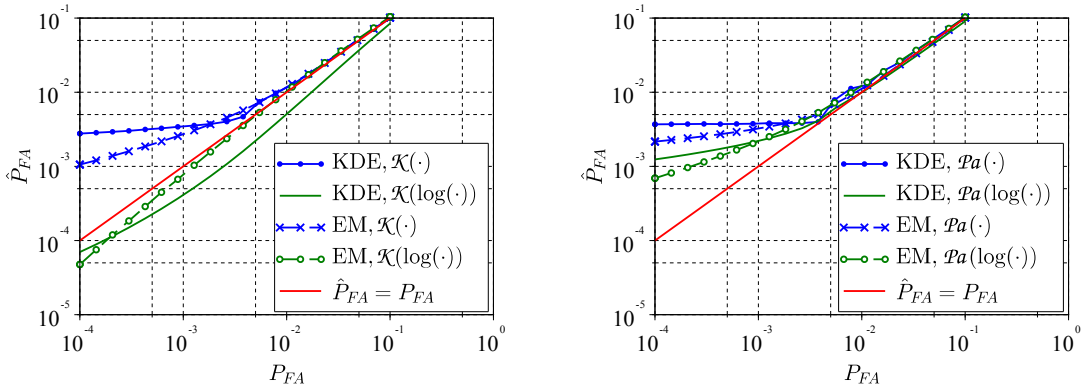
Točnost estimacije, posebno repa razdiobe, važna je za određivanje praga detekcije. Tako slika 5.11 ilustrira primjenu metoda jezgrene estimacije (KDE), maksimiziranja vjerodostojnosti (primjenom metode maksimizacije očekivanja (EM)) te unakrsne provjere (UCV) i njene adaptacije (UCV$^{(*)}$), pri čemu je za estimaciju odabrana ona domena u kojoj se, za partikularnu metodu, ostvaruje najveća točnost (za metode KDE i EM to je logaritamska domena, vidi slike 5.4c i 5.5a, a za metode UCV i UCV$^{(*)}$, amplitudna domena za K- i logaritamska za Paretovu razdiobu, vidi slike 5.5b i 5.5c). Slika 5.11a pokazuje da se metodom EM postiže najveća točnost estimacije repa K-razdiobe. Premda se naizgled metodom UCV bolje estimira rep Paretove razdiobe, slika 5.11b, analiza ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$ pokazuje, kako je to ilustrirano slikama 5.12 i 5.14, da se estimacijom u logaritamskoj domeni metodom EM točnije aproksimira idealna ovisnost dizajnirane i ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije ($\hat{P}_{FA} = P_{FA}$)

za obje razdiobe. Također, normirana devijacija ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije manja je u logaritamskoj domeni, kako je to ilustrirano slikama 5.13 i 5.15.



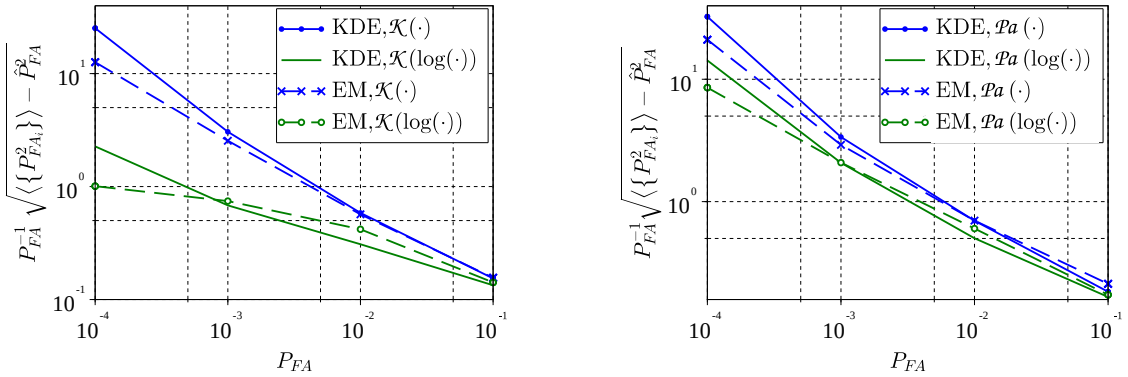
(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

Slika 5.11. Usporedba rezultata estimacije primjenom metoda jezgrene estimacije, maksimizacije vjerodostojnosti i unakrsne provjere. Pri tome je broj uzoraka jednak za sve metode ($N = 256$). Metoda jezgrene estimacije označena je s KDE a metoda maksimizacije vjerodostojnosti s EM. Obje metode primjenjuju estimaciju u logaritamskoj domeni, a potonja se sastoji od $m = 8$ komponenti. Metode nepristrane unakrsne provjere označene su s UCV, odnosno UCV$^{(*)}$ za adaptivni parametar skaliranja. Obje metode unakrsne provjere primjenjuju $m = 32$ komponente. Naposljetku, $\mathcal{K}(\cdot)$ i $\mathcal{P}a(\cdot)$ ističu estimaciju K- i Paretove razdiobe.



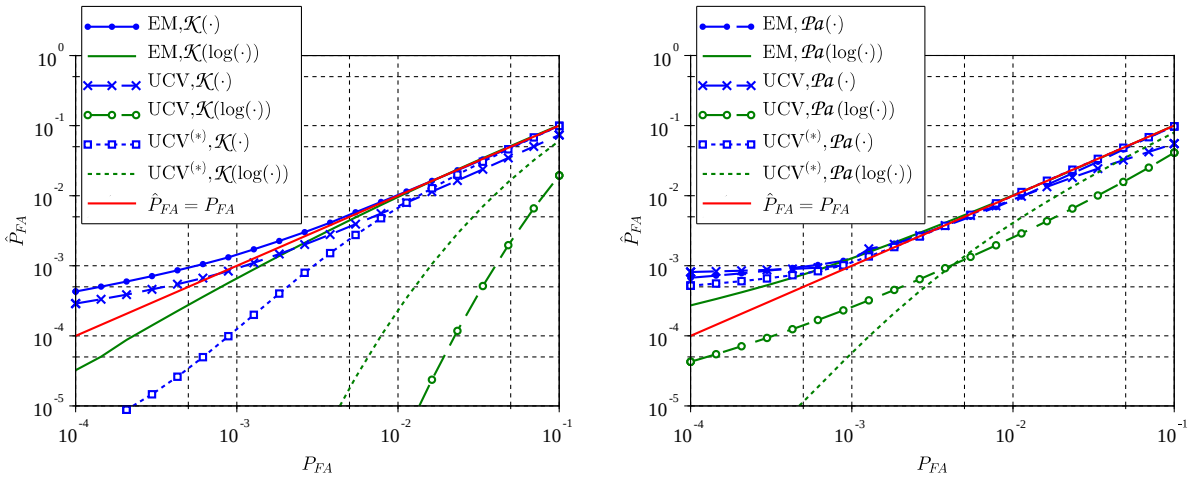
(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

Slika 5.12. Usporedba ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije između metoda jezgrene estimacije (KDE) i maksimizacije vjerodostojnosti (EM). Pri tome je broj uzoraka jednak za obje metode ($N = 256$), a radijalna mreža sastoji se od $m = 8$ komponenti. S $\log(\cdot)$ je naglašena estimacija u logaritamskoj domeni, a $\mathcal{K}(\cdot)$ i $\mathcal{P}a(\cdot)$ označavaju K- odnosno Paretovu razdiobu.



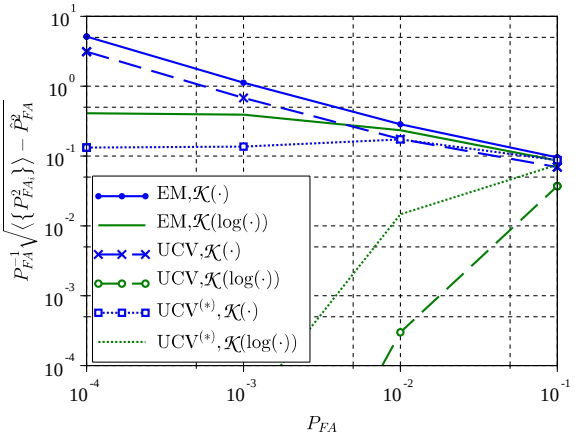
(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

Slika 5.13. Usporedba normiranih devijacija ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije između metoda jezgrene estimacije (KDE) i maksimizacije vjerodostojnosti (EM). Pri tome je broj uzoraka jednak za obje metode ($N = 256$), a radijalna mreža sastoji se od $m = 8$ komponenti. S $\log(\cdot)$ je naglašena estimacija u logaritamskoj domeni, a $\mathcal{K}(\cdot)$ i $\mathcal{P}a(\cdot)$ označavaju K- odnosno Paretovu razdiobu.

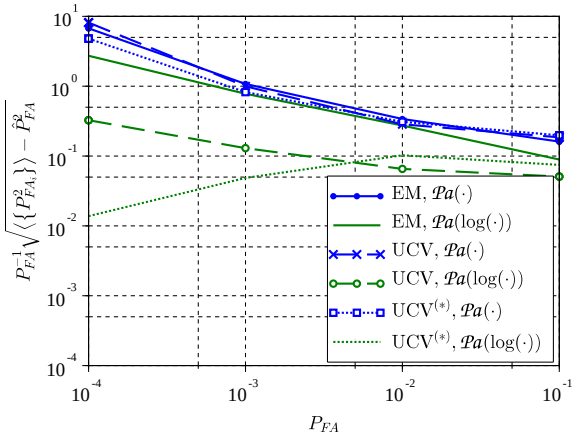


(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

Slika 5.14. Usporedba ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije između metoda maksimizacije vjerodostojnosti (EM) te metoda nepristrane unakrsne provjere (UCV), odnosno (UCV$^{(*)}$) za adaptivni parametar skaliranja, pri čemu sve metode primjenjuju jednak broj uzoraka ($N = 1024$). Broj komponenti radijalne mreže iznosi $m = 8$ za metodu EM, odnosno $m = 32$ za metode UCV i UCV$^{(*)}$.



(a) K-razdioba.



(b) Paretova razdioba.

Slika 5.15. Usporedba normiranih devijacija ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije između metoda maksimizacije vjerodostojnosti (EM) te metoda nepristrane unakrsne provjere (UCV, odnosno UCV$^{(*)}$ za adaptivni parametar skaliranja), pri čemu sve metode primjenjuju jednak broj uzoraka ($N = 1024$). Broj komponenti radijalne mreže iznosi $m = 8$ za metodu EM, odnosno $m = 32$ za metode UCV i UCV$^{(*)}$.

Prilikom odabira broja komponenti mreže treba uvažiti prostornu (radijalnu) i vremensku (azimutnu) korelaciju uzoraka. Kako je istaknuto u [166], uzorci smetnje mora koji su rezultat primjene radara srednje razlučivosti s rotirajućom antenom (poput radara IPIX te radara s nekoherentnom detekcijom iz kategorije COTS), rezultiraju vremenskom korelacijom radarskog presjeka (ili intenziteta teksture) reda veličine vremena obasjavanja cilja te prostornom korelacijom reda veličine nekoliko desetaka radijalnih ćelija razlučivosti, pod uvjetom da obasjana površina nije izrazito neregularna. Neka se s $N_{r,j}$ označi broj članova skupa amplituda susjednih radijalnih ćelija pri nekom partikularnom azimutu $\varphi_{k,j}$ i vremenskom indeksu $k \geq 0$, vidi sliku 5.16a, kao

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k,j} = \left\{ \zeta_{k,i}, i = 1, \ldots, N_{r,j} \right\}. \tag{5.40}$$

Pod pretpostavkom da su članovi skupa (5.40) realizacije složenog Gaussovog procesa, N_ρ susjednih (radijalnih) ćelija je korelirano u teksturi (korijenu radarskog presjeka). U ovom primjeru, primjenjuje se jednostavna korelacija teksture između radijalnih ćelija indeksa i i $\imath$, pri fiksnom azimutu $\varphi_{k,j}$, dana koeficijentom $\rho_{i,\imath}$ kao

$$\rho_{i,\imath} = \begin{cases} 1, & |i - \imath| \leq N_\rho \\ 0, & |i - \imath| > N_\rho \end{cases}. \tag{5.41}$$

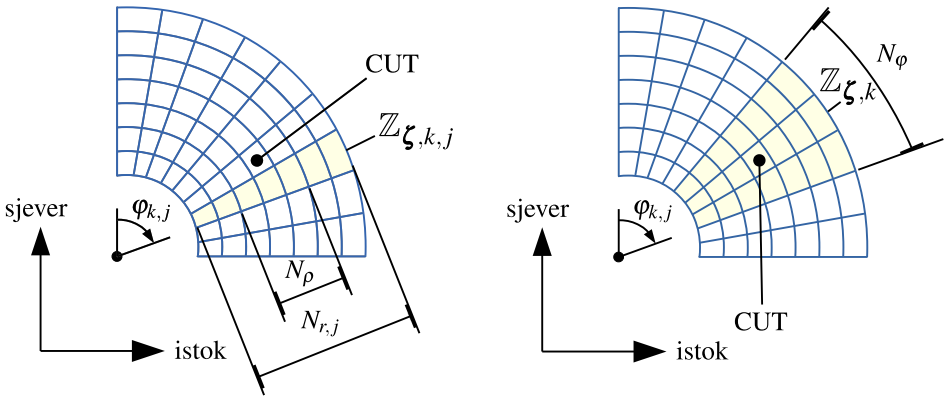
Primjenom N_φ skupova susjednih radijalnih ćelija, sadržaj ukupnog skupa s $N_{(r,\varphi)} = N_{r,j} N_\varphi$ ćelija razlučivosti (skup referentnih ćelija) koje okružuju testnu ćeliju (CUT), (vidi sliku 5.16b), naposljetku je dan kao

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k} = \left\{ \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k,j}, j = 1, \ldots, N_\varphi \right\}. \tag{5.42}$$

S obzirom na razlučivost radara IPIX (radijalna razlučivost 30 m i azimutna 0,9°, vidi tablicu 3.3), gornja je granica parametra N_φ od 8 do 16, s $N_{r,j} = N_\rho = 16$ radijalnih ćelija. Ako je smetnja stacionarna (parametri razdiobe u okolici testne ćelije ne mijenjaju se) kroz N_A uzastopnih antenskih rotacija, indeksa $\{k - N_A + 1, k - N_A + 2, \ldots, k\}$, skupovi uzoraka referentnih ćelija navedenih vremenskih indeksa uključuju se u skup referentnih ćelija za kurentni okret k kao

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k-N_A+1:k} = \left\{ \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k-i}, i = 0, \ldots, N_A - 1 : \left| \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k-i} \right| = N_{(r,\varphi)} \right\}, \tag{5.43}$$

pri čemu svaki $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k-i}$ u (5.43) ogovara skupu (5.42). Za ovaj primjer, broj uzastopnih rotacija za integraciju skupa referentnih ćelija kreće se od $N_A = 4$ do $N_A = 8$, što rezultira s $N = 1024$ uzoraka.



(a) Skup radijalnih ćelija $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k,j}$.

(b) Skup referentnih ćelija $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k}$.

Slika 5.16. Ilustracija referentnog skupa ćelija razlučivosti. Broj radijalnih ćelija za partikularni azimut $\varphi_{k,j}$ iznosi $|\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k,j}| = N_{r,j}$ (slika 5.16a) pri čemu je N_ρ susjednih ćelija korelirano u teksturi (korijenu radarskog presjeka). Uz N_φ ovakvih susjednih skupova, ukupni broj referentnih ćelija razlučivosti dan je s $|\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k}| = N_{(r,\varphi)} = N_{r,j} N_\varphi$.

Radi lakše matematičke manipulacije, optimalni Neyman-Pearsonov test omjera vjerodostojnosti [237], u slučaju smetnje koja nije Gaussova, uobičajeno je aproksimiran nekim drugim (neoptimalnim) testom, dovoljne testne statistike koja isključivo ovisi o pretpostavljenom (ili apriornom) modelu smetnje. Međutim, zbog odstupanja (stvarne razdiobe) od apriornog modela, smetnja se može manifestirati npr. kroz gubitke u detekciji koji naposljetku vode gubitku staze praćenog cilja, jer odstupanje rezultira ili sa znatno većim brojem mjerenja od očekivanoga, i(li) pragom detekcije čija je estimirana vrijednost viša od potrebne za stvarnu statistiku smetnje. Zbog toga se nepoznati otisak smetnje, u ovom primjeru amplitudna razdioba, nastoji aproksimirati sumom baznih razdioba čija je statistika (a time i vrijednost praga detekcije), poznata. Postupak je sličan kao i za metodu tzv. ekvivalentne razdiobe, gdje se estimiraju parametri apriornog modela te se na temelju njihove estimacije izvodi vrijednost praga detekcije, kao npr. u [274] za apriorni model K-razdiobe.

Tradicionalni pristup detekciji temelji se na binarnom testu hipoteza, tj. između dviju hipoteza H0 i H1 (H0 da cilj nije prisutan i H1 da je), bira se hipoteza H0 ako je amplituda testne ćelije ispod nekog unaprijed određenog praga, definiranog greškom prve vrste (biranje hipoteze H1 iako je H0 točna), u suprotnom se bira hipoteza H1 [237]. Iz ograničenja koje postavlja vjerojatnost greške prvog reda, parametar dizajna (u kontekstu radara, to je vjerojatnost lažne detekcije P_{FA}, dana s $P_{FA} = \int_Z^\infty p_{FA}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ pri čemu je $p_{FA}(\zeta)$ razdioba vjerojatnosti za hipotezu H0), u okviru estimacije razdiobe mrežom RBF, vjerojatnost lažne detekcije postaje

$$P_{FA} = \int_{\hat{Z}_{\upsilon,m}}^{\infty} \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{i=1}^{m} w_i \int_{\hat{Z}_{\upsilon,m}}^{\infty} q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta \mid \boldsymbol{\upsilon}_i)\,\mathrm{d}\zeta, \tag{5.44}$$

iz koje se može estimirati vrijednost praga detekcije $\hat{Z}_{\upsilon,m}$.

Premda nedavno predložena metoda sa stvarnom konstantnom stopom lažnih detekcija (CFAR) u smetnji Paretove razdiobe, temeljena na pristupu pomičnog prozora u Bayesovom okviru, ne traži apriorno poznavanje parametara smetnje [289], metode temeljene na geometrijskoj transformaciji i uređenoj statistici pokazuju bolje značajke u detekciji, ali zato zahtijevaju apriorno poznavanje parametra oblika odnosno skaliranja [290]. Još jedan nedostatak metode opisane u [289] je potreba za numeričkom integracijom, za razliku od metode momenata koji se primjenjuju u pristupu s geometrijskom transformacijom i uređenom statistikom. S obzirom na veliku složenost navedenih metoda, u ovom je primjeru usvojena tradicionalna i jednostavnija metoda [zlog(z)] [192] kao referentna. Vrijednost parametra oblika K- i Paretove razdiobe estimira se s (3.35) (K-razdioba) i (3.45) (Paretova razdioba) [170], premda je za zadani broj uzoraka $N = 1024$ teško postići estimaciju točniju od desetak posto za (u ovom primjeru ovako) niske vrijednosti parametra oblika, vidi sliku 5.2 i tablicu 5.1.

Na temelju provedene analize značajki radijalne mreže u pogledu točnosti i računalne složenosti, proizlazi zaključak da estimacija u logaritamskoj domeni metodom maksimizacije očekivanja u svrhu maksimiziranja vjerodostojnosti pruža najveću točnost uz zadovoljavajuće malu složenost. U nastavku ovog primjera, uspoređene su operativne karakteristike prijemnika (ROC), ostvarene primjenom radijalne mreže RBF (s estimacijom u logaritamskoj domeni) i klasične metode ekvivalentne razdiobe, primjenom estimatora parametra oblika [zlog(z)], u scenariju kada apriorni model odgovara stvarnoj razdiobi smetnje te u scenariju kada ne odgovara. Pored parametara simulacije prema tablici 5.2, uvedeni su i dodatni parametri, prikazani tablicom 5.3. Simulacija je provedena za K-razdiobu (označenu s $p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{K}$) i Paretovu razdiobu ($p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{P}a$) posebno. Shematski prikaz simulacije prikazuje slika 5.17, a odvija se sljedećim koracima:

K1 inicijalizacija parametara prema tablicama 5.2 i 5.3

K2 evaluacija referentnog praga detekcije Z i referentnog omjera snage signala prema snazi smetnje $\mathcal{R}$, pod pretpostavkom Swerlingovog modela br. 1 [73], ovisno o dizajniranim

vrijednostima vjerojatnosti detekcija P_{FA} i P_D, kao rješenje izraza

$$P_{FA} = \begin{cases} \int_{Z^{(K)}}^{\infty} \mathcal{K}\left(\zeta; \nu^{(K)}, \beta^{(K)}\right) \mathrm{d}\zeta = \dfrac{2\left(Z^{(K)}\right)^{\nu^{(K)}} K_{\nu^{(K)}}\left(2Z^{(K)}/\sqrt{\beta^{(K)}}\right)}{\left(\beta^{(K)}\right)^{\nu^{(K)}/2}\Gamma\left(\nu^{(K)}\right)}, & p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{K} \\ \int_{Z^{(P)}}^{\infty} \mathcal{P}a\left(\Psi = \zeta^2; \nu^{(P)}, \beta^{(P)}\right) \mathrm{d}\Psi = \dfrac{4^{\nu^{(P)}}}{\left(\beta^{(P)}\left(Z^{(P)}\right)^2+4\right)^{\nu^{(P)}}}, & p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{P}a \end{cases} \tag{5.45}$$

i

$$P_D = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(\frac{\beta^{(K)}}{2}\right)^{\nu^{(K)}}\Gamma\left(\nu^{(K)}\right)} \int_{Z^{(K)}}^{\infty} \zeta \mathrm{d}\zeta \int_0^{\infty} \dfrac{\eta^{\nu^{(K)}-1}}{\eta+d^{(K)}} \exp\left(-\dfrac{2\eta}{\beta^{(K)}} - \dfrac{\zeta^2}{2\left(\eta+d^{(K)}\right)}\right) \mathrm{d}\eta, & p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{K} \\ \dfrac{1}{\left(\frac{\beta^{(P)}}{2}\right)^{\nu^{(P)}}\Gamma\left(\nu^{(P)}\right)} \int_{Z^{(P)}}^{\infty} \zeta \mathrm{d}\zeta \int_0^{\infty} \dfrac{\eta^{-\nu^{(P)}-1}}{\eta+d^{(P)}} \exp\left(-\dfrac{2}{\beta^{(P)}\eta} - \dfrac{\zeta^2}{2\left(\eta+d^{(P)}\right)}\right) \mathrm{d}\eta, & p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{P}a \end{cases} \tag{5.46}$$

po $Z^{(K)}$, $Z^{(P)}$, $d^{(K)}$ i $d^{(P)}$, $\forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$, pri čemu se (5.46) za $p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{K}$ rješava numeričkom metodom prema [274], vidi također i opis metode u odjeljku 4.5, a za $p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{P}a$ Gauss-Kronrodovom kvadraturnom varijantom Gaussove kvadraturne metode [291]

K2a evaluacija omjera snage signala prema snazi smetnje $\mathcal{R}$, ovisno o srednjoj vrijednosti intenziteta teksture (srednjoj snazi radarskog presjeka), prema gama-razdiobi kao $\bar{\eta}^{(K)} = \frac{\nu^{(K)}\beta^{(K)}}{2}$, odnosno inverznoj gama-razdiobi kao $\bar{\eta}^{(P)} = \frac{2}{\beta^{(P)}\left(\nu^{(P)}-1\right)}$, pri čemu mora biti zadovoljen uvjet $\nu^{(P)} > 1$,

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \frac{2d^{(K)}}{\nu^{(K)}\beta^{(K)}}, & p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{K} \\ \frac{\beta^{(P)}\left(\nu^{(P)}-1\right)d^{(P)}}{2}, & p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{P}a \end{cases} \tag{5.47}$$

K3 generiranje skupa $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}$ od N uzoraka smetnje, ovisno o razdiobi $p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}$, broju koreliranih radijalnih ćelija razlučivosti N_ρ te korelacijskom koeficijentu $\rho_{i,\iota}$ (5.41) kao

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}} = \left\{\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},i}, i = 1,\ldots,N/N_\rho\right\}, \tag{5.48}$$

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},i} = \begin{cases} \left\{\zeta_\iota : \zeta_\iota \sim \mathcal{N}\left(0,\eta_i\right), \eta_i \sim \mathcal{G}\left(\nu^{(K)}, \beta^{(K)}\right), \iota = 1,\ldots,N_\rho\right\}, & p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{K} \\ \left\{\zeta_\iota : \zeta_\iota \sim \mathcal{N}\left(0,\eta_i\right), \eta_i^{-1} \sim \mathcal{G}\left(\nu^{(P)}, \beta^{(P)}\right), \iota = 1,\ldots,N_\rho\right\}, & p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{P}a \end{cases} \tag{5.49}$$

K4 parametarska estimacija smetnje primjenom metode [zlog(z)] nad uzorcima intenziteta $\left\{\Psi_i \,|\, \Psi_i = \zeta_i^2, i = 1,\ldots,N\right\}$, tako da je pod pretpostavkom K-razdiobe (pri čemu je snaga termičkog šuma $\sigma_t^2 = 0$)

$$\frac{1}{\hat{\nu}^{(K)}} = \frac{\langle\{\Psi_i \log_{\mathrm{e}}(\Psi_i)\}\rangle}{\langle\{\Psi_i\}\rangle} - \langle\{\log_{\mathrm{e}}(\Psi_i)\}\rangle - 1, \tag{3.35}$$

$$\hat{\beta}^{(K)} = \langle\{\Psi_i\}\rangle \left(\hat{\nu}^{(K)}\right)^{-1}, \tag{3.37}$$

pod pretpostavkom Paretove razdiobe

$$\frac{1}{\hat{\nu}^{(P)} - 1} = \frac{\langle\{\Psi_i \log_{\mathrm{e}}(\Psi_i)\}\rangle}{\langle\{\Psi_i\}\rangle} - \langle\{\log_{\mathrm{e}}(\Psi_i)\}\rangle - 1, \tag{3.45}$$

$$\hat{\beta}^{(P)} = \frac{4}{\langle\{\Psi_i\}\rangle} \left(\hat{\nu}^{(P)} - 1\right)^{-1}, \tag{3.46}$$

te poluparametarska estimacija skupa parametara $\mathbb{Y}$ metodom maksimizacije vjerodostojnosti u logaritamskoj domeni, primjenom iteracijskih koraka (5.20) – (5.23), i kvadrirana Hellingerova udaljenost $d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)$

K5 $\forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$, prag detekcije pod pretpostavkom K-razdiobe određen je rješavanjem integrala

$$P_{FA} = \int_{\hat{Z}^{(K)}}^{\infty} \mathcal{K}\left(\zeta; \hat{\nu}^{(K)}, \hat{\beta}^{(K)}\right) \mathrm{d}\zeta \tag{5.50}$$

po $\hat{Z}^{(K)}$, pod pretpostavkom Paretove razdiobe rješavanjem

$$P_{FA} = \int_{\hat{Z}^{(P)}}^{\infty} \mathcal{P}a\left(\Psi; \hat{\nu}^{(P)}, \hat{\beta}^{(P)}\right) \mathrm{d}\Psi \tag{5.51}$$

po $\hat{Z}^{(P)}$, uz transformaciju $\Psi = \zeta^2$, a za poluparametarsku metodu rješavanjem

$$P_{FA} = \int_{\hat{Z}_{\upsilon,m}}^{\infty} \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{i=1}^{m} w_i \int_{\hat{Z}_{\upsilon,m}}^{\infty} q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta \mid \boldsymbol{\upsilon}_i)\,\mathrm{d}\zeta \tag{5.44}$$

po $\hat{Z}_{\upsilon,m}$

K6 $\forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$, primjenom pragova detekcije $\hat{Z}^{(K)}$, $\hat{Z}^{(P)}$ te $\hat{Z}_{\upsilon,m}$ na stvarnu razdiobu $p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}$, slijede, za svaku i-tu realizaciju, ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije P_{FA_i} kao

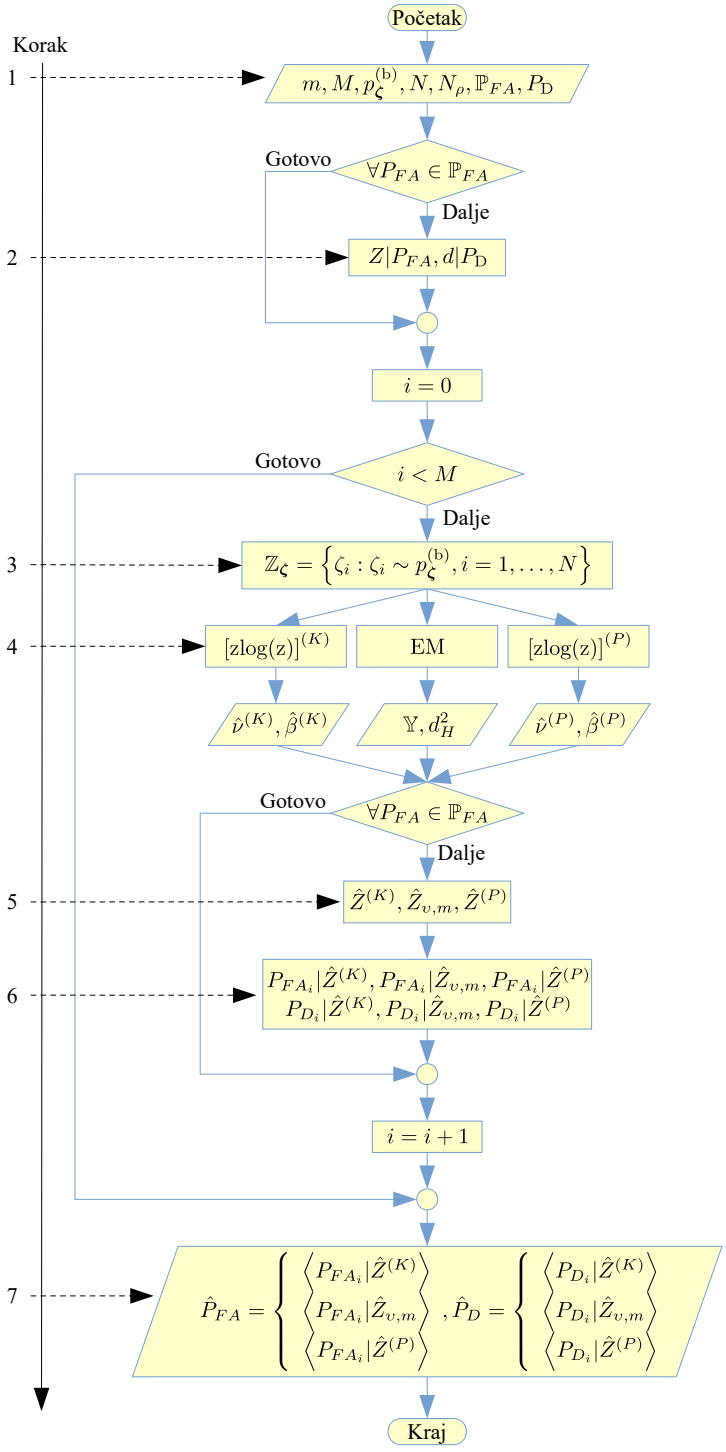
$$P_{FA_i} = \int_{f(Z)}^{\infty} p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \tag{5.52}$$

i ostvarene vjerojatnost detekcije

$$P_{D_i} = \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{\beta^{(K)}}{2}\right)^{\nu^{(K)}} \Gamma\left(\nu^{(K)}\right)} \int_{f(Z)}^{\infty} \zeta \mathrm{d}\zeta \int_0^{\infty} \frac{\eta^{\nu^{(K)}-1}}{\eta + d^{(K)}} \exp\left(-\frac{2\eta}{\beta^{(K)}} - \frac{\zeta^2}{2\left(\eta + d^{(K)}\right)}\right) \mathrm{d}\eta, & p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{K} \\ \frac{1}{\left(\frac{\beta^{(P)}}{2}\right)^{\nu^{(P)}} \Gamma\left(\nu^{(P)}\right)} \int_{f(Z)}^{\infty} \zeta \mathrm{d}\zeta \int_0^{\infty} \frac{\eta^{-\nu^{(P)}-1}}{\eta + d^{(P)}} \exp\left(-\frac{2}{\beta^{(P)}\eta} - \frac{\zeta^2}{2\left(\eta + d^{(P)}\right)}\right) \mathrm{d}\eta, & p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})} = \mathcal{P}a \end{cases} \tag{5.46}$$

pri čemu je $f(Z) = \hat{Z}^{(K)}$ za apriorni model prema K-razdiobi, $f(Z) = \hat{Z}^{(P)}$ za apriorni model prema Paretovoj razdiobi i $f(Z) = \hat{Z}_{\upsilon,m}$ za metodu poluparametarske estimacije

K7 $\forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$, evaluacija operativnih karakteristika prijemnika primjenom uzoračke srednje vrijednosti, za metode $[\text{zlog(z)}]^{(K)}$, $[\text{zlog(z)}]^{(P)}$ i metodu radijalne mreže EM te za K- i Paretovu razdiobu posebno, kao ovisnost $\hat{P}_{FA} = \langle \{P_{FA_i}, i = 1, \ldots, M\} \rangle$ i $\hat{P}_D = \langle \{P_{D_i}, i = 1, \ldots, M\} \rangle$ o P_{FA}.



Slika 5.17. Shematski prikaz simulacije za određivanje operativnih karakteristika prijemnika.

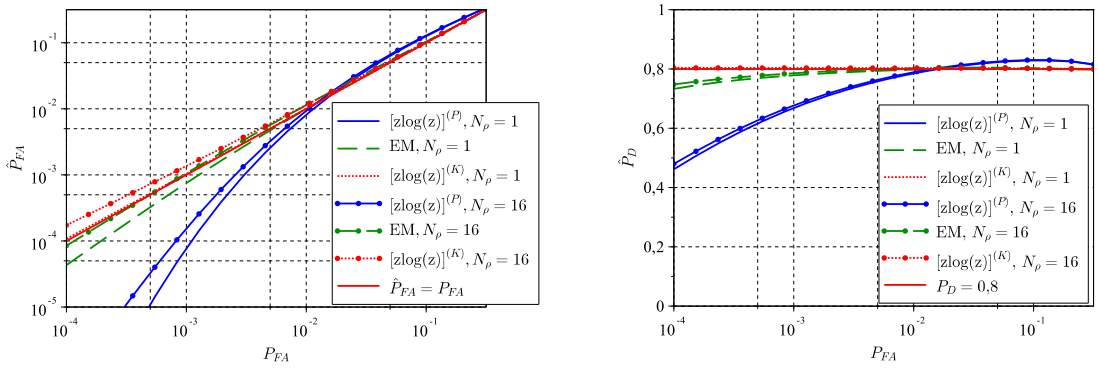
Tablica 5.3. Dodatni parametri simulacije za određivanje operativnih karakteristika prijemnika.

Parametar	Vrijednost	Opis
P_D	0,8	Dizajnirana vrijednost vjerojatnosti detekcije
$\mathbb{P}_{FA}$	$\{10^{-4},\ldots,10^{-1}\}$	Skup dizajniranih vrijednosti vjerojatnosti lažne detekcije
N_ρ	$1,16$	Broj koreliranih radijalnih ćelija razlučivosti

Primjenjivost radijalne mreže u procesu detekcije proizlazi iz toga koliko dobro ostvarene operativne karakteristike prijemnika (ROC) pristaju dizajniranima. Dobrota je ocijenjena usporedbom s rezultatima koji proizlaze primjenom referentnih metoda $[\text{zlog(z)}]^{(K)}$ i $[\text{zlog(z)}]^{(P)}$ u dva scenarija. Pri tome eksponent (K) naglašava estimaciju vrijednosti parametara oblika i skaliranja prema (3.35) i (3.37), temeljenu na apriornoj K-razdiobi, a (P) estimaciju vrijednosti parametara prema (3.45) i (3.46), temeljenu na apriornoj Paretovoj razdiobi. U prvom je scenariju referentna metoda prilagođena stvarnoj statistici smetnje, što znači da je u smetnji amplitudne K-razdiobe primijenjena metoda $[\text{zlog(z)}]^{(K)}$, a u smetnji amplitudne Paretove razdiobe metoda $[\text{zlog(z)}]^{(P)}$. Drugi scenarij simulira smetnju nepoznate razdiobe, odnosno evaluaciju parametara pod hipotezom pogrešnog modela. Tako je u smetnji K-razdiobe primijenjena metoda $[\text{zlog(z)}]^{(P)}$, a u smetnji Paretove razdiobe metoda $[\text{zlog(z)}]^{(K)}$. Da bi metoda radijalne mreže bila primjenjiva, ostvarene značajke ROC trebale bi biti približno jednake i za smetnju prema K- i za smetnju prema Paretovoj razdiobi.

Rezultati simulacije za slučaj korelacije teksture (korijena radarskog presjeka) s $N_\rho = 1$ i $N_\rho = 16$ susjednih radijalnih ćelija prikazani su slikama 5.18 i 5.19 za scenarij smetnje amplitudne K-razdiobe (slika 5.18) i amplitudne Paretove razdiobe (slika 5.19). Vrijednosti parametara razdioba prikazani su (i istaknuti masnim slovima) u tablici 5.1, vidi također i tablicu 5.2, a korelacija je dana koeficijentom prema (5.41). Ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$ i vjerojatnosti detekcije $\hat{P}_D$ uspoređene su s dizajniranim vrijednostima, za metodu radijalne mreže (primjenom maksimizacije očekivanja u svrhu maksimiziranja vjerodostojnosti, označene s EM) te za referentne metode $[\text{zlog(z)}]^{(K)}$ i $[\text{zlog(z)}]^{(P)}$. Rezultati prikazani slikama 5.18 i 5.19 temelje se na srednjoj vrijednosti $M = 100$ realizacija za svaku točku dizajnirane vjerojatnosti lažne detekcije (za svaku realizaciju i svaku točku, računaju se pragovi detekcije prema koraku K5 te vjerojatnosti detekcije prema koraku K6), uz $N = 1024$ uzoraka smetnje te, za radijalnu mrežu, estimacijom u logaritamskoj domeni. Rezultati pokazuju da u scenariju Paretove razdiobe postoje značajna odstupanja ostvarenih značajki ROC primjenom parametarske metode $[\text{zlog(z)}]^{(P)}$, što je posebno izraženo pri korelaciji $N_\rho = 16$ susjednih radijalnih ćelija razlučivosti. Također se, za obje razdiobe, koreliranost teksture za N_ρ ćelija manifestira kroz povećanje ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije, a time i kroz povećanje ostvarene vjerojatnosti

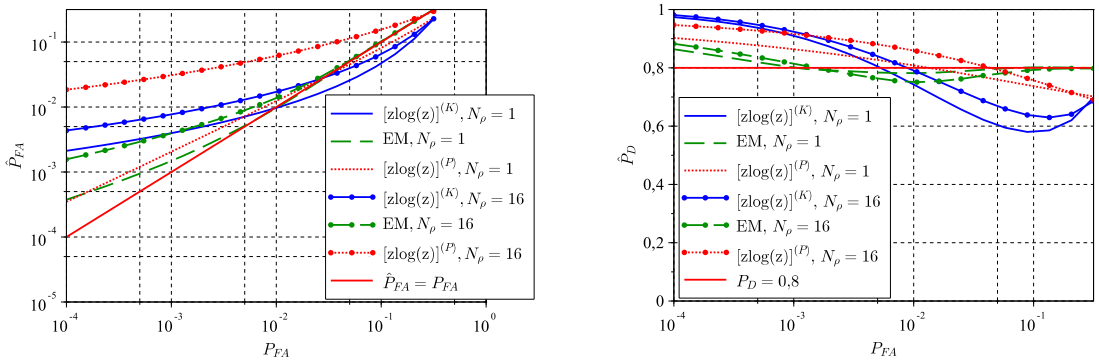
detekcije. U sažetku, metodom se radijalnih mreža EM za obje razdiobe postiže dobro slaganje (s dizajniranim vrijednostima) ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije u praktičnom opsegu $P_{FA} \geq 10^{-3}$. Posljedično se i ostvarene vjerojatnosti detekcije ne razlikuju bitno od dizajniranih. Ovaj je rezultat u skladu s hipotezama H1 i H2, postavljenim na početku ovog poglavlja (stranica 202). U kontekstu značajki ROC, hipotezom se H1 tvrdi da značajke ROC ostvarene metodom radijalne mreže EM ne odstupaju značajnije od onih ostvarenih parametarskom estimacijom [zlog(z)] u scenariju evaluacije parametara pod hipotezom ispravnog modela smetnje. Hipotezom se H2 tvrdi da značajke ROC ostvarene metodom radijalne mreže EM bolje pristaju dizajniranim vrijednostima nego one ostvarene parametarskom metodom [zlog(z)] u scenariju evaluacije parametara pod hipotezom pogrešnog modela smetnje.



(a) Ostvarena vjerojatnost lažne detekcije.

(b) Ostvarena vjerojatnost detekcije.

Slika 5.18. Operativne karakteristike prijemnika za K-razdiobu smetnje. Sve metode primjenjuju $N = 1024$ uzoraka i korelaciju teksture s $N_\rho = 1$ i $N_\rho = 16$ susjednih radijalnih ćelija razlučivosti. Metoda radijalne mreže EM s $m = 4$ komponente primjenjuje metodu maksimizacije vjerodostojnosti u logaritamskoj domeni za estimaciju vrijednosti parametara mreže. Metoda označena sa $[\text{zlog(z)}]^{(K)}$ estimira vrijednosti parametara smetnje prema apriornoj K-razdiobi te se zbog toga smatra prilagođenom stvarnoj smetnji. Metoda označena sa $[\text{zlog(z)}]^{(P)}$ je scenarij kada apriorna razdioba ne odgovara stvarnoj, jer metoda primjenjuje apriornu Paretovu razdiobu za estimaciju vrijednosti parametara smetnje. Dok je s $\hat{P}_{FA} = P_{FA}$ označena idealna ovisnost ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije o dizajniranoj, s $\hat{P}_D = 0{,}8$ je označena idealna ovisnost vjerojatnosti detekcije.



(a) Ostvarena vjerojatnost lažne detekcije.

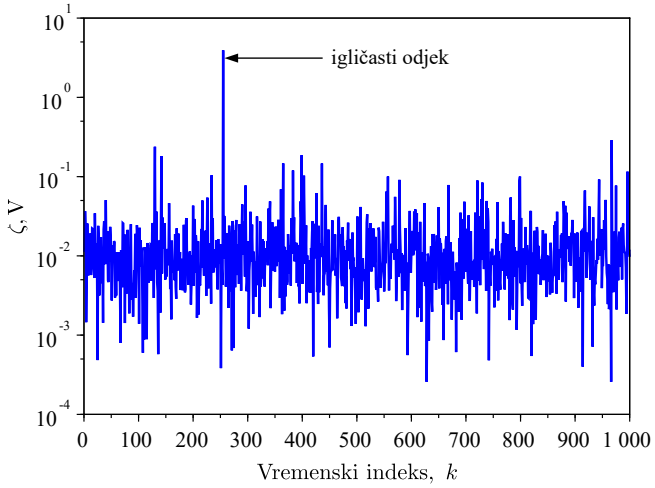
(b) Ostvarena vjerojatnost detekcije.

Slika 5.19. Operativne karakteristike prijemnika za Paretovu razdiobu smetnje. Sve metode primjenjuju $N = 1024$ uzoraka i korelaciju teksture s $N_\rho = 1$ i $N_\rho = 16$ susjednih radijalnih ćelija razlučivosti. Metoda radijalne mreže EM s $m = 4$ komponente primjenjuje metodu maksimizacije vjerodostojnosti u logaritamskoj domeni za estimaciju vrijednosti parametara mreže. Metoda označena sa $[\text{zlog(z)}]^{(P)}$ estimira vrijednosti parametara smetnje prema apriornoj Paretovoj razdiobi te se zbog toga smatra prilagođenom stvarnoj smetnji. Metoda označena sa $[\text{zlog(z)}]^{(K)}$ je scenarij kada apriorna razdioba ne odgovara stvarnoj, jer metoda primjenjuje apriornu K-razdiobu za estimaciju vrijednosti parametara smetnje. Dok je s $\hat{P}_{FA} = P_{FA}$ označena idealna ovisnost ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije o dizajniranoj, s $\hat{P}_D = 0{,}8$ je označena idealna ovisnost vjerojatnosti detekcije.

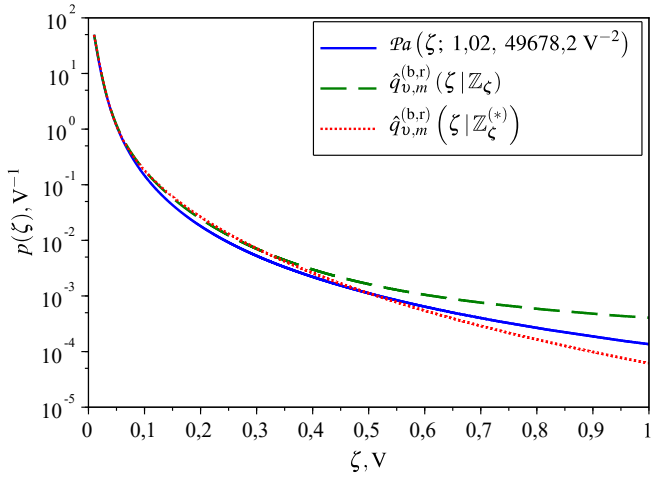
Neslaganje rezultata referentne metode $[\text{zlog(z)}]^{(P)}$ (u odnosu na dizajnirane vrijednosti, vidi sliku 5.19) u scenariju Paretove razdiobe može se objasniti vrijednošću parametra oblika koja je vrlo blizu 1 (vidi tablicu 5.1 i vrijednosti istaknute masnim slovima), što je granica valjanosti ove metode estimacije. Za točniju estimaciju, potreban je veći broj uzoraka, npr. za $N = 1024$ uzoraka, estimirana vrijednost iznosi $\hat{\nu}^{(P)} = 1{,}301$, za $N = 4096$, $\hat{\nu}^{(P)} = 1{,}245$, za $N = 16384$, $\hat{\nu}^{(P)} = 1{,}201$, itd. Alternativno se vrijednost parametra oblika može točnije estimirati primjenom metode frakcionalnih momenata [194], numeričkim traženjem vrijednosti $\hat{\nu}^{(P)}$ koja zadovoljava (3.47) i (3.48). Tako npr. za broj uzoraka $N = 1024$, referentna metoda $[\text{zlog(z)}]^{(P)}$ rezultira estimacijom $\hat{\nu}^{(P)} = 1{,}301$, a metoda frakcionalnih momenata estimacijom $\hat{\nu}^{(P)} = 1{,}055$. Međutim, zbog visoke računalne složenosti, stvarnovremenska primjena metode nije lako ostvariva, pa je stoga van fokusa ovog rada.

Zbog pojave izrazitog igličastog odjeka, kako je ilustrirano slikom 5.20, može se desiti da za dizajniranu vjerojatnost lažne detekcije estimirana vrijednost praga detekcije $\hat{Z}_{\upsilon,m}$ prijeđe dinamički opseg prijemnika. U partikularnom primjeru, za dizajniranu vjerojatnost lažne detekcije $P_{FA} = 10^{-4}$, estimirana vrijednost praga detekcije iznosi $\hat{Z}_{\upsilon,m} \approx 21$ V, rezultirajući s (kada bi to dinamički opseg prijemnika dozvolio), ostvarenom vjerojatnošću lažne detekcije $\hat{P}_{FA} \approx 10^{-7}$. Pri tome su vrijednosti parametara mreže s $m = 4$ komponente estimirane u logaritamskoj domeni primjenom $N = 1024$ uzoraka. Jedan od načina ublažavanja utjecaja (nekoliko izoliranih) igličastih odjeka je cenzuriranje N_C najvećih vrijednosti unutar

skupa uzoraka. Tako je potpuno uređeni skup $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)}$ nakon cenzure, nastao razvrstavanjem elemenata izvornog skupa $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}$ po veličini, jednak $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)} = (\zeta_1 \leq \cdots \leq \zeta_{N-N_C}, N_C \geq 0)$. Djelovanje cenzure ilustrirano je slikom 5.21. Vidljivo je da estimacija nakon cenzure s parametrom $N_C = 1$, označena kao $\hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\left(\zeta \,|\, \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)}\right)$, nešto točnije estimira rep stvarne razdiobe nego estimacija $\hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\left(\zeta \,|\, \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}\right)$ prije cenzure, iako su kvadrirane Hellingerove udaljenosti u oba slučaja približno jednake (prije cenzuriranja $d_H^2\left(\mathcal{P}a\left(\cdot; 1{,}02,\, 49678{,}2\ \mathrm{V}^{-2}\right), \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\left(\zeta \,|\, \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}\right)\right) = 0{,}0021$, a nakon $d_H^2\left(\mathcal{P}a\left(\cdot; 1{,}02,\, 49678{,}2\ \mathrm{V}^{-2}\right), \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\left(\zeta \,|\, \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)}\right)\right) = 0{,}0022$). Estimirana vrijednost praga detekcije nakon cenzuriranja iznosi $\hat{Z}_{\upsilon,m} = 0{,}6$ V, rezultirajući ostvarenom vjerojatnošću lažne detekcije $\hat{P}_{FA} = 1{,}9 \times 10^{-4}$.



Slika 5.20. Ilustracija pojave izoliranog igličastog odjeka pri vremenskom indeksu 255. Pri tome je $\zeta \sim \mathcal{P}a\left(\cdot; 1{,}02,\, 49678{,}2\ \mathrm{V}^{-2}\right)$.



Slika 5.21. Ilustracija utjecaja cenzure na estimaciju amplitudne razdiobe. Estimacija repa Paretove razdiobe (puna linija) donekle je točnija nakon cenzure s parametrom $N_C = 1$ (točkasta linija), u odnosu na estimaciju prije cenzure (isprekidana linija). Estimacija je provedena radijalnom mrežom s $m = 4$ komponente, primjenom metode maksimizacije očekivanja u svrhu maksimiziranja vjerodostojnosti u logaritamskoj domeni, na temelju skupa od $N = 1024$ uzoraka.

Prethodni dio primjera, finaliziran slikama 5.18 i 5.19, ilustrira u osnovi statičke operativne karakteristike prijemnika. Pod statičkim se karakteristikama podrazumijeva, u ovisnosti o dizajniranoj vrijednosti vjerojatnosti lažne detekcije P_{FA}, srednja vrijednost (kroz M realizacija) ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA} = \langle \{P_{FA_i}, i = 1, \ldots, M\} \rangle$ te srednja vrijednost ostvarene vjerojatnosti detekcije $\hat{P}_D = \langle \{P_{D_i}, i = 1, \ldots, M\} \rangle$, pri čemu P_{FA_i} i P_{D_i} označavaju ostvarene vjerojatnosti detekcija u i-toj realizaciji. U nastavku je primjera ispitana primjenjivost metode radijalne mreže EM u kontekstu dinamičkih operativnih karakteristika prijemnika (izraženih kroz vjerojatnost zadržavanja staze praćenog cilja P_{TT}, preferencijalno u ovisnosti o omjeru $\mathcal{R}$, snazi signala prema snazi smetnje), testiranjem hipoteza H1 i H2 (postavljenih u uvodnom dijelu ovog poglavlja na stranici 202), a koje se u kontekstu metode radijalne mreže EM mogu preformulirati kao:

H1$^{(*)}$ vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena metodom radijalne mreže EM nije značajno lošija od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom ispravnog modela smetnje

H2$^{(*)}$ vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena metodom radijalne mreže EM značajno je bolja od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom pogrešnog modela smetnje.

Pri tome se testiranje hipoteza provodi metodologijom ocjene statističkih značajki vjerojatnosti zadržavanja staze P_{TT}, kako je opisano u odjeljku 4.5 i ilustrirano slikom 4.10. Parametri simulacije prikazani su tablicom 5.4 (vidi također i opis dinamičkog modela gibanja cilja, dan primjerom u odjeljku 2.4).

Tablica 5.4. Parametri simulacije za testiranje primjenjivosti radijalne mreže EM u segmentu nekoherentne detekcije pri dinamičkim uvjetima.

Parametar	Vrijednost	Opis
–	NED	Koordinatni sustav za dinamički model gibanja cilja te za estimaciju
t_∞	200 s	Trajanje staze
–	20 s	Trajanje manevra
t_1	60 s	Početak manevra
Q_x	0,3 $\mathrm{m^2\,s^{-3}}$	Kovarijanca procesnog šuma u segmentu linearnog gibanja, jednaka za koordinatu x (sjever) i za koordinatu y (istok), tako da je $\boldsymbol{Q}_x = Q_x \boldsymbol{I}_2$, vidi odjeljak 2.1.2
$\bar{\omega}$	157 $\mathrm{mrad\,s^{-1}}$	Srednja kutna brzina okreta u segmentu manevra, vidi odjeljak 2.1.3 (stranica 24) te primjer u odjeljku 2.4 (stranica 77)

Tablica 5.4. (nastavak).

Parametar	Vrijednost	Opis
$\sigma^2_{\dot{\mathbf{x}}}$	0,6 $\mathrm{m^2\,s^{-3}}$	Procesni šum obodne brzine u segmentu manevra, vidi odjeljak 2.1.3 (stranica 24)
σ^2_{ω}	0,0001 $\mathrm{rad^2\,s^{-3}}$	Procesni šum kutne brzine u segmentu manevra, vidi odjeljak 2.1.3 (stranica 24)
–	Drugokorijenski CKF	Estimator, vidi odjeljak 2.3.1 (stranica 38) te dodatak D.1
–	IMM	Okvir višemodelne estimacije, vidi odjeljak 2.3.3 (stranica 70)
$\lvert\mathbb{M}\rvert$	2	Broj modela u višemodelnoj estimaciji IMM
Q_x	0,3 $\mathrm{m^2\,s^{-3}}$	Kovarijanca procesnog šuma za linearni model gibanja u okviru višemodelne estimacije IMM, jednak za koordinatu x (sjever) i za koordinatu y (istok), tako da je $\boldsymbol{Q}_x = Q_x \boldsymbol{I}_2$, vidi odjeljak 2.1.2
τ_t, τ_n	20 s	Vrijeme korelacije tangencijalne i normalne komponente akceleracije za model krivocrtnog gibanja (model manevra) u okviru višemodelne estimacije IMM, vidi odjeljak 2.1.3 (stranica 25)
σ_t^2, σ_n^2	8,3 $\mathrm{m^2\,s^{-4}}$	Procesni šum tangencijalne i normalne komponente akceleracije za model krivocrtnog gibanja (model manevra) u okviru višemodelne estimacije IMM, vidi odjeljak 2.1.3 (stranica 25)
P_{11}	0,95	Vjerojatnost zadržavanja u modu linearnog gibanja, vidi (2.335) i (2.336)
P_{22}	0,90	Vjerojatnost zadržavanja u modu manevrirajućeg gibanja, vidi (2.335) i (2.336)
–	ST-VDA	Metoda pridruživanja, vidi odjeljak 4.3.2 te primjer u odjeljku 4.5 (stranica 181)
$P(D_{k+1}\,\vert\,D_k)$	0,95	Prijelazna vjerojatnost primjetljivog cilja, vidi primjer u odjeljku 4.5 (stranica 181)
$P(D_{k+1}\,\vert,\bar{D}_k)$	0,1	Prijelazna vjerojatnost neprimjetljivog cilja u primjetljiv cilj, vidi primjer u odjeljku 4.5 (stranica 181)
$\mathcal{D}_0$	0,50	Početna vjerojatnost primjetljivosti
γ	16	Veličina volumena valjanosti
–	Polarni	Koordinatni sustav mjerenja, vidi odjeljak 2.2

Tablica 5.4. (nastavak).

Parametar	Vrijednost	Opis
T	2 s	Vrijeme između dviju sukcesivnih opservacija
$\mathrm{d}r$	25 m	Radijalna razlučivost senzora
$\mathrm{d}\varphi$	4°	Azimutna razlučivost senzora
Δr	25 m	Radijalna razlučivost polarnog sustava
$\Delta\varphi$	1°	Azimutna razlučivost polarnog sustava
P_D	0,80	Dizajnirana vjerojatnost detekcije
P_{FA}	$10^{-4} - 2\times10^{-1}$	Dizajnirana vjerojatnost lažne detekcije tako da je $\mathbb{P}_{FA} = \{10^{-4}, 2\times10^{-4}, 5\times10^{-4}, 10^{-3}, 2\times10^{-3}, 5\times10^{-3}, 10^{-2}, 2\times10^{-2}, 5\times10^{-2}, 10^{-1}, 2\times10^{-1}\}$
N_M	50	Broj segmenata, vidi primjer u odjeljku 4.5 (stranica 184)
M	50	Broj realizacija staze po segmentu, vidi primjer u odjeljku 4.5 (stranica 184)
$p_{\zeta}^{(\mathrm{b})}$	$\mathcal{K}$	Referentna K-razdioba (3.33)
	$\mathcal{P}a$	Referentna Paretova razdioba (3.44)
$\nu^{(K)}$	1,0	Parametar oblika referentne K-razdiobe
$\beta^{(K)}$	0,0062 V^2	Parametar skaliranja referentne K-razdiobe
$\nu^{(P)}$	1,02	Parametar oblika referentne Paretove razdiobe
$\beta^{(P)}$	49678,2 V^{-2}	Parametar skaliranja referentne Paretove razdiobe
N	256	Broj uzoraka smetnje u okolici praćenog cilja
N_A	4	Broj uzastopnih rotacija antene za integraciju skupa referentnih ćelija (5.43)
N_ρ	1	Broj koreliranih susjednih radijalnih ćelija razlučivosti, vidi (5.41)
N_C	2	Parametar cenzuriranja
m	8	Broj komponenti radijalne mreže
–	200	Maksimalni broj iteracija za metodu maksimiziranja vjerodostojnosti (koraci (5.20) – (5.23))
–	0,001	Kriterij konvergencije vjerodostojnosti (5.24) u metodi EM

Testiranje hipoteze $\mathrm{H1}^{(*)}$ provodi se sljedećim koracima, $\forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$:

K1 evaluacija parametara smetnje pod hipotezom ispravnog modela (apriorni model jednak je stvarnoj razdiobi) za referentnu parametarsku metodu (vidi korak K2 na stranici 226), što znači da su pragovi detekcije, određeni rješavanjem (5.45) po $Z^{(K)}$ i $Z^{(P)}$, ovisno o referentnoj razdiobi $p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}$, konstantni kroz cijelo vrijeme trajanja staze i vrijedi da je $\hat{P}_{FA} = P_{FA}$

K2 određivanje snage signala d za Swerlingov model br. 1 [73] i parametre dizajna P_{FA} i P_D (izražene implicitno kroz $Z^{(K)}$, odnosno $Z^{(P)}$) prema (5.46), iz čega, prema (5.47), proizlazi omjer snage signala prema snazi smetnje $\mathcal{R}$ te vrijedi da je $\hat{P}_D = P_D$

K2a za svaki segment, određivanje kriterijske funkcije $C_i(P_{TT})^{(\mathrm{REF})}, i = 1, \ldots, N_M$ prema (4.227), primjenom Viterbijeve metode pridruživanja ilustrirane slikom 5.22, pri čemu je za svaku točku staze (vremenskog indeksa k), skup mjerenja označen sa $\mathbb{Z}_k^{(*)} = \left\{ \boldsymbol{z}_{k,i}, \zeta_{k,i}, i = 1, \ldots, n_k \right\}$ i rezultat je provedbe detekcije nad skupom mjerenja $\mathbb{Z}_k = \left\{ \boldsymbol{z}_{k,i}, \zeta_{k,i}, i = 1, \ldots, \mathcal{V}_k / V_r \right\}$ unutar volumena valjanosti $\mathcal{V}_k$, vidi (4.223) i primjer u odjeljku 4.5 (stranica 183)

K3 estimacija praga detekcije $\hat{Z}_{\upsilon,m}$ radijalnom mrežom i metodom maksimizacije vjerodostojnosti, implementacijom maksimizacije očekivanja (EM) u logaritamskoj domeni

K3a za svaku stazu od ukupno $N_M M$ realizacija

i. za svaku točku staze (vremenskog indeksa k), apriorna estimacija praga $\bar{Z}_{\upsilon,m,k} = \hat{Z}_{\upsilon,m,k-1}$ primjenom $N_A N$ uzoraka skupa amplituda odjeka $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k-N_A:k-1}$

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k-N_A:k-1} = \left\{ \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k-i} \setminus \mathbb{z}_{\boldsymbol{\zeta},k-i}, i = 1, \ldots, N_A \right\}, \mathbb{z}_{\boldsymbol{\zeta},\kappa} = \begin{cases} \emptyset, & \mathrm{i}^{(*)} = -1, 0 \\ \zeta_{\kappa,\mathrm{i}^{(*)}}, & \mathrm{i}^{(*)} > 0 \end{cases} \tag{5.53}$$

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k} = \left\{ \zeta_{k,i}, i = 1, \ldots, \mu_k \mathcal{V}_k / V_r, \mu_k > 0 \right\} \tag{5.54}$$

uz cenzuru s parametrom N_C, pri čemu implementaciju radijalne mreže u segmentu detekcije i Viterbijeve metode pridruživanja u okviru višemodelne estimacije IMM ilustrira slika 5.23 i gdje $\kappa, \mathrm{i}^{(*)}$ označava indeks najvjerodostojnijeg čvora za vremenski indeks κ, vidi odjeljak 4.3.2 te primjer u odjeljku 4.5, uz vrijednost parametra multiplikacije μ_k tako da je $\left| \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k} \setminus \mathbb{z}_{\boldsymbol{\zeta},k} \right| = N$

ii. priprema za sljedeći korak (vremenskog indeksa $k+1$), tako da je za trenutak opservacije t_k, aposteriorna estimacija praga detekcije jednaka apriornoj, $\hat{Z}_{\upsilon,m,k} = \bar{Z}_{\upsilon,m,k}$

K3b za svaki segment, određivanje kriterijske funkcije $C_i(P_{TT})^{(\mathrm{EM})}, i = 1, \ldots, N_M$ prema (4.227)

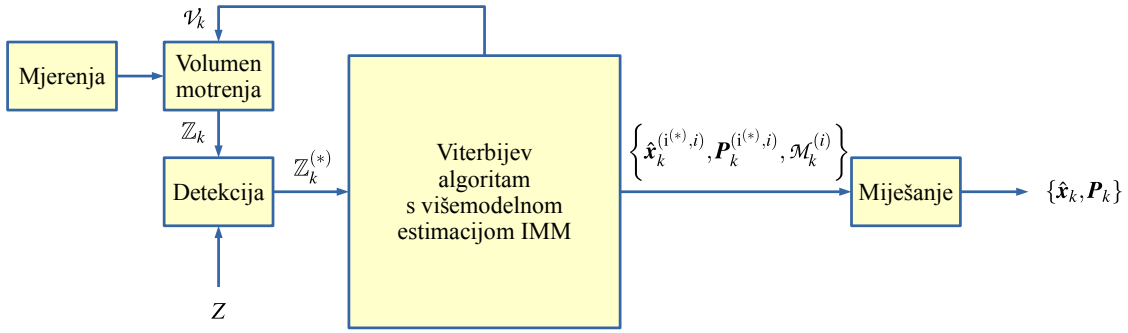
K4 testiranje hipoteze H1$^{(*)}$ da vjerojatnost zadržavanja staze primjenom metode radijalne mreže EM nije značajno lošija od one ostvarene referentnom parametarskom metodom,

$$\mathcal{T}(P_{TT}) = \frac{\overline{\Delta J}(P_{TT})}{\sigma_{\overline{\Delta J}(P_{TT})}} = \frac{\frac{1}{N_M}\sum_{i=1}^{N_M}\Delta C_i(P_{TT})}{\sqrt{\frac{1}{N_M^2}\sum_{i=1}^{N_M}\left(\Delta C_i(P_{TT}) - \overline{\Delta J}(P_{TT})\right)^2}} \tag{4.228}$$

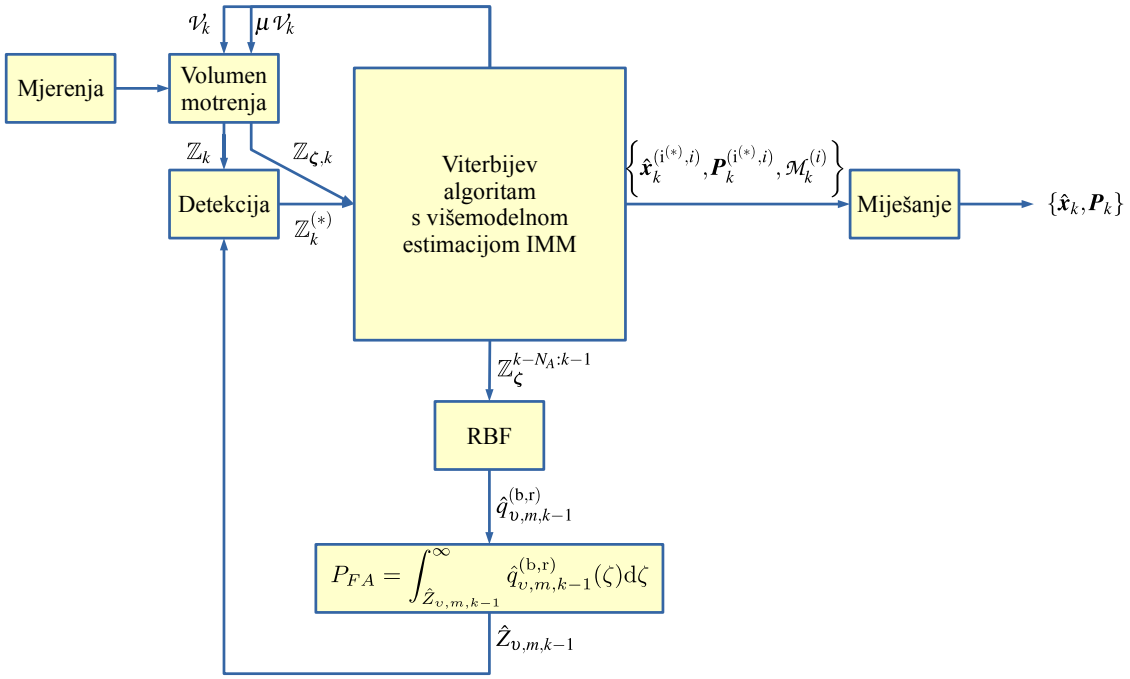
uz

$$\Delta C(P_{TT}) = C(P_{TT})^{(\mathrm{REF})} - C(P_{TT})^{(\mathrm{EM})}. \tag{5.55}$$

Hipoteza H1$^{(*)}$ je prihvaćena ako testna statistika (4.228) nije veća od granice značajnosti 1,65 (pouzdanost testa 95 % i Gaussova razdioba veličine (5.55), vidi dodatak C.1).



Slika 5.22. Parametarska metoda u segmentu detekcije i Viterbijeve metode pridruživanja s višemodelnom estimacijom IMM. Vidi također i primjer u odjeljku 4.5.

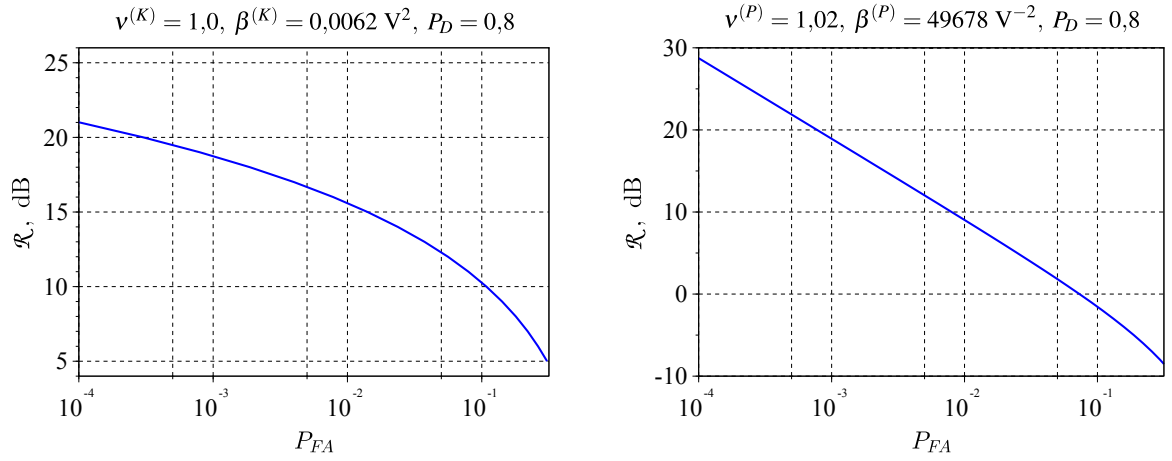


Slika 5.23. Implementacija radijalne mreže u segmentu detekcije i Viterbijeve metode pridruživanja s višemodelnom estimacijom IMM. Vidi također i primjer u odjeljku 4.5.

Premda je snaga odjeka cilja određena rješavanjem (5.46) i (5.47), u simulaciji se radi jednostavnosti primjenjuje Rayleighov model razdiobe

$$p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\zeta \,|\, \eta) = \mathscr{R}(\zeta; \eta + d) = \frac{\zeta}{\eta + d} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2(\eta + d)}\right), \quad \eta > 0 \wedge \zeta, d \geq 0, \qquad (4.202)$$

što je opravdano za raspon vjerojatnosti lažnih detekcija od 10^{-4} do 10^{-1}, čemu odgovara 10 dB $\leq \mathcal{R}^{(K)} \leq$ 21 dB za K-, odnosno $-1{,}5$ dB $\leq \mathcal{R}^{(P)} \leq$ 29 dB za Paretovu razdiobu, uz parametar dizajna $P_D = 0{,}8$, vidi također i sliku 4.13 te sliku 5.24.

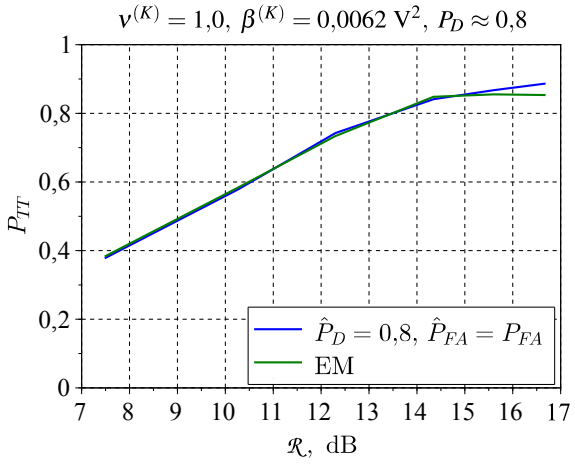


(a) K-razdioba.

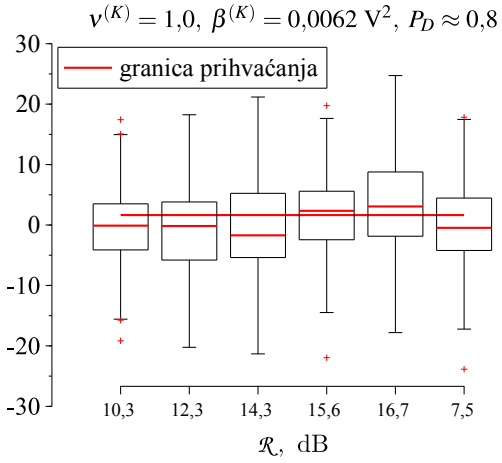
(b) Paretova razdioba.

Slika 5.24. Ovisnost omjera snage signala prema snazi smetnje $\mathcal{R}$ o dizajniranoj vjerojatnosti lažne detekcije P_{FA} za K- i Paretovu razdiobu. Pri tome je vrijednost praga detekcije $Z^{(K)}$ za K-, odnosno $Z^{(P)}$ za Paretovu razdiobu, uvijek takva tako da je vjerojatnost detekcije $P_D = 0{,}8$.

Rezultati testiranja hipoteze $\mathrm{H1}^{(*)}$ prikazani su slikom 5.25 za K-, odnosno slikom 5.26 za Paretovu razdiobu. Prema slikama 5.25b i 5.26b, metoda radijalne mreže EM nije značajno lošija od referentne metode (apriorni model odgovara stvarnoj razdiobi smetnje), osim za visoke omjere snage signala prema smetnji ($\mathcal{R} \gtrsim 15$ dB) i K-razdiobu.

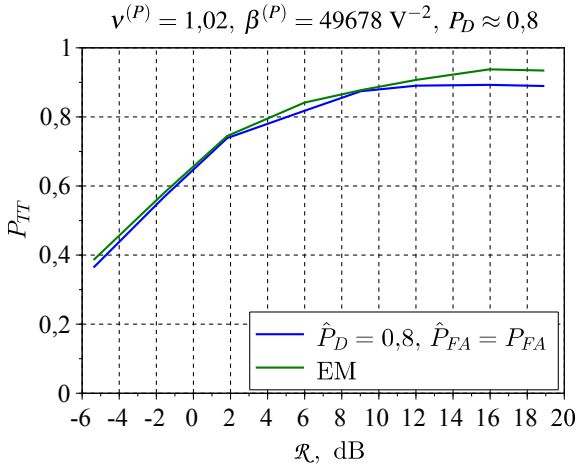


(a) Usporedba vjerojatnosti.

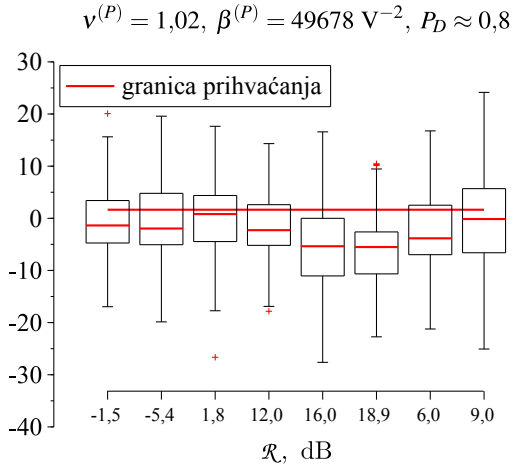


(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.25. Značajnost primjene metode maksimiziranja vjerodostojnosti implementacijom maksimizacije očekivanja (EM) u procesu nekoherentne detekcije, izražene usporedbom s vjerojatnošću zadržavanja staze manevrirajućeg cilja uz apriorno poznate parametre K-razdiobe (tako da je $\hat{P}_D = 0{,}8$ i $\hat{P}_{FA} = P_{FA}$). Pri estimaciji amplitudne razdiobe smetnje metodom EM primijenjene su $N_A = 4$ grupe po $N = 256$ uzoraka, pri čemu se pretpostavlja nepostojanje korelacije teksture između susjednih radijalnih ćelija razlučivosti. Parametri mreže RBF s $m = 8$ komponenti estimirani su u logaritamskoj domeni, primjenom cenzure s parametrom $N_C = 2$. Snaga signala fluktuira prema Swerlingovom modelu br. 1 tako da je, uz K-razdiobu smetnje i dizajniranu vrijednost P_{FA}, stvarna vjerojatnost detekcije uvijek $P_D \approx 0{,}8$ (zbog aproksimacije stvarne razdiobe Rayleighovom).



(a) Usporedba vjerojatnosti.



(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.26. Značajnost primjene metode maksimiziranja vjerodostojnosti implementacijom maksimizacije očekivanja (EM) u procesu nekoherentne detekcije, izražene usporedbom s vjerojatnošću zadržavanja staze manevrirajućeg cilja uz apriorno poznate parametre Paretove razdiobe (tako da je $\hat{P}_D = 0{,}8$ i $\hat{P}_{FA} = P_{FA}$). Pri estimaciji amplitudne razdiobe smetnje metodom EM primijenjene su $N_A = 4$ grupe po $N = 256$ uzoraka, pri čemu se pretpostavlja nepostojanje korelacije teksture između susjednih radijalnih ćelija razlučivosti. Parametri mreže RBF s $m = 8$ komponenti estimirani su u logaritamskoj domeni, primjenom cenzure s parametrom $N_C = 2$. Snaga signala fluktuira prema Swerlingovom modelu br. 1 tako da je, uz Paretovu razdiobu smetnje i dizajniranu vrijednost P_{FA}, stvarna vjerojatnost detekcije uvijek $P_D \approx 0{,}8$ (zbog aproksimacije stvarne razdiobe Rayleighovom).

Testiranje hipoteze H2$^{(*)}$ provodi se sljedećim koracima, $\forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$:

K1 određivanje snage signala d, tako da su pod hipotezom ispravnog modela smetnje uvijek zadovoljeni uvjeti $\hat{P}_{FA} = P_{FA}$ i $\hat{P}_D = P_D$ kada su za detekciju primijenjeni pragovi $Z^{(K)}$ za K-, odnosno $Z^{(P)}$ za Paretovu razdiobu, pri čemu su $Z^{(K)}$ i $Z^{(P)}$ određeni korakom K1 na stranici 237

K2 evaluacija parametara smetnje referentnom parametarskom metodom [zlog(z)], pod hipotezom pogrešnog modela (apriorni model ne odgovara stvarnoj razdiobi), što znači da je

K2a za svaku stazu od ukupno $N_M M$ realizacija

i. za svaku točku staze, prag detekcije $\hat{Z}^{(K)}$ estimiran prema (5.50) pod hipotezom K-razdiobe iako je stvarna razdioba Paretova, a $\hat{Z}^{(P)}$ estimiran prema (5.51) pod hipotezom Paretove razdiobe premda je stvarna razdioba K

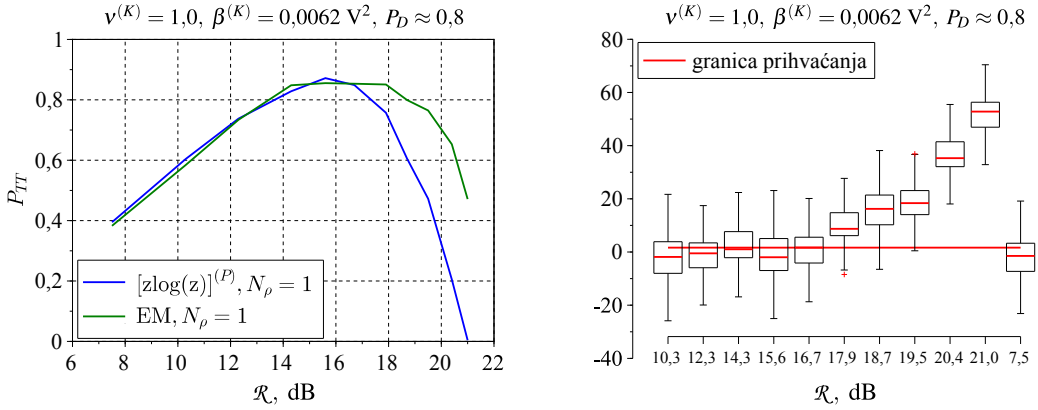
K2b za svaki segment, određivanje kriterijske funkcije $C_i(P_{TT})^{(\mathrm{REF})}, i = 1, \ldots, N_M$ prema (4.227)

K3 estimacija praga detekcije $\hat{Z}_{v,m}$ metodom radijalne mreže EM te, za svaki segment, određivanje kriterijske funkcije $C_i(P_{TT})^{(\mathrm{EM})}, i = 1, \ldots, N_M$ kao i u koracima K3 i K3b u proceduri testiranja hipoteze H1$^{(*)}$

K4 testiranje hipoteze H2$^{(*)}$ prema (4.228) da je vjerojatnost zadržavanja staze primjenom metode radijalne mreže EM značajno bolja od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara smetnje pod hipotezom pogrešnog modela.

Hipoteza H2$^{(*)}$ je prihvaćena ako je testna statistika (4.228) veća od 1,65 čemu odgovara pouzdanost testa 95 % pod hipotezom Gaussove razdiobe veličine $\Delta C(P_{TT}) = C(P_{TT})^{(\mathrm{EM})} - C(P_{TT})^{(\mathrm{REF})}$.

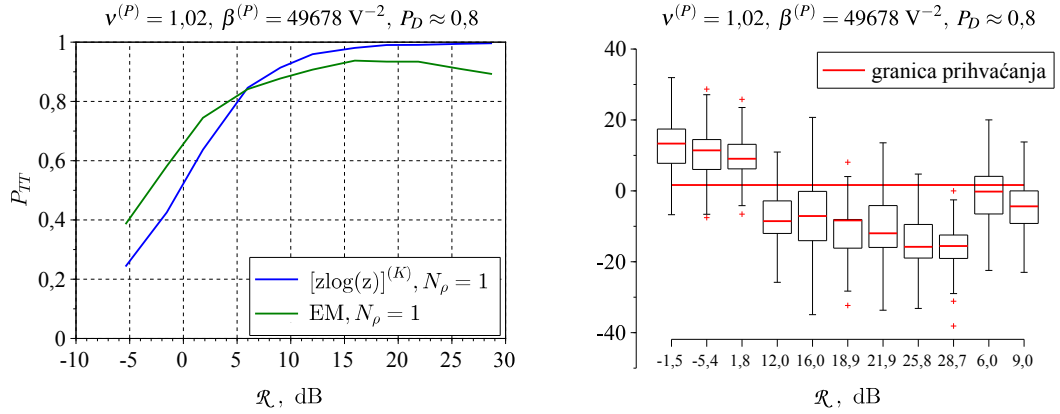
Rezultati testiranja hipoteze H2$^{(*)}$ u scenariju K-razdiobe, slika 5.27, pokazuju da je metoda radijalne mreže EM značajno bolja (u smislu veće vjerojatnosti zadržavanja staze P_{TT}) za više vrijednosti omjera snaga prema smetnji ($\mathcal{R} \gtrsim 16$ dB). Za ostale vrijednosti, boljitak nije značajan. Nasuprot tome, u scenariju Paretove razdiobe, metoda radijalne mreže EM značajno je bolja pri nižim vrijednostima omjera snage signala prema snazi smetnje ($\mathcal{R} \lesssim 5$ dB), kako je to ilustrirano slikom 5.28.



(a) Usporedba vjerojatnosti.

(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.27. Dinamičke operativne karakteristike prijemnika izražene kroz vjerojatnost zadržavanja staze manevrirajućeg cilja u smetnji K-razdiobe. U određivanju amplitudne razdiobe smetnje, primijenjene su $N_A = 4$ grupe po $N = 256$ uzoraka, pri čemu se pretpostavlja nepostojanje korelacije teksture između susjednih radijalnih ćelija razlučivosti, odnosno $N_\rho = 1$. Parametri mreže RBF s $m = 8$ komponenti estimirani su metodom maksimiziranja vjerodostojnosti, implementacijom maksimizacije očekivanja (EM) u logaritamskoj domeni, pri čemu je primijenjena cenzura s parametrom $N_C = 2$. Metoda $[\mathrm{zlog(z)}]^{(P)}$ predstavlja scenarij kada apriorna razdioba ne odgovara stvarnoj jer je prilagođena Paretovoj (umjesto K-) razdiobi. Snaga signala fluktuira prema Swerlingovom modelu br. 1 tako da je, uz K-razdiobu smetnje i dizajniranu vrijednost P_{FA}, stvarna vjerojatnost detekcije uvijek $P_D \approx 0{,}8$ (zbog aproksimacije stvarne razdiobe Rayleighovom).

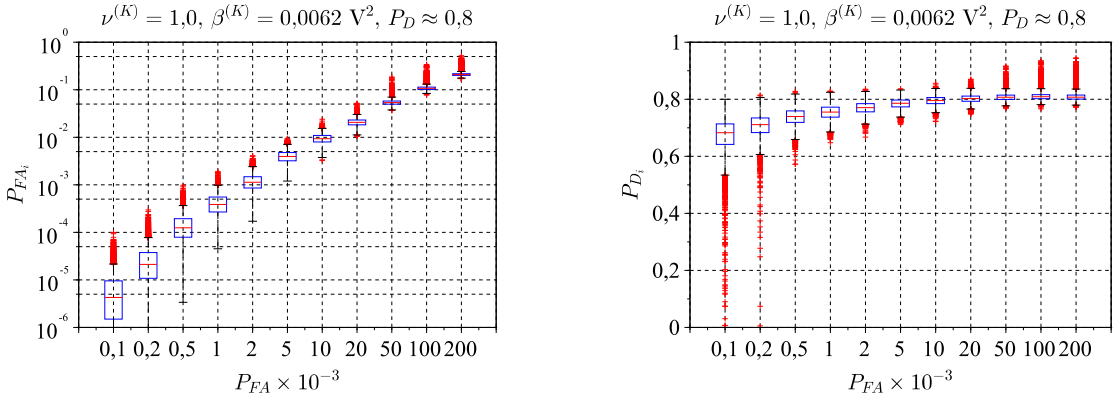


(a) Usporedba vjerojatnosti.

(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.28. Dinamičke operativne karakteristike prijemnika izražene kroz vjerojatnost zadržavanja staze manevrirajućeg cilja u smetnji Paretove razdiobe. U određivanju amplitudne razdiobe smetnje, primijenjene su $N_A = 4$ grupe po $N = 256$ uzoraka, pri čemu se pretpostavlja nepostojanje korelacije teksture između susjednih radijalnih ćelija razlučivosti, odnosno $N_\rho = 1$. Parametri mreže RBF s $m = 8$ komponenti estimirani su metodom maksimiziranja vjerodostojnosti, implementacijom maksimizacije očekivanja (EM) u logaritamskoj domeni. Metoda $[\mathrm{zlog(z)}]^{(K)}$ predstavlja scenarij kada apriorna razdioba ne odgovara stvarnoj jer je prilagođena K- (umjesto Paretovoj) razdiobi. Obje metode primjenjuju cenzuriranje s parametrom $N_C = 2$. Snaga signala fluktuira prema Swerlingovom modelu br. 1 tako da je, uz Paretovu razdiobu smetnje i dizajniranu vrijednost P_{FA}, stvarna vjerojatnost detekcije uvijek $P_D \approx 0{,}8$ (zbog aproksimacije stvarne razdiobe Rayleighovom).

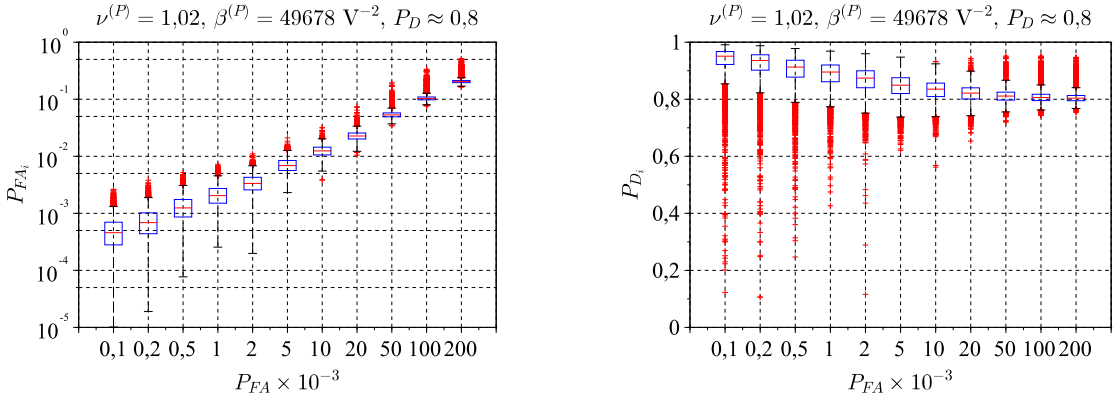
Pad vjerojatnosti zadržavanja staze P_{TT} za visoke omjere $\mathcal{R}$, vidi slike 5.27a i 5.28a, objašnjava se velikom varijacijom trenutnih vjerojatnosti lažne detekcije, posljedično i vjerojatnosti detekcije (pojam trenutna vjerojatnost ovdje označava vjerojatnost za partikularnu točku staze). Naime, analiza tijeka vrijednosti praga detekcije $\hat{Z}_{\upsilon,m}$ (za metodu radijalne mreže EM) kroz cjelokupnu duljinu trajanja staze te za najmanje 2.500 do najviše 25.000 stohastičkih realizacija ($N_M = 50$ segmenata, svaki s $M = 50$ realizacija, uz maksimalnu duljinu trajanja staze t_∞/T), rezultira skupom ostvarenih vjerojatnosti detekcija $\left\{P_{FA_i}, i = 1, \ldots, \leq \frac{t_\infty}{T} N_M M\right\}$ i $\left\{P_{D_i}, i = 1, \ldots, \leq \frac{t_\infty}{T} N_M M\right\}$. Kvartili Q_1, Q_2 i Q_3 skupa ostvarenih vjerojatnosti $\{P_{FA_i}\}$ i $\{P_{D_i}\}$ rezultiraju dinamičkom operativnom karakteristikom prijemnika za ovu partikularnu metodu (ST-VDA s primjenom radijalne mreže u segmentu nekoherentne detekcije), kako je, s razdiobom rezultata ostvarenih vjerojatnosti $\{P_{FA_i}\}$ i $\{P_{D_i}\}$, ilustrirano slikama 5.29 i 5.30. Tako je vidljivo da za npr. dizajniranu vjerojatnost $P_{FA} = 10^{-4}$ i smetnju prema K-razdiobi, medijan skupa vjerojatnosti lažne detekcije $\{P_{FA_i}\}$ iznosi $\mathrm{Q}_2^{(P_{FA})} \approx 5 \times 10^{-6}$, a trenutne vrijednosti pokazuju ekskurzije sve do 0,0001, što rezultira medijanom ostvarene vjerojatnosti $\mathrm{Q}_2^{(P_D)} \approx 0{,}7$ s ekskurzijama trenutnih vjerojatnosti sve do $P_{D_i} \approx 0$. Slično, za smetnju prema Paretovoj razdiobi i dizajniranu vjerojatnost lažne detekcije npr. $P_{FA} = 10^{-4}$, ostvarena vjerojatnost zadržavanja staze je $P_{TT} \approx 0{,}9$, premda je medijan ostvarene vjerojatnosti detekcije viši ($\mathrm{Q}_2^{(P_D)} \approx 0{,}95$). Trenutne vjerojatnosti detekcije pokazuju brojne ekskurzije sve do $P_{D_i} \approx 0{,}2$, kako je pokazano slikom 5.30b. Ovakve ekskurzije rezultat su teškog repa razdiobe ostvarenih vjerojatnosti i znatno povećavaju vjerojatnost opservacija bez detekcije odjeka cilja kroz nekoliko uzastopnih vremenskih okvira (okreta antene), što vodi preuranjenom završetku staze mehanizmom integrirane kvalitete praćenja, vidi odjeljak 4.3.2 te posebno primjer u odjeljku 4.5 i tablicu 4.4. Ekskurzije su najčešće prouzročene mehanizmom Viterbijevog pridruživanja kada metoda ukazuje da je odjek cilja smetnja (što vodi povećanom pragu detekcije za taj partikularni vremenski indeks), u sprezi s činjenicom da za tako niske vjerojatnosti lažne detekcije rijetko postoje mjerenja kojima mreža može rekonstruirati amplitudnu razdiobu u okolici (tako male) dizajnirane vjerojatnosti lažne detekcije. Stoga je zaključak ovoga primjera da je primjena radijalnih mreža u segmentu procesa nekoherentne detekcije opravdana u području dizajniranih vjerojatnosti lažne detekcije $P_{FA} \gtrsim 1/N$, pri čemu je s N označen broj uzoraka.



(a) Razdioba vjerojatnost lažne detekcije.

(b) Razdioba vjerojatnosti detekcije.

Slika 5.29. Dinamičke operativne karakteristike prijemnika za metodu EM, sastavnog dijela segmenta nekoherentne detekcije u metodi pridruživanja ST-VDA. Vrijednosti parametara mreže s $m = 4$ komponente određene su metodom maksimiziranja vjerodostojnosti, implementacijom maksimizacije očekivanja u logaritamskoj domeni i primjenom cenzuriranja s parametrom $N_C = 2$. Estimacija amplitudne K-razdiobe smetnje provodi se uzorcima iz $N_A = 4$ grupe po $N = 256$ uzoraka. Uz dizajniranu vjerojatnost lažne detekcije P_{FA}, dizajnirana vjerojatnost detekcije uvijek je $P_D \approx 0{,}8$ (zbog aproksimacije stvarne razdiobe Rayleighovom), a ostvarene su vjerojatnosti označene s $\hat{P}_{FA}$ i $\hat{P}_D$.



(a) Razdioba vjerojatnost lažne detekcije.

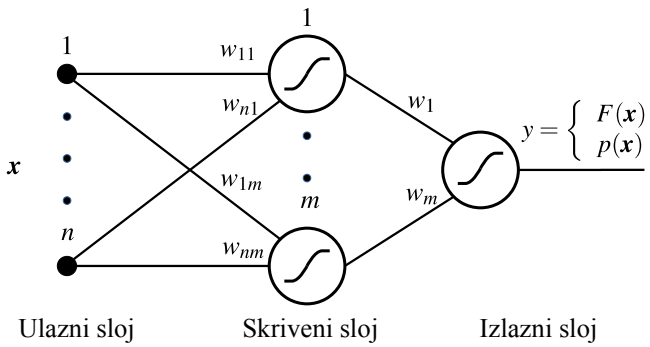
(b) Razdioba vjerojatnosti detekcije.

Slika 5.30. Dinamičke operativne karakteristike prijemnika za metodu EM, sastavnog dijela segmenta nekoherentne detekcije u metodi pridruživanja ST-VDA. Vrijednosti parametara mreže s $m = 4$ komponente određene su metodom maksimiziranja vjerodostojnosti, implementacijom maksimizacije očekivanja u logaritamskoj domeni i primjenom cenzuriranja s parametrom $N_C = 2$. Estimacija amplitudne Paretove razdiobe smetnje provodi se uzorcima iz $N_A = 4$ grupe po $N = 256$ uzoraka. Uz dizajniranu vjerojatnost lažne detekcije P_{FA}, dizajnirana vjerojatnost detekcije uvijek je $P_D \approx 0{,}8$ (zbog aproksimacije stvarne razdiobe Rayleighovom), a ostvarene su vjerojatnosti označene s $\hat{P}_{FA}$ i $\hat{P}_D$.

5.2. Implementacija acikličke slojevite mreže

Struktura acikličke slojevite mreže za estimaciju razdiobe i distribucije ulaznog vektora ilustrirana je slikom 5.31 i sastoji se od ulaznog sloja neurona, jednog ili više skrivenih slojeva

te nelinearnog izlaznog sloja. U ovom je odjeljku opisana implementacija nelinearnih metoda estimacije u procesu učenja acikličke slojevite mreže te njena implementacija u procesu pridruživanja. Primjena klasične metode učenja sa širenjem pogreške unazad [292] ograničena je brzinom te konvergencijom prema lokalnom minimumu. Neki od primjera poboljšanja njene učinkovitosti uključuju varijacije poput dodavanja gradijentnog spusta parametru strmine sigmoidalne funkcije [293], modifikaciju postojećeg gradijentnog člana estimacijom smjera minimuma kako bi se smanjio utjecaj oscilacija vrijednosti koeficijenata [294], adaptivne stope učenja, vidi npr. [295–297] te [298] za stohastičku optimizaciju gdje su stope za sve parametre neovisne i adaptiraju se na temelju derivacija u procesu gradijentne optimizacije. Određeni broj metoda učenja temelji se na minimiziranju srednje kvadratne greške, vidi npr. [299–302] te [303] gdje je predložena linearna metoda iskorištena kao temelj za učenje dvoslojne mreže primjenom analize osjetljivosti [304]. Dok se klasične gradijentne metode temelje na linearizaciji funkcije greške u okolici trenutne vrijednosti koeficijenata, metode drugog reda poput kvazi-Newtonove, Levenburg-Marquardtove te metode konjugiranog gradijenta [305–308], primjenjuju i njenu drugu derivaciju te stoga ostvaruju bržu konvergenciju, a za razliku od klasičnih gradijentnih metoda, temelje se na grupnom učenju. Osnova kvazi-Newtonove metode je kvadratna aproksimacija funkcije greške, a za osvježavanje težinskih koeficijenata primjenjuje aproksimaciju inverzne Hesseove matrice. Zbog kompleksnosti, prikladna je samo za male mreže dok je metoda konjugiranog gradijenta, koja kombinira metodu najbržeg spusta te izbjegava kompleksnost računanja Hesseove matrice i njene inverzije kao Newtonova metoda, primjenjiva za velike mreže [269]. Levenberg-Marquardtov algoritam varijacija je Newtonove metode u kojem se kombinira gradijentna te Gauss-Newtonova aproksimacija Hesseove matrice greške [308].



Slika 5.31. Struktura acikličke mreže s jednim skrivenim slojem za estimaciju razdiobe i distribucije ulaznog vektora $\boldsymbol{x}$.

Izlaz mreže je nelinearna funkcija koeficijenata, pa njihovo tretiranje u kontekstu stohastičkog procesa sugerira primjenu nelinearnih estimatora kao učinkovite zamjene za metode učenja drugog reda, kao npr. u [309], gdje metoda globalnog proširenog Kalmanovog filtra (GEKF)

učinkovito zamjenjuje metodu učenja drugog reda, ostvarujući za red veličine bržu konvergenciju, ali pod cijenu velike kompleksnosti. U metodi nevezanih proširenih Kalmanovih filtara (DEKF) [310], reducirana je kompleksnost metode GEKF jer se umjesto računanja i pohrane informacija drugog reda za sve koeficijente, razvijaju i održavaju samo one informacije vezane za koeficijente koji pripadaju međusobno isključivim grupama, npr. grupama koeficijenata vezanima za ulaz istog čvora. Još su učinkovitije metode koje primjenjuju naprednije nelinearne estimatore poput Kalmanovog filtra bez derivacije (UKF) [101] (vidi odjeljak 2.3.1) ili čestičnog filtra (PF, UPF) [105, 111] (vidi odjeljak 2.3.2) zbog bolje aproksimacije nelinearnosti. Za razliku od klasičnih metoda drugog reda, navedene metode prikladne su za pojedinačno učenje.

U [311], ispitana je mogućnost acikličke slojevite mreže za estimaciju predikcije uvjetne razdiobe stohastičkoga ili determinističkoga procesa. Za acikličku mrežu s jednim skrivenim slojem, sigmoidalnom aktivacijskom funkcijom te linearnim izlaznim slojem, pokazana je, u determinističkom limitu, ograničenost na estimaciju uvjetne distribucije linearnog procesa. U determinističkom limitu, koeficijenti izlaznog linearnog sloja imaju svojstvo Kroneckerove delte, a nagib sigmoidalne funkcije teži beskonačnosti. Dodavanjem još jednog skrivenog sloja sa sigmoidalnom aktivacijskom funkcijom postiže se svojstvo univerzalne aproksimacije, pa estimacija uvjetne distribucije nije više ograničena na linearne procese. Ako je u završnom skrivenom sloju umjesto sigmoidalne primijenjena zvonolika aktivacijska funkcija, mreža provodi estimaciju uvjetne razdiobe općenito nelinearnog procesa. Na temelju ovih spoznaja, može se zaključiti da je arhitektura acikličke neuronske mreže pogodnija za estimaciju distribucije smetnje (iako može estimirati i njenu razdiobu), a radijalna mreža za estimaciju razdiobe. Pri tome se estimacija provodi isključivo na temelju prikupljenih uzoraka (npr. unutar volumena valjanosti za vrijeme praćenja). Rezultat estimacije primijenjen je za evaluaciju volumne gustoće smetnje te omjera vjerodostojnosti amplitude odjeka cilja u odnosu na smetnju.

Kako je naglašeno u uvodnom odlomku, estimacija razdiobe acikličkom slojevitom mrežom provodi se metodom stohastičkog učenja kumulativa vjerojatnosti uzoraka kako je predloženo u [71]. Pri tome uzorci za učenje imaju jednoliku razdiobu, a objektivna funkcija pored člana greške sadrži i dodatni regularizacijski član radi nametanja monotonosti estimirane funkcije distribucije. Varijanta ove metode je glatka interpolacija kumulativa vjerojatnosti uzoraka, pri čemu su uzorci za učenje deterministički. U sljedećem je odjeljku analizirana konvergencija estimacije distribucije i razdiobe te je opisana primjena nelinearnih metoda estimacije EKF, UKF, PF i UPF u procesu učenja. A u odjeljku 5.2.2 je pružen primjer njihove primjene u estimaciji razdiobe smetnje, kao podloga za usporedbu učinkovitosti s klasičnom kvazi-Newtonovom metodom. Pri tome je, pored točnosti estimacije razdiobe, analizirana i točnost te normirana devijacija ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije, radi usporedbe s ostvarenim vrijednostima primjenom metode radijalne mreže s maksimizacijom vjerodostojnosti. Također, provedena je

analiza računalne složenosti ovisno o broju uzoraka, a za kvazi-Newtonovu metodu i o broju neurona.

5.2.1. Primjena u estimaciji amplitudne razdiobe

Neka je skup uzoraka (amplituda odjeka) smetnje označen sa $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}} = \{\zeta_j, j = 1,\ldots,N\}$. Vrijednost funkcije distribucije s obzirom na realizacije slučajne jednodimenzionalne varijable ζ s razdiobom $p_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)$, jednaka je $F_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} p_{\boldsymbol{\zeta}}(x)\mathrm{d}x$ i također je slučajna varijabla s jednolikom razdiobom, jer prema [72] i teoremu 2.7, vrijedi da je

$$p_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta) = p_u\left(F_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)\right)\left|\frac{\mathrm{d}F_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right|, \tag{5.56}$$

što rezultira s $p_u(u) = 1, u \in [0,1]$, pri čemu je $u = F_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)$ i $\zeta = F_{\boldsymbol{\zeta}}^{-1}(u)$ te vrijedi da su i $F_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$ i njena inverzija $F_{\boldsymbol{\zeta}}^{-1}(\cdot)$ neprekinuto diferencijabilne funkcije.

Metoda učenja kumulativa vjerojatnosti uzoraka sastoji se od formiranja parova za učenje $\left\{\left(h(\zeta_i, \boldsymbol{W}), u_i\right), i = 1,\ldots,N\right\}$, gdje je s $h(\cdot)$ označena prijenosna funkcija mreže (ili nelinearna funkcija mjerenja), ovisna o vektoru težinskih koeficijenata $\boldsymbol{W}$. Nadalje, vrijedi da je $\forall i, \zeta_i \in \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)}$ i $u_i \in \mathbb{U}^{(*)}$, pri čemu su $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)}$ i $\mathbb{U}^{(*)}$ potpuno uređeni skupovi nastali razvrstavanjem elemenata skupova $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}$ i $\mathbb{U}$ po veličini, odnosno

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)} = (\zeta_1 \leq \cdots \leq \zeta_N), \tag{5.57}$$

$$\mathbb{U}^{(*)} = (u_1 \leq \cdots \leq u_N), \tag{5.58}$$

s time što za metodu stohastičkog učenja kumulativa vjerojatnosti uzoraka vrijedi da je

$$\mathbb{U} = \{u_i : i = 1,\ldots,N, u_i \sim \mathscr{U}(0,1)\}, \tag{5.59}$$

a za metodu glatke interpolacije,

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}^{(*)} = \left(\frac{i}{N+1}, i = 1,\ldots,N\right) \tag{5.60}$$

[71]. Tako je cilj učenja aproksimacija distribucije $F_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$ s $h(\cdot, \boldsymbol{W})$, pri čemu je očekivanje distribucije i-tog elementa uređenoga skupa $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)}$ jednako

$$E\left(F_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta_i)\right) = \frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\Theta\left(\zeta_i - \zeta_j\right) = \frac{i}{N+1}, \quad i = 1,\ldots,N, \tag{5.61}$$

pri čemu je

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{5.62}$$

step-funkcija [200]. Učenjem se minimizira srednja kvadratna greška

$$\bar{e}(\boldsymbol{W}) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} \big(h(\zeta_i, \boldsymbol{W}) - u_i\big)^2 + \bar{e}_\lambda(\boldsymbol{W}), \tag{5.63}$$

pri čemu je $\bar{e}_\lambda(\cdot)$ regularizacijski član radi (mogućeg) nametanja apriornih saznanja o svojstvu funkcije distribucije [312]. Ako je to monotonost distribucije [313], regularizacijski je član jednak

$$\bar{e}_\lambda(\boldsymbol{W}) = \frac{\lambda}{2N_\varepsilon} \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \Theta\big(h(\zeta_j, \boldsymbol{W}) - h(\zeta_j + \Delta\zeta, \boldsymbol{W})\big) \big(h(\zeta_j, \boldsymbol{W}) - h(\zeta_j + \Delta\zeta, \boldsymbol{W})\big)^2, \tag{5.64}$$

gdje je λ regularizacijski parametar, $\Delta\zeta$ inkrement amplitude i N_ε broj uzoraka za nametanje monotonosti.

Neka je definiran prostor funkcija $C(\mathbb{R})$ tako da, $\forall F(\cdot) \in C(\mathbb{R})$, vrijedi:

1. $F(\cdot) : \mathbb{R} \to [0,1]$
2. $F(\zeta)$ je kontinuirano diferencijabilna i $\frac{\mathrm{d}F\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} \geq 0$
3. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

te skup svih aproksimacija uzoračke distribucije (5.61) kao:

1. $\mathbb{H}_F = \{h_F(\cdot) : h_F(\cdot) \in C(\mathbb{R})\}$
2. $\left|h_F(\zeta_i) - \frac{i}{N+1}\right| \leq f(N) \left((2N)^{-1} \log_{\mathrm{e}}\left(\log_{\mathrm{e}}(N)\right)\right)^{1/2},\ \zeta_i \in \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)}, i = 1, \ldots, N, \forall h_F(\cdot) \in \mathbb{H}_F$

pri čemu je $f(N)$ neka funkcija ovisna o broju uzoraka N. U [71] je, za određivanje konvergencije estimacije distribucije i razdiobe, najprije određena ovisnost konvergencije aproksimacije uzoračke distribucije $h_F(\cdot)$ i njene derivacije te je pokazano da rezultati stohastičkog učenja kumulativa vjerojatnosti uzoraka konvergiraju rezultatima glatke interpolacije i da je zadovoljena nejednakost

$$E\left(L_2\right) = E\left(\left\|h_F(\cdot) - F_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)\right\|_2^2\right) = E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h_F(\zeta) - F_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)\right)^2 \mathrm{d}F_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)\right) \leq o\big(g(N)\big), \tag{5.65}$$

pri čemu je

$$g(N) = 2\left(\frac{1}{2(N+1)} + f(N)^2 \frac{\log_{\mathrm{e}}\left(\log_{\mathrm{e}}(N)\right)}{N} + \frac{3}{2(N+1)^2} + \frac{2f(N)}{N+1}\sqrt{\frac{\log_{\mathrm{e}}\left(\log_{\mathrm{e}}(N)\right)}{2N}}\right). \tag{5.66}$$

Prema (5.65), MISE (očekivanje norme L_2) između aproksimacije $h_F(\cdot)$ i stvarne distribucije $F_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$ asimptotski konvergira nuli brzinom $o\big(g(N)\big)$. Posebno, ako je zadovoljen uvjet $f(N) \leq \left(\log_{\mathrm{e}}\left(\log_{\mathrm{e}}(N)\right)\right)^{-1/2}$, brzina konvergencije iznosi $o\big(N^{-1/2}\big)$, kao i za $E(L_1)$, a za $E(L_\infty)$, ta je brzina jednaka $o\big(N^{-1/2}\left(\log_{\mathrm{e}}\left(\log_{\mathrm{e}}(N)\right)\right)^{1/2}\big)$ [71]. Za razdiobu vjerojatnosti (derivaciju funkcije distribucije), pod uvjetom da je maksimalni red omeđene derivacije jednak R te da je $f(N) \geq 2$, vrijedi

$$L_\infty = \left\| \frac{\mathrm{d}h_F(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} - \frac{\mathrm{d}F_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} \right\|_\infty = \sup_{\zeta} \left(\left| \frac{\mathrm{d}h_F(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} - \frac{\mathrm{d}F_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} \right| \right) \leq o\big(g(N)\big), \tag{5.67}$$

pri čemu je

$$g(N) = 2^{R-1} \left(2 \sup_{\zeta} \left(\left| \frac{\mathrm{d}^R F_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^R} \right| \right) + \mathrm{b} \right)^{1/R} \left(\big(1+f(N)\big) \sqrt{\frac{2\log_{\mathrm{e}}\left(\log_{\mathrm{e}}(N)\right)}{N}} + \frac{2}{N+1} \right)^{1-\frac{1}{R}}, \tag{5.68}$$

gdje je s b označena neka proizvoljna pozitivna konstanta. Maksimalna norma L_∞ teži $o\big(N^{-1/2}\left(\log_{\mathrm{e}}\left(\log_{\mathrm{e}}(N)\right)\right)^{1/2}\big)$ kako $R \to \infty$, što je brže u odnosu na metodu jezgrene estimacije s pozitivnom jezgrom i optimalnim parametrom skaliranja, gdje brzina konvergencije srednje integrirane kvadratne greške iznosi $o\big(N^{-2/5}\big)$ [71].

Jednadžbe (5.65) i (5.67) pokazuju konvergenciju aproksimacije distribucije i razdiobe u smislu normi L_2, odnosno L_∞. Kako bi estimacija distribucije (i razdiobe) neuronskom mrežom prijenosne funkcije $h(\cdot)$ zadržala jednaku brzinu konvergencije prema stvarnoj distribuciji $F_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$ (i razdiobi $p_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$) kao i aproksimacija $h_F(\cdot)$, potrebna je brža konvergencija estimacije (neuronskom mrežom) aproksimaciji nego što aproksimacija konvergira stvarnoj distribuciji, odnosno njena derivacija razdiobi, za što je potrebno zadovoljiti [71]:

1. $\sup_\zeta \left(|h(\zeta, \boldsymbol{W}) - h_F(\zeta)|\right) \leq o(1/N)$ i
2. $\left| \frac{\mathrm{d}h(\zeta,\boldsymbol{W})}{\mathrm{d}\zeta} - \frac{\mathrm{d}h_F(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} \right| \leq o(1/N)$.

Neka je s

$$\mathbb{H}_{1\times m\times 1} = \left\{ h_\Phi(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h_\Phi(\zeta, \boldsymbol{W}) = \sum_{i=1}^{m} w_i \Phi\left(w_{1i}\zeta + w_{0i}\right) \right\} \tag{5.69}$$

označena klasa acikličkih neuronskih mreža s jednim skrivenim slojem i m neurona, pri čemu je s $\Phi(\cdot)$ označena aktivacijska funkcija, s $\{w_{1i}, i = 1,\ldots,m\}$ koeficijenti ulaznog prema skrivenom sloju, s $\{w_{0,i}, i = 1,\ldots,m\}$ koeficijent pristranosti i-tog neurona i s $\{w_i, i = 1,\ldots,m\}$ koeficijenti skrivenog prema izlaznom sloju. Aktivacijska funkcija $\Phi(\cdot)$ zadovoljava sljedeće uvjete:

1. $\Phi(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$, odnosno, $\Phi(\cdot)$ je simetrična, nelinearna, omeđena i monotono rastuća funkcija, s eksponencijalno padajućim derivacijama svih redova

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{d}^r\Phi(x)}{\mathrm{d}x^r}\right|\mathrm{d}x<\infty, \forall r=1,\ldots,R$, odnosno $\Phi(\cdot)\in S^{1,R}(\mathbb{R})$ gdje je s $S^{p,R}(\mathbb{T})$ označen prostor Soboljeva, u smislu metrike L_p otvorenog skupa $\mathbb{T}$, za sve funkcije u $C^R(\mathbb{T})$, $S^{p,R}(\mathbb{T})=\left\{f(\cdot)\in L_p(\mathbb{T}):\frac{\partial^r f(\cdot)}{\partial(\cdot)^r}\in L_p(\mathbb{T}),\forall|r|\leq R\right\}$ [314].

Neka je $F_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$ distribucija definirana na nekom kompaktnom skupu $\mathbb{V}\subset\mathbb{T}$ koja se estimira acikličkom neuronskom mrežom s aktivacijskom funkcijom $\Phi(\cdot)\in S^{1,R}(\mathbb{R})$. Ako je definirana funkcija $f(\cdot)\in S^{p,R}(\mathbb{T})$, prema [71], uz b, proizvoljnu pozitivnu konstantu, $\exists h_\Phi(\cdot)\in\mathbb{H}_{1\times m\times 1}$, tako da vrijedi

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{V}}\left|\frac{\mathrm{d}^r f(\cdot)}{\mathrm{d}\zeta^r}-\frac{\mathrm{d}^r h_\Phi(\zeta,\boldsymbol{W})}{\mathrm{d}\zeta^r}\right|<\mathrm{b},\quad r=0,\ldots,R, \tag{5.70}$$

što znači da se, pod određenim uvjetima, acikličkom neuronskom mrežom s jednim skrivenim slojem istovremeno može estimirati i funkcija i njene derivacije. Budući da $\Phi(\cdot)$ i $H_F(\cdot)$, ograničeni na otvoreni skup $\mathbb{T}$, zadovoljavaju nejednakost (5.70), vrijedi da se:

1. konzistentna estimacija distribucije, brzine konvergencije norme L_2 kao $o\left(N^{-1/2}\right)$, može postići jednoslojnom acikličkom neuronskom mrežom na bilo kojem kompaktnom skupu $\mathbb{V}$
2. konzistentna estimacija razdiobe, brzine konvergencije norme L_∞ u skladu s relacijom $o\left(N^{\frac{1-R}{2R}}\left(\log_{\mathrm{e}}\left(\log_{\mathrm{e}}(N)\right)\right)^{\frac{R-1}{2R}}\right)$, može postići jednoslojnom acikličkom neuronskom mrežom na bilo kojem kompaktnom skupu $\mathbb{V}$, pri čemu se pretpostavlja da stvarna razdioba $p_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$ ima omeđene derivacije do reda R [71].

Premda je u [315] pokazano da broj neurona skrivenog sloja kojim se jamči estimacija aproksimacije brzinom $o(1/N)$ ovisi o broju uzoraka kao $o\left(N\log_{\mathrm{e}}(N)\right)$, teorijski rezultati u [71], koji potvrđuju konvergenciju glatke interpolacije kumulativa vjerojatnosti uzoraka, pružaju smjernice u izboru veličine neuronske mreže, ovisno o broju uzoraka N, pa tako, uz apriorno poznate značajke nepoznate distribucije, mali broj neurona u skrivenom sloju zadovoljava.

U kontekstu učenja neuronske mreže kao rješenja problema optimizacije, za minimizaciju srednje kvadratne greške (5.63) primjenjuju se numeričke metode poput gradijentnog spusta (tipični primjer je algoritam sa širenjem pogreške unazad [292]), koje se temelje na linearizaciji srednje kvadratne greške, odnosno uzimanjem u obzir samo člana prvog reda njenog Taylorovog razvoja u okolici trenutne vrijednosti koeficijenata mreže $\boldsymbol{W}$,

$$\bar{e}(\boldsymbol{W}+\Delta\boldsymbol{W})=\bar{e}(\boldsymbol{W})+\left(\nabla\bar{e}(\boldsymbol{W})\right)^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{W}+\frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{W})^{\mathrm{T}}\nabla^2\bar{e}(\boldsymbol{W})\Delta\boldsymbol{W}+o\left(\|\Delta\boldsymbol{W}\|^3\right) \tag{5.71}$$

te metode drugog reda (npr. Newtonova metoda [308] ili njena aproksimacija, kvazi-Newtonova metoda [269], Levenburg-Marquardtova metoda [305, 306], metoda konjugiranog gradijenta [307]), koje uzimaju u obzir i zakrivljenost funkcije greške, odnosno član drugog reda u (5.71). Pri tome je s $\nabla^2\bar{e}(\boldsymbol{W})=\left(\nabla\left(\nabla\bar{e}(\boldsymbol{W})\right)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ označena matrica parcijalnih derivacija funkcije greške $\bar{e}(\boldsymbol{W})$ drugog reda, odnosno njena Hesseova matrica.

Newtonova metoda pretpostavlja srednju kvadratnu grešku (5.63) u obliku kvadratnog polinoma, pa se iz uvjeta minimuma greške nalazi korak optimizacije

$$\Delta \boldsymbol{W}^{(*)} = -\left(\nabla^2 \bar{e}(\boldsymbol{W})\right)^{-1} \nabla \bar{e}(\boldsymbol{W}), \tag{5.72}$$

tako da je vrijednost koeficijenata mreže koji minimiziraju srednju kvadratnu grešku (5.63) jednak

$$\boldsymbol{W}^{(*)} = \boldsymbol{W} + \Delta \boldsymbol{W} = \boldsymbol{W} - \left(\nabla^2 \bar{e}(\boldsymbol{W})\right)^{-1} \nabla \bar{e}(\boldsymbol{W}), \tag{5.73}$$

pod uvjetom da je (5.63) kvadratni polinom. U stvarnosti, u razvoju srednje kvadratne greške (5.71) postoje i članovi reda višeg od drugog, pa je stoga potrebno provesti postupak iteracije vrijednosti koeficijenata mreže kao

$$\boldsymbol{W}_{\kappa+1} = \boldsymbol{W}_{\kappa} - \left(\nabla^2 \bar{e}(\boldsymbol{W}_{\kappa})\right)^{-1} \nabla \bar{e}(\boldsymbol{W}_{\kappa}), \tag{5.73}$$

do konvergencije srednje kvadratne greške (5.63) k minimumu. Newtonovom se metodom ostvaruje brža konvergencija u odnosu na metode gradijentnog spusta, ali postoje ograničenja. Naime, poznavanje Hesseove matrice korisno je samo u blizini minimuma i računalno je zahtjevno, a sama matrica treba biti nesingularna, što je uvjet koji u stvarnosti ne mora biti zadovoljen jer je priroda procesa učenja loše postavljen problem. Također i kada (5.63) nije kvadratni polinom, nije sigurna konvergencija [269] te nije sigurno da će Hesseova matrica uvijek biti pozitivna semidefintna, što je uvjet za konveksnost funkcije srednje kvadratne greške [316].

Kvazi-Newtonova metoda izbjegava eksplicitno računanje Hesseove matrice primjenom informacija iz dvije susjedne iteracije, $\Delta \boldsymbol{W}_{\kappa} = \boldsymbol{W}_{\kappa+1} - \boldsymbol{W}_{\kappa}$, odnosno $\Delta \boldsymbol{\gamma}_{\kappa} = \nabla \bar{e}(\boldsymbol{W}_{\kappa+1}) - \nabla \bar{e}(\boldsymbol{W}_{\kappa})$, kako bi se aproksimirala inverzna Hesseova matrica $\left(\nabla^2 \bar{e}(\boldsymbol{W}_{\kappa})\right)^{-1}$ u (5.73). Prema [317–322], korekcija aproksimacije inverzne Hesseove matrice $\boldsymbol{D}_{\kappa+1} \approx \left(\nabla^2 \bar{e}(\boldsymbol{W}_{\kappa+1})\right)^{-1}$ za korak iteracije κ, određena je rekurzijom

$$\boldsymbol{D}_{\kappa+1} = \boldsymbol{D}_{\kappa} + \frac{\Delta \boldsymbol{\gamma}_{\kappa} \Delta \boldsymbol{\gamma}_{\kappa}^{\mathrm{T}}}{\Delta \boldsymbol{\gamma}_{\kappa}^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{W}_{\kappa}} - \frac{\boldsymbol{D}_{\kappa} \Delta \boldsymbol{W}_{\kappa} \boldsymbol{D}_{\kappa}^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{W}_{\kappa}^{\mathrm{T}}}{\Delta \boldsymbol{W}_{\kappa}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{\kappa} \Delta \boldsymbol{W}_{\kappa}}, \tag{5.74}$$

tako da je vrijednost koeficijenata mreže u iteraciji κ jednaka

$$\boldsymbol{W}_{\kappa+1} = \boldsymbol{W}_{\kappa} - \boldsymbol{D}_{\kappa} \nabla \bar{e}(\boldsymbol{W}_{\kappa}). \tag{5.73}$$

Metoda računanja aproksimacije inverzne Hesseove matrice rekurzijom (5.74) poznata je kao metoda Broydena, Fletchera, Goldfarba i Shannoa (BFGS).

Elementi skupa uzoraka amplituda odjeka $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k} = \left\{\zeta_{k,j}, j = 1,\ldots,N, k \geq 0\right\}$, prikupljeni unutar i u okolici volumena valjanosti V_k u vremenskom trenutku t_k, rezultat su, za svaku ćeliju razlučivosti, realizacije homogenog stohastičkog procesa. Pod pretpostavkom ergodičnosti, ko-

eficijenti mreže za vremenski trenutak t_k mogu se tretirati u kontekstu stohastičkog procesa kao

$$\boldsymbol{W}_{k,j+1} = \boldsymbol{W}_{k,j} + \boldsymbol{w}_{k,j}, \tag{5.75}$$

dok je opservacija formalno

$$u_{k,j} = h_{k,j}\left(\zeta_{k,j}, \boldsymbol{W}_{k,j}\right) + v_{k,j}, \tag{5.76}$$

u stvarnosti realizacija slučajne veličine jednolike razdiobe, $u_{k,j} \sim \mathscr{U}(0,1)$, sa svojstvom da je $u_{k,j} \in [0,1]$. S $\boldsymbol{w}_{k,j}$ i $v_{k,j}$ su označeni bijeli aditivni Gaussovi procesi kovarijance $E(\boldsymbol{w}_{k,j}\boldsymbol{w}_{k,j}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{Q}_{k,j}$, odnosno varijance $E(v_{k,j}^2) = R_{k,j}$. Tako je dinamički model vrijednosti težinskih koeficijenata mreže (5.75) linearan, a opservacija (5.76) nelinearan proces te vrijedi povezanost između potpuno uređenih skupova za učenje (5.57) i (5.58), nastalih razvrstavanjem elemenata po veličini, i izvornih skupova $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k}$ i $\mathbb{U}_k$, $\forall k \geq 0$, kao

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k}^{(*)} = \left(\zeta_{k,1} \leq \cdots \leq \zeta_{k,N}\right), \tag{5.57}$$

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k} = \left\{\zeta_{k,j(1)}, \ldots, \zeta_{k,j(N)}\right\} \tag{5.77}$$

te

$$\mathbb{U}_k^{(*)} = \left(u_{k,1} \leq \cdots \leq u_{k,N}\right), \tag{5.58}$$

$$\mathbb{U}_k = \left\{u_{k,j(1)}, \ldots, u_{k,j(N)}\right\}, \tag{5.78}$$

pri čemu je s $\left\{j(1), \ldots, j(N)\right\}$ označena permutacija indeksa $(1, \ldots, N)$ elemenata uređenih skupova (5.57) i (5.58). Tako se prema (5.77) i (5.78), parovi za učenje $\left\{\left(h_{k,j}(\zeta_{k,j}, \boldsymbol{W}_{k,j}), u_{k,j}\right), j = 1, \ldots, N, k \geq 0\right\}$ privode mreži kroz epohu učenja kao slučajni slijed radi poboljšanja konvergencije rješenja prema optimalnoj vrijednosti [269].

Grupiranje parova za učenje u vektore s n_z komponenti kao $\left\{\left(\boldsymbol{h}_{k,i}(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \boldsymbol{W}_{k,i}), \mathbf{u}_{k,i}\right), i = 1, \ldots, N/n_z, k \geq 0\right\}$, pri čemu su

$$\mathbb{U}_k = \left\{\mathbf{u}_{k,i}, i = 1, \ldots, N/n_z, k \geq 0\right\}, \tag{5.79}$$

$$\mathbf{u}_{k,i} = \left[u_{k,(i-1)n+1} \ \cdots \ u_{k,in_z}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{5.80}$$

odnosno

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k} = \left\{\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, i = 1, \ldots, N/n_z, k \geq 0\right\}, \tag{5.81}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{k,i} = \left[\zeta_{k,(i-1)n+1} \ \cdots \ \zeta_{k,in_z}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{5.82}$$

smanjuje računalnu složenost (odnosno vrijeme potrebno za procesiranje jedne epohe podataka), za približno n_z puta. U ilustrativnom primjeru linearnog čvora bez procesnog šuma, može se pokazati da je, primjenom grupiranja i metode Kalmanovog filtriranja, za svaki indeks grupe i, estimacija vrijednosti koeficijenata $\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i}$ aproksimacija rješenja problema najmanjih kvadrata, nasuprot Kalmanovom filtriranju u n koraka i bez grupiranja koje rezultira slijedom $\hat{\boldsymbol{W}}_{k,1},\ldots,\hat{\boldsymbol{W}}_{k,n_z}$ i ekvivalentno je rekurzivnom rješenju najmanjih kvadrata [72]. Naime, za jedan linearni čvor mreže bez procesnog šuma, vrijedi da je prema (5.76)

$$u_{k,j} = \zeta_{k,j} w_{k,j} + v_{k,j}, \tag{5.76}$$

$$\bar{y}_{k,j} = \zeta_{k,j} \bar{w}_{k,j}, \tag{5.83}$$

pa se vrijednost koeficijenta $w_{k,j}$ može estimirati rekurzivnom metodom najmanjih kvadrata (odnosno metodom Kalmanovog filtriranja) u n_z koraka kao

$$\hat{w}_{k,\kappa} = \bar{w}_{k,\kappa} + K_{k,\kappa}\left(u^{(*)}_{k,\kappa} - \bar{y}^{(*)}_{k,\kappa}\right), \tag{5.84}$$

pri čemu su

$$K_{k,\kappa} = \frac{\bar{P}_{k,\kappa}\zeta^{(*)}_{k,\kappa}}{1+\left(\zeta^{(*)}_{k,\kappa}\right)^2 \bar{P}_{k,\kappa}}, \tag{5.85}$$

$$P_{k,\kappa} = \bar{P}_{k,\kappa} - K_{k,\kappa}\zeta^{(*)}_{k,\kappa}\bar{P}_{k,\kappa}, \tag{5.86}$$

i $\kappa = 1,\ldots,n_z$, a s $\zeta^{(*)}_{k,\kappa} = R^{-1/2}_{k,\kappa}\zeta_{k,\kappa}$ je označen normirani uzorak te s $\left(\bar{y}^{(*)}_{k,\kappa} = R^{-1/2}_{k,\kappa}\bar{y}_{k,\kappa}, u^{(*)}_{k,\kappa} = R^{-1/2}_{k,\kappa}u_{k,\kappa}\right)$ normirani par za učenje. Kako je $\bar{w}_{k,\kappa} = \hat{w}_{k,\kappa-1}$ i $\bar{P}_{k,\kappa} = P_{k,\kappa-1}$, postupak (5.84) – (5.86) inicijaliziran je s $\hat{w}_{k,0}$ i $P_{k,0}$. Ako se koraci (5.84) – (5.86) provode uzorcima unutar svake grupe (indeksa i) posebno, povezanost indeksa uzorka j (skupa (5.77)) i koraka estimacije κ unutar grupe jednaka je $j = \kappa + (i-1)n_z, i = 1,\ldots,N/n_z$. Grupiranje skupa uzoraka (5.81) u vektore s n_z komponenti prema (5.82), rezultira vektorima opservacije i apriornog mjerenja

$$\mathbf{u}_{k,i} = \boldsymbol{\zeta}_{k,i} w_{k,i} + \boldsymbol{v}_{k,i}, \tag{5.76}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}_{k,i} = \boldsymbol{\zeta}_{k,i} \bar{w}_{k,i}, \tag{5.83}$$

pa je estimacija koeficijenta metodom Kalmanovog filtriranja jednaka, $\forall i = 1,\ldots N/n_z$,

$$\boldsymbol{K}_{k,i} = \bar{P}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}^{(*)}_{k,i}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}_{n_z} + \boldsymbol{\zeta}^{(*)}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}^{(*)}_{k,i}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{k,i}\right)^{-1}, \tag{5.85}$$

$$\hat{w}_{k,i} = \bar{w}_{k,i} + \boldsymbol{K}_{k,i}\left(\mathbf{u}^{(*)}_{k,i} - \bar{\boldsymbol{y}}^{(*)}_{k,i}\right), \tag{5.84}$$

pri čemu je, uz QR-dekompoziciju matrice kovarijance mjerenja $\boldsymbol{R}_{k,i} = E\left(\boldsymbol{v}_{k,i}\boldsymbol{v}_{k,i}^{\mathrm{T}}\right)$ kao $\boldsymbol{R}_{k,i} = \boldsymbol{\mathcal{V}}_{k,i}\boldsymbol{\mathcal{V}}_{k,i}^{\mathrm{T}}$, s $\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)} = \boldsymbol{\mathcal{V}}_{k,i}^{-1}\boldsymbol{\zeta}_{k,i}$ označen normirani uzorak, a s $\left(\bar{\boldsymbol{y}}_{k,i}^{(*)} = \boldsymbol{\mathcal{V}}_{k,i}^{-1}\bar{\boldsymbol{y}}_{k,i}, \mathbf{u}_{k,i}^{(*)} = \boldsymbol{\mathcal{V}}_{k,i}^{-1}\mathbf{u}_{k,i}\right)$ normirani par za učenje. Ako je zadovoljen uvjet da je $\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{k,i} \gg \boldsymbol{I}_{n_z}$, uz $\bar{P}_{k,i}^{-1} = \mathrm{b}$, pri čemu je b proizvoljna pozitivna konstanta, vrijednost Kalmanovog koeficijenta (5.85) približno je

$$\boldsymbol{K}_{k,i} \approx \left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{b}\boldsymbol{I}_{n_z} + \boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}, \tag{5.87}$$

pa je, uz $\bar{w}_{k,i} = \hat{w}_{k,i-1}$, estimacija vrijednost koeficijenta jednaka

$$\begin{aligned}\hat{w}_{k,i} =& \hat{w}_{k,i-1} - \left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{b}\boldsymbol{I}_{n_z} + \boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\hat{w}_{k,i-1} + \\ &+ \left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{b}\boldsymbol{I}_{n_z} + \boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{u}_{k,i}^{(*)}.\end{aligned} \tag{5.88}$$

U graničnom slučaju kada $\mathrm{b} \to 0$, vrijedi

$$\lim_{\mathrm{b}\to 0}\left(\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{b}\boldsymbol{I}_{n_z} + \boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right) = 1, \tag{5.89}$$

$$\lim_{\mathrm{b}\to 0}\left(\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{b}\boldsymbol{I}_{n_z} + \boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right) = \left(\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}, \tag{5.90}$$

$$\lim_{\mathrm{b}\to 0}\left(\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{b}\boldsymbol{I}_{n_z} + \boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right) = \left(\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{5.91}$$

pa je tada

$$\hat{w}_{k,i} = \left(\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_{k,i}^{(*)}. \tag{5.92}$$

Dok je rekurzija (5.84) – (5.86) rekurzivno rješenje najmanjih kvadrata [323]

$$\left\{\hat{w}_{k,1}, \ldots, \hat{w}_{k,n_z}\right\} = \arg\min_{\{w_{k,\kappa}\}}\left(\sum_{\kappa=1}^{n_z}\left(u_{k,\kappa}^{(*)} - \zeta_{k,\kappa}^{(*)}w_{k,\kappa}\right)^2\right), \tag{5.93}$$

estimacija koeficijenta prema (5.92) rješenje je u smislu najmanje kvadratne greške [324]

$$\hat{w}_{k,i} = \arg\min_{w_{k,i}}\left(\left\|\mathbf{u}_{k,i}^{(*)} - \boldsymbol{\zeta}_{k,i}^{(*)}w_{k,i}\right\|^2\right). \tag{5.94}$$

Stoga je u općenito nelinearnom slučaju složenost ovakvog procesa estimacije parametara (vrijednosti koeficijenata $\boldsymbol{W}$) za jednu epohu (od N uzoraka, N/n_z grupa i n_x komponenti vektora stanja) i metodu EKF jednaka $O\left(\frac{N}{n_z}n_x^2\right)$, nasuprot složenosti procesa estimacije metodom EKF bez grupiranja koja je $O\left(Nn_x^2\right)$, zbog toga što složenost ne ovisi o broju komponenti vektora mjerenja n_z [105, 325].

U okviru nelinearnog Kalmanovog filtriranja, vidi odjeljak 2.3.1, aposteriorna razdioba $p(\boldsymbol{W}_{k,i}|\mathbb{Z}^i_{\boldsymbol{\zeta},k})$ aproksimirana je Gaussovom, pa je uvjet minimizacije varijance greške estimacije jednak maksimizaciji aposteriorne razdiobe, odnosno [72]

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i} = \arg\max_{\boldsymbol{W}_{k,i}} \left(p\left(\boldsymbol{W}_{k,i} \,|\, \mathbb{Z}^i_{\boldsymbol{\zeta},k} \right) \right). \tag{5.95}$$

Kako je prema Bayesovoj rekurziji, vidi odjeljak 2.3, aposteriorna razdioba razmjerna vjerodostojnosti mjerenja i apriornoj razdiobi (koje se također aproksimiraju Gaussovim razdiobama),

$$p\left(\boldsymbol{W}_{k,i} \,|\, \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}, k^i \right) \propto p\left(\mathbf{u}_{k,i} \,|\, \boldsymbol{W}_{k,i} \right) p\left(\boldsymbol{W}_{k,i} \,|\, \mathbb{Z}^{i-1}_{\boldsymbol{\zeta},k} \right), \tag{5.96}$$

uvjet (5.95) postaje [326]

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i} = \arg\min_{\boldsymbol{W}} \Bigg(& \frac{1}{2} \Bigg(\Big(\mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \boldsymbol{W} \right) \Big)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}^{-1}_{k,i} \Big(\mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \boldsymbol{W} \right) \Big) \Bigg) + \\ & + \frac{1}{2} \Big(\left(\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} - \boldsymbol{W} \right)^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{P}}^{-1}_{k,i} \left(\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} - \boldsymbol{W} \right) \Big) \Bigg) \\ = \frac{1}{2} \arg\min_{\boldsymbol{W}} & \Big(\boldsymbol{f}_{k,i}(\boldsymbol{W})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_{k,i}(\boldsymbol{W}) \Big) = \frac{1}{2} \arg\min_{\boldsymbol{W}} \big(e_{k,i}(\boldsymbol{W}) \big), \end{aligned} \tag{5.97}$$

što je problem minimizacije kvadrata. Pri tome je

$$\boldsymbol{f}_{k,i}(\boldsymbol{W}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{V}}^{-1}_{k,i} \Big(\mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \boldsymbol{W} \right) \Big) \\ \bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{-1}_{k,i} \left(\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} - \boldsymbol{W} \right) \end{bmatrix}, \tag{5.98}$$

jer vrijedi da je, uz QR-dekompoziciju, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\mathcal{V}}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathrm{T}}$ i $\bar{\boldsymbol{P}} = \bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{\mathrm{T}}$. Problem (nelinearnih) najmanjih kvadrata (5.97) može se riješiti primjenom Gauss-Newtonove metode [322]. Dok je gradijent kvadratne greške $\nabla e_{k,i}(\boldsymbol{W})$ jednak

$$\nabla e_{k,i}(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{f}_{k,i}(\boldsymbol{W}) \big)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_{k,i}(\boldsymbol{W}), \tag{5.99}$$

pri čemu je $\boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{f}(\cdot)\big) = \big(\nabla \boldsymbol{f}(\cdot)^{\mathrm{T}}\big)^{\mathrm{T}}$ Jakobijeva matrica, Hesseova je matrica aproksimirana s

$$\nabla^2 e_{k,i}(\boldsymbol{W}) \approx \boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{f}_{k,i}(\boldsymbol{W}) \big)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{f}_{k,i}(\boldsymbol{W}) \big) = \boldsymbol{D}^{-1}_{k,i}(\boldsymbol{W}), \tag{5.100}$$

pa je, uvrštenjem (5.99) i (5.100) u (5.73), vrijednosti težinskih koeficijenata mreže u iteracijskom koraku κ estimirana kao

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa+1} = \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} - \boldsymbol{D}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} \right) \boldsymbol{J}\Big(\boldsymbol{f}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} \right) \Big)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} \right). \tag{5.101}$$

Pri tome je, partikularno za metodu EKF,

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{f}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\right) = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{V}}_{k,i}^{-1}\boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) \\ \bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k,i}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{5.102}$$

gdje je $\boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) = \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\right) = \left(\nabla \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ Jakobijeva matrica funkcije mjerenja, odnosno prijenosne funkcije mreže. Jednakost koraka iteracije (5.101) i iterativnog proširenog Kalmanovog filtra (IEKF) [72] pokazana je u [327], a u [328] je detaljno opisana metoda EKF kao inkrementalna inačica Gauss-Newtonove metode bez iteracija, pogodna za slijedno učenje neuronske mreže. Iterativni prošireni Kalmanov filtar modifikacija je metode EKF u smislu da se, prije određivanja estimacije (2.118) i matrice kovarijance greške estimacije (2.122), provode iteracije. U inačici diskretnog stohastičkog sustava, koraci estimacije primjenom metode IEKF s n iteracija, N uzoraka te n_z grupa, tako su, $\forall k \geq 0$:

K1 inicijalizacija s $\hat{\boldsymbol{W}}_{k,0}$, $\boldsymbol{P}_{k,0}$ i $\boldsymbol{Q}_{k,0}$

K2 $\forall i = 1, \ldots, N/n_z$,

$$\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} = \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i-1}, \tag{5.103}$$

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa=1} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i}, \tag{5.104}$$

$$\bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} = \boldsymbol{P}_{k,i-1} + \boldsymbol{Q}_{k,i-1} \tag{5.105}$$

K2a iteracije ($\kappa = 1, \ldots, n$),

$$\boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) = \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\right) = \left(\nabla \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{5.106}$$

$$\boldsymbol{K}_{k,i,\kappa} = \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i}\boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\bar{\boldsymbol{P}}_{k,i}\boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{k,i}\right)^{-1}, \tag{5.107}$$

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa+1} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} + \tag{5.108}$$

$$+\boldsymbol{K}_{k,i,\kappa}\left(\mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) - \boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\left(\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} - \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\right) \tag{5.109}$$

K2b krajnja estimacija i kovarijanca greške estimacije,

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i} = \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,n+1}, \tag{5.110}$$

$$\boldsymbol{P}_{k,i} = \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} - \boldsymbol{K}_{k,i,n}\boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i}\right)\bar{\boldsymbol{P}}_{k,i}. \tag{5.111}$$

U posebnom je slučaju rezultat prve iteracije metodom IEKF jednak rezultatu estimacije metodom EKF. Pri tome se kovarijanca mjerenja $\boldsymbol{R}_{k,i}$ interpretira kao inverzna vrijednost stope

učenja $\mu_{k,i}$, odnosno

$$\boldsymbol{R}_{k,i} = \mu_{k,i}^{-1} \boldsymbol{I}_{n_z}, \tag{5.112}$$

a budući da nikakva apriorna saznanja o vrijednostima koeficijenata nisu dostupna, za inicijalnu varijancu greške vrijedi $\boldsymbol{P}_{k,0} \gg \boldsymbol{I}_{n_x}$, odnosno

$$\boldsymbol{P}_{k,0} = \mathrm{b}^{-1} \boldsymbol{I}_{n_x}, \tag{5.113}$$

pri čemu je vrijednost konstante b uobičajeno u granicama od 0,001 do 0,01. Također je i kovarijanca procesnog šuma dijagonalna matrica,

$$\boldsymbol{Q}_{k,i} = \mathrm{c}^{-1} \boldsymbol{I}_{n_x}, \tag{5.114}$$

pri čemu je uobičajeno $0 < \mathrm{c} \leq 0{,}1$. U [324] je pokazano da se stopa učenja μ te konstante b i c mogu nezavisno ugađati i da odnos kovarijance mjerenja, greške i procesnog šuma može biti u proizvoljnoj mjeri, bez utjecaja na evoluciju težinskih koeficijenata. Npr. uz $\boldsymbol{R}_{k,i} = \mathrm{d}\mu_{k,i}^{-1} \boldsymbol{I}_{n_z}$, $\boldsymbol{P}_{0,i} = \mathrm{db}^{-1} \boldsymbol{I}_{n_x}$ i $\boldsymbol{Q}_{k,i} = \mathrm{dc}^{-1} \boldsymbol{I}_{n_x}$, pri čemu je $\mathrm{d} > 0$ neka proizvoljna pozitivna konstanta, evolucija je težinskih koeficijenata jednaka kao i za $\boldsymbol{R}_{k,i} = \mu_{k,i}^{-1} \boldsymbol{I}_{n_z}$, $\boldsymbol{P}_{k,0} = \mathrm{b}^{-1} \boldsymbol{I}_{n_x}$ i $\boldsymbol{Q}_{k,i} = \mathrm{c}^{-1} \boldsymbol{I}_{n_x}$.

Minimizacija kvadratne greške (5.97) metodom EKF nastoji zadovoljiti uvjet da je, za svaki korak estimacije i, kvadratna greška uz aposteriornu vrijednost koeficijenata manja od one uz njihovu apriornu vrijednost, odnosno da je

$$e_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i}\right) < e_{k,i}\left(\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i}\right), \tag{5.115}$$

što nije uvijek postizivo te može biti uzrok divergencije estimacije. Uvjet (5.115) može se zadovoljiti primjenom adaptivnog koraka $\mu_{k,i,\kappa} \in (0,1]$ u okviru iterativnog proširenog Kalmanovog filtra (IEKF), odnosno Gauss-Newtonove procedure rješavanja nelinearnog problema najmanjih kvadrata [326]. Tako je iteracija (5.108) modificirana kao

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa+1} &= \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} + \mu_{k,i,\kappa}\Big(\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} - \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} + \\ &\quad + \boldsymbol{K}_{k,i,\kappa}\Big(\mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) - \boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\left(\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} - \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\Big)\Big) \\ &= \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} + \mu_{k,i,\kappa}\boldsymbol{g}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right),\end{aligned} \tag{5.116}$$

a s obzirom na iteracijski korak κ, uvjet (5.115) postaje

$$e_{k,i}\Big(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} + \mu_{k,i,\kappa}\boldsymbol{g}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\Big) < e_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right), \tag{5.117}$$

pa je i vrijednost koeficijenata u iteracijskom koraku κ određena adaptivnim korakom $\mu^{(*)}_{k,i,\kappa}$ koji minimizira kvadratnu grešku, odnosno

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa+1} = \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} + \mu^{(*)}_{k,i,\kappa} \boldsymbol{g}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right), \tag{5.118}$$

pri čemu je

$$\mu^{(*)}_{k,i,\kappa} = \arg \min_{\mu_{k,i,\kappa} \in (0,1]} \left(e_{k,i}\Big(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} + \mu_{k,i,\kappa} \boldsymbol{g}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\Big)\right). \tag{5.119}$$

Kako je pokazano u [329], progresom iteracija minimizacija kvadratne greške (5.119) rezultira konvergencijom estimacije (5.118) prema rješenju maksimalne vjerodostojnosti. Tako su koraci estimacije za modificiranu metodu IEKF (uz najviše n iteracija):

K1 inicijalizacija s $\hat{\boldsymbol{W}}_{k,0}$, $\boldsymbol{P}_{k,0}$ i $\boldsymbol{Q}_{k,0}$

K2 $\forall i = 1, \ldots, N/n_z$,

$$\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} = \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i-1}, \tag{5.103}$$

$$\bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} = \boldsymbol{P}_{k,i-1} + \boldsymbol{Q}_{k,i-1} \tag{5.105}$$

K2a prva iteracija ($\kappa = 1$, metoda EKF),

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i}, \tag{5.104}$$

$$\boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) = \boldsymbol{J}\Big(\boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\Big) = \Big(\nabla \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}}\Big)^{\mathrm{T}}, \tag{5.106}$$

$$\boldsymbol{K}_{k,i,\kappa} = \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} \boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}} \Big(\boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} \boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{k,i}\Big)^{-1}, \tag{5.107}$$

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa+1} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} + \boldsymbol{K}_{k,i,\kappa}\Big(\mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i} \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i}\right)\Big) \tag{5.108}$$

K2b iteracije ($\kappa = 2, \ldots, n^{(*)} \leq n$), sve dok nije zadovoljen uvjet (5.117) ili je $\kappa > n$,

$$\boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) = \boldsymbol{J}\Big(\boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\Big) = \Big(\nabla \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}}\Big)^{\mathrm{T}}, \tag{5.106}$$

$$\boldsymbol{K}_{k,i,\kappa} = \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} \boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}} \Big(\boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} \boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{k,i}\Big)^{-1}, \tag{5.107}$$

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa+1} = \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} + \mu^{(*)}_{k,i,\kappa} \boldsymbol{g}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right), \tag{5.116}$$

pri čemu je s $n^{(*)} \leq n$ označen broj provedenih iteracija, a $\mu^{(*)}_{k,i,\kappa}$ je određen s (5.119)

K2c krajnja estimacija i kovarijanca greške estimacije,

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i} = \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,n^{(*)}+1}, \tag{5.110}$$

$$\boldsymbol{P}_{k,i} = \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} - \boldsymbol{K}_{k,i,n^{(*)}} \boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i}\right) \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i}. \tag{5.111}$$

Prema odjeljku 2.3.1, metodom se EKF, za uzorak i, aproksimira apriorna razdioba koeficijenata $p\left(\boldsymbol{W}_{k,i} \,|\, \mathbb{Z}^{i-1}_{\boldsymbol{\zeta},k}\right)$ Gaussovom te provodi propagacija kroz, u okolici apriorne vrijednosti $\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i}$, linearizirane prijenosne funkcije mreže $\boldsymbol{h}_{k,i}(\cdot)$. U kontekstu minimizacije kvadratne greške (5.97), aproksimacija očekivanja Hesseove matrice provodi se umnoškom gradijenata prema (5.100). Nasuprot tome, metoda UKF aproksimaciju apriorne razdiobe Gaussovom provodi minimalnim skupom deterministički određenih sigma-točki koje točno opisuju prva dva momenta razdiobe. Sigma-točke propagirane kroz nelinearnu prijenosnu funkciju mreže točnije, u odnosu na metodu EKF, opisuju prva dva momenta aposteriorne razdiobe, do točno drugog reda s obzirom na razvoj prijenosne funkcije mreže u Taylorov red i za bilo koju nelinearnost. Na taj se način provodi propagacija statistički linearizirane greške, jer je prema [330]

$$\operatorname{var}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right) = \boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} \boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{5.120}$$

$$E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}_{k,i,\kappa}\right) = \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} \boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{5.121}$$

pri čemu je

$$\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} = \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} - \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa-1}, \tag{5.122}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa} = \mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\mathbf{W}}_{k,i,\kappa}\right) = \mathbf{u}_{k,i} - \hat{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}, \tag{5.123}$$

pa je i

$$\boldsymbol{K}_{k,i,\kappa} = E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}_{k,i,\kappa}\right) \left(\operatorname{var}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right) + \boldsymbol{R}_{k,i}\right)^{-1}, \tag{5.124}$$

$$\boldsymbol{K}_{k,i,\kappa} \boldsymbol{H}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) = E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}_{k,i,\kappa}\right) \left(\operatorname{var}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right) + \boldsymbol{R}_{k,i}\right)^{-1} E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{5.125}$$

Kovarijance (5.120) i (5.121) opisane su sigma-točkama, pa je u kontekstu minimizacije kvadratne greške (5.97), i očekivanje Hesseove matrice aproksimirano sigma-točkama. Međutim, u odnosu na metodu EKF, vrijednost kovarijance procesnog šuma $\boldsymbol{Q}_{k,i} = E\left(\boldsymbol{w}_{k,i} \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}_{k,i}\right)$, vidi (5.75), određuju se drukčije. Dok se kovarijanca mjerenja $\boldsymbol{R}$, ukoliko je dijagonalna, algoritmom poništava te može biti bilo koje vrijednosti, postoje tri oblika kovarijance procesnog šuma $\boldsymbol{Q}$ za primjenu učenja u stvarnom vremenu kada amplitudna razdioba smetnje nije stacionaran proces [105]:

1. oblik dijagonalne matrice $\boldsymbol{Q}_{k,i} = Q_x \boldsymbol{I}_{n_x}$, gdje je s napretkom procesa učenja vrijednost parametra Q_x određena simuliranim kaljenjem
2. oblik koji ističe nedavne podatke i potiskuje stare primjenom faktora zaborava μ kao

$$\boldsymbol{Q}_{k,i} = \left(\mu^{-1} - 1\right) \boldsymbol{P}_{k,i},\ \mu \in (0,1] \tag{5.126}$$

3. oblik Robbins-Monrovljeve stohastičke aproksimacije inovacije [323] kao

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_{k,i} &= (1-\mu)\,\boldsymbol{Q}_{k,i-1} + \\ &+\mu \boldsymbol{K}_{k,i,n^{(*)}} \left(\mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i}\right)\right)\left(\mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i}\right)\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{k,i,n^{(*)}}^{\mathrm{T}},\ \mu \in [0,1].\end{aligned} \tag{5.127}$$

Tako su koraci estimacije za modificiranu metodu IUKF (uz najviše n iteracija):

K1 inicijalizacija s $\hat{\boldsymbol{W}}_{k,0}$, $\boldsymbol{P}_{k,0}$ i $\boldsymbol{Q}_{k,0}$ te s $W_0 = \frac{\lambda}{n_x+\lambda}$ i $W_\iota = \frac{1}{2(n_x+\lambda)}, \iota = 1,\ldots,2n_x$, gdje je $\lambda = \alpha^2(n_x+\gamma) - n_x$ parametar dizajna, pri čemu α kontrolira skaliranje, β grešku višeg reda i γ spljoštenost razdiobe (vidi odjeljak 2.3.1)

K2 $\forall i = 1,\ldots,N/n_z$,

$$\bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} = \boldsymbol{P}_{k,i-1} + \boldsymbol{Q}_{k,i-1} = \bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k,i}\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k,i}^{\mathrm{T}}, \tag{5.105}$$

$$\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} = \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i-1} \tag{5.128}$$

K2a određivanje sigma-točki,

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,0} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i}, \tag{2.134}$$

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,\iota} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} + \sqrt{\frac{n_x}{1-W_0}}\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k,i}\right)_\iota,\ \iota = 1,\ldots,n_x, \tag{2.135}$$

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,\iota+n_x} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} - \sqrt{\frac{n_x}{1-W_0}}\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k,i}\right)_\iota,\ \iota = 1,\ldots,n_x, \tag{2.136}$$

$$\tag{5.129}$$

pri čemu je s $(\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}})_\iota$ označen ι-ti stupac matrice $\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$

K2b prva iteracija ($\kappa = 1$, metoda UKF),

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i}, \tag{5.130}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,\kappa,\iota} = \bar{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,\iota},\ \iota = 0,\ldots,2n_x, \tag{5.131}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa} = \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right), \tag{5.132}$$

pri čemu sigma-točke opisuju apriorno mjerenje

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,\kappa,\iota} = \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,\kappa,\iota}\right),\ \iota = 0,\ldots,2n_x, \tag{5.133}$$

kovarijance,

$$\mathrm{var}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right) = \sum_{\iota=0}^{2n_x} W_i\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,\kappa,\iota} - \hat{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,\kappa,\iota} - \hat{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{5.134}$$

$$E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}^{\mathrm{T}}\right)=\sum_{\iota=0}^{2n_x}W_i\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,\kappa,\iota}-\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,\kappa,\iota}-\hat{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{5.135}$$

te Kalmanov koeficijent

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k,i,\kappa}=E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}^{\mathrm{T}}\right)\left(\mathrm{var}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right)+\boldsymbol{R}_{k,i}\right)^{-1} \tag{5.124}$$

K2c aposteriorna estimacija,

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa+1}=\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i}+\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k,i,\kappa}\left(\mathbf{u}_{k,i}-\boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i}\right)\right) \tag{5.108}$$

K2d iteracije ($\kappa=2,\ldots,n^{(*)}\leq n$), sve dok nije zadovoljen uvjet (5.117) ili je $\kappa>n$

i. sigma-točke,

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,\kappa,0}=\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}, \tag{2.134}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,\kappa,\iota}=\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}+\sqrt{\frac{n_x}{1-W_0}}\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k,i}\right)_{\iota},\ \iota=1,\ldots,n_x, \tag{2.135}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,\kappa,\iota+n_x}=\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}-\sqrt{\frac{n_x}{1-W_0}}\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k,i}\right)_{\iota},\ \iota=1,\ldots,n_x \tag{2.136}$$

ii. apriorno mjerenje,

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}=\boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i},\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right), \tag{5.132}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,\kappa,\iota}=\boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i},\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,\kappa,\iota}\right),\ \iota=0,\ldots,2n_x \tag{5.133}$$

iii. kovarijance,

$$\mathrm{var}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right)=\sum_{\iota=0}^{2n_x}W_i\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,\kappa,\iota}-\hat{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,\kappa,\iota}-\hat{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{5.134}$$

$$E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}^{\mathrm{T}}\right)=\sum_{\iota=0}^{2n_x}W_i\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,\kappa,\iota}-\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,\kappa,\iota}-\hat{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right)^{\mathrm{T}} \tag{5.135}$$

iv. Kalmanov koeficijent,

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k,i,\kappa}=E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}^{\mathrm{T}}\right)\left(\mathrm{var}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,\kappa}\right)+\boldsymbol{R}_{k,i}\right)^{-1} \tag{5.124}$$

v. korak estimacije,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa+1} &= \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} + \mu^{(*)}_{k,i,\kappa}\Bigg(\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} - \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} + \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k,i,\kappa}\Big(\mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right) - \\ &\quad - E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\tilde{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}_{k,i,\kappa}\right)\left(\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i} - \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\Big)\Bigg) \\ &= \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa} + \mu^{(*)}_{k,i,\kappa}\boldsymbol{g}_{k,i}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,\kappa}\right)\end{aligned} \tag{5.116}$$

pri čemu je s $n^{(*)} \leq n$ označen broj provedenih iteracija, a $\mu^{(*)}_{k,i,\kappa}$ je određen s (5.119)

K2e krajnja estimacija i kovarijanca greške estimacije,

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i} = \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,n^{(*)}+1}, \tag{5.110}$$

$$\boldsymbol{P}_{k,i} = \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i} - \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k,i,n^{(*)}} E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,n^{(*)}}\tilde{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}_{k,i,n^{(*)}}\right)\bar{\boldsymbol{P}}_{k,i}, \tag{5.111}$$

$$\boldsymbol{Q}_{k,i} = \begin{cases} Q_x \boldsymbol{I}_{n_x}, & \\ \left(\mu^{-1} - 1\right)\boldsymbol{P}_{k,i}, & \mu \in (0,1] \\ (1-\mu)\boldsymbol{Q}_{k,i-1} + \mu \boldsymbol{K}_{k,i,n^{(*)}}\Big(\mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i}\right)\Big)\cdot & \\ \cdot\Big(\mathbf{u}_{k,i} - \boldsymbol{h}_{k,i}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i}\right)\Big)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}_{k,i,n^{(*)}}, & \mu \in (0,1] \end{cases}. \tag{5.136}$$

pri čemu je μ parametar dizajna.

Za razliku od metoda Kalmanovog filtriranja EKF i UKF te njihovih iteracijskih inačica IEKF i IUKF, metoda čestičnog filtriranja ne postavlja nikakva ograničenja u pogledu razdiobe vrijednosti koeficijenata mreže $\boldsymbol{W}$ i amplitude uzoraka odjeka ζ. S druge strane, metode EKF i UKF primjenjive su u metodi čestičnog filtriranja unutar procesa aproksimacije optimalne propozicijske razdiobe kojom se minimizira varijanca koeficijenata (čestičnog filtra), vidi odjeljak 2.3.2. Kompozicija metoda bezderivacijskog filtriranja (UKF) i čestičnog filtriranja (PF) s N_{UPF} čestica, modificira metodu PF s N_{PF} čestica, vidi odjeljak 2.3.2, čiji su koraci filtriranja:

K1 inicijalizacija čestičnih koeficijenata mreže $\left\{\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,0,j}, j = 1,\ldots,N_{PF}\right\}$, pri čemu sve čestice imaju jednaku kovarijancu procesnog šuma $\boldsymbol{Q}_k$ i jednaku varijancu mjerenja R_k

K2 za svaki uzorak $i, i = 1,\ldots,N$

K2a za svaku česticu $j, j = 1,\ldots,N_{PF}$

i. izvlačenje uzorka $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}$ iz razdiobe koja je određena dinamikom sustava (5.75), odnosno

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i-1,j}, \boldsymbol{Q}_k\right) \tag{5.137}$$

ii. apriorno mjerenje

$$y_{k,i,j} = h_{k,i,j}\left(\zeta_{k,i}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right) \tag{5.138}$$

iii. vjerodostojnost mjerenja $u_{k,i}$, aproksimirana Gaussovom razdiobom,

$$p\left(u_{k,i} \,|\, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right) \approx \mathcal{N}\left(u_{k,i}; y_{k,i,j}, R_k\right) \tag{5.139}$$

iv. određivanje vrijednosti nenormiranih koeficijenata W uz primjenu propozicijske razdiobe koja je jednaka prijelaznoj razdiobi,

$$W_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right) = W_{k,i-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i-1,j}\right) \mathcal{N}\left(u_{k,i}; y_{k,i,j}, R_k\right), \tag{2.198}$$

pri čemu je $u_{k,i}$ član skupa $\mathbb{U}_k$ (5.78)

K2b određivanje vrijednosti normiranih koeficijenata $\mathscr{W}$ prema (2.199),

$$\mathscr{W}_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right) = \frac{W_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right)}{\sum_{\iota=1}^{N_{PF}} W_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,\iota}\right)}, \quad j = 1, \ldots, N_{PF} \tag{2.199}$$

K2c estimacija

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i} = \sum_{j=1}^{N_{PF}} \mathscr{W}_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right) \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j} \tag{2.192}$$

K2d te ponovno uzorkovanje ako je efektivni broj uzoraka

$$N_{eff} = \frac{N_{PF}}{\sum_{j=1}^{N_{PF}} \mathscr{W}_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right)} \tag{2.200}$$

manji od neke granične vrijednosti koja je parametar dizajna, (vidi odjeljak 2.3.2), u metodu UPF, s koracima filtriranja:

K1 inicijalizacija čestičnih koeficijenata mreže $\left\{\hat{\boldsymbol{W}}_{k,0,j}, j = 1, \ldots, N_{UPF}\right\}$, pripadajućih kovarijanci estimacije $\left\{\boldsymbol{P}_{k,0,j}, j = 1, \ldots, N_{UPF}\right\}$ te kovarijanci procesnog šuma $\left\{\boldsymbol{Q}_{k,0,j}, j = 1, \ldots, N_{UPF}\right\}$ i mjerenja $\boldsymbol{R}_k$ (inverzne vrijednosti stope učenja, jednake za sve čestice), a kao i u koraku K1 metode IUKF, vrijednosti sigma-točki određene su kao $W_0 = \frac{\lambda}{n_x+\lambda}$ i $W_\iota = \frac{1}{2(n_x+\lambda)}, \iota = 1, \ldots, 2n_x$, pri čemu je $\lambda = \alpha^2(n_x+\gamma) - n_x$ parametar dizajna (gdje parametar α kontrolira skaliranje, parametar β grešku višeg reda i parametar γ spljoštenost razdiobe, vidi odjeljak 2.3.1)

K2 za svaku grupu uzoraka $i, i = 1, \ldots, N/n_z$

K2a za svaku česticu $j, j = 1, \ldots, N_{UPF}$

i. apriorna estimacija vrijednosti koeficijenata mreže i njihova kovarijanca

$$\bar{\boldsymbol{W}}_{k,i,j} = \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i-1,j}, \tag{5.128}$$

$$\bar{\boldsymbol{P}}_{k,i,j} = \boldsymbol{P}_{k,i-1,j} + \boldsymbol{Q}_{k,i-1,j} = \bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k,i,j} \bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k,i,j}^{\mathrm{T}} \tag{5.105}$$

te odgovarajuće sigma-točke apriorne estimacije,

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,j,0} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}, \tag{2.134}$$

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,j,\iota} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i,j} + \sqrt{\frac{n_x}{1-W_0}} \left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k,i,j}\right)_\iota, \ \iota = 1,\ldots,n_x, \tag{2.135}$$

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,j,\iota+n_x} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i,j} - \sqrt{\frac{n_x}{1-W_0}} \left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k,i,j}\right)_\iota, \ \iota = 1,\ldots,n_x, \tag{2.136}$$

pri čemu je s $(\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}})_\iota$ označen ι-ti stupac matrice $\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$

ii. apriorno mjerenje (odnosno odaziv neuronske mreže na apriornu vrijednost koeficijenata mreže),

$$\bar{\boldsymbol{y}}_{k,i,j} = \boldsymbol{h}_{k,i,j}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}\right), \tag{5.132}$$

sa sigma-točkama

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,j,\iota} = \boldsymbol{h}_{k,i,j}\left(\boldsymbol{\zeta}_{k,i}, \bar{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,j,\iota}\right), \ \iota = 0,\ldots,2n_x \tag{5.133}$$

i kovarijancama

$$\operatorname{var}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}\right) = \sum_{\iota=0}^{2n_x} W_i \left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,j,\iota} - \bar{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}\right)\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,j,\iota} - \bar{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{5.134}$$

$$E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}^{\mathrm{T}}\right) = \sum_{\iota=0}^{2n_x} W_i \left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{W}}}_{k,i,j,\iota} - \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}\right)\left(\bar{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}_{k,i,j,\iota} - \bar{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}\right)^{\mathrm{T}} \tag{5.135}$$

iii. određivanje Kalmanovih koeficijenata

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k,i,j} = E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}^{\mathrm{T}}\right)\left(\operatorname{var}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}\right) + \boldsymbol{R}_k\right)^{-1} \tag{5.124}$$

uz rezidual mjerenja $\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}$ kao

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,j} = \mathbf{u}_{k,i} - \bar{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}, \tag{5.123}$$

aposteriorna estimacija

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,j} = \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i,j} + \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k,i,j}\tilde{\mathbf{u}}_{k,i,j}, \tag{5.140}$$

$$\boldsymbol{P}_{k,i,j} = \bar{\boldsymbol{P}}_{k,i,j} - \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k,i,j} E\left(\tilde{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}\tilde{\mathbf{u}}_{k,i,j}^{\mathrm{T}}\right)\bar{\boldsymbol{P}}_{k,i,j} \tag{5.111}$$

te Robbins-Monrovljeva stohastička aproksimacija inovacije

$$\boldsymbol{Q}_{k,i,j} = (1-\mu)\boldsymbol{Q}_{k,i-1,j} + \mu\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k,i,j}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k,i,j}^{\mathrm{T}}, \quad \mu \in [0,1] \tag{5.127}$$

iv. izvlačenje uzorka $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}$ iz normalne razdiobe čiji su parametri određeni aposteriornom kovarijancom $\boldsymbol{P}_{k,i,j}$ i aposteriornom estimacijom $\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}$,

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j} \sim \mathcal{N}\left(\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}, \boldsymbol{P}_{k,i,j}\right) \tag{5.141}$$

v. vrijednost razdiobe vjerojatnosti za uzorak $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}$, uz aproksimaciju optimalne propozicijske te prijelazne razdiobe Gaussovim razdiobama,

$$q_{opt}\left(\boldsymbol{W}_{k,i} \,|\, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i-1,j}, \mathbf{u}_{k,i}\right) \approx \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}; \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}, \boldsymbol{P}_{k,i,j}\right), \tag{5.142}$$

$$p\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j} \,|\, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i-1,j}\right) \approx \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}; \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}, \boldsymbol{Q}_{k,i,j}\right) \tag{5.143}$$

vi. vjerodostojnost mjerenja koja se također može aproksimirati Gaussovom razdiobom kao

$$p\left(\mathbf{u}_{k,i} \,|\, \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right) \approx \mathcal{N}\left(\mathbf{u}_{k,i}; \bar{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}, \boldsymbol{R}_k\right) \tag{5.144}$$

vii. određivanje vrijednosti nenormiranih koeficijenata W prema (2.198), primjenom razdiobi (5.142) – (5.144),

$$W_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right) = W_{k,i-1}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i-1,j}\right) \frac{\mathcal{N}\left(\mathbf{u}_{k,i}; \bar{\boldsymbol{y}}_{k,i,j}, \boldsymbol{R}_{k,i}\right) \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}; \bar{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}, \boldsymbol{Q}_{k,i,j}\right)}{\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}; \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,j}, \boldsymbol{P}_{k,i,j}\right)} \tag{2.198}$$

K2b određivanje vrijednosti normiranih koeficijenata $\mathscr{W}$ prema (2.199),

$$\mathscr{W}_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right) = \frac{W_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right)}{\sum_{\iota=1}^{N_{UPF}} W_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,\iota}\right)}, \quad j = 1, \ldots, N_{UPF} \tag{2.199}$$

K2c estimacija

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{k,i} = \sum_{j=1}^{N_{UPF}} \mathscr{W}_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right) \hat{\boldsymbol{W}}_{k,i,j} \tag{2.192}$$

K2d te ponovno uzorkovanje ako je efektivni broj uzoraka

$$N_{eff} = \frac{N_{UPF}}{\sum_{j=1}^{N_{UPF}} \mathscr{W}_{k,i}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k,i,j}\right)} \tag{2.200}$$

manji od neke granične vrijednosti koja je parametar dizajna, (vidi odjeljak 2.3.2).

5.2.2. Primjer primjene u estimaciji amplitudne razdiobe

U ovom primjeru, analiza točnosti estimacije amplitudne razdiobe smetnje proširena je s metodama koje razdiobu estimiraju implicitno, kroz estimaciju glatke interpolacije kumulativa vjerojatnosti. Određivanje vrijednosti parametara neuronske mreže provodi se u kontekstu optimizacije te slučajnog uzorkovanja.

U prvom dijelu primjera, u kontekstu optimizacije i grupnog učenja, provedena je analiza ovisnosti točnosti estimacije i računalnog opterećenja o broju neurona za kvazi-Newtonovu

metodu (QN) [317–322], pri čemu je estimacija provedena u linearnoj i logaritamskoj domeni. Dok pojam „logaritamska domena" podrazumijeva funkcionalnu ovisnost skupa uzoraka za estimaciju $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)} = \left\{\zeta_i^{(*)}, i = 1,\ldots,N\right\}$ o skupu izvornih amplituda $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}} = \{\zeta_i, i = 1,\ldots,N\}$ u obliku $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)} = \left\{\log\left(\mathrm{c}^{-1}\zeta_i\right), i = 1,\ldots,N\right\}$, pojam „linearna domena" podrazumijeva da je $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)} = \left\{\mathrm{c}^{-1}\zeta_i, i = 1,\ldots,N\right\}$, pri čemu je konstanta $\mathrm{c} = 1$ V. Također su, kao i za primjer u odjeljku 5.1.2, analizirane ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije i njihove normirane devijacije za nekoliko ključnih točaka dizajnirane vrijednosti tako da je $\mathbb{P}_{FA} = \left\{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}\right\}$.

U drugom dijelu primjera, u kontekstu slijednog učenja i fiksnog broja neurona, provedena je usporedba točnosti estimacije, računalnog opterećenja te ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije i njihovih normiranih devijacija za metode proširenog iteracijskog Kalmanovog filtra (IEKF) [72, 327, 328] i bezderivacijskog iteracijskog Kalmanovog filtra (IUKF) [330], pri čemu su vrijednosti koeficijenata određene rješavanjem problema optimizacije te čestičnog filtra (PF) i čestičnog filtra s implementacijom bezderivacijskog Kalmanovog filtriranja (UPF) [105], gdje su vrijednosti koeficijenata određene metodom slučajnog uzorkovanja.

Sve su navedene metode opisane u odjeljku 5.2.1 (stranice 251 – 265) i primjenjuju acikličku slojevitu mrežu s jednim skrivenim slojem, kako je ilustrirano slikom 5.32, tako da je

$$y = h\left(\zeta^{(*)}, \boldsymbol{W}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(w_{2m+1} + \boldsymbol{W}_o \tanh\left(\boldsymbol{W}_b + \boldsymbol{W}_i\zeta^{(*)}\right)\right)\right), \tag{5.145}$$

pri čemu je

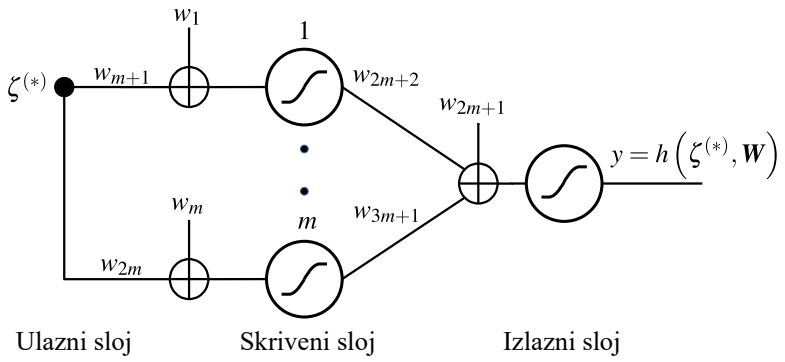
$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_b & \boldsymbol{W}_i & w_{2m+1} & \boldsymbol{W}_o\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{5.146}$$

s komponentama

$$\boldsymbol{W}_b = \begin{bmatrix}w_1 & \cdots & w_m\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{5.147}$$

$$\boldsymbol{W}_i = \begin{bmatrix}w_{m+1} & \cdots & w_{2m}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{5.148}$$

$$\boldsymbol{W}_o = \begin{bmatrix}w_{2m+2} & \cdots & w_{3m+1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{5.149}$$



Slika 5.32. Struktura acikličke mreže s jednim skrivenim slojem za estimaciju razdiobe.

Kao i za primjer u odjeljku 5.1.2, referentne su razdiobe određene na temelju stvarnih razdioba prikazanih slikom 5.2, za koje se vjeruje da ilustriraju specifičnosti Jadranskoga mora, vidi tablicu 3.1 te uvodni dio odjeljka 5.1.2 i vrijednosti istaknute masnim slovima u tablici 5.1. Analiza je također provedena primjenom alata za numeričko računanje Scilab [284], pomoću kojeg je računalna složenost izražena kroz procesorsko vrijeme posvećeno određenoj metodi, bez utjecaja pozadinskih procesa. Reference radi, operativni sustav je openSUSE Leap 15.1 [285] koji se odvija na Intelovoj procesorskoj platformi „Ivy Bridge" [286]. Parametri simulacije, zajednički za sve metode, prikazani su tablicom 5.5, a simulacija slijedi organizaciju ilustriranu slikom 5.3, pri čemu se za ovaj primjer „metoda" odnosi na kvazi-Newtonovu metodu te na metode IEKF, IUKF, PF i UPF.

Tablica 5.5. Parametri simulacije koji su zajednički svim analiziranim metodama estimacije amplitudne razdiobe smetnje.

Parametar	Vrijednost	Opis
p_{ζ}	$\mathcal{K}$	Referentna K-razdioba (3.33)
	$\mathcal{P}a$	Referentna Paretova razdioba (3.44)
$\nu^{(K)}$	1,00	Parametar oblika referentne K-razdiobe, vidi (3.33)
$\nu^{(P)}$	1,02	Parametar oblika referentne Paretove razdiobe, vidi (3.44)
$\beta^{(K)}$	0,0062 V^2	Parametar skaliranja referentne K-razdiobe, vidi (3.33)
$\beta^{(P)}$	49678,2 V^{-2}	Parametar skaliranja referentne Paretove razdiobe, vidi (3.44)
m	$2,\ldots,8$	Broj neurona u skrivenom sloju za fiksni broj uzoraka N
	3	Broj neurona u skrivenom sloju za promjenjivi broj uzoraka N
–	1	Broj skrivenih slojeva
–	$\frac{1}{2}\big(1+\mathrm{erf}\,(\cdot)\big)$	Aktivacijska funkcija
–	$\tanh(\cdot)$	Funkcija izlaznog sloja
N	1024	Broj uzoraka za promjenjivi broj neurona m
	$2^n, n=4,\ldots,11$	Broj uzoraka za fiksni broj neurona m
N_{ρ}	1	Broj koreliranih uzoraka teksture, vidi (5.41)
M	100	Broj stohastičkih realizacija
–	10^{-4}	Tolerancija za evaluaciju integrala u (5.13)

Kvazi-Newtonovom metodom analizirana je točnost estimacije i računalnog opterećenja ovisno o broju neurona m u skrivenom sloju. Također je provedena i analiza ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije i njihovih normiranih devijacija. U tablici 5.6, sabrani su specifični parametri za ovu metodu [331]. Inicijalne vrijednosti koeficijenata mreže određene su odabirom slučajne vrijednosti unutar određenog intervala, odnosno

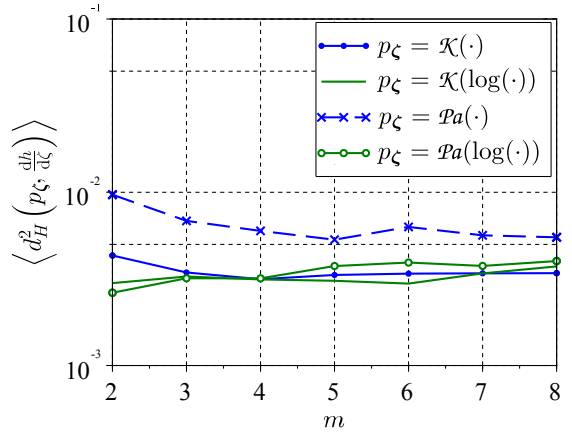
$$\boldsymbol{W}_0 = \left\{ w_{0,i} : w_{0,i} \sim \mathscr{U}(0,1), i = 1,\ldots,3m+1 \right\}. \tag{5.150}$$

Ako konvergencija uvjetovana normom gradijenta d_{∇} nije postignuta za maksimalni broj iteracija n i maksimalni broj poziva N_{nap} srednje kvadratne greške (5.63), rutina se ponavlja u novoj epohi, sve dok uvjet konvergencije d_{∇} nije postignut ili je dosegnut maksimalni broj epoha N_{eps}. U tom se slučaju primjenjuju posljednje estimirane vrijednosti koeficijenata.

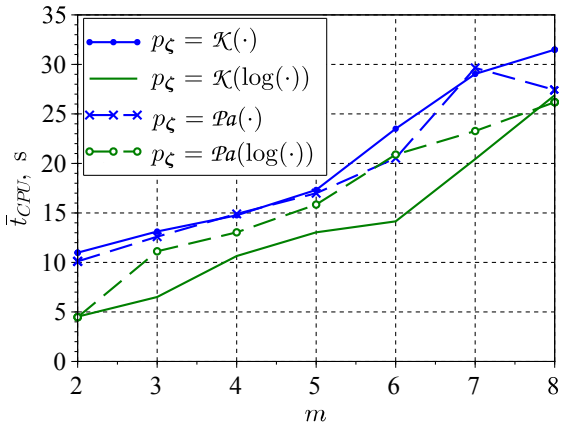
Tablica 5.6. Parametri specifični za kvazi-Newtonovu metodu [331].

Parametar	Vrijednost	Opis
–	BFGS	Implementacija prema [317–322], vidi (5.74)
d_∇	10^{-4}	Vrijednost norme gradijenta za zaustavljanje iteracija
N_{nap}	100	Maksimalni broj poziva funkcije srednje kvadratne greške (5.63)
n	100	Maksimalni broj iteracija
N_{eps}	20	Maksimalni broj epoha

Rezultati provedene analize kvazi-Newtonovom metodom ilustrirani su slikama 5.33 – 5.36. Iako je očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti $\left\langle d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\zeta}\right)\right\rangle$ približno jednako i za estimaciju u linearnoj i za estimaciju u logaritamskoj domeni (osim u slučaju Paretove razdiobe, gdje je ovo očekivanje nešto veće u linearnoj domeni kako to pokazuje slika 5.33a), ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$ bliže su dizajniranim vrijednostima P_{FA} pri estimaciji u logaritamskoj domeni, slika 5.34a. Pri tome su vrijednosti $\left\langle d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\zeta}\right)\right\rangle$, slika 5.33a, i $\hat{P}_{FA}$, slika 5.34a, usporedive s vrijednostima koje su rezultat primjene metode radijalne mreže EM, slike 5.4b, 5.18a i 5.19a, za jednak broj uzoraka N i približno jednak broj neurona m (u ovom slučaju $N = 1024$ i $m = 3$ za kvazi-Newtonovu metodu te $m = 4$ za metodu EM). Međutim, računalna složenost kvazi-Newtonove metode, ilustrirana slikom 5.33b za ovisnost o broju neurona m, višestruko je veća od računalne složenosti metode EM, slika 5.10a, i funkcionalne je ovisnosti kao $O(m)$. A kako pokazuje slika 5.34b, normirane su devijacije ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije $P_{FA}^{-1}\left(\left\langle\left\{P_{FA_i}^2, i = 1,\ldots,M\right\}\right\rangle - \hat{P}_{FA}^2\right)^{1/2}$ manje pri estimaciji u linearnoj domeni ali još uvijek veće od onih koje rezultiraju primjenom metode EM u logaritamskj domeni, slika 5.15, posebno za K-razdiobu. Brzina konvergencije u smislu očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti $\left\langle d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\zeta}\right)\right\rangle$ ovisno o broju uzoraka N, slika 5.35a, pokazuje ovisnost kao $o\left(N^{-0,9}\right)$ za K-razdiobu te $o\left(N^{-0,79}\right)$ za Paretovu razdiobu. To je nešto sporija konvergencija, osobito za Paretovu razdiobu, u odnosu na metodu EM s nešto većim brojem neurona ($m = 8$), slika 5.6. Kako ilustrira slika 5.35b, računalna složenost kvazi-Newtonove metode ne pokazuje istaknutu ovisnost o broju uzoraka N.

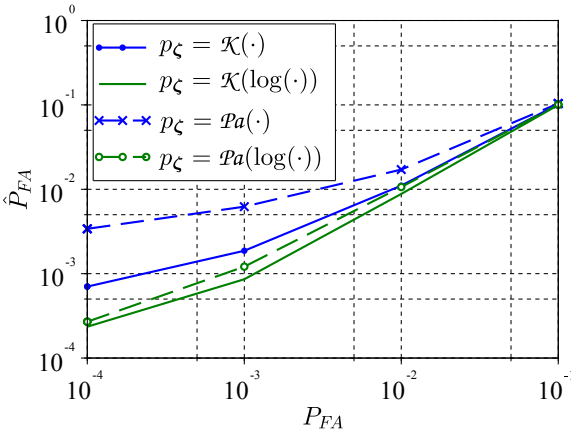


(a) Očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti.

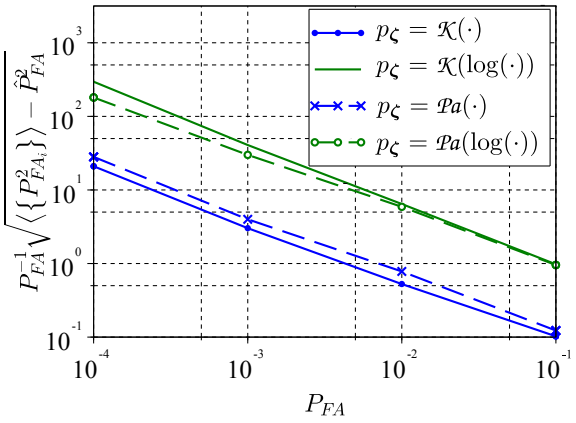


(b) Računalna složenost.

Slika 5.33. Ovisnost očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti i računalne složenosti o broju neurona m pri estimaciji K- i Paretove razdiobe kvazi-Newtonovom metodom uz $N = 1024$ uzoraka. Oznake $\mathcal{K}(\cdot)$ i $\mathcal{P}a(\cdot)$ odnose se na estimaciju K- odnosno Paretove razdiobe, a $\log(\cdot)$ naglašava estimaciju u logaritamskoj domeni.

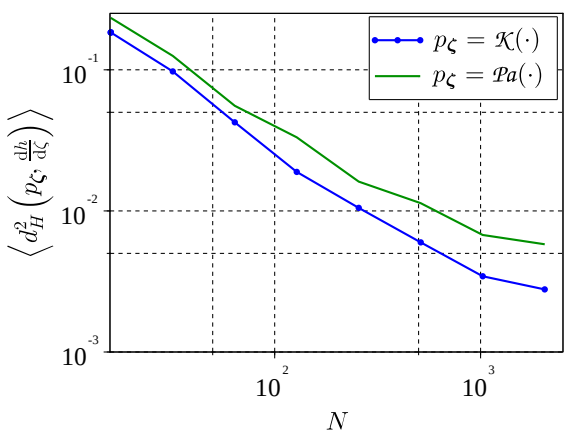


(a) Ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije.

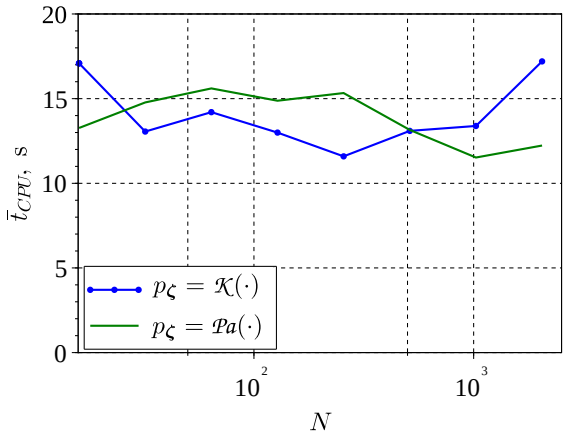


(b) Normirane devijacije.

Slika 5.34. Usporedba ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije i njihovih normiranih devijacija za kvazi-Newtonovu metodu, pri čemu je broj uzoraka $N = 1024$ i broj neurona $m = 3$. Oznake $\mathcal{K}(\cdot)$ i $\mathcal{P}a(\cdot)$ odnose se na estimaciju K- odnosno Paretove razdiobe, a $\log(\cdot)$ naglašava estimaciju u logaritamskoj domeni.

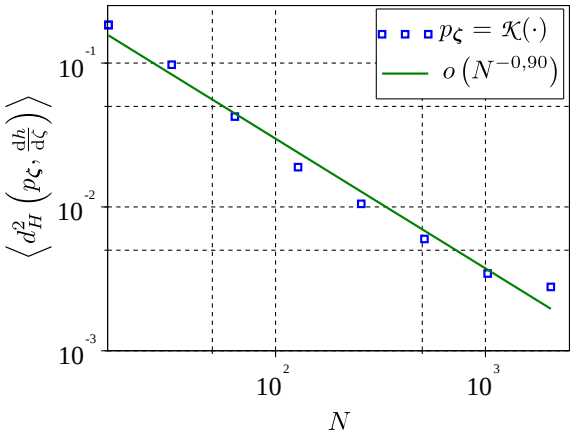


(a) Očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti.

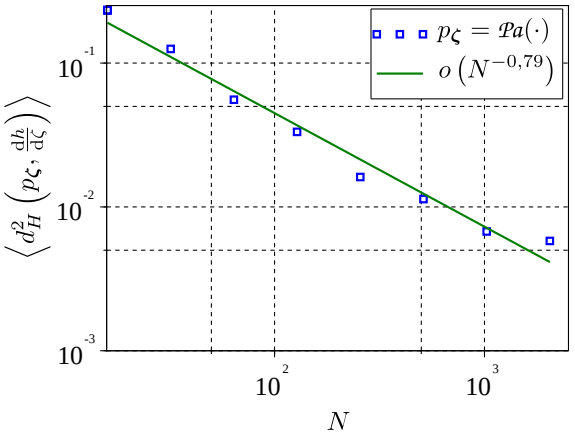


(b) Računalna složenost.

Slika 5.35. Ovisnost očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti i računalne složenosti o broju uzoraka N pri estimaciji K- i Paretove razdiobe kvazi-Newtonovom metodom uz $m = 3$ neurona. Oznake $\mathcal{K}(\cdot)$ i $\mathcal{P}a(\cdot)$ odnose se na estimaciju K- odnosno Paretove razdiobe.



(a) K-razdioba.



(b) Paretova razdioba.

Slika 5.36. Konvergencija očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti ovisno o broju uzoraka za kvazi-Newtonovu metodu. Pri tome je s $\mathcal{K}(\cdot)$ označena K-razdioba, a s $\mathcal{P}a(\cdot)$ Paretova razdioba.

Rezultati točnosti estimacije razdiobe kvazi-Newtonovom metodom, u smislu očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti i usporedbe s rezultatima metode EM, sugeriraju da je dovoljan broj neurona u skrivenom sloju 3 te da je točnija estimacija u linearnoj domeni. Na tom tragu i u kontekstu slijednog učenja, provedena je analiza točnosti estimacije razdiobe, ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije, njihovih normiranih devijacija te računalnog opterećenja primjenom iteracijskih metoda Kalmanovog filtriranja IEKF i IUKF te primjenom metode čestičnog filtriranja PF s inačicom UPF. Dok su zajednički parametri metoda IEKF i IUKF prikazani tablicom 5.7, parametri specifični za metodu IUKF prikazani su tablicom 5.8. Također, parametri metode PF prikazani su tablicom 5.9, a oni za metodu UPF tablicom 5.10.

Tablica 5.7. Zajednički parametri za metode iteracijskog proširenog Kalmanovog filtriranja (IEKF) i iteracijskog Kalmanovog filtriranja bez derivacije (IUKF).

Parametar	Vrijednost	Opis
n_x	$3m+1$	Duljina vektora stanja
n_z	1 ili 32	Broj članova grupe, vidi (5.81) i (5.82)
μ	1	Stopa učenja tako da je kovarijanca greške mjerenja jednaka $\boldsymbol{R} = \mu^{-1}\boldsymbol{I}_{n_z}$, vidi (5.112)
c	0,1	Konstanta tako da je kovarijanca procesnog šuma jednaka $\boldsymbol{Q} = \mathrm{c}^{-1}\boldsymbol{I}_{n_x}$, vidi (5.114)
b	0,01	Konstanta tako da je inicijalna kovarijanca greške jednaka $\boldsymbol{P}_0 = \mathrm{b}^{-1}\boldsymbol{I}_{n_x}$, vidi (5.113)
n	8	Maksimalni broj iteracija
N_{eps}	1	Maksimalni broj epoha

Tablica 5.8. Parametri specifični za metodu iteracijskog Kalmanovog filtriranja bez derivacije (IUKF).

Parametar	Vrijednost	Opis
α	10^{-3}	Parametar za kontrolu skaliranja, vidi odjeljak 2.3 (stranica 37) te opis metode na stranici 260
β	0	Parametar za kontrolu greške višeg reda, vidi odjeljak 2.3 (stranica 37) te opis metode na stranici 260
μ	0,1	Parametar Robbins-Monrovljeve stohastičke aproksimacije inovacije, vidi (5.127)

Tablica 5.9. Parametri specifični za metodu čestičnog filtriranja (PF).

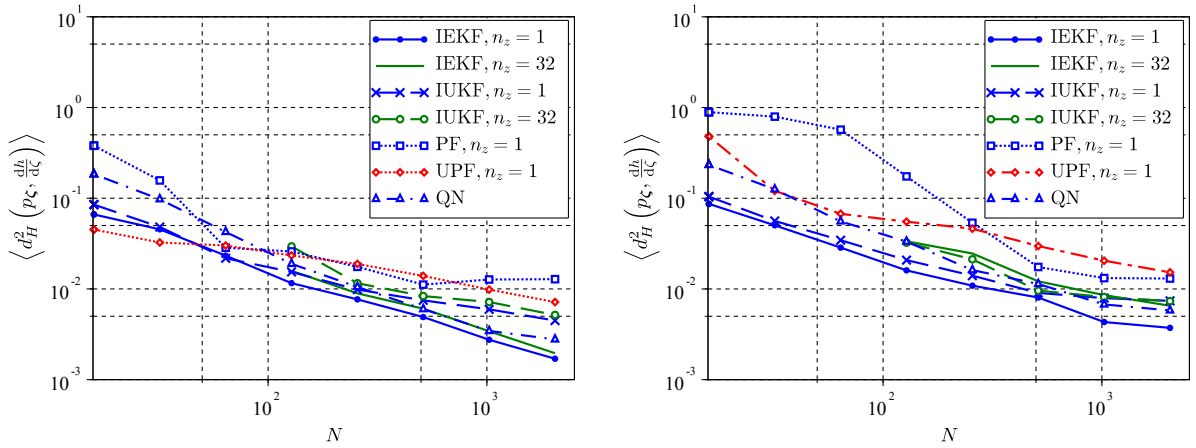
Parametar	Vrijednost	Opis
n_x	$3m+1$	Duljina vektora stanja
n_z	1	Broj članova grupe, vidi (5.81) i (5.82)
R	10^{-3}	Varijanca mjerenja, vidi opis metode na stranici 262
c	1.000	Konstanta tako da je kovarijanca procesnog šuma jednaka $\boldsymbol{Q} = \mathrm{c}^{-1}\boldsymbol{I}_{n_x}$, vidi (5.114)
N_{PF}	100	Broj čestica, vidi opis metode na stranici 262
N_{eps}	1	Maksimalni broj epoha

Tablica 5.10. Parametri specifični za metodu čestičnog filtriranja s implementacijom bezderivacijskog Kalmanovog filtra (UPF).

Parametar	Vrijednost	Opis
n_x	$3m+1$	Duljina vektora stanja
n_z	1	Broj članova grupe, vidi (5.81) i (5.82)
μ	1	Stopa učenja tako da je kovarijanca greške mjerenja jednaka $\boldsymbol{R} = \mu^{-1}\boldsymbol{I}_{n_z}$, vidi (5.112)
	0,5	Parametar Robbins-Monrovljeve stohastičke aproksimacije inovacije, vidi (5.127)
c	0,1	Konstanta tako da je kovarijanca procesnog šuma jednaka $\boldsymbol{Q} = \mathrm{c}^{-1}\boldsymbol{I}_{n_x}$, vidi (5.114)
b	0,01	Konstanta tako da je inicijalna kovarijanca greške jednaka $\boldsymbol{P}_0 = \mathrm{b}^{-1}\boldsymbol{I}_{n_x}$, vidi (5.113)
α	10^{-3}	Parametar za kontrolu skaliranja, vidi odjeljak 2.3 (stranica 37) te opis metode na stranici 263
β	0	Parametar za kontrolu greške višeg reda, vidi odjeljak 2.3 (stranica 37) te opis metode na stranici 263
N_{UPF}	10	Broj čestica, vidi opis metode na stranici 263
N_{eps}	1	Maksimalni broj epoha

Rezultati provedene analize metodama Kalmanovog i čestičnog filtriranja ilustrirani su slikama 5.37 – 5.40. U kontekstu točnosti estimacije, rezultati prikazani slikom 5.37 otkrivaju da se jedino metodom IEKF i grupiranjem parova za učenje u vektore s $n_z = 32$ komponente postiže

točnost i brzina konvergencije jednaka onoj kvazi-Newtonove metode (QN). Ostvarena točnost primjenom metode IUKF i grupiranjem parova za učenje u vektore s $n_z = 32$ komponente nešto je lošija (od kvazi-Newtonove metode) pri estimaciji K-razdiobe i s manjom brzinom konvergencije, $o\left(N^{-0,57}\right)$, ali je gotovo identična pri estimaciji Paretove razdiobe, u smislu točnosti i brzine konvergencije. Metode IEKF i IUKF bez grupiranja ($n_z = 1$) pokazuju veću točnost estimacije, ali manju brzinu konvergencije u odnosu na kvazi-Newtonovu metodu. Ostvarena brzina konvergencije jednaka je $o\left(N^{-0,77}\right)$ za K- i $o\left(N^{-0,66}\right)$ za Paretovu razdiobu i metodu IEKF, a metoda IUKF je nešto lošija, $o\left(N^{-0,59}\right)$ za K- i $o\left(N^{-0,56}\right)$ za Paretovu razdiobu. Rezultati ostvareni metodama čestičnog filtriranja, u smislu točnosti estimacije, pokazuju da za manji broj uzoraka, ($N \lesssim 100$), metoda UPF ostvaruje veću točnost u usporedbi s metodom PF ali uz bitno manji broj čestica, ($N_{UPF} = 10$ nasuprot $N_{PF} = 100$ za metodu PF). Razlika između metoda PF i UPF nestaje povećanjem broja uzoraka te njihova točnost postaje usporediva s metodom IUKF bez grupiranja. A u smislu brzine konvergencije, rezultati ostvareni metodama čestičnog filtriranja između su rezultata ostvarenih metodom bezderivacijskog Kalmanovog filtriranja bez grupiranja IUKF i kvazi-Newtonove metode, s brzinom konvergencije za metodu PF od $o\left(N^{-0,67}\right)$ za K- i $o\left(N^{-1,06}\right)$ za Paretovu razdiobu te, za metodu UPF, $o\left(N^{-0,37}\right)$ za K- i $o\left(N^{-0,61}\right)$ za Paretovu razdiobu.

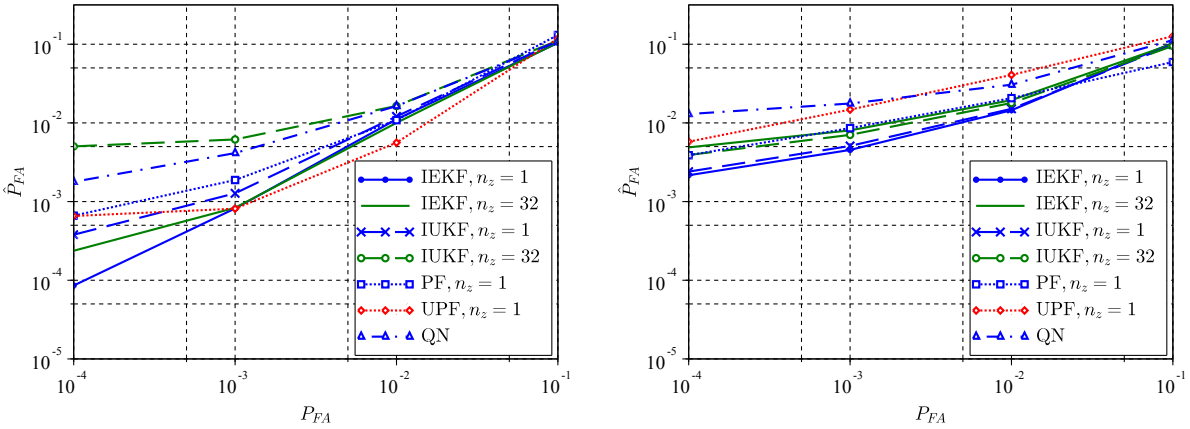


(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

Slika 5.37. Usporedba očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti o broju uzoraka N pri estimaciji K- i Paretove razdiobe uz $m = 3$ neurona. Metode IEKF i IUKF primjenjuju najviše $n = 8$ iteracijskih koraka. Dok metoda PF primjenjuje $N_{PF} = 100$ čestica, metoda UPF primjenjuje svega $N_{UPF} = 10$ čestica.

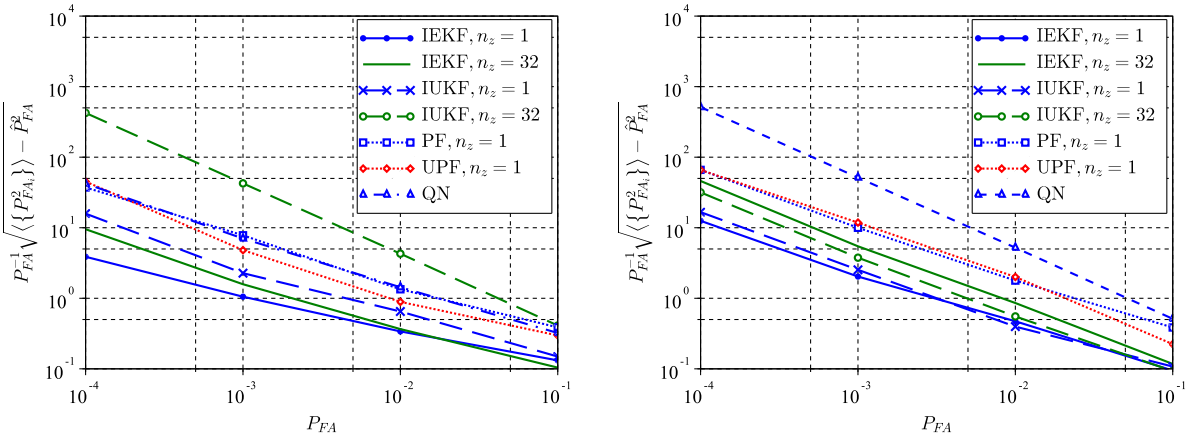
U kontekstu ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$, metodom IEKF bez grupiranja ($n_z = 1$) ostvaruju se vrijednosti najbliže dizajniranima u scenariju estimacije K-razdiobe, kako to ilustrira slika 5.38a. Pri tome je normirana devijacija ostvarenih rezultata $P_{FA}^{-1}\left(\left\langle\left\{P_{FA_i}^2, i = 1,\ldots,M\right\}\right\rangle - \hat{P}_{FA}^2\right)^{1/2}$, ilustrirana slikom 5.39a, za dizajnirane vrijednosti lažne detekcije $P_{FA} \geq 0{,}01$, usporediva s rezultatima metode EM u logaritamskoj domeni kako

to prikazuje slika 5.15a, za jednak broj uzoraka ($N = 1024$), ali uz nešto manji broj neurona ($m = 3$) u odnosu na metodu EM, gdje je primijenjena mreža RBF s $m = 8$ komponenti. A u scenariju estimacije Paretove razdiobe, rezultati ilustrirani slikama 5.38b i 5.39b slabiji su od rezultata EM metode, slike 5.14b i 5.15b, ali znanto bolji od onih ostvarenih kvazi-Newtonovom metodom. Zanimljivo je da su rezultati ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije metodom UPF blizu dizajniranima za K-razdiobu. Međutim, normirana je devijacija ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije, posebno u scenariju estimacije Paretove razdiobe, značajno veća od one koja rezultira primjenom metode IEKF bez grupiranja.



(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

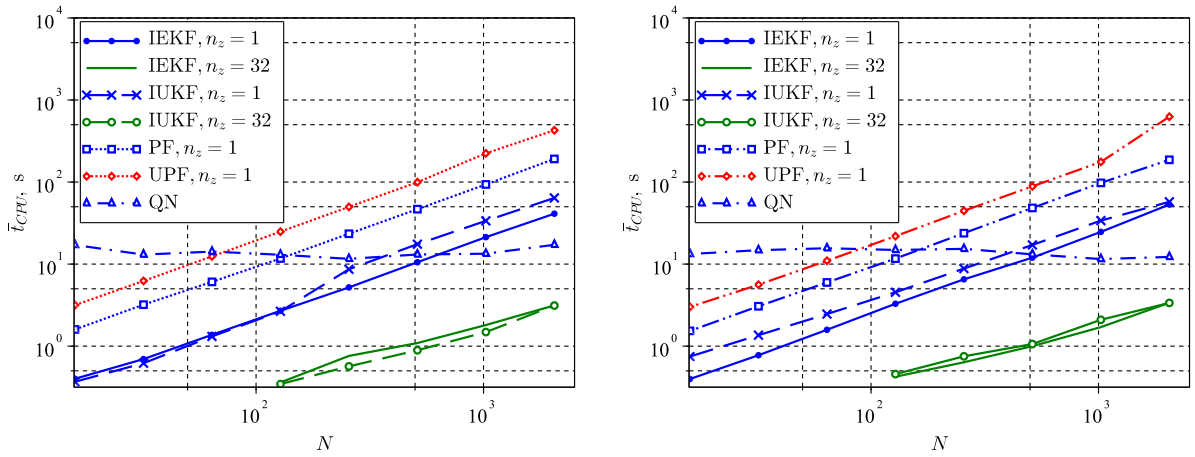
Slika 5.38. Usporedba ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije za K- i Paretovu razdiobu, pri čemu je broj uzoraka $N = 1024$ i broj neurona $m = 3$. Metode IEKF i IUKF primjenjuju najviše $n = 8$ iteracijskih koraka. Dok metoda PF primjenjuje $N_{PF} = 100$ čestica, metoda UPF primjenjuje svega $N_{UPF} = 10$ čestica.



(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

Slika 5.39. Usporedba normiranih devijacija ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije za K- i Paretovu razdiobu, pri čemu je broj uzoraka $N = 1024$ i broj neurona $m = 3$. Metode IEKF i IUKF primjenjuju najviše $n = 8$ iteracijskih koraka. Dok metoda PF primjenjuje $N_{PF} = 100$ čestica, metoda UPF primjenjuje svega $N_{UPF} = 10$ čestica.

U pogledu računalne složenosti $\bar{t}_{CPU}$, rezultati analize prikazani slikom 5.40 pokazuju da se metodama IEKF i IUKF uz grupiranje uzoraka u vektor s $n_z = 32$ komponente ostvaruje najmanja složenost, funkcionalne ovisnosti kao $O\left(N^{3/4}\right)$ za K- i Paretovu razdiobu. Ova je složenost nešto veća od one ostvarene metodom EM (funkcionalne ovisnosti kao $O\left(N^{1,2}\right)$, kako je to ilustrirano slikom 5.9a), ali zato sporije raste porastom broja uzoraka. Složenost metoda IEKF i IUKF bez grupiranja ($n_z = 1$) iznosi približno $O\left(N\right)$ za K- i Paretovu razdiobu. Složenost metoda čestičnog filtriranja PF i UPF je za otprilike dva reda veličine veća od složenosti metoda Kalmanovog filtriranja IEKF i IUKF s grupiranjem uzoraka u vektore s $n_z = 32$ komponente te za red veličine veća od složenosti metoda IEKF i IUKF bez grupiranja. Dok je funkcionalna ovisnost složenosti metoda čestičnog filtriranja izražena kao $O\left(N\right)$, za kvazi-Newtonovu metodu složenost ne pokazuje ovisnost o broju uzoraka N.



(a) K-razdioba.

(b) Paretova razdioba.

Slika 5.40. Usporedba računalnih složenosti o broju uzoraka N pri estimaciji K- i Paretove razdiobe uz $m = 3$ neurona. Metode IEKF i IUKF primjenjuju najviše $n = 8$ iteracijskih koraka. Dok metoda PF primjenjuje $N_{PF} = 100$ čestica, metoda UPF primjenjuje svega $N_{UPF} = 10$ čestica.

Iskustvo primjera iz odjeljka 5.1.2 pokazuje da je, u kontekstu nekoherentne detekcije i Viterbijeve metode pridruživanja, vrijednost normirane devijacije jako važna za vjerojatnost zadržavanja staze (što je manja, to je vjerojatnost zadržavanja staze bliža onoj koja rezultira primjenom praga detekcije uz apriorno poznatu razdiobu). Tako rezultati normiranih devijacija, ilustrirani slikom 5.39, i ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije, vidi sliku 5.38, pokazuju da je primjena acikličke slojevite mreže s jednim skrivenim slojem i $m = 3$ neurona, u kontekstu usporedbe s metodom radijalne mreže (uz metodu maksimizacije vjerodostojnosti u logaritamskoj domeni, vidi slike 5.14 i 5.15), prikladna za dizajnirane vrijednosti lažne detekcije $P_{FA} \geq 0{,}01$ i skup od $N = 1024$ uzoraka. Za manje je vrijednosti prag detekcije uvelike određen repom razdiobe, pri čemu je broj uzoraka (koji prelaze vrijednost praga) redovito malen. Radijalna je mreža, u odnosu na acikličku slojevitu, kompozicija baznih razdioba tako da i van dinamičkog područja određenog amplitudama skupa uzoraka, estimirana razdioba $\hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta\right) = \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}$ zadovoljava uvjete

$\hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta) > 0$ i $\int_{\mathbb{R}} \hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 1$, dok ona izvedena iz aproksimacije kumulativa vjerojatnosti to ne mora (pa se stoga i nameće uvjet monotonosti (5.64), što se pak u ovom primjeru ne provodi). Stoga estimacija vjerojatnosti lažne detekcije primjenom radijalne mreže pokazuje manju normiranu devijaciju, što znači da je ova arhitektura prikladnija za proces (nekoherentne) detekcije jer se dobri rezultati ostvaruju za dizajnirane vjerojatnosti lažne detekcije sve do $P_{FA} \approx 1/N$.

A u kontekstu računalne složenosti, rezultati ilustrirani slikom 5.40 pokazuju da je, zbog velikih vrijednosti složenosti kada se za učenje primjenjuje cijela grupa od N uzoraka, arhitektura acikličke slojevite mreže prikladnija za slijedno učenje, za razliku od metode radijalne mreže s maksimiziranjem vjerodostojnosti koja je prilagođena grupnom učenju. Značajka se slijednog učenja može iskoristiti u procesu estimacije amplitudne razdiobe odjeka cilja $p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\zeta)$ (radi estimacije omjera vjerodostojnosti $\ell = p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\zeta)/p_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)$, što je tema sljedećeg primjera), jer se pretpostavljeno, ova statistika ne mijenja u velikoj mjeri s vremenom kao $p_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)$.

5.3. Primjer estimacije omjera vjerodostojnosti

Cilj ovog primjera je testiranje hipoteza H1 i H2 (stranica 202) u okviru primjene otiska cilja i smetnje u procesu praćenja. U kontekstu omjera vjerodostojnosti amplitudnih razdioba (odjeka cilja i smetnje), hipoteze se mogu preformulirati kao:

- H1$^{(**)}$ vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena primjenom omjera vjerodostojnosti nije značajno lošija od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom ispravnog modela
- H2$^{(**)}$ vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena primjenom omjera vjerodostojnosti značajno je bolja od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom pogrešnog modela.

Pri tome je primjer podijeljen u dva segmenta. U prvome se segmentu analiziraju značajke acikličke neuronske mreže sa jednim skrivenim slojem u pogledu ostvarene točnosti estimacije otiska (u ovom primjeru amplitudne razdiobe), u posebnom slučaju slijednog učenja te uz nepoznatu jakost odjeka cilja i unaprijed nepoznatu veličinu skupa uzoraka, u kontekstu usporedbe s radijalnom mrežom gdje je primijenjena metoda maksimizacije vjerodostojnosti. Na temelju ostvarenih rezultata, u drugome se segmentu provodi testiranje hipoteza H1$^{(**)}$ i H2$^{(**)}$.

Ako su odjeci cilja i smetnje rezultat stacionarnih stohastičkih procesa, pored estimacije amplitudne razdiobe primjenom radijalne mreže i maksimiziranjem vjerodostojnosti, primjenjiva je i estimacija slijednom metodom (IEKF, IUKF, PF ili UPF) u okviru acikličke višeslojne mreže, vidi odjeljak 5.2.1 (stranice 258 – 265), pri čemu je prednost dana metodi IEKF zbog njenog malog računalnog opterećenja i dobre točnosti estimacije, kako je pokazano primjerom u odjeljku 5.2.2. Dok metoda maksimizacije vjerodostojnosti primjenjuje, za svaki trenutak opservacije t_k, cjelokupni skup uzoraka $\mathbb{Z}^k_{\boldsymbol{\zeta}} = \left\{\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},\kappa}, \kappa = 1,\ldots,k\right\}$, $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},\kappa} = \left\{\zeta_{\kappa,j}, j = 1,\ldots,n_\kappa\right\}$,

slijedna metoda primjenjuje samo skup $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},\kappa}$, odnosno redom uzorke $\zeta_{k,j}, j=1,\ldots,n_k$, rezultirajući manjim računalnim opterećenjem, što je prednost. Nedostatak je u tome što, za razliku od metode radijalne mreže, nije potpuno sigurno da je estimirana razdioba $\hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$ valjana probabilistička funkcija, odnosno da su ispunjeni uvjeti $\hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta) \geq 0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ i $\int_0^\infty \hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 1$.

Primjerom u odjeljku 5.2.2 pokazano je da se primjenom acikličke mreže sa samo jednim slojem i tri neurona te slijednim učenjem metodom Kalmanovog filtriranja u okviru metode glatkog izglađivanja kumulativa vjerojatnosti (SIC), ostvaruje zadovoljavajuća točnost estimacije amplitudne razdiobe. Međutim, skup za učenje $\mathbb{U}$ nepoznate je veličine (jer nije poznato koliko je vrijeme trajanja staze praćenog cilja), pa je stoga metoda modificirana na način koji opisuju sljedeći koraci (metoda inkrementalne glatke interpolacije kumulativa vjerojatnosti (ISIC)):

K1 inicijalizacija s $\hat{\boldsymbol{W}}_{k,0}$, $\boldsymbol{P}_{k,0}$ i $\boldsymbol{Q}_{k,0}$ u trenutku t_0 kada je broj uzoraka inicijalnog skupa $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},0} = \{\zeta_{0,j}, j=1,\ldots,n_0\}$ dovoljan, pri čemu je n_0 parametar dizajna

K1a formiranje inicijalnih parova za učenje

$$\left\{\left(h_i(\zeta_i, \boldsymbol{W}_i), u_i\right), i=1,\ldots,n_0\right\}, \tag{5.151}$$

gdje su ζ_i i u_i elementi potpuno uređenih skupova

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},0}^{(*)} = (\zeta_1 \leq \cdots \leq \zeta_{n_0}) = (\zeta_i, i=1,\ldots,n_0), \tag{5.57}$$

$$\mathbb{U}_0^{(*)} = (u_1 \leq \cdots \leq u_{n_0}) = \left(u_i : u_i = \frac{i}{n_0+1}, i=1,\ldots,n_0\right), \tag{5.58}$$

rezultat razvrstavanja elemenata skupova

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},0} = \left\{\zeta_{0,j(1)},\ldots,\zeta_{0,j(n_0)}\right\}, \tag{5.77}$$

$$\mathbb{U}_0 = \left\{u_{j(1)},\ldots,u_{j(n_0)}\right\} \tag{5.78}$$

po veličini, pri čemu je skup indeksa $\{j(1),\ldots,j(n_0)\}$ permutacija skupa indeksa $(1,\ldots,n_0)$

K1b $\forall j = 1,\ldots,n_0$, korak K2 iterativnog proširenog Kalmanovog filtriranja (stranica 258, pri čemu je $k=0$, $N=n_0$ i $n_z=1$, a broj koraka iteracija n je parametar dizajna), tako da su parovi za učenje $\left\{\left(h_{0,j}\left(\zeta_{0,j}, \boldsymbol{W}_{0,j}\right), u_{i(j)}\right)\right\}$ slučajni slijed (redom elementi skupova $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},0}$ i $\mathbb{U}_0$, pri čemu vrijedi da je $u_{i(j)} \in \mathbb{U}_0^{(*)}$ te da je $i(j) = \arg\min_{i=1,\ldots,n_0}\left(\left|\zeta_i - \zeta_{0,j}\right|\right), \zeta_i \in \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{(*)}, \zeta_{0,j} \in \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},0}$)

K2 $\forall t_k = t_1,\ldots,t_\infty$, inkrement skupova $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k-1}$ i $\mathbb{U}_{k-1}^{(*)}$, ovisno o broju mjerenja n_k pri opservaciji u trenutku t_k, tako da je

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^k = \left\{\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k-1}, \left\{\zeta_{k,j}, j=1,\ldots,n_k\right\}\right\} = \left\{\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k-1}, \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k}\right\}, \tag{5.77}$$

$$\mathbb{U}_k^{(*)} = \left(u_i : u_i = \frac{i}{\sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa + 1}, i = 1, \ldots, \sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa \right) \tag{5.58}$$

K2a korak iterativnog proširenog Kalmanovog filtriranja, gdje su, $\forall j = 1, \ldots, n_k$, parovi za učenje

$$\left\{ \left(h_{k,j}\left(\zeta_{k,j}, \boldsymbol{W}_{k,j}\right), u_{i(j)} \right), \right.$$
$$\left. i(j) = \arg \min_{i=1,\ldots,\sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa} \left(\left| \zeta_i - \zeta_{k,j} \right| \right), \zeta_i \in \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k(*)}, \zeta_{k,j} \in \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k}, u_{i(j)} \in \mathbb{U}_k^{(*)} \right\} \tag{5.151}$$

ponovno slučajni slijed, pri čemu su potpuno uređeni skupovi

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k(*)} = \left(\zeta_1 \leq \cdots \leq \zeta_{\sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa} \right) = \left(\zeta_i, i = 1, \ldots, \sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa \right), \tag{5.57}$$

$$\mathbb{U}_k^{(*)} = \left(u_1 \leq \cdots \leq u_{\sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa} \right) = \left(u_i : u_i = \frac{i}{\sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa + 1}, i = 1, \ldots \sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa \right), \tag{5.58}$$

nastali razvrstavanjem elemenata skupova

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k} = \left\{ \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},\kappa}, \kappa = 0, \ldots, n_k \right\} = \left\{ \zeta_{j(1)}, \ldots, \zeta_{j\left(\sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa\right)} \right\}, \tag{5.77}$$

$$\mathbb{U}_k = \left\{ u_{j(1)}, \ldots, u_{j\left(\sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa\right)} \right\} \tag{5.78}$$

po veličini, pri čemu je s $\left\{ j(1), \ldots, j\left(\sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa\right) \right\}$ označena permutacija indeksa $\left(1, \ldots, \sum_{\kappa=0}^{k} n_\kappa\right)$ elemenata potpuno uređenih skupova $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k}^{(*)}$ i $\mathbb{U}_k^{(*)}$).

Testiranje hipoteze H0 $\left(d_H^2\right)$ da ne postoji značajna razlika između metode SIC i ISIC u pogledu očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti $\left\langle d_H^2(\cdot) \right\rangle$ (5.13), provedena je testiranjem

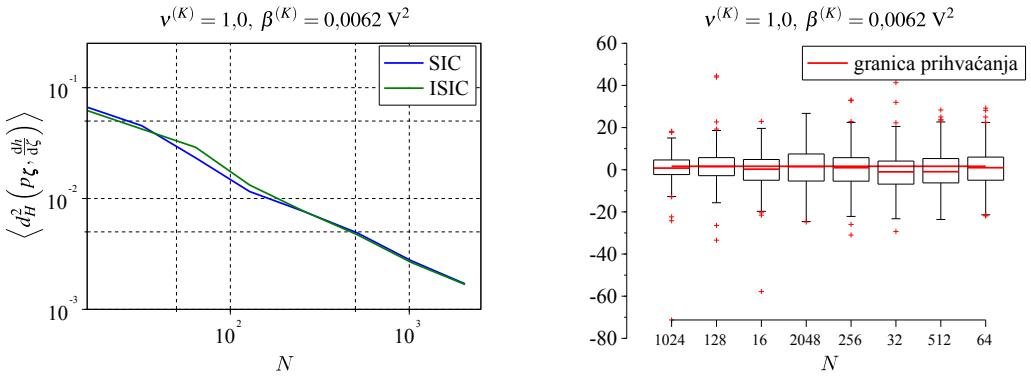
$$\mathcal{T}\left(d_H^2\right) = \frac{\overline{\Delta J}\left(d_H^2\right)}{\sigma_{\overline{\Delta J}\left(d_H^2\right)}} = \frac{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \Delta C_i\left(d_H^2\right)}{\sqrt{\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\left(\Delta C_i\left(d_H^2\right) - \overline{\Delta J}\left(d_H^2\right)\right)^2}} \tag{5.151}$$

s obzirom na granicu prihvaćanja d, koja za pouzdanost testa 95 % i Gaussovu razdiobu veličine $\Delta C\left(d_H^2\right)$ iznosi $d = 1{,}65$ (vidi dodatak C.1). Pri tome je

$$\Delta C\left(d_H^2\right) = C\left(d_H^2\right)^{(\mathrm{ISIC})} - C\left(d_H^2\right)^{(\mathrm{SIC})}, \tag{5.152}$$

gdje $C\left(d_H^2\right)^{(\mathrm{SIC})} = d_H^2(\cdot)^{(\mathrm{SIC})}$ i $C\left(d_H^2\right)^{(\mathrm{ISIC})} = d_H^2(\cdot)^{(\mathrm{ISIC})}$ označavaju kriterijske funkcije za metodu SIC, odnosno ISIC.

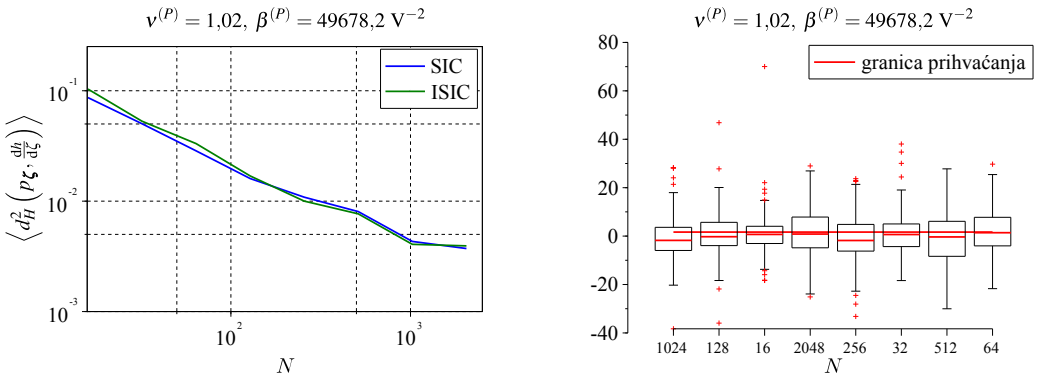
Provedena simulacija za testiranje testne statistike (5.151) organizirana je u skladu sa shematskim prikazom na slici 5.3, pri čemu „metoda" označava metodu SIC, odnosno metodu ISIC. Dok vrijednosti parametra simulacije prikazuje tablica 5.5, pri čemu je za ovaj primjer $n_z = 1$, vrijednosti parametara metode IEKF prikazuje tablica 5.7, uz dodatni parametar metode ISIC $n_0 = 4$. Navedene su metode implementirane arhitekturom acikličke jednoslojne neuronske mreže ilustrirane slikom 5.32. Ovisnost očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti pri estimaciji K- i Paretove amplitudne razdiobe ilustriraju slike 5.41a i 5.42a. Normirane razdiobe rezultata, prikazane dijagramima pravokutnika (vidi primjer u odjeljku 4.5, stranica 185) na slikama 5.41b i 5.42b, pokazuju simetričnost razdiobe te se može pretpostaviti jednakost testne statistike (5.151) i medijana Q_2, koji je za sve vrijednosti broja uzoraka N unutar granice prihvaćanja, što znači da ne postoji značajna razlika između metoda ISIC i SIC u kontekstu očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti.



(a) Usporedba rezultata.

(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.41. Rezultati usporedbe metoda SIC i ISIC za smetnju prema amplitudnoj K-razdiobi, pri čemu je parametar metode ISIC $n_0 = 4$, a za obje su metode parametri simulacije dani tablicom 5.5, uz $n_z = 1$.



(a) Usporedba rezultata.

(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.42. Rezultati usporedbe metoda SIC i ISIC za smetnju prema amplitudnoj Paretovoj razdiobi, pri čemu je parametar metode ISIC $n_0 = 4$, a za obje su metode parametri simulacije dani tablicom 5.5, uz $n_z = 1$.

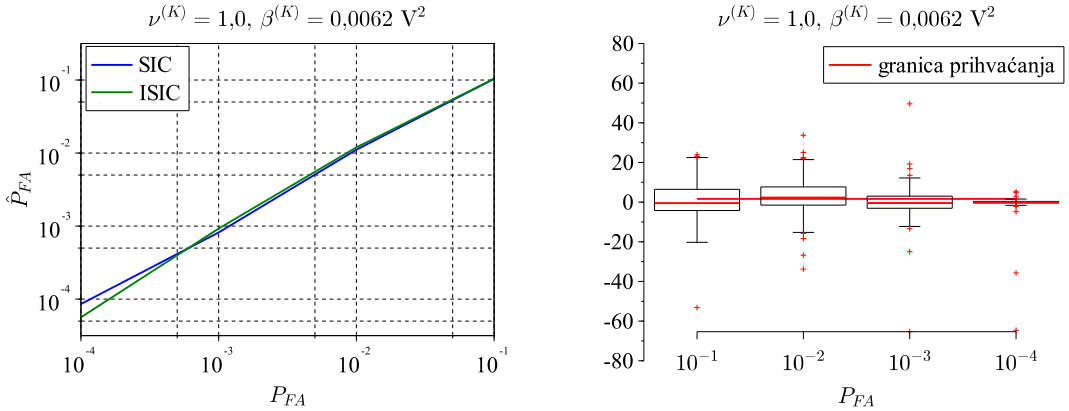
Testiranje hipoteze H0 $\left(\tilde{P}_{FA}\right)$ da odstupanje ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$ metodom ISIC u odnosu na dizajnirane vrijednosti P_{FA} nije značajno veće od odstupanja koja su ostvarena metodom SIC, provodi se testiranjem

$$\mathcal{T}\left(\tilde{P}_{FA}\right) = \frac{\overline{\Delta J}\left(\tilde{P}_{FA}\right)}{\sigma_{\overline{\Delta J}\left(\tilde{P}_{FA}\right)}} = \frac{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\Delta C_i\left(\tilde{P}_{FA}\right)}{\sqrt{\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\left(\Delta C_i\left(\tilde{P}_{FA}\right) - \overline{\Delta J}\left(\tilde{P}_{FA}\right)\right)^2}} \tag{5.153}$$

u odnosu na granicu prihvaćanja d. Kriterijska funkcija za metodu ISIC jednaka je $C\left(\tilde{P}_{FA}\right)^{(\mathrm{ISIC})} = \left|P_{FA} - P_{FA}^{(\mathrm{ISIC})}\right|$, a za metodu SIC, $C\left(\tilde{P}_{FA}\right)^{(\mathrm{SIC})} = \left|P_{FA} - P_{FA}^{(\mathrm{SIC})}\right|$. Pod pretpostavkom Gaussove razdiobe veličine

$$\Delta C\left(\tilde{P}_{FA}\right) = C\left(\tilde{P}_{FA}\right)^{(\mathrm{ISIC})} - C\left(\tilde{P}_{FA}\right)^{(\mathrm{SIC})}, \tag{5.154}$$

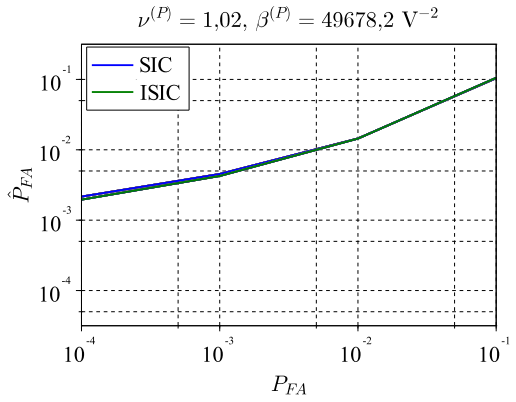
ne postoji značajna razlika između metoda ako je testna statistika (5.153) manja od granice prihvaćanja $d = 1{,}65$, što je vrijednost za sigurnost testa 95 %. Rezultati usporedbe ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$, u ovisnosti o razdiobi smetnje, prikazani su slikama 5.43a i 5.44a. Normirane razdiobe rezultata, ilustrirane slikama 5.43b i 5.44b, pokazuju simetričnost razdioba te se testna statistika (5.153) može aproksimirati medijanom Q_2 koji je, za sve vrijednosti dizajnirane vjerojatnosti lažne detekcije P_{FA}, unutar granice prihvaćanja. Time je pokazano da ne postoji značajna razlika između metode ISIC i SIC u pogledu ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$. Normirane devijacije, ilustrirane slikom 5.45, pokazuju dobro slaganje između metoda, osim pri malim vrijednostima dizajnirane vjerojatnosti P_{FA} i K-razdiobi, gdje su normirane devijacije ostvarene metodom ISIC značajno manje.



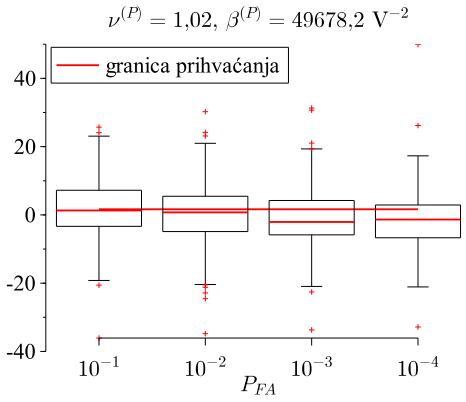
(a) Usporedba rezultata.

(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.43. Rezultati usporedbe metoda SIC i ISIC u kontekstu ostvarene vjerojatnost lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$ i smetnje prema amplitudnoj K-razdiobi, pri čemu je parametar metode ISIC $n_0 = 4$, a za obje su metode parametri simulacije dani tablicom 5.5, uz $n_z = 1$.

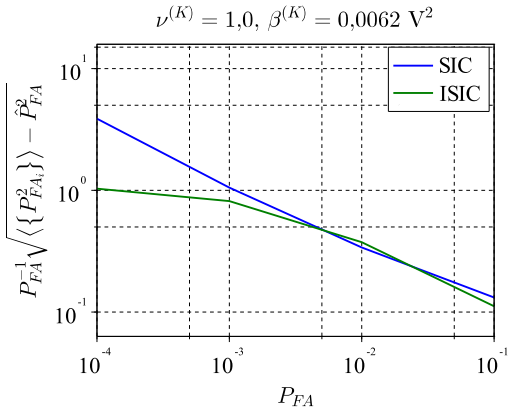


(a) Usporedba rezultata.

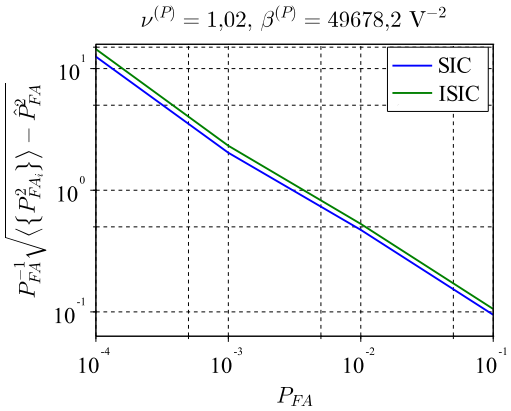


(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.44. Rezultati usporedbe metoda SIC i ISIC u kontekstu ostvarene vjerojatnost lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$ i smetnje prema amplitudnoj Paretovoj razdiobi, pri čemu je parametar metode ISIC $n_0 = 4$, a za obje su metode parametri simulacije dani tablicom 5.5, uz $n_z = 1$.



(a) K-razdioba.



(b) Paretova razdioba.

Slika 5.45. Usporedba normiranih devijacija ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije pri K- i Paretovoj razdiobi smetnje, za metode ISIC i SIC.

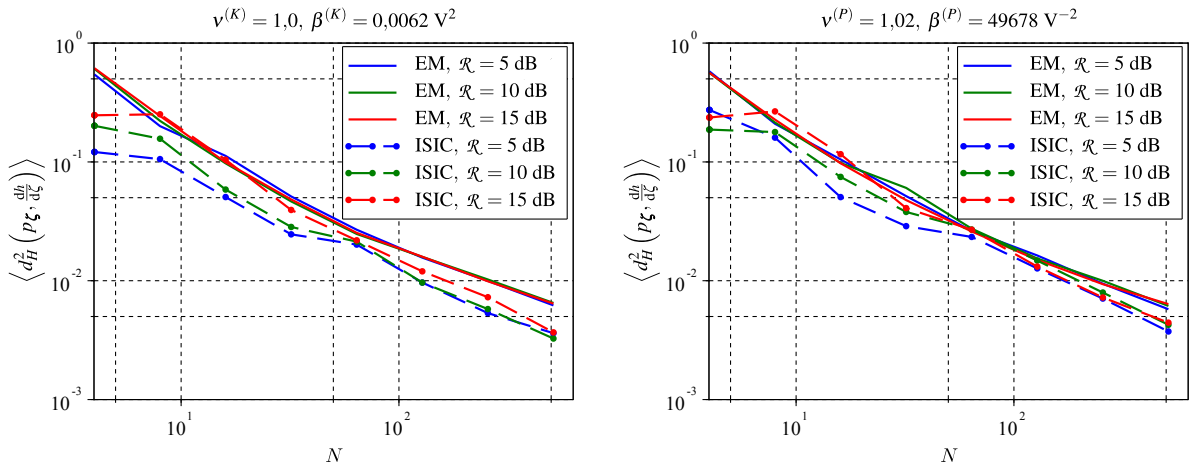
Naposljetku, u posljednjem dijelu prvog segmenta ovog primjera provedena je analiza značajki metode ISIC u pogledu točnosti estimacije amplitudne razdiobe odjeka cilja te računalnog opterećenja, za različite vrijednosti omjera $\mathcal{R}$ (omjera snage signala prema snazi smetnje) i za K- i Paretovu razdiobu smetnje posebno, pod pretpostavkom odjeka cilja koji fluktuira u skladu sa Swerlingovim modelom br. 1 [73]. Tako je razdioba odjeka cilja $p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}$ opisana s

$$p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\zeta)=\begin{cases}\dfrac{\zeta}{\left(\frac{\beta^{(K)}}{2}\right)^{\nu^{(K)}}\Gamma\left(\nu^{(K)}\right)}\int_0^\infty\dfrac{\eta^{\nu^{(K)}-1}}{\eta+d}\exp\left(-\dfrac{2\eta}{\beta^{(K)}}-\dfrac{\zeta^2}{2(\eta+d)}\right)\mathrm{d}\eta, & p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}=\mathcal{K}\\ \dfrac{\zeta}{\left(\frac{\beta^{(P)}}{2}\right)^{\nu^{(P)}}\Gamma\left(\nu^{(P)}\right)}\int_0^\infty\dfrac{\eta^{-\nu^{(P)}-1}}{\eta+d}\exp\left(-\dfrac{2}{\beta^{(P)}\eta}-\dfrac{\zeta^2}{2(\eta+d)}\right)\mathrm{d}\eta, & p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}=\mathcal{P}a\end{cases}, \tag{5.155}$$

pri čemu su $\nu^{(K)}$ i $\beta^{(K)}$, odnosno $\nu^{(P)}$ i $\beta^{(P)}$ parametri oblika i skaliranje K- ($p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}=\mathcal{K}$), odnosno Paretove razdiobe ($p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}=\mathcal{P}a$), a s d je označena snaga odjeka cilja. Omjer snage signala prema smetnji dan je s

$$\mathcal{R}=\begin{cases}\dfrac{2d}{\nu^{(K)}\beta^{(K)}}, & p_{\boldsymbol{\zeta}}=\mathcal{K}\\ \dfrac{\beta^{(P)}\left(\nu^{(P)}-1\right)d}{2}, & p_{\boldsymbol{\zeta}}=\mathcal{P}a\end{cases}. \tag{5.47}$$

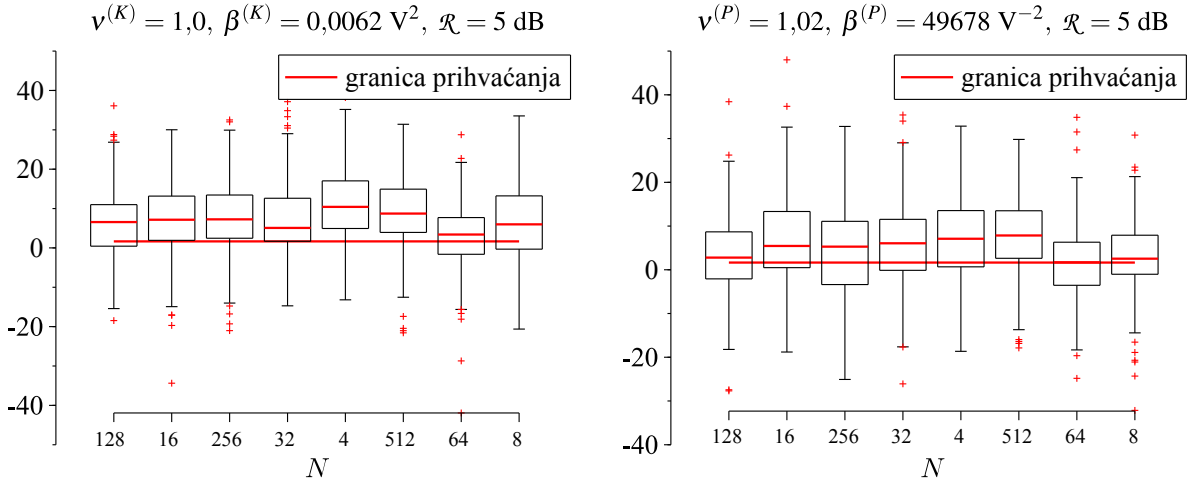
Analiza točnosti estimacije provedena je u kontekstu usporedbe s očekivanjem kvadrirane Hellingerove udaljenosti koja rezultira primjenom radijalne mreže i maksimiziranjem vjerodostojnosti. Pri tome je očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti (i računalnog opterećenja također) rezultat simulacije koja slijedi organizaciju shematski prikazanu slikom 5.3, gdje se u ovom slučaju „metoda" odnosi na metodu ISIC te na metodu radijalne mreže s implementacijom maksimiziranja vjerodostojnosti (EM) u logaritamskoj domeni. Vrijednosti parametara simulacije prikazuje tablica 5.5, vrijednosti parametara metode IEKF (koja je implementirana u metodi ISIC) tablica 5.7, uz posebni slučaj parametra $n_z=1$ te uz dodatni parametar (metode ISIC) $n_0=4$. Tablica 5.2 prikazuje vrijednosti parametara radijalne mreže EM, pri čemu je u simulaciji primijenjen scenarij s $m=8$ baznih komponenti. Dok rezultati prikazani slikom 5.46 za metodu radijalne mreže EM pokazuju neosjetljivost točnosti estimacije s obzirom na vrijednost $\mathcal{R}$, za metodu ISIC pokazuju blagu tendenciju smanjenja kako se vrijednost $\mathcal{R}$ povećava, što je posebno istaknuto za manje vrijednosti broja uzoraka ($N\lesssim 16$).



(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

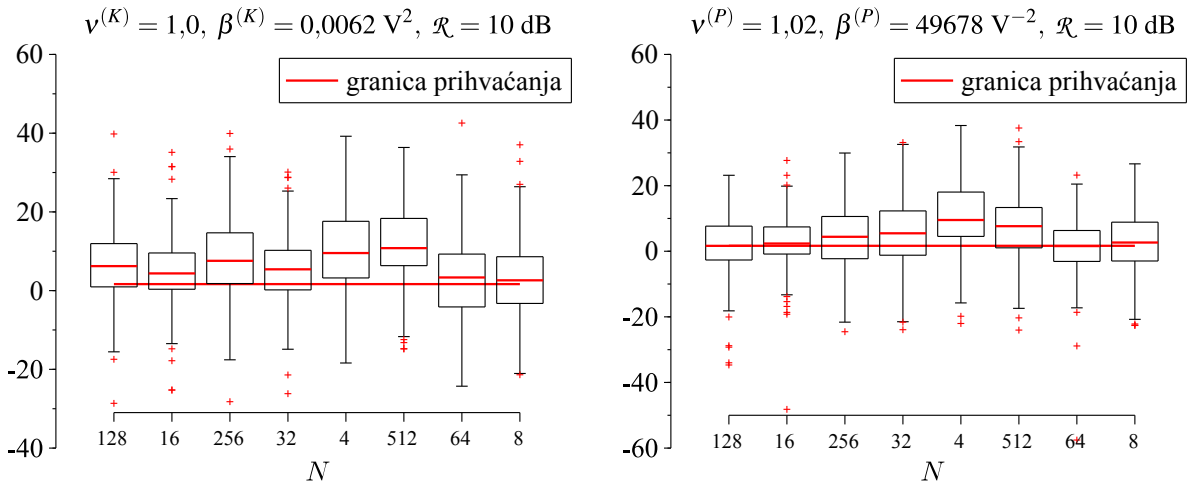
Slika 5.46. Usporedba točnosti estimacije amplitudne razdiobe odjeka cilja između metode ISIC i metode radijalne mreže s implementacijom maksimiziranja vjerodostojnosti (EM) u logaritamskoj domeni. Točnost estimacije izražena je očekivanjem kvadrirane Hellingerove udaljenosti.

Rezultati prikazani slikom 5.46 sugeriraju da se metodom ISIC ostvaruje točnija estimacija razdiobe odjeka cilja. Stoga je u nastavku primjera provedeno testiranje hipoteze H0 da se metodom ISIC ostvaruje točnija estimacija (amplitudne razdiobe odjeka cilja) u odnosu na metodu EM, u rasponu očekivanih omjera snage signala prema snazi smetnje od 5 dB pa do 15 dB. Pri tome je testna statistika dana s (5.151), a normirane razdiobe rezultata prikazuju slike 5.47 – 5.49. Prema rezultatima, hipoteza H0 se prihvaća, jer je za sve promatrane vrijednosti $\mathcal{R}$ i sve točke N, testna statistika (5.151) veća od granice prihvaćanja $d = 1{,}65$, čemu odgovara sigurnost testa 95 % pod pretpostavkom Gaussove razdiobe veličine (5.152).



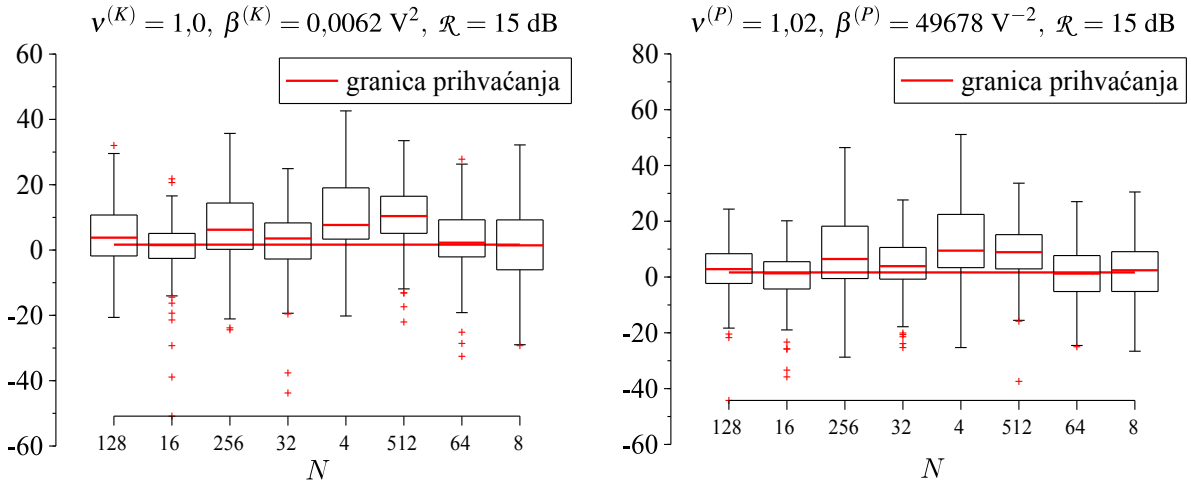
(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

Slika 5.47. Ovisnost testne statistike $\mathcal{T}\left(d_H^2\right)$ (5.151) o broju uzoraka N, za K- i Paretovu razdiobu smetnje te za omjer snage signala prema smetnji $\mathcal{R} = 5$ dB i fluktuaciju odjeka cilja prema Swerlingovom modelu br. 1.



(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

Slika 5.48. Ovisnost testne statistike $\mathcal{T}\left(d_H^2\right)$ (5.151) o broju uzoraka N, za K- i Paretovu razdiobu smetnje te za omjer snage signala prema smetnji $\mathcal{R} = 10$ dB i fluktuaciju odjeka cilja prema Swerlingovom modelu br. 1.

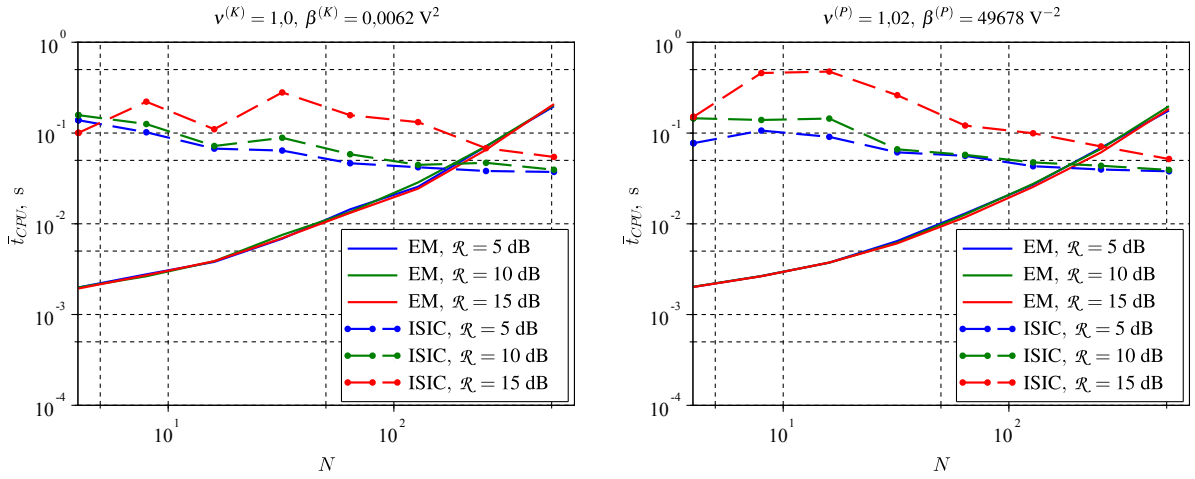


(a) K-razdioba. (b) Paretova razdioba.

Slika 5.49. Ovisnost testne statistike $\mathcal{T}\left(d_H^2\right)$ (5.151) o broju uzoraka N, za K- i Paretovu razdiobu smetnje te za omjer snage signala prema smetnji $\mathcal{R} = 15$ dB i fluktuaciju odjeka cilja prema Swerlingovom modelu br. 1.

Računalno opterećenje $\bar{t}_{CPU}$ ilustrirano slikom 5.50 (prosječno vrijeme obrade skupa od N uzoraka), za metodu ISIC pokazuje blagu tendenciju porasta porastom vrijednosti $\mathcal{R}$, neovisno o broju uzoraka N. U partikularnom slučaju primjene slijedne metode učenja IEKF, to je vrijeme potrebno za obradu samo jednog (novog) uzorka prema koraku K2 (stranica 278), a u slučaju metode EM, to je vrijeme potrebno za provedbu koraka (5.20) – (5.23), primjenom cijele grupe od N uzoraka. Pri tome fluktuacija računalnog opterećenja metode ISIC nastaje zbog iterativne prirode metode IEKF, jer broj iteracija nije unaprijed poznat (osim maksimalno dozvoljenog

broja) te ovisi o stohastičkoj realizaciji uzoraka. Rezultati ilustrirani slikom 5.50 pokazuju da je računalno opterećenje metode EM, za vrijednosti uzoraka $N \lesssim 128$, manje od računalnog opterećenja metode ISIC.



(a) K-razdioba.

(b) Paretova razdioba.

Slika 5.50. Ovisnost računalnog opterećenja metoda ISIC i EM o broju uzoraka N, za različite omjere snage signala prema smetnji $\mathcal{R}$ te uz K- i Paretovu razdiobu smetnje i prvi Swerlingov model fluktuacije odjeka cilja.

U drugom segmentu ovog primjera analiziran je utjecaj amplitudne razdiobe odjeka cilja na vjerojatnost zadržavanja staze, u kontekstu testiranja hipoteza $\mathrm{H1}^{(**)}$ i $\mathrm{H2}^{(**)}$, odnosno primjene omjera vjerodostojnosti. Testiranje hipoteze $\mathrm{H1}^{(**)}$ provodi se evaluacijom testne statistike $\mathcal{T}(P_{TT})$ (4.228), usporedbom rezultata poluparametarske i parametarske metode. Dok poluparametarska metoda primjenjuje neuronsku mrežu za estimaciju amplitudne razdiobe odjeka cilja i smetnje, parametarska metoda primjenjuje njihov apriorni model, koji, u kontekstu testiranja hipoteze $\mathrm{H1}^{(**)}$, odgovara stvarnim razdiobama. Na temelju rezultata analize u prvom segmentu ovog primjera, estimacija omjera vjerodostojnosti u poluparametarskoj metodi provodi se radijalnom mrežom i metodom EM u logaritamskoj domeni, zbog toga što je, u odnosu na metodu ISIC, računalno opterećenje manje, uz približno jednaku točnost estimacije razdiobe smetnje i nešto slabiju točnost estimacije razdiobe odjeka cilja. Organizacija simulacije za testiranje hipoteze $\mathrm{H1}^{(**)}$ ilustrirana je slikom 5.17, s vrijednostima parametara prema tablicama 5.2 i 5.4. Koraci simulacije tako su:

K1 evaluacija pragova detekcije $Z^{(K)}$ i $Z^{(P)}$ prema koraku K2 na stranici 226, ovisno o referentnoj razdiobi $p_{\boldsymbol{\zeta}}$, tako da su pragovi konstantni i jednaki za obje metode, kroz cijelo vrijeme trajanja staze te da vrijedi $\hat{P}_{FA} = P_{FA}$ za obje metode

K2 određivanje snage odjeka cilja d za Swerlingov model br. 1 [73] i parametre dizajna P_{FA} i P_D prema koraku K2 na stranici 237, tako da za obje metode vrijedi $\hat{P}_D = P_D$

K2a za svaku stazu od ukupno $N_M M$ realizacija, za svaku točku staze (vremenskog indeksa k) i za svako mjerenje $\zeta_{k,i}, i = 1,\ldots,n_k, \zeta_{k,i} \in \mathbb{Z}_k^{(*)}$, određivanje omjera vjerodostojnosti kao

$$\ell_{k,i}^{(\mathrm{REF})}\left(\zeta_{k,i}\right) = \frac{p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}\left(\zeta_{k,i}\right)}{p_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta_{k,i}\right)}, \tag{5.156}$$

pri čemu je razdioba odjeka cilja $p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\cdot)$ dana s (5.155), referentna razdioba smetnje $p_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$ s (3.33) za K-razdiobu, odnosno (3.44) za Paretovu razdiobu, a skup mjerenja $\mathbb{Z}_k^{(*)} = \left\{z_{k,i}, \zeta_{k,i}, i = 1,\ldots,n_k\right\}$ rezultat je procesa detekcije nad skupom mjerenja $\mathbb{Z}_k = \left\{z_{k,i}, \zeta_{k,i}, i = 1,\ldots,\mathcal{V}_k/V_r\right\}$ unutar volumena valjanosti $\mathcal{V}_k$, vidi (4.223) i primjer u odjeljku 4.5 (stranica 183)

K2b za svaki segment, određivanje kriterijske funkcije $C_i(P_{TT})^{(\mathrm{REF})}, i = 1,\ldots,N_M$ prema (4.227), primjenom Viterbijeve metode pridruživanja s primjenom omjera vjerodostojnosti (5.156), ilustrirane slikom 5.51

K3 estimacija omjera vjerodostojnosti $\hat{\ell}^{(\mathrm{EM})}$ radijalnom mrežom metodom EM u logaritamskoj domeni

K3a za svaku stazu od ukupno $N_M M$ realizacija

i. za svaku točku staze (trenutak opservacije t_k), apriorna estimacija razdiobe odjeka smetnje $\bar{p}_{\boldsymbol{\zeta}(F),k}(\cdot) = \hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}(F),k-1}(\cdot)$ na temelju $N_A N$ uzoraka skupa $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k-N_A:k-1}$, pri čemu je skup $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k-N_A:k-1}$ dan s (vidi također i korak K3a na stranici 237),

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k-N_A:k-1} = \left\{\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k-i} \setminus \mathbb{z}_{\boldsymbol{\zeta},k-i}, i = 1,\ldots,N_A\right\}, \mathbb{z}_{\boldsymbol{\zeta},\kappa} \quad = \begin{cases} \emptyset, & \mathrm{i}^{(*)} = -1, 0 \\ \zeta_{\kappa,\mathrm{i}^{(*)}}, & \mathrm{i}^{(*)} > 0 \end{cases} \tag{5.53}$$

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k} = \left\{\zeta_{k,i}, i = 1,\ldots,\mu_k \mathcal{V}_k/V_r, \mu_k > 0\right\} \tag{5.54}$$

uz cenzuru s parametrom N_C, pri čemu implementaciju radijalne mreže u segmentu Viterbijeve metode pridruživanja s primjenom omjera vjerodostojnosti i u okviru višemodelne estimacije IMM ilustrira slika 5.52 i gdje $\kappa, \mathrm{i}^{(*)}$ označava indeks najvjerodostojnijeg čvora za vremenski indeks κ (vidi opis Viterbijeve metode pridruživanja u odjeljku 4.3.2 te primjer u odjeljku 4.5), uz vrijednost parametra multiplikacije μ_k tako da vrijedi $\left|\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k} \setminus \mathbb{z}_{\boldsymbol{\zeta},k}\right| = N$

ii. za svaku točku staze i $\forall \zeta_{k,i}, i = 1,\ldots,n_k, \zeta_{k,i} \in \mathbb{Z}_k^{(*)}$ u trenutku t_k, estimacija razdiobe odjeka cilja $\hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}(T),k,i}(\cdot), i = 1,\ldots,n_k$ (estimacija za svako partikularno mjerenje) na temelju skupa odjeka cilja $\left\{\mathbb{z}_{\boldsymbol{\zeta},\kappa}, \kappa = 1,\ldots,k-1\right\} \cup \left\{\zeta_{k,i}\right\}$, pri čemu je $\mathbb{z}_{\boldsymbol{\zeta},\kappa}$ dan s (5.53)

iii. $\forall \zeta_{k,i}, i = 1, \ldots, n_k$, estimacija omjera vjerodostojnosti

$$\hat{\ell}_{k,i}^{(\mathrm{EM})} = \frac{\hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}(T),k,i}\left(\zeta_{k,i}\right)}{\hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}(F),k-1}\left(\zeta_{k,i}\right)} \tag{5.157}$$

iv. priprema za sljedeći korak, vremenskog indeksa $k+1$, tako da je za opservaciju u trenutku t_k, aposteriorna estimacija razdiobe odjeka smetnje jednaka apriornoj, odnosno $\hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}(F),k}(\cdot) = \bar{p}_{\boldsymbol{\zeta}(F),k}(\cdot)$

K3b za svaki segment, određivanje kriterijske funkcije $C_i(P_{TT})^{(\mathrm{EM})}, i = 1, \ldots, N_M$ prema (4.227)

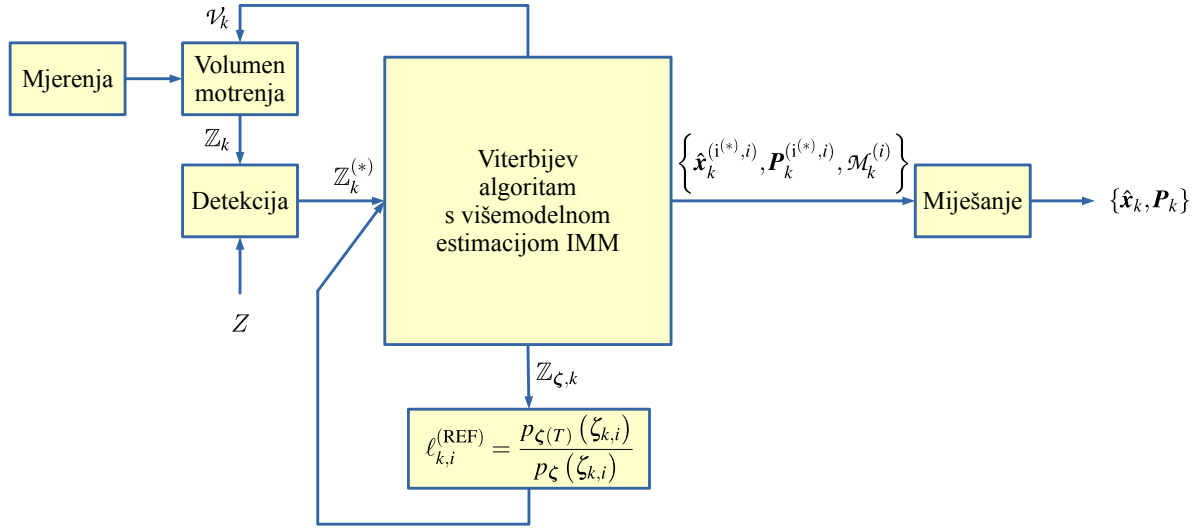
K4 testiranje hipoteze $\mathrm{H1}^{(**)}$ da vjerojatnost zadržavanja staze primjenom metode radijalne mreže EM nije značajno lošija od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, evaluacijom testne statistike

$$\mathcal{T}(P_{TT}) = \frac{\overline{\Delta J}(P_{TT})}{\sigma_{\overline{\Delta J}(P_{TT})}} = \frac{\frac{1}{N_M}\sum_{i=1}^{N_M} \Delta C_i(P_{TT})}{\sqrt{\frac{1}{N_M^2}\sum_{i=1}^{N_M}\left(\Delta C_i(P_{TT}) - \overline{\Delta J}(P_{TT})\right)^2}} \tag{4.228}$$

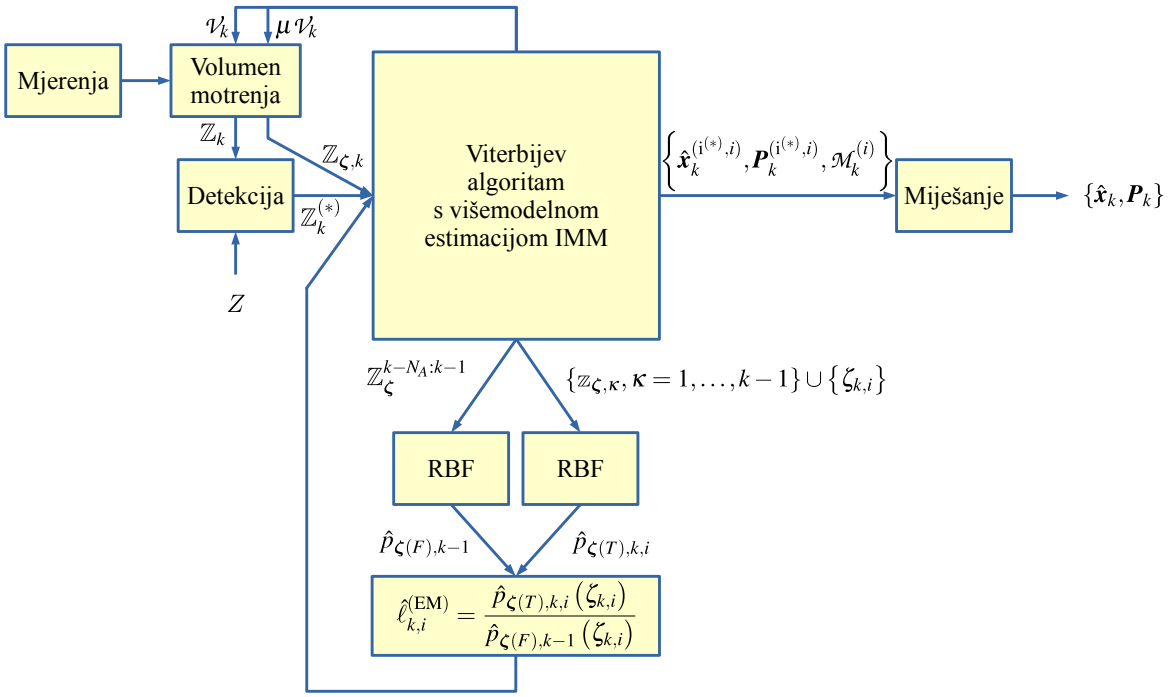
uz

$$\Delta C(P_{TT}) = C(P_{TT})^{(\mathrm{REF})} - C(P_{TT})^{(\mathrm{EM})}. \tag{5.55}$$

U koraku K3a provodi se apriorna estimacija razdiobe smetnje jer nije sa sigurnošću, na razini Viterbijeve metode pridruživanja, poznato koji uzorak iz skupa kurentnih mjerenja $\mathbb{Z}_k$ pripada odjeku cilja. Kao i u primjeru primjene radijalne mreže u segmentu nekoherentne detekcije, vidi odjeljak 5.1.2 i stranicu 236, u simulaciji je, zbog jednostavnosti, fluktuacija odjeka cilja aproksimirana Rayleighovom razdiobom prema (4.202), što je opravdano za raspon dizajniranih vjerojatnosti lažne detekcije P_{FA} od 10^{-4} do 10^{-1}, za K- i Paretovu razdiobu s parametrima prema tablici 5.2 te uz parametar dizajna $P_D = 0{,}8$.



Slika 5.51. Parametarska metoda u segmentu estimacije omjera vjerodostojnosti i Viterbijeve metode pridruživanja s višemodelnom estimacijom IMM. Vidi također i primjer u odjeljku 4.5.



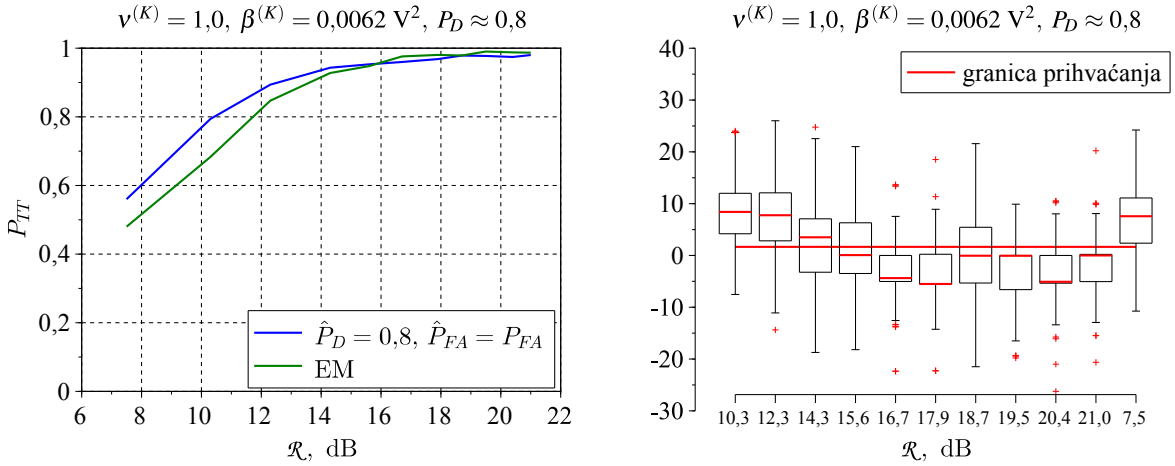
Slika 5.52. Implementacija radijalne mreže u segmentu estimacije omjera vjerodostojnosti i Viterbijeve metode pridruživanja s višemodelnom estimacijom IMM. Vidi također i primjer u odjeljku 4.5.

Rezultat testiranja hipoteze $\mathrm{H1}^{(**)}$ u scenariju K-razdiobe smetnje ilustrira slika 5.53. Testna statistika prikazana slikom 5.53b pokazuje da za $\mathcal{R} \lesssim 15$ dB hipoteza $\mathrm{H1}^{(**)}$ nije prihvaćena (testna statistika $\mathcal{T}(P_{TT})$ veća je od granice prihvaćanja $d = 1,65$ za Gaussovu razdiobu veličine (5.55) i pouzdanost testa 95 %), ali također i da razlika ostvarenih vjerojatnosti P_{TT} u točkama neprihvaćanja nije drastična (slika 5.53a) te da nija veća od ≈ 15 %. Rezultati ilustrirani sli-

kom 5.54a otkrivaju da je vjerojatnost zadržavanja staze P_{TT} metodom EM i primjenom omjera vjerodostojnosti još uvijek veća nego da se omjer ne primjenjuje, što je i pokazano testiranjem hipoteze:

H3$^{(**)}$ vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena primjenom omjera vjerodostojnosti značajno je bolja od one ostvarene referentnom parametarskom metodom koja ga ne primjenjuje i u kojoj su parametri evalvirani pod hipotezom ispravnog modela smetnje.

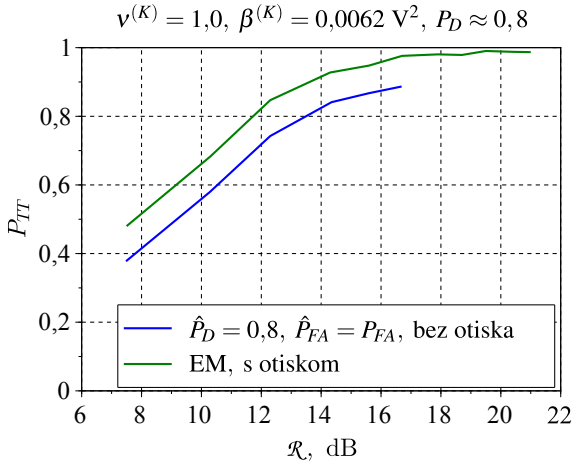
Hipoteza H3$^{(**)}$ je prihvaćena u svim točkama omjera snage signala prema snazi smetnje $\mathcal{R}$, jer vrijedi da je $\mathcal{T}(P_{TT}) > d$, kako je prikazano slikom 5.54b, pri čemu je $\Delta C(P_{TT}) = C(P_{TT})^{(\mathrm{EM})} - C(P_{TT})^{(\mathrm{REF})}$.



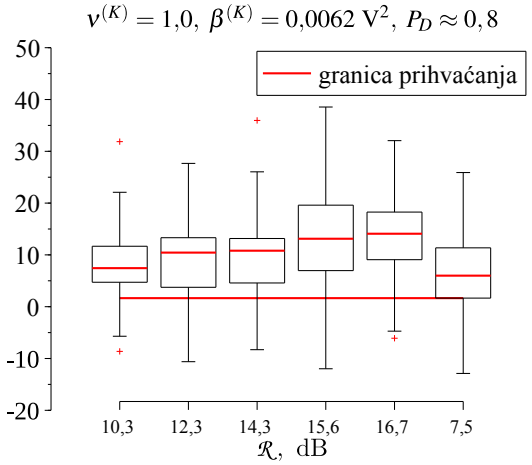
(a) Usporedba vjerojatnosti.

(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.53. Značajnost primjene estimacije omjera vjerodostojnosti radijalnom mrežom s implementacijom metode EM u logaritamskoj domeni, izražena usporedbom s vjerojatnošću zadržavanja staze manevrirajućeg cilja uz apriorno poznate parametre K-razdiobe, označena s $\hat{P}_D = 0{,}8, \hat{P}_{FA} = P_{FA}$. Pri estimaciji amplitudne razdiobe smetnje metodom EM primijenjene su $N_A = 4$ grupe po $N = 256$ uzoraka, pri čemu se pretpostavlja nepostojanje korelacije teksture između susjednih radijalnih ćelija razlučivosti. Parametri mreže RBF s $m = 8$ komponenti estimirani su u logaritamskoj domeni, uz vrijednost parametra cenzure $N_C = 2$.



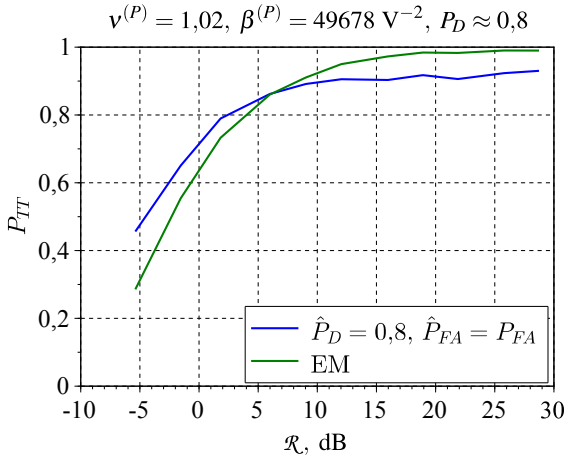
(a) Usporedba rezultata.



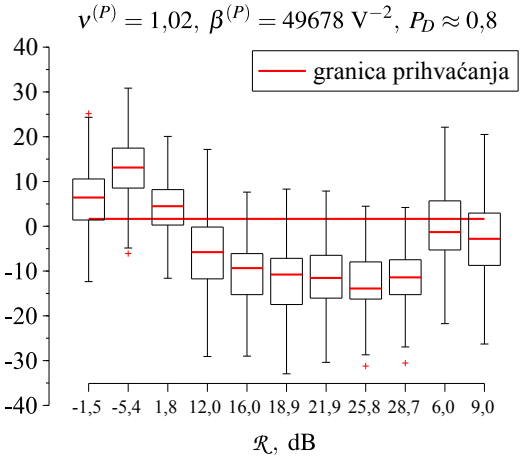
(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.54. Značajnost primjene estimacije omjera vjerodostojnosti pri smetnji K-razdiobe u odnosu na parametarsku metodu koja ga ne primjenjuje. Omjer vjerodostojnosti estimiran je radijalnom mrežom s implementacijom metode EM u logaritamskoj domeni, a u parametarskoj su metodi apriorno poznate vrijednosti parametara K-razdiobe te je metoda označena s $\hat{P}_D = 0,8, \hat{P}_{FA} = P_{FA}$. Pri estimaciji amplitudne razdiobe smetnje metodom EM primijenjene su $N_A = 4$ grupe po $N = 256$ uzoraka, pri čemu se pretpostavlja nepostojanje korelacije teksture između susjednih radijalnih ćelija razlučivosti. Parametri mreže RBF s $m = 8$ komponenti estimirani su u logaritamskoj domeni, uz vrijednost parametra cenzure $N_C = 2$.

Rezultat testiranja hipoteze $\mathrm{H1}^{(**)}$ za scenarij Paretove razdiobe prikazan je slikom 5.55b i pokazuje da hipoteza nije prihvaćena za vrijednosti omjera snage signala prema smetnji $\mathcal{R} \lesssim 2$ dB, pri čemu je, kao i u ostalim primjerima, granica prihvaćanja za pouzdanost testa 95 % jednaka $d = 1{,}65$, uz pretpostavku Gaussove razdiobe veličine (5.55). Također i usporedba s rezultatima koji su ostvareni parametarskom metodom koja ne primjenjuje omjer vjerodostojnosti i evaluira parametre pod hipotezom ispravnog modela smetnje (testiranje hipoteze $\mathrm{H3}^{(**)}$), pokazuje da za $\mathcal{R} \lesssim 2$ dB primjena omjera vjerodostojnosti ne ostvaruje dobitak, što jasno pokazuje i testna statistika hipoteze $\mathrm{H3}^{(**)}$, ilustrirana slikom 5.56b.

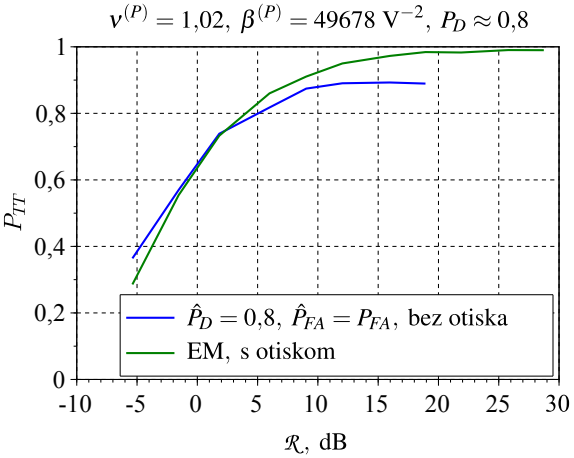


(a) Usporedba vjerojatnosti.

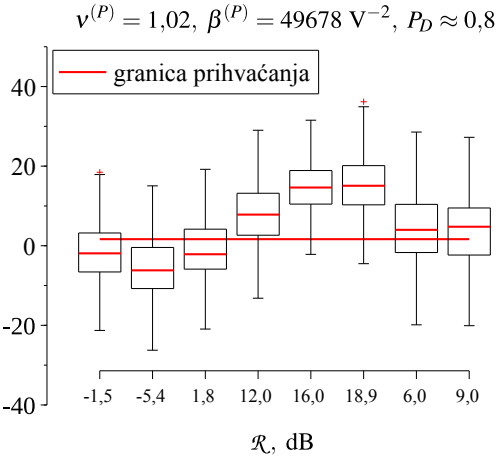


(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.55. Značajnost primjene estimacije omjera vjerodostojnosti radijalnom mrežom s implementacijom metode EM u logaritamskoj domeni, izražena usporedbom s vjerojatnošću zadržavanja staze manevrirajućeg cilja uz apriorno poznate parametre Paretove razdiobe, označena s $\hat{P}_D = 0{,}8, \hat{P}_{FA} = P_{FA}$. Pri estimaciji amplitudne razdiobe smetnje metodom EM primijenjene su $N_A = 4$ grupe po $N = 256$ uzoraka, pri čemu se pretpostavlja nepostojanje korelacije teksture između susjednih radijalnih ćelija razlučivosti. Parametri mreže RBF s $m = 8$ komponenti estimirani su u logaritamskoj domeni, uz vrijednost parametra cenzure $N_C = 2$.



(a) Usporedba rezultata.



(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 5.56. Značajnost primjene estimacije omjera vjerodostojnosti pri smetnji Paretove razdiobe u odnosu na parametarsku metodu koja ga ne primjenjuje. Omjer vjerodostojnosti estimiran je radijalnom mrežom s implementacijom metode EM u logaritamskoj domeni, a u parametarskoj su metodi apriorno poznate vrijednosti parametara Paretove razdiobe te je metoda označena s $\hat{P}_D = 0{,}8, \hat{P}_{FA} = P_{FA}$. Pri estimaciji amplitudne razdiobe smetnje metodom EM primijenjene su $N_A = 4$ grupe po $N = 256$ uzoraka, pri čemu se pretpostavlja nepostojanje korelacije teksture između susjednih radijalnih ćelija razlučivosti. Parametri mreže RBF s $m = 8$ komponenti estimirani su u logaritamskoj domeni, uz vrijednost parametra cenzure $N_C = 2$.

Testiranje hipoteze $\mathrm{H2}^{(**)}$ da je vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena primjenom omjera vjerodostojnosti značajno bolja od one ostvarene parametarskom metodom, evaluacijom para-

metara pod hipotezom pogrešnog modela, provodi se primjenom podataka radara IPIX [148]. Naime, kako je pokazano u [157, 332], za frekvencijski pojas X i upadni kut od 0,5° do 1° te za širinu impulsa od 100 ns do 300 ns, postoji izrazito odstupanje amplitudne razdiobe odjeka cilja od Swerlingovih modela br. 1 i br. 3 [73] za male plastične i gumene brodice. U navedenim je radovima pokazana i koreliranost radarskog presjeka sa smetnjom, u smislu da intenzitet radarskog presjeka pada kako se objekt primiče žlijebu vala. Također i primjer radara IPIX pokazuje efekt maskiranja malog površinskog cilja (u ovom slučaju plutajuće polistirenske sfere, promjera 1 m i presvučene žičanom mrežom, vidi primjer u odjeljku 3.4 te uvodni dio primjera u odjeljku 5.1.2) valovima, kako je ilustrirano slikama 5.57 i 5.58. Pri tome je prikazana amplitudna razdioba odjeka radijalne ćelije br. 9 (zapisa broj 17 prema tablici 3.3), što je ćelija primarne pozicije sfere, za stanje mora od 3 do 4 te amplitudna razdioba odjeka radijalne ćelije br. 7 (zapisa 31, vidi tablicu 3.3), primarne pozicije sfere, za stanje mora od 4 do 5. Tradicionalni Swerlingov model br. 1 [73] za pozadinsku smetnju prema K- i Paretovoj razdiobi (označenu s $p_{\boldsymbol{\zeta}(F)} = \mathcal{K}$, odnosno $p_{\boldsymbol{\zeta}(F)} = \mathcal{P}a$, uz parametre oblika i skaliranja $\nu^{(K)}$, $\beta^{(K)}$, odnosno $\nu^{(P)}$, $\beta^{(P)}$, bez termičkog šuma),

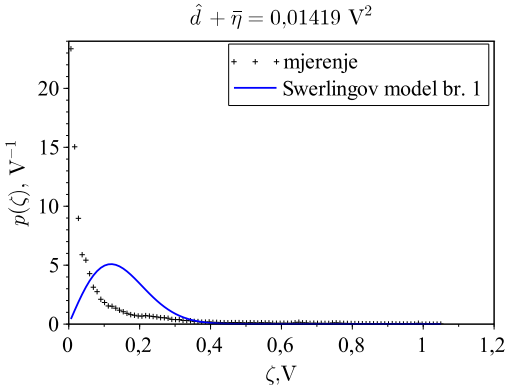
$$p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\zeta}{\left(\frac{\beta^{(K)}}{2}\right)^{\nu^{(K)}}\Gamma\left(\nu^{(K)}\right)} \int_0^\infty \dfrac{\eta^{\nu^{(K)}-1}}{\eta+d} \exp\left(-\dfrac{2\eta}{\beta^{(K)}} - \dfrac{\zeta^2}{2(\eta+d)}\right) \mathrm{d}\eta, & p_{\boldsymbol{\zeta}(F)} = \mathcal{K} \\ \dfrac{\zeta}{\left(\frac{\beta^{(P)}}{2}\right)^{\nu^{(P)}}\Gamma\left(\nu^{(P)}\right)} \int_0^\infty \dfrac{\eta^{-\nu^{(P)}-1}}{\eta+d} \exp\left(-\dfrac{2}{\beta^{(P)}\eta} - \dfrac{\zeta^2}{2(\eta+d)}\right) \mathrm{d}\eta, & p_{\boldsymbol{\zeta}(F)} = \mathcal{P}a \end{cases}, \tag{5.155}$$

za vrijednosti omjera snage signala prema snazi smetnje $\mathcal{R} \gtrsim 3$ dB može se aproksimirati Rayleighovom razdiobom (vidi primjer u odjeljku 4.5 te sliku 4.13 za primjer K-razdiobe) kao

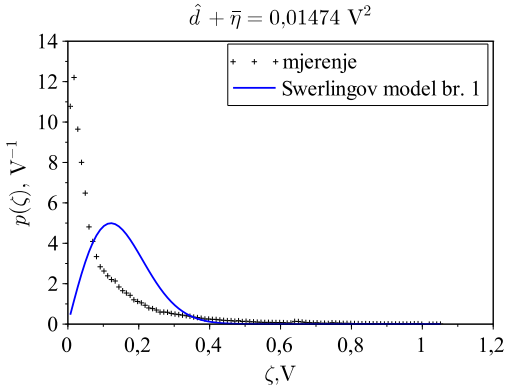
$$p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\zeta) \approx \mathscr{R}(\zeta; \bar{\eta}+d) = \frac{\zeta}{\bar{\eta}+d} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2(\bar{\eta}+d)}\right), \quad \bar{\eta} = \begin{cases} \dfrac{\nu^{(K)}\beta^{(K)}}{2}, & p_{\boldsymbol{\zeta}} = \mathcal{K} \\ \dfrac{2}{\beta^{(P)}\left(\nu^{(P)}-1\right)}, & p_{\boldsymbol{\zeta}} = \mathcal{P}a \end{cases} \tag{5.158}$$

i pokazuje značajna odstupanja od stvarne razdiobe, kako ilustriraju slike 5.57 i 5.58. Pri tome je ukupna snaga (smetnje i cilja) $\bar{\eta} + \hat{d}$ estimirana primjenom linearnog estimatora s minimalnom varijancom (BLUE) [41, 333] nad skupom intenziteta uzoraka $\left\{\psi_i = \zeta_i^2\right\}$ kao

$$\bar{\eta} + \hat{d} = \frac{1}{2}\langle\{\psi_i\}\rangle. \tag{5.159}$$

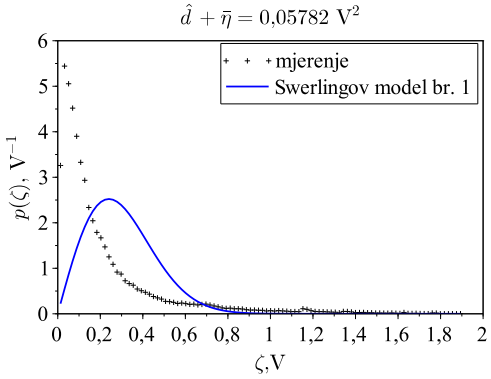


(a) Horizontalna polarizacija.

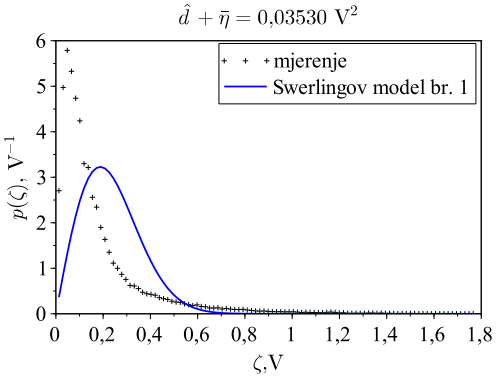


(b) Vertikalna polarizacija.

Slika 5.57. Amplitudna razdioba odjeka radijalne ćelije koja sadrži plutajuću polistirensku sferu promjera 1 m i presvučenu žičanom mrežom, pri stanju mora od 3 do 4, aproksimirana razdiobom prema Swerlingovom modelu br. 1. Pri tome je vrijednost parametra estimirana primjenom linearnog estimatora BLUE [41, 333].



(a) Horizontalna polarizacija.

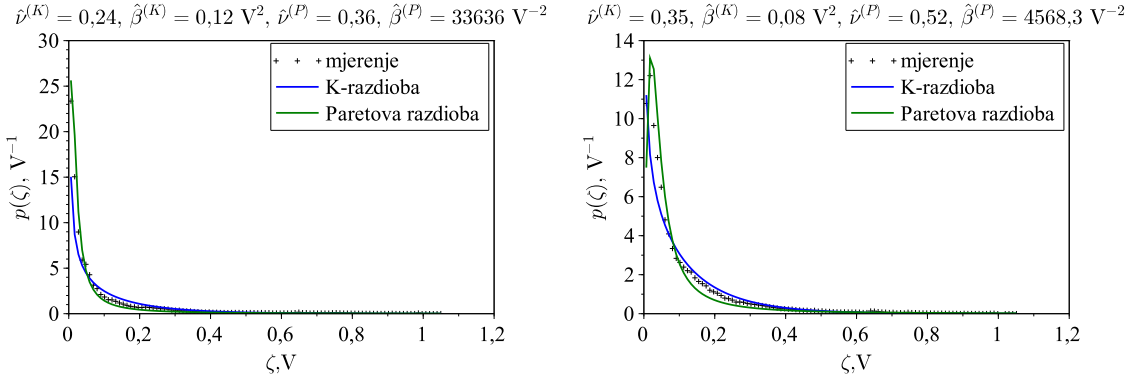


(b) Vertikalna polarizacija.

Slika 5.58. Amplitudna razdioba odjeka radijalne ćelije koja sadrži plutajuću polistirensku sferu promjera 1 m i presvučenu žičanom mrežom, pri stanju mora od 4 do 5, aproksimirana razdiobom prema Swerlingovom modelu br. 1. Pri tome je vrijednosti parametra estimirana primjenom linearnog estimatora BLUE [41, 333].

Za ovaj partikularni primjer, estimacija amplitudne razdiobe odjeka radijalne ćelije koja sadrži cilj znatno bolje bi se opisala K- ili Paretovom razdiobom kako je to ilustrirano slikama 5.59 i 5.60. Pri tome je za estimaciju vrijednosti parametara oblika i skaliranja K-razdiobe primijenjena metoda maksimalne vjerodostojnosti [194], a za Paretovu razdiobu metoda [zlog(z)] [170], vidi primjer 5.1.2 (stranica 213). Odjek radijalne ćelije u kojoj se nalazi cilj odražava interakciju cilja i morske površine, u smislu da, pored odjeka cilja i pozadinske smetnje K- ili Paretove razdiobe, uključuje i efekt maskiranja. Tako se, za ovakve specifične ciljeve, amplitudna razdioba uvelike razlikuje od Rayleighove aproksimacije koja je uvedena u odjeljku 4.5, također i primijenjena u odjeljku 5.1.2. To znači da, pored estimacije amplitudne razdiobe

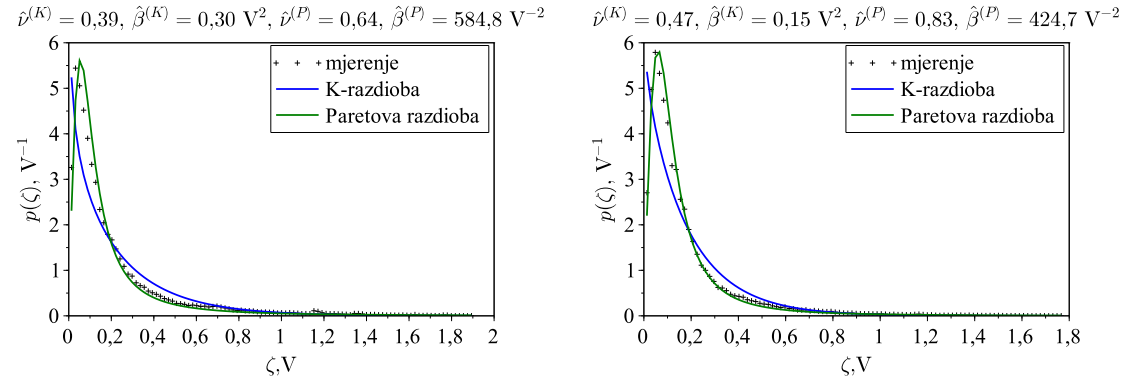
smetnje, postoji potreba i za estimacijom amplitudne razdiobe odjeka cilja, što u konačnici rezultira polumarametarskom estimacijom omjera vjerodostojnosti, estimacijom koja je temeljena isključivo na prikupljenim uzorcima.



(a) Horizontalna polarizacija.

(b) Vertikalna polarizacija.

Slika 5.59. Amplitudna razdioba odjeka radijalne ćelije koja sadrži plutajuću polistirensku sferu promjera 1 m i presvučenu žičanom mrežom, pri stanju mora od 3 do 4, aproksimirana K- i Paretovom razdiobom. Pri tome su vrijednosti parametara estimirane metodama maksimalne vjerodostojnosti prema [194] (K-razdioba), odnosno [zlog(z)] prema [170] (Paretova razdioba).



(a) Horizontalna polarizacija.

(b) Vertikalna polarizacija.

Slika 5.60. Amplitudna razdioba odjeka radijalne ćelije koja sadrži plutajuću polistirensku sferu promjera 1 m i presvučenu žičanom mrežom, pri stanju mora od 4 do 5, aproksimirana K- i Paretovom razdiobom. Pri tome su vrijednosti parametara estimirane metodama maksimalne vjerodostojnosti prema [194] (K-razdioba), odnosno [zlog(z)] prema [170] (Paretova razdioba).

Tako se testiranje hipoteze H2$^{(**)}$ (da je vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena primjenom omjera vjerodostojnosti značajno bolja od one ostvarene parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom pogrešnog modela, u ovom slučaju modela razdiobe odjeka cilja), provodi koracima (simulacije organizacijski prikazane slikom 5.17, s vrijednostima parametara prema tablicama 5.4 i 5.11 te prema tablici 5.2 za metodu EM, vidi također i korake testiranja hipoteze H1$^{(**)}$ na stranici 286):

K1 evaluacija praga detekcije Z koji je neovisan o referentnoj razdiobi smetnje $p_{\boldsymbol{\zeta}}$, jednak za obje metode i konstantan kroz cijelo vrijeme trajanja staze, tako da je, uz parametre razdiobe odjeka cilja $\nu^{(P)}$ i $\beta^{(P)}$ prema tablici 5.11, vjerojatnost detekcije $P_D = 0{,}8$

K2 estimacija omjera vjerodostojnosti $\hat{\ell}^{(\mathrm{REF})}$ referentnom parametarskom metodom, kako je ilustrirano slikom 5.61

K2a za svaku stazu od ukupno $N_M M$ realizacija

i. za svaku točku staze u trenutku t_k, apriorna estimacija parametra oblika $\bar{\nu}_k = \hat{\nu}_{k-1}$ i skaliranja $\bar{\beta}_k = \hat{\beta}_{k-1}$ (jer Viterbijev algoritam za trenutak t_k nije razlučio koji uzorak iz skupa kurentnih mjerenja $\mathbb{Z}_k$ pripada odjeku cilja), na temelju skupa uzoraka

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}^{k-N_A:k-1} = \left\{ \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k-i} \setminus {}^{\mathbb{Z}}\boldsymbol{\zeta}_{,k-i}, i = 1,\ldots,N_A \right\}, {}^{\mathbb{Z}}\boldsymbol{\zeta}_{,\kappa} = \begin{cases} \emptyset, & \mathrm{i}^{(*)} = -1,0 \\ \zeta_{\kappa,\mathrm{i}^{(*)}}, & \mathrm{i}^{(*)} > 0 \end{cases} \tag{5.53}$$

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k} = \left\{ \zeta_{k,i}, i = 1,\ldots,\mu_k \mathcal{V}_k / V_r, \mu_k > 0 \right\} \tag{5.54}$$

metodom [zlog(z)] (vidi (3.35) i (3.37) za estimaciju parametara K-razdiobe bez termičkog šuma te (3.45) i (3.46) za estimaciju parametara Paretove razdiobe, također bez termičkog šuma), uz parametar cenzure N_C i parametar multiplikacije μ_k tako da vrijedi $\left| \mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta},k} \setminus {}^{\mathbb{Z}}\boldsymbol{\zeta}_{,k} \right| = N$ te pod hipotezom ispravnog modela smetnje $p_{\boldsymbol{\zeta}}$, tako da je $\bar{p}_{\boldsymbol{\zeta}(F),k}(\cdot) = \hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}(F),k-1}(\cdot) = p_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\cdot; \hat{\nu}_{k-1}, \hat{\beta}_{k-1}\right)$

ii. za svaku točku staze i $\forall \zeta_{k,i}, i = 1,\ldots,n_k, \zeta_{k,i} \in \mathbb{Z}_k^{(*)}$ u trenutku t_k, estimacija razdiobe odjeka cilja $\hat{p}^{(\mathrm{REF})}_{\boldsymbol{\zeta}(T),k,i}(\cdot), i = 1,\ldots,n_k$ na temelju skupa odjeka cilja $\left\{ {}^{\mathbb{Z}}\boldsymbol{\zeta}_{,\kappa}, \kappa = 1,\ldots,k-1 \right\} \cup \left\{ \zeta_{k,i} \right\}$ prema Rayleighovom modelu fluktuacije odjeka (5.159), tako da je $\hat{p}^{(\mathrm{REF})}_{\boldsymbol{\zeta}(T),k,i} = \mathscr{R}\left(\cdot, \bar{\eta}_k + \hat{d}_{k,i}\right)$, pri čemu je ${}^{\mathbb{Z}}\boldsymbol{\zeta}_{,\kappa}$ dan s (5.53), a skup mjerenja označen je sa $\mathbb{Z}_k^{(*)} = \left\{ z_{k,i}, \zeta_{k,i}, i = 1,\ldots,n_k \right\}$ i rezultat je procesa detekcije nad skupom mjerenja $\mathbb{Z}_k = \left\{ z_{k,i}, \zeta_{k,i}, i = 1,\ldots,\mathcal{V}_k/V_r \right\}$ unutar volumena valjanosti $\mathcal{V}_k$

iii. $\forall \zeta_{k,i}, i = 1,\ldots,n_k$, estimacija omjera vjerodostojnosti

$$\hat{\ell}^{(\mathrm{REF})}_{k,i} = \frac{\hat{p}^{(\mathrm{REF})}_{\boldsymbol{\zeta}(T),k,i}\left(\zeta_{k,i}\right)}{\hat{p}^{(\mathrm{REF})}_{\boldsymbol{\zeta}(F),k-1}\left(\zeta_{k,i}\right)} \tag{5.160}$$

iv. priprema za sljedeći vremenski indeks t_{k+1}, tako da su aposteriorne estimacije parametara smetnje jednake apriornima, odnosno $\hat{\nu}_k = \bar{\nu}_k$ i $\hat{\beta}_k = \bar{\beta}_k$

K2b za svaki segment, određivanje kriterijske funkcije $C_i(P_{TT})^{(\mathrm{REF})}, i = 1,\ldots,N_M$ prema (4.227)

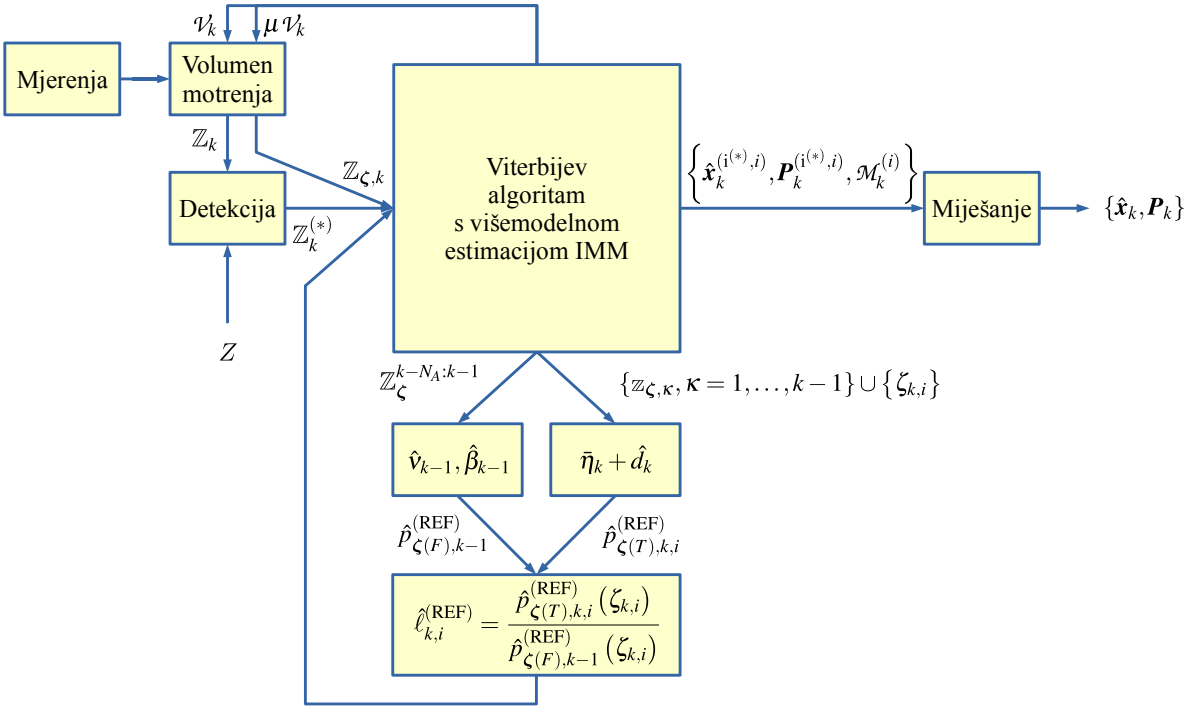
K3 estimacija omjera vjerodostojnosti $\hat{\ell}^{(\mathrm{EM})}$ radijalnom mrežom i metodom EM u logaritamskoj domeni, kao i u koraku K3 na stranici 287 te, za svaki segment, određivanje kriterijske funkcije $C_i(P_{TT})^{(\mathrm{EM})}, i = 1,\ldots,N_M$ prema (4.227)

K4 evaluacija testne statistike $\mathcal{T}(P_{TT})$ kojom se testira hipoteza $\mathrm{H2}^{(**)}$ (da je vjerojatnost zadržavanja staze primjenom metode radijalne mreže EM značajno bolja od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, ali evaluacijom pod hipotezom pogrešnog modela)

$$\mathcal{T}(P_{TT}) = \frac{\overline{\Delta J}(P_{TT})}{\sigma_{\overline{\Delta J}(P_{TT})}} = \frac{\frac{1}{N_M}\sum_{i=1}^{N_M}\Delta C_i(P_{TT})}{\sqrt{\frac{1}{N_M^2}\sum_{i=1}^{N_M}\left(\Delta C_i(P_{TT}) - \overline{\Delta J}(P_{TT})\right)^2}} \tag{4.228}$$

uz

$$\Delta C(P_{TT}) = C(P_{TT})^{(\mathrm{EM})} - C(P_{TT})^{(\mathrm{REF})}. \tag{5.161}$$

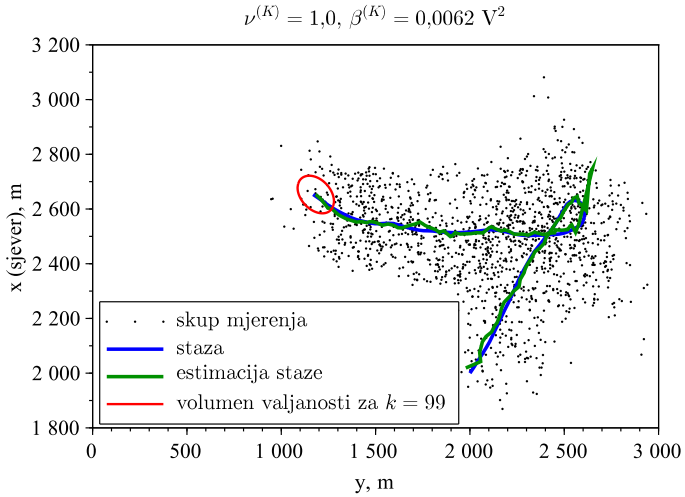


Slika 5.61. Implementacija referentne parametarske metode u segmentu estimacije omjera vjerodostojnosti i Viterbijeve metode pridruživanja s višemodelnom estimacijom IMM. Vidi također i primjer u odjeljku 4.5.

Tablica 5.11. Parametri simulacije za testiranje utjecaja pogrešnog modela, nadopuna tablice 5.4 za partikularni slučaj testiranja hipoteze $\mathrm{H2}^{(**)}$.

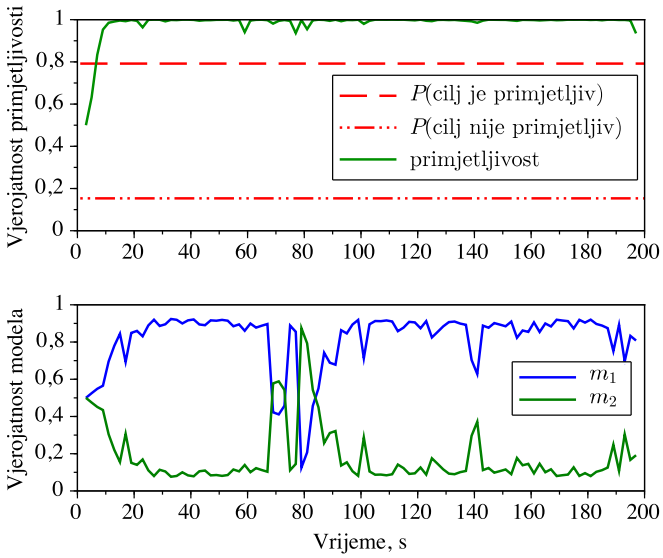
Parametar	Vrijednost	Opis
N_M	10	Broj segmenata, vidi primjer u odjeljku 4.5 (stranica 184)
$\nu^{(P)}$	0,36	Parametar oblika Paretove razdiobe odjeka cilja za stanje mora od 3 do 4, vidi sliku 5.59a
	0,83	Parametar oblika Paretove razdiobe odjeka cilja za stanje mora od 4 do 5, vidi sliku 5.60b
$\beta^{(P)}$	33636 V^{-2}	Parametar skaliranja Paretove razdiobe odjeka cilja za stanje mora od 3 do 4, vidi sliku 5.59a
	424,7 V^{-2}	Parametar skaliranja Paretove razdiobe odjeka cilja za stanje mora od 4 do 5, vidi sliku 5.60b

Slika 5.62 ilustrira stazu manevrirajućeg cilja u smetnji i njenu estimaciju, u kontekstu testiranja hipoteze $\mathrm{H2}^{(**)}$ za specifičan slučaj amplitudne K-razdiobe smetnje. Pri tome je dinamički model manevrirajućeg cilja opisan u odjeljku 2.4 (vidi također i tablicu 5.4 s vrijednostima parametara simulacije). Dok je smetnja opisana amplitudnom K-razdiobom parametra oblika $\nu^{(K)} = 1{,}0$ i skaliranja $\beta^{(K)} = 0{,}0062\ \mathrm{V}^2$ (vidi sliku 5.2b i tablicu 5.1), odjek cilja opisan je Paretovom razdiobom parametra oblika $\nu^{(P)} = 0{,}83$ i skaliranja $\beta^{(P)} = 424{,}7\ \mathrm{V}^{-2}$, vidi sliku 5.60b i tablicu 5.11. Metoda pridruživanja provedena je Viterbijevom metodom prema odjeljku 4.3.2, u višemodelnom okviru IMM i primjenom omjera vjerodostojnosti implementacijom metode radijalne mreže EM kako ilustrira slika 5.52. Radi smanjenja računalnog opterećenja simulacije, uzorci smetnje generirani su samo unutar prostora $10\mathcal{V}_k$, pri čemu $\mathcal{V}_k$ označava volumen valjanosti. U ovom partikularnom primjeru, operativne karakteristike prijemnika su $P_D = 0{,}825$ i $P_{FA} = 0{,}5$.



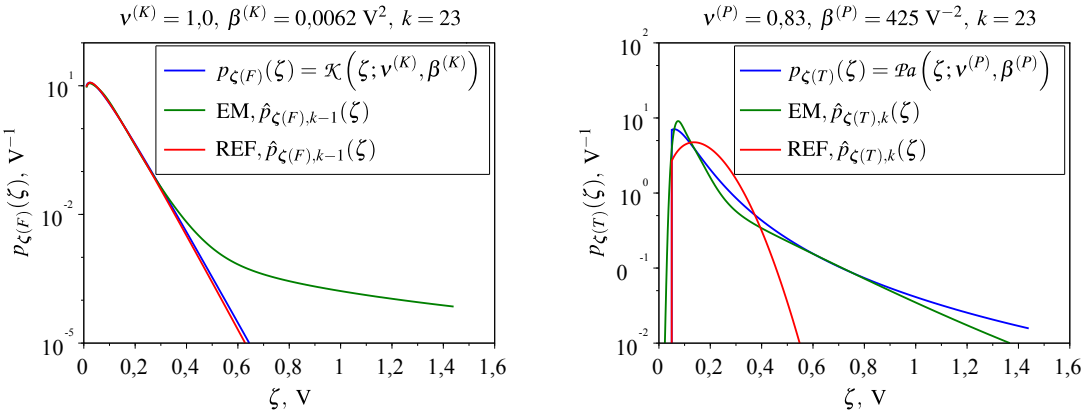
Slika 5.62. Jedna realizacija staze manevrirajućeg cilja u smetnji K-razdiobe, u kontekstu testiranja hipoteze $\mathrm{H2}^{(**)}$. Estimacija staze provedena je u višemodelnom okviru IMM, s vrijednostima parametara prema tablici 5.4, primjenom estimacije omjera vjerodostojnosti metodom radijalne mreže EM, uklopljene u Viterbijevu metodu pridruživanja. Vjerojatnost detekcije iznosi $P_D = 0{,}825$, a vjerojatnost lažne detekcije $P_{FA} = 0{,}5$.

Kako je ilustrirano slikom 5.63, primjetljivost $\mathcal{D}_k$ kroz cijelo je vrijeme trajanja staze približno 1, a vjerojatnosti modela m_1 i m_2 (model linearnog, odnosno krivocrtnog gibanja opisanog u odjeljku 2.1.3, stranica 25), odgovaraju dinamičkom modelu gibanja cilja pri kojem manevar počinje u trenutku $t_1 = 60$ s i traje 20 s (vidi vrijednosti parametara u tablici 5.4). Ovako visoka primjetljivost rezultat je velikog broja mjerenja unutar volumena valjanosti $\mathcal{V}_k$ te može rezultirati velikom vjerojatnošću pojave lažnih staza zbog toga što se estimacija provodi mjerenjima koja potječu od smetnje, a ne od cilja.



Slika 5.63. Primjetljivost $\mathcal{D}_k$ i vjerojatnost modela m_1 i m_2 za manevrirajući cilj u smetnji K-razdiobe, u kontekstu testiranja hipoteze $\mathrm{H2}^{(**)}$. Tijek primjetljivosti i vjerojatnosti modela odgovaraju estimaciji staze prikazane slikom 5.62. Prema tablici 5.4, početna vjerojatnost primjetljivosti $\mathcal{D}_0$ iznosi 0,5, a dok vjerojatnost zadržavanja primjetljivosti cilja $P(D_{k+1}\,|\,D_k)$ iznosi 0,95, vjerojatnost da neprimjetljivi cilj postane primjetljiv iznosi $P(D_{k+1}\,|\,\bar{D}_k) = 0{,}1$.

Djelovanje referentne parametarske metode (označene s REF) te metode radijalne mreže s implementacijom maksimiziranja vjerodostojnosti uzoraka u logaritamskoj domeni (označene s EM) na estimaciju razdiobe odjeka smetnje i cilja ilustrira slika 5.64, za partikularni vremenski indeks k. Dok u estimaciji razdiobe odjeka smetnje (slika 5.64a) nije primjetna značajna razlika između metoda (osim u repu razdiobe, što je zanemarivo), u estimaciji razdiobe odjeka cilja (slika 5.64b) vidljivo je značajno odstupanje Rayleighovog modela (rezultat metode REF) u odnosu na estimaciju metodom EM. Razlika se odražava i u vjerojatnosti zadržavanja staze P_{TT}, tablica 5.12, a također i testna statistika $\mathcal{T}(P_{TT})$ (prikazana u tablici 5.13) potvrđuje hipotezu $\mathrm{H2}^{(**)}$ za ovaj partikularni primjer smetnje prema amplitudnoj K-razdiobi i površinski cilj maskiran valovima (testna je statistika veća od granice prihvaćanja $d = 1{,}65$, uz pouzdanost testa 95 % i pod hipotezom Gaussove razdiobe veličine (5.161)).



(a) Razdioba odjeka smetnje.

(b) Razdioba odjeka cilja.

Slika 5.64. Usporedba parametarske i poluparametarske metode u estimaciji razdiobe odjeka cilja te smetnje prema amplitudnoj K-razdiobi. U estimaciji razdiobe odjeka cilja, parametarskom se metodom evaluira parametar Rayleighove razdiobe, što je evaluacija pod hipotezom pogrešnog modela. Nasuprot tome, poluparametarska se metoda temelji isključivo na prikupljenim uzorcima, bez hipoteze o modelu razdiobe.

Tablica 5.12. Ostvarena vjerojatnost zadržavanja staze u smetnji K-razdiobe, primjenom referentne parametarske metode i metode radijalne mreže, uz implementaciju omjera vjerodostojnosti u procesu pridruživanja.

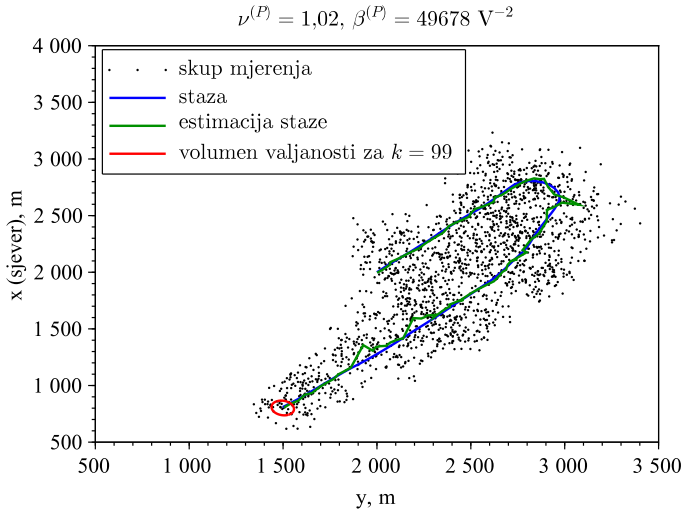
Metoda	P_{TT}
Referentna parametarska (REF)	0,18148
Radijalna mreža (EM)	0,260102

Tablica 5.13. Rezultat testiranja hipoteze $\mathrm{H2}^{(**)}$ za scenarij smetnje K-razdiobe.

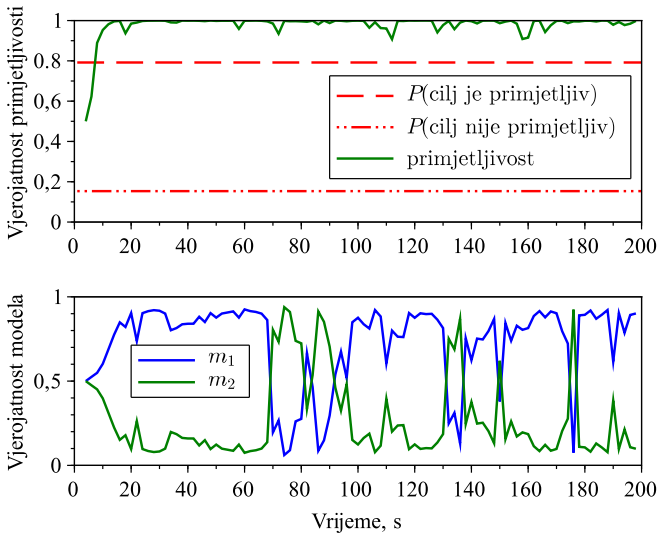
Komponenta	P_{TT}
$\overline{\Delta J}$	0,078618
$\sigma_{\overline{\Delta J}}$	0,023378
Rezultat testne statistike	3,3629013

Amplitudna razdioba odjeka cilja u smetnji Paretove razdiobe opisana je parametrom oblika $\nu^{(P)} = 0{,}36$ i skaliranja $\beta^{(P)} = 3363\ \mathrm{V}^{-2}$, vidi sliku 5.59a i tablicu 5.11. Vizualna usporedba

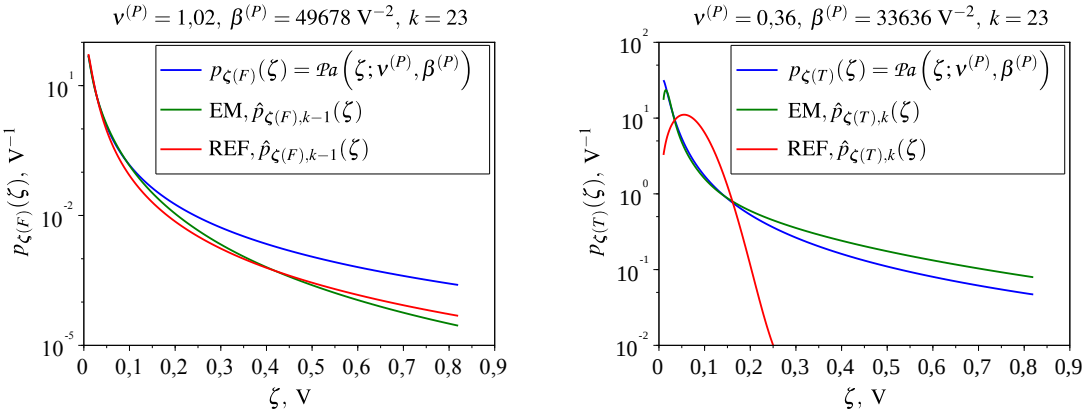
staze u smetnji i njene estimacije metodom radijalne mreže EM (slika 5.65) te tijeka primjetljivosti i vjerojatnosti modela (slika 5.66), ne pokazuje bitne razlike u odnosu na scenarij amplitudne K-razdiobe smetnje, vidi slike 5.62 i 5.63. Također i ostvarena vjerojatnost zadržavanja staze metodom radijalne mreže EM, prikazana u tablici 5.14, ne odstupa značajnije od one za scenarij K-razdiobe smetnje, ali je značajno (i drastično) veća od one koja je ostvarena referentnom parametarskom metodom, pod hipotezom Rayleighove razdiobe odjeka cilja u smetnji Paretove razdiobe, što pokazuje i vrijednost testne statistike $\mathcal{T}(P_{TT})$ u tablici 5.15, veća od granice prihvaćanja $d = 1{,}65$ za pouzdanost testa 95 %. Kao i u scenariju K-razdiobe, dok se estimacija smetnje dobro poklapa sa stvarnom razdiobom i za referentnu parametarsku i za metodu radijalne mreže, slika 5.67a, estimacija razdiobe odjeka cilja pod hipotezom Rayleighove razdiobe (u referentnoj parametarskoj metodi) značajno odstupa od stvarne razdiobe, što nije slučaj za estimaciju radijalnom mrežom, slika 5.67b.



Slika 5.65. Jedna realizacija staze manevrirajućeg cilja u smetnji Paretove razdiobe, u kontekstu testiranja hipoteze $\mathrm{H2}^{(**)}$. Estimacija staze provedena je u višemodelnom okviru IMM, s vrijednostima parametara prema tablici 5.4, primjenom estimacije omjera vjerodostojnosti metodom radijalne mreže EM, uklopljene u Viterbijevu metodu pridruživanja. Vjerojatnost detekcije iznosi $P_D = 0{,}833$, a vjerojatnost lažne detekcije $P_{FA} = 0{,}5$.



Slika 5.66. Primjetljivost $\mathcal{D}_k$ i vjerojatnost modela m_1 i m_2 za manevrirajući cilj u smetnji Paretove razdiobe, u kontekstu testiranja hipoteze $\mathrm{H2}^{(**)}$. Tijek primjetljivosti i vjerojatnosti modela odgovaraju estimaciji staze prikazane slikom 5.65. Prema tablici 5.4, početna vjerojatnost primjetljivosti $\mathcal{D}_0$ iznosi 0,5, a dok vjerojatnost zadržavanja primjetljivosti cilja $P(D_{k+1}\,|\,D_k)$ iznosi 0,95, vjerojatnost da neprimjetljivi cilj postane primjetljiv iznosi $P(D_{k+1}\,|\,\bar{D}_k) = 0{,}1$.



(a) Razdioba odjeka smetnje.

(b) Razdioba odjeka cilja.

Slika 5.67. Usporedba parametarske i poluparametarske metode u estimaciji razdiobe odjeka cilja te smetnje prema amplitudnoj Paretovoj razdiobi. U estimaciji razdiobe odjeka cilja, parametarskom se metodom evaluira parametar Rayleighove razdiobe, što je evaluacija pod hipotezom pogrešnog modela. Nasuprot tome, poluparametarska se metoda temelji isključivo na prikupljenim uzorcima, bez hipoteze o modelu razdiobe.

Tablica 5.14. Ostvarena vjerojatnost zadržavanja staze u smetnji Paretove razdiobe, primjenom referentne parametarske metode i metode radijalne mreže, uz implementaciju omjera vjerodostojnosti u procesu pridruživanja.

Metoda	P_{TT}
Referentna parametarska (REF)	0,0141667
Radijalna mreža (EM)	0,30125

Tablica 5.15. Rezultat testiranja hipoteze $H2^{(**)}$ za scenarij smetnje Paretove razdiobe.

Komponenta	P_{TT}
$\overline{\Delta J}$	0,2870833
$\sigma_{\overline{\Delta J}}$	0,0171728
Rezultat testne statistike	16,717294

5.4. Zaključak

Model smetnje implementiran je u proces pridruživanja u svrhu ublažavanja utjecaja smetnje na kvalitetu praćenja, a u ovom je poglavlju ispitana učinkovitost promjene paradigme u opisu smetnje iz uobičajenog parametarskog u poluparametarski model. Naime, analiza statističkih značajki smetnje provedena u poglavlju 3 i sažeta u uvodnom dijelu ovog poglavlja, pokazuje da, pored značajki samog radarskog senzora poput frekvencije, upadnog kuta, razlučivosti i polarizacije, značajke ovise i o oceanografskim uvjetima, poglavito o jakosti lokalnog vjetra, a prema [7] i o privjetrištu, blizini obale, morskim strujama, dubini mora i preprekama u propagaciji valova poput otoka i sl. Zbog specifičnosti Jadranskoga mora koja se prvenstveno ogleda u ograničenom privjetrištu i trajanju vjetra te, po saznanju autora, nepostojanju dostupnih podataka o statistici elektromagnetskog raspršenja (od morske površine), nije poznat pouzdan parametarski model opisa smetnje. Pored moguće evaluacije parametarskog modela na temelju provedbe velikog broja mjerenja pod različitim oceanografskim uvjetima, poput evaluacije opisane radom [334], gdje je na temelju mjerenja evalviran parametarski model amplitudne razdiobe i kratkoročne korelacije elektromagnetskog raspršenja za upadne kutove u rasponu od 15° do 45°, za scenarij nekoherentne detekcije u K- i Paretovoj amplitudnoj razdiobi smetnje te za frekvencijski agilni radarski senzor, moguća je evaluacija na temelju numeričke simulacije elektromagnetske propagacije, primjenom, za Jadransko more, specifičnog spektra gustoće valne energije

(3.3) [180] (Tabainov spektar). Naime, primjenom relacije disperzije $\omega \approx \sqrt{\mathrm{g}\, k_{EM}}$, spektar $S(\omega)$ može se izraziti kao spektar po valnim brojevima $S\left(k_{EM} = \frac{2\pi}{\lambda_{EM}}\right) = S\left(\omega = \sqrt{k_{EM}\mathrm{g}}\right)\left|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_{EM}}\right|$, a primjena inverzne brze Fourierove transformacije, pri čemu komponente spektra imaju slučajnu fazu u intervalu $[0, 2\pi)$, rezultira stohastičkom realizacijom dvodimenzionalne morske površine [174, 335, 336]. Pri tome je s k_{EM} označen valni broj, s $\mathrm{g} = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$ konstanta gravitacije, s λ_{EM} valna duljina i s ω kutna valna frekvencija. Primjena neke od metoda numeričkog rješavanja problema elektromagnetskog raspršenja od neregularne površine (metode momenata, FDTD i sl.), rezultira statistikom raspršenja za različite scenarije oceanografske okoline i značajke senzora. U radu [7], za male upadne kutove preporučuje se implementacija dodatnih elemenata koji reflektiraju događaje poput lomljenja valova, zasjenjivanja i višestrukih interferencija.

Za razliku od parametarskog modela, u poluparametarskome se modelu statističke značajke smetnje ekstrahiraju isključivo iz dostupnih mjerenja, primjenom, u ovome radu, neuronskih mreža. Pri tome je primijenjena paradigma učenja radijalne te acikličke slojevite mreže u stvarnom vremenu. Učenje radijalne mreže provedeno je bez nadzora, a acikličke korekcijom pogreške pod nadzorom. Premda primjena neuronske mreže u estimaciji razdiobe vjerojatnosti nije nov koncept, u ovom je poglavlju testirana u kontekstu implementacije unutar segmenta detekcije te estimacije omjera vjerodostojnosti, u scenariju smetnje (i odjeka cilja) nepoznate statistike i nekoherentnog radarskog senzora. Ostvareni znanstveni doprinosi u ovom poglavlju tako su:

1. Analiza arhitekture neuronske mreže koja je prilagodljiva promjenama statistike smetnje. Provedena je primjenom podataka radara IPIX [148], pod hipotezom da podaci reflektiraju očekivana stanja mora u Jadranu. Uključuje ostvarenu točnost estimacije amplitudne razdiobe s obzirom na broj neurona, u kontekstu ograničenog broja uzoraka koje radarski senzor prikuplja u okolici praćenog cilja. Rezultati pokazuju da uz $N = 1024$ uzoraka, točnost estimacije, izražena očekivanjem kvadrirane Hellingerove udaljenosti, doseže zasićenje za broj neurona $m \gtrsim 4$ i arhitekturu radijalne mreže s implementacijom maksimizacije vjerodostojnosti uzoraka te za $m \gtrsim 3$ i arhitekturu acikličke slojevite mreže s jednim skrivenim slojem, implementacijom metode glatkog izglađivanja kumulativa vjerojatnosti. U sklopu analize točnosti, provedena je i analiza računalnog opterećenja ovisno o arhitekturi mreže i metodi učenja koja obuhvaća metodu maksimizacije vjerodostojnosti te slijednu metodu implementacijom okvira Kalmanovog te čestičnog filtriranja. Rezultati pokazuju da su najmanje računalno opterećenje i najbrža konvergencija (ovisno o broju uzoraka) ostvareni arhitekturom radijalne mreže s implementacijom metode maksimiziranja vjerodostojnosti uzoraka. Također, arhitektura radijalne mreže je preferirana arhitektura za estimaciju amplitudne razdiobe jer je njena prijenosna funkcija uvijek probabilistička funkcija, za razliku od derivacije prijenosne funkcije ostvarene

metodom glatke interpolacije kumulativa koja to ne mora biti (pa je stoga za ovu metodu nametnuta regularizacija u vidu uvjeta monotonosti).

2. Metoda inkrementalnog stohastičkog izglađivanja kumulativa vjerojatnosti (ISIC), implementacijom okvira iterativnog Kalmanovog filtriranja (IEKF). Analiza ostvarene točnosti estimacije razdiobe smetnje prema K- i Paretovoj razdiobi, izražena očekivanjem kvadrirane Hellingerove udaljenosti, pokazuje da ne postoji značajna razlika u odnosu na klasičnu metodu izglađivanja kumulativa vjerojatnosti (SIC), također s implementacijom okvira IEKF, pri čemu su parametri Kalmanovog filtriranja u oba slučaja jednaki. Također i ostvarena vjerojatnost lažne detekcije ne odstupa značajno od one ostvarene metodom SIC. U kontekstu usporedbe točnosti estimacije razdiobe odjeka cilja prema Swerlingovom modelu br. 1 [73], za raspon omjera snage signala prema smetnji (K- i Paretove razdiobe) 5 dB $\leq \mathcal{R} \leq$ 15 dB, estimacija je točnija u odnosu na metodu radijalne mreže s maksimiziranjem vjerodostojnosti uzoraka (metoda EM). Premda je metoda ISIC prikladna za slijedno učenje i nepoznati broj uzoraka, kao npr. u scenariju estimacije razdiobe odjeka cilja, gdje za svaki vremenski okvir (okret antene) postoji najviše jedan uzorak, analiza računalnog opterećenja pokazuje da metoda EM (premda primjenjuje grupno učenje), zahtijeva manje računalno opterećenje za broj uzoraka $N \lesssim 128$. Za veći broj uzoraka, računalno opterećenje metode ISIC manje je od računalnog opterećenja metode EM.
3. Metoda implementacije neuronske mreže u procesu pridruživanja koji je zasnovan na Viterbijevoj metodi. Implementacija je provedena u segmentima detekcije i estimacije omjera vjerodostojnosti. Pri tome je učinkovitost implementacije neuronske mreže kao poluparametarskog modela, u specifičnom scenariju manevrirajćeg cilja i nekoherentnog radarskog senzora, ispitana testiranjem hipoteza:
   - H1 vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena metodom neuronske mreže nije značajno lošija od one ostvarene parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom ispravnog modela
   - H2 vjerojatnost zadržavanja staze ostvarena metodom neuronske mreže značajno je bolja od one ostvarene parametarskom metodom, evaluacijom parametara pod hipotezom pogrešnog modela.

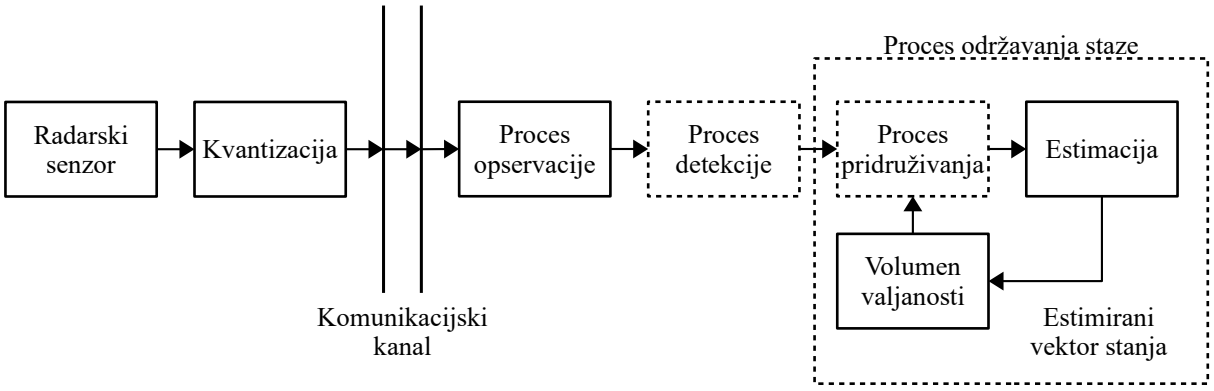
   Rezultati pokazuju da, u kontekstu detekcije, vjerojatnost zadržavanja staze P_{TT}, ovisno o omjeru snage signala prema smetnji $\mathcal{R}$, nije značajno lošija od one ostvarene referentnom parametarskom metodom, gdje su parametri modela evalvirani pod hipotezom ispravnog modela i beskonačno velikog broja uzoraka, ali da je značajno bolja u scenariju amplitudne K-razdiobe i viših omjera snage signala prema smetnji ($\mathcal{R} \gtrsim 16$ dB), kada se referentnom parametarskom metodom, na temelju jednakog broja uzoraka, parametri evaluiraju pod hipotezom pogrešnog modela (pod hipotezom Paretove razdiobe

iako je stvarna razdioba K). U scenariju Paretove razdiobe, poluparametarskom se metodom ostvaruje značajni dobitak u vjerojatnosti P_{TT} pri nižim omjerima snage signala prema smetnji ($\mathcal{R} \lesssim 5$ dB), u odnosu na referentnu parametarsku metodu gdje je evaluacija parametara provedena pod pogrešnom hipotezom modela prema K-razdiobi, iako je stvarna razdioba Paretova. U kontekstu omjera vjerodostojnosti, rezultati testiranja hipoteza pokazuju da je vjerojatnost zadržavanja staze P_{TT}, ostvarena metodom radijalne mreže s implementacijom maksimizacije vjerodostojnosti, značajno manja od one ostvarene idealnom parametarskom metodom zbog malog broja uzoraka na temelju kojih se estimira razdioba odjeka cilja. Pri tome se u referentnoj parametarskoj metodi parametri razdioba (odjeka cilja i smetnje) evaluiraju pod hipotezom ispravnih modela i beskonačno velikog broja uzoraka. Premda za 10 % do 15 % manja, vjerojatnost P_{TT} još je uvijek značajno veća nego vjerojatnost ostvarena parametarskom metodom bez primjene omjera vjerodostojnosti. U scenariju cilja koji je maskiran valovima, fluktuacija odjeka odstupa od uobičajenog Swerlingovog modela br. 1 [73] i primjenom se radijalne mreže ostvaruje značajno veća vjerojatnost P_{TT} u odnosu na onu ostvarenu parametarskom metodom, gdje je razdioba odjeka cilja evaluirana pod (pogrešnom) hipotezom Rayleighovog modela, na temelju jednakog broja uzoraka kao i za metodu radijalne mreže. Tako je u scenariju smetnje prema K-razdiobi, na temelju stvarnih podataka radara IPIX [148], primjenom radijalne mreže ostvarena vjerojatnost $P_{TT} \approx 0{,}26$ nasuprot $P_{TT} \approx 0{,}18$ koja je ostvarena parametarskom metodom, a u scenariju Paretove razdiobe smetnje (razdioba s težim repom), razlika je drastična zbog toga što je ostvarena vjerojatnost primjenom radijalne mreže $P_{TT} \approx 0{,}3$, a ona ostvarena parametarskom metodom svega $P_{TT} \approx 0{,}014$. Pri tome je vjerojatnost lažne detekcije $P_{FA} = 0{,}5$, a vjerojatnost detekcije $P_D \approx 0{,}8$. Premda praćenje cilja primjenom metode klasične nekoherentne detekcije uz ovako visoku vjerojatnost lažne detekcije nije primjenljivo u stvarnosti, dobitak u vjerojatnosti ipak ilustrira učinkovitost estimacije razdiobe odjeka cilja (i smetnje) neuronskom mrežom. Pretpostavka je autora da će implementacija dodatnih značajki otiska, poput Dopplerove frekvencije i polarimetrijskih značajki, dodatno povećati ovu vjerojatnost. Ali ako je imperativ nekoherentni senzor kao u ovom radu, onda ovako visoka vjerojatnost lažne detekcije ukazuje na potrebu primjene metode praćenja prije detekcije (TBD), gdje su procesi detekcije i pridruživanja provedeni implicitno unutar samog estimatora, pri čemu je cijeli volumen motrenja ustvari mjerenje, a postojanje se cilja evaluira s obzirom na statistiku odjeka unutar svake ćelije razlučivosti posebno. Međutim, primjena metode praćenja prije detekcije te implementacija Dopplerove frekvencije i polarimetrijskih značajki u procesu pridruživanja van su fokusa ovoga rada.

Poglavlje 6

Utjecaj kvantizacije na točnost estimacije amplitudne razdiobe

U ovom se poglavlju analizira utjecaj procesa kvantizacije amplitude radarskih odjeka na točnost estimacije njihove razdiobe. Kvantizacija je potrebna u kontekstu prijenosa amplitude kao digitalnog signala kroz komunikacijski kanal, od udaljenog radarskog senzora do lokacije gdje se provodi estimacija staze, kako je ilustrirano slikom 6.1. U tom je smislu potrebno odrediti minimalni broj razina kvantizacije pri kojem značajke procesa detekcije i pridruživanja (nekoherentnog radarskog senzora), implementacijom neuronske mreže (ilustrirane primjerima u odjeljcima 5.1.2, 5.2.2 i 5.3), ne odstupaju značajno u odnosu na scenarij bez amplitudne kvantizacije. Kako navedene značajke ovise o točnosti estimacije amplitudne razdiobe odjeka smetnje i cilja, minimalnim se brojem kvantizacijskih razina ostvaruje točnost estimacije (izražene očekivanjem kvadrata Hellingerove udaljenosti), koja ne odstupa značajnije u odnosu na scenarij bez primjene kvantizacije. Zbog konačne razlučivosti radarskog senzora u opservacijskoj domeni, i sama su mjerenja kvantizirana. Naime, opservacijsku domenu čine kinematička komponenta (radijalna i angularna pozicija) te komponenta otiska (amplitudna razdioba odjeka). Utjecaj kvantizacije na kinematičku komponentu ogleda se u povećanoj varijanci mjerenja zbog aditivnog šuma kvantizacije, zato jer je stvarna pozicija cilja jednako vjerojatna unutar (kinematičkog) volumena razlučivosti. Premda zbog toga šum kvantizacije ima jednoliku razdiobu, u praktičnoj je primjeni njegov utjecaj aproksimiran ekvivalentnim šumom Gaussove razdiobe, kako je ilustrirano primjerima u odjeljcima 2.4, 4.5, 5.1.2 i 5.3. Također, šum mjerenja koji nastaje zbog utjecaja termičkog šuma (smetnje) i fluktuacije odjeka je zanemaren. U ovom je poglavlju analiza utjecaja kvantizacije provedena samo u kontekstu prijenosa amplitude kao digitalnog signala kroz komunikacijski kanal. Utjecaj kvantizacije u procesima opservacije, detekcije i održavanja staze, kao i metoda prijenosa amplitude kao digitalnog signala, van su fokusa ovog rada.

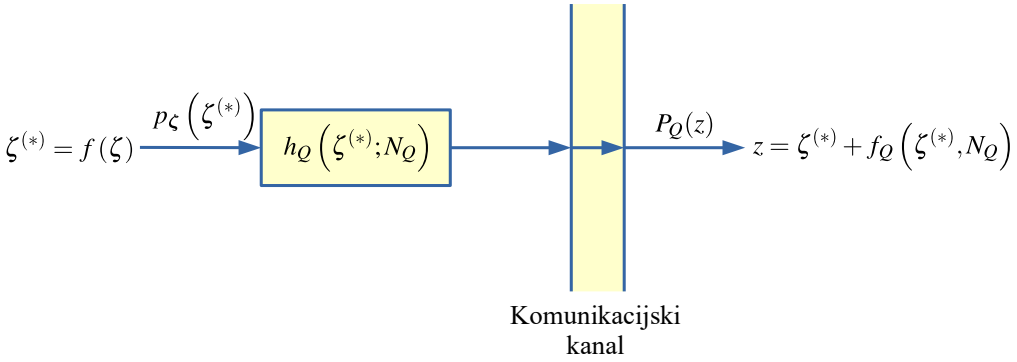


Slika 6.1. Ilustracija prijenosa amplitude kao digitalnog signala kroz komunikacijski kanal, od udaljenog radarskog senzora do lokacije gdje se provodi opservacija, detekcija te održavanje staze praćenog cilja.

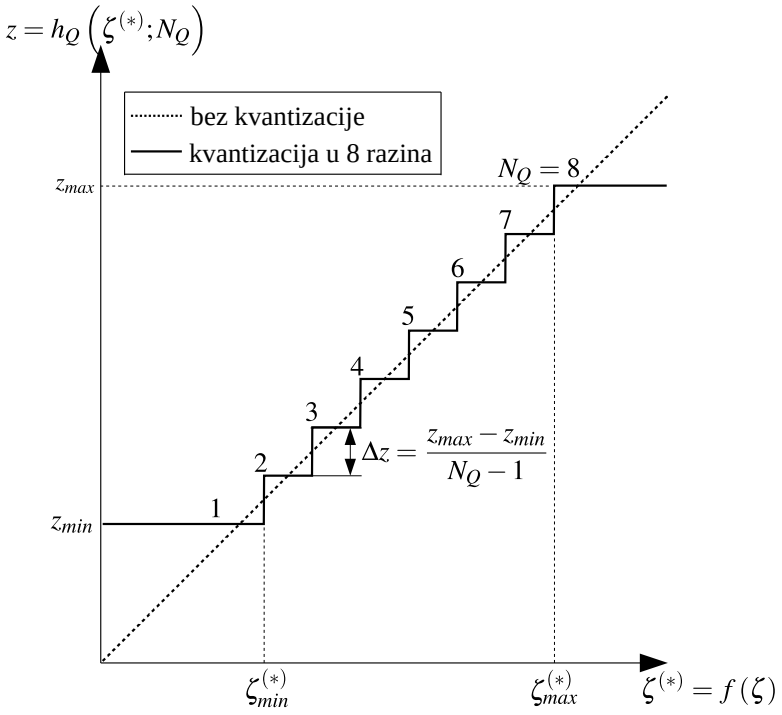
Utjecaj kvantizacije na estimaciju razdiobe, istražen u nastavku poglavlja, temelji se na rezultatima rada [337], razmatranju klasične teorije kvantizacije [338, 339]. Ilustriran je primjerom estimacije K- i Paretove razdiobe što je odraz stanja mora koja se očekuju u preko dvije trećine vremena u Jadranu, vidi odjeljak 5.1.2. Fokus primjera je procjena potrebnog broja razina kvantizacije pri kojoj njen utjecaj na točnost estimacije prestaje biti značajan te na metodu rekonstrukcije razdiobe pomoću spektralno ograničenog šuma, kako bi se primjenom manjeg broja razina kvantizacije postigla jednaka točnost, i to s obzirom na logaritamski prijemnik (detektor) dinamičkog raspona ≈ 100 dB, što je uobičajena značajka komercijalno dostupnih radarskih senzora (COTS).

6.1. Kvantizacija razdiobe

Kvantizacija mjerenja, funkcija ulazne amplitude $\zeta^{(*)}$ i broja kvantizacijskih razina $N_Q = 2p$, označena je sa $z = h_Q\big(\zeta^{(*)}; N_Q\big)$ te ilustrirana slikama 6.2 i 6.3 za partikularni primjer $N_Q = 8$ razina. Pri tome $\zeta^{(*)} = f(\zeta)$ označava općenitu (ne)linearnu funkciju amplitude odjeka, npr. (ne)linearno pojačanje, logaritamsku transformaciju i sl., $p_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$ amplitudnu razdiobu na ulazu kvantizatora i $P_Q(\cdot)$ diskretnu razdiobu na njegovom izlazu.



Slika 6.2. Ilustracija procesa kvantizacije. Dok je ulazna razdioba $p_\zeta\left(\zeta^{(*)}\right)$ kontinuirana, razdioba $P_Q(z)$ je diskretna. Greška kvantizacije $f_Q\left(\zeta^{(*)},N_Q\right)$ općenito je funkcija ulazne veličine $\zeta^{(*)}$ i broja kvantizacijskih razina N_Q.



Slika 6.3. Ilustracija kvantizacije amplitude u $N_Q = 8$ razina. Za vrijednosti ulazne amplitude $\zeta^{(*)} < \zeta_{min}^{(*)}$, izlazna veličina z ograničena je na vrijednost z_{min}, a za $\zeta^{(*)} > \zeta_{max}^{(*)}$, na vrijednost z_{max}.

Premda je proces kvantizacije nelinearan, u [339] je pokazano da je, zanemarujući zasićenje, diskretna razdioba vjerojatnosti $P_Q(\cdot)$ na izlazu kvantizatora rezultat linearnih procesa konvolucije te, analogno procesu (vremenskog) uzorkovanja, amplitudnog uzorkovanja. Naime, nakon kvantizacije, razdioba $P_Q(z)$ je diskretna,

$$P_Q\left(z = i\Delta z + \frac{\Delta z}{2}\right) = \int_{i\Delta z}^{(i+1)\Delta z} p_\zeta\left(\zeta^{(*)}\right) \mathrm{d}\zeta^{(*)},\ i = -p,\ldots,p-1 \tag{6.1}$$

te se u kontekstu teorije uzorkovanja može izraziti uzorkovanjem u točkama $i\Delta z + \frac{\Delta z}{2}, i = -m, \ldots, m-1$ konvolucije razdiobe $p_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta^{(*)}\right)$ s jednolikom razdiobom $\mathscr{U}\left(-\frac{\Delta z}{2}, \frac{\Delta z}{2}\right)$ [337, 339],

$$P_Q(z) = \sum_{i=-p}^{p-1} \delta\left(z - i\Delta z + \frac{\Delta z}{2}\right) \left(p_{\boldsymbol{\zeta}} * \mathscr{U}\right)(z), \tag{6.2}$$

pri čemu operator $*$ označava konvoluciju, a Δz korak kvantizacije.

Karakteristična funkcija $\varphi(t)$ razdiobe $p(z)$,

$$\varphi(t) = E\left(\exp(\mathrm{i}tz)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}tz)\, p(z)\, \mathrm{d}z \tag{6.3}$$

[340], u kontekstu diskretne razdiobe $P_Q(z)$,

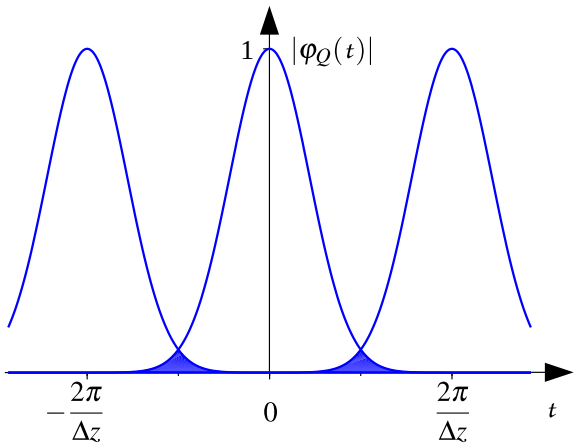
$$\varphi_Q(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_{\boldsymbol{\zeta}}\left(t + j\frac{2\pi}{\Delta z}\right) \frac{\sin\left(\frac{\Delta z}{2}\left(t + j\frac{2\pi}{\Delta z}\right)\right)}{\frac{\Delta z}{2}\left(t + j\frac{2\pi}{\Delta z}\right)}, \tag{6.4}$$

pri čemu je $\varphi_{\boldsymbol{\zeta}}(\cdot)$ karakteristična funkcija razdiobe $p_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta^{(*)}\right)$, može se interpretirati kao „frekvencijski spektar" s reverziranom frekvencijom [337]. A zbog toga što razdioba ulazne amplitude $p_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta^{(*)}\right)$ općenito nije „spektralno ograničena", nakon kvantizacije se pojavljuje efekt preklapanja spektra, kako ilustrira slika 6.4 na primjeru karakteristične funkcije kvantizirane Gaussove razdiobe (koja nije „spektralno ograničena"). Stoga je uvjet za otklanjanje efekta preklapanja spektra „spektralno ograničena" razdioba $p_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta^{(*)}\right)$, iz čega prema (6.4) proizlazi uvjet (vidi 1. teorem kvantizacije u [339])

$$\varphi_{\boldsymbol{\zeta}}(t) = 0 \;\forall |t| > \frac{\pi}{\Delta z} \tag{6.5}$$

te se karakteristična funkcija razdiobe prije kvantizacije $p_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta^{(*)}\right)$ može rekonstruirati iz

$$\varphi_{\boldsymbol{\zeta}}(t) = \varphi_Q(t) \frac{\frac{2}{\Delta z t}}{\sin\left(\frac{\Delta z}{2} t\right)}. \tag{6.6}$$



Slika 6.4. Ilustracija preklapanja spektra na primjeru karakteristične funkcije kvantizirane Gaussove razdiobe $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$ uz $\Delta z = 1{,}5\sigma$. Dio spektra koji se preklapa označen je ispunom.

Prema [339], momenti razdiobe $P_Q(z)$ mogu se rekonstruirati iz kontinuirane razdiobe $p_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta^{(*)}+u\right)$ ako je zadovoljen uvjet

$$\varphi_{\boldsymbol{\zeta}}(t) = 0 \;\forall |t| > \frac{2\pi}{\Delta z} - \mathrm{b}, \tag{6.7}$$

vidi sliku 6.5, pri čemu $u \sim \mathscr{U}\left(-\frac{\Delta z}{2}, \frac{\Delta z}{2}\right)$ označava šum jednolike razdiobe, a b pozitivnu i proizvoljno malenu konstantu, vidi 2. teorem kvantizacije u [339]. Tako su prva dva rekonstruirana momenta jednaka

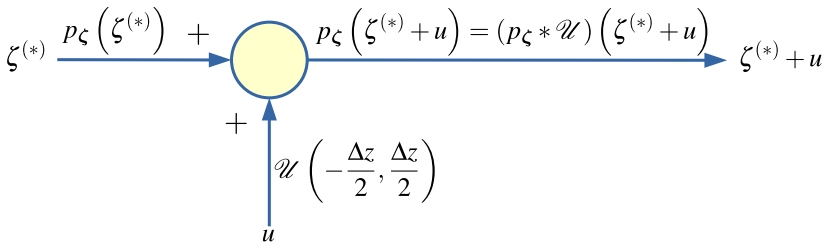
$$E\left(\zeta^{(*)}\right) = E\left(\zeta^{(*)}+u\right), \tag{6.8}$$

$$E\left(\left(\zeta^{(*)}\right)^2\right) = E\left(\left(\zeta^{(*)}+u\right)^2\right) - \frac{\Delta z^2}{12}, \tag{6.9}$$

a prema [341], nužan i dovoljan uvjet da greška kvantizacije $f_Q\left(\zeta^{(*)}, N_Q\right)$ ima jednoliku razdiobu je

$$\varphi_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\frac{2\pi i}{\Delta z}\right) = 0, \quad i = \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{6.10}$$

Prema [338, 342], ako su zadovoljeni uvjeti (6.5) ili (6.7), greška kvantizacije $f_Q\left(\zeta^{(*)}, N_Q\right)$ nije korelirana s ulaznom veličinom $\zeta^{(*)}$.



Slika 6.5. Ilustracija konvolucije razdiobe ulazne veličine $p_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta^{(*)}\right)$ i šuma jednolike razdiobe $\mathscr{U}\left(-\frac{\Delta z}{2},\frac{\Delta z}{2}\right)$ zbrojem statistički neovisnih uzoraka $\zeta^{(*)}$ i u.

Tako kvantizacija mjerenja rezultira:

1. zasićenjem, kada je vrijednost ulazne amplitude $\zeta^{(*)}$ manja od donje granice kvantizacije $\zeta^{(*)}_{min}$ ili je veća od gornje granice $\zeta^{(*)}_{max}$, što rezultira vrijednošću mjerenja $z = z_{min}$ odnosno $z = z_{max}$
2. šumom jednolike razdiobe $f_Q\left(\zeta^{(*)},N_Q\right) \sim \mathscr{U}\left(-\frac{\Delta z}{2},\frac{\Delta z}{2}\right)$, varijance $\mathrm{var}\left(f_Q\right)=\frac{\Delta z^2}{12}$ ako je zadovoljen uvjet (6.10), pri čemu je šum nekoreliran s ulaznom veličinom $\zeta^{(*)}$ ako je zadovoljen uvjet (6.5) ili (6.7)
3. izobličenjem rekonstruirane razdiobe $\hat{p}_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta^{(*)}\right)$ i distribucije $\hat{F}_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta^{(*)}\right)$ zbog efekta preklapanja spektra, osim ako izvorna razdioba $p_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta^{(*)}\right)$ nije „spektralno ograničena", odnosno ako je zadovoljen uvjet (6.5).

Prema točkama 1 i 2, funkcija kvantizacije $h_Q\left(\zeta^{(*)};N_Q\right)$ definirana je kao

$$h_Q\left(\zeta^{(*)};N_Q\right)=\begin{cases} z_{min}, & \zeta^{(*)} < \zeta^{(*)}_{min} \\ \Delta z\lfloor\frac{\zeta^{(*)}}{\Delta z}\rfloor+\frac{\Delta z}{2}, & \zeta^{(*)}_{min} \le \zeta^{(*)} \le \zeta^{(*)}_{max} \\ z_{max}, & \zeta^{(*)} > \zeta^{(*)}_{max} \end{cases}. \tag{6.11}$$

Kada je broj kvantizacijskih razina N_Q malen, razdioba ulazne veličine $p_{\boldsymbol{\zeta}}\left(\zeta^{(*)}\right)$ nije „spektralno ograničena" i uvjet (6.5) nije zadovoljen. Tada razdioba kvantizacijske greške $f_Q\left(\zeta^{(*)},N_Q\right)$ nije jednolika te se javlja korelacija s ulaznom veličinom $\zeta^{(*)}$, kao i efekt spektralnog preklapanja, kako je to ilustrirano slikom 6.4 na primjeru kvantizirane Gaussove razdiobe. Primjena klasične metode unošenja šuma w_D odgovarajuće statistike (engl. *dither*), kontrolira statistiku šuma kvantizacije $f_Q\left(\zeta^{(*)}+w_D,N_Q\right)$ [343]. Prema rezultatima analize statističkih osobina kvantizacijske greške klasične metode unošenja šuma sa suptrakcijom na prijemnoj strani mjerenja z, ilustrirane slikom 6.6, pokazuje da, ako je šum w_D neovisan o ulaznoj veličini $\zeta^{(*)}$ i karakteristične funkcije $\varphi_w(t)$ koja zadovoljava uvjet

$$\varphi_w\left(\frac{2\pi i}{\Delta z}\right)=0, \quad i=\pm1,\pm2,\ldots, \tag{6.12}$$

greška kvantizacije $f_Q\left(\zeta^{(*)}+w_D, N_Q\right)$ nije korelirana s ulaznom veličinom $\zeta^{(*)}$, pa vrijedi da je kvantizacijska greška $f_Q\left(\zeta^{(*)}+w_D, N_Q\right) = f_Q(N_Q)$ jednolike razdiobe, varijance $\mathrm{var}(f_Q(N_Q)) = \frac{\Delta z^2}{12}$ [344]. Uvjet (6.12) u skladu je s uvjetom (6.10) jer karakteristična funkcija $\varphi_{\zeta+w}(t) = \varphi_{\zeta}(t)\,\varphi_w(t)$ veličine $\zeta^{(*)}+w_D$ na ulazu u kvantizator zadovoljava uvjet (6.10), što znači da je greška kvantizacije nekorelirana sa $\zeta^{(*)}+w_D$, a kako su $\zeta^{(*)}$ i w_D statistički nezavisne veličine, ne postoji ni korelacija kvantizacijske greške s ulaznom veličinom $\zeta^{(*)}$. Posebno, ako je karakteristična funkcija šuma w_D „spektralno ograničena", ograničena je i karakteristična funkcija $\varphi_{\zeta+w}(t)$ na ulazu u kvantizator, što znači da su tada izbjegnuti efekti preklapanja spektra.

U [345], u kontekstu estimacije metodom maksimalne vjerodostojnosti na temelju kvantiziranih senzorskih mjerenja, predložena je „spektralno ograničena" (u pojasu vrijednosti argumenta karakteristične funkcije $|t| < \frac{\pi}{\Delta z}$), razdioba šuma w_D u obliku

$$p_w(w_D) = \frac{1}{\mathrm{c}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi w_D}{2i\Delta z}\right)}{\left(\frac{\pi w_D}{2i\Delta z}\right)}\right)^{2i},$$
$$\mathrm{c} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi r}{2i\Delta z}\right)}{\left(\frac{\pi r}{2i\Delta z}\right)}\right)^{2i}\mathrm{d}\,r, \quad i = 1,2,\ldots, \tag{6.13}$$

jer je u istome radu pokazano da je dovoljan uvjet „spektralne ograničenosti" taj da se karakteristična funkcija $\varphi_w(t)$ može faktorizirati kao

$$\varphi_w(t) = (f_w * f_w)(t), \tag{6.14}$$

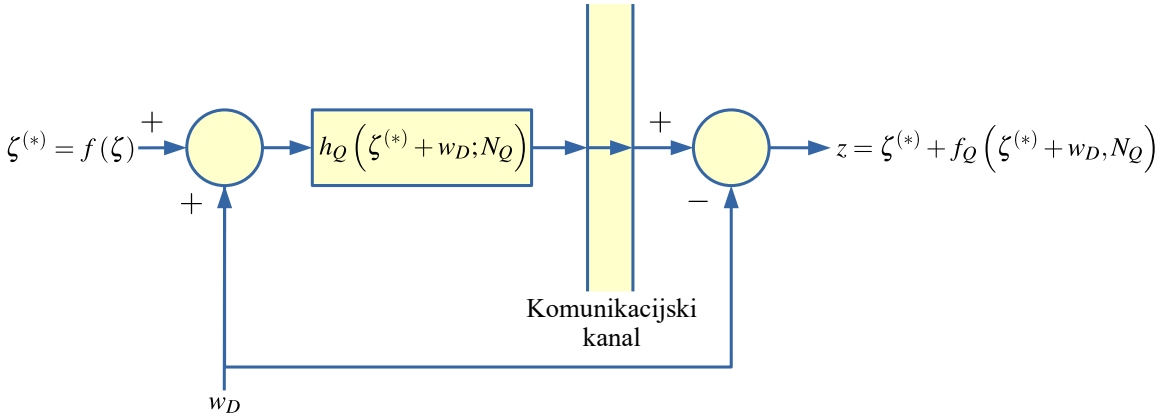
pri čemu općenito kompleksna funkcija $f_w(t)$ zadovoljava uvjete

$$f_w(t) = 0\ \forall\ |t| > \frac{\pi}{2\Delta z}\ \wedge\ \int_{-\frac{\pi}{2\Delta z}}^{\frac{\pi}{2\Delta z}} |f_w(t)|^2\,\mathrm{d}\,t = 2\pi. \tag{6.15}$$

Kako se (6.13) može izraziti kao $p_w(w_D) = g_w(w_D)\,g_w(w_D)$ i vrijedi da

$$f_w(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}tw_D)\,g_w(w_D)\,\mathrm{d}\,w_D \tag{6.16}$$

zadovoljava uvjet (6.15), karakteristična funkcija razdiobe (6.13) jednaka je (6.14) i „spektralno je ograničena". A u kontekstu rekonstrukcije karakteristične funkcije ulazne veličine $\zeta^{(*)}$ prema (6.6) i uvjeta (6.5), suptrakcija šuma w_D na prijemnoj strani modela prema slici 6.5 provodi rekonstrukciju umnoška $\varphi_{\zeta}(t)\,\frac{\sin(t\Delta z/2)}{(t\Delta z/2)}$, što odgovara zbroju statistički neovisnih uzoraka ulazne veličine $\zeta^{(*)}$ i aditivnog šuma $u \sim \mathscr{U}\left(-\frac{\Delta z}{2}, \frac{\Delta z}{2}\right)$.



Slika 6.6. Ilustracija metode unošenja šuma w_D sa suptrakcijom na prijemnoj strani mjerenja z.

6.2. Primjer

Fokus primjera je procjena potrebnog broja bitova kvantizacije pri kojem ne postoji značajna razlika ostvarene točnosti estimacije, implicitno i operativnih karakteristika prijemnika, u odnosu na scenarij mjerenja bez kvantizacije. Tako je u prvom dijelu primjera procjena provedena u kontekstu kvantizacije mjerenja prema metodi koja je ilustrirana slikom 6.2, a u drugom, u kontekstu implementacije metode kvantizacije s unošenjem šuma (*dither*) prema slici 6.6. Procjena je provedena empirijski, na temelju velikog broja realizacija estimacija K- i Paretove razdiobe, također i razdiobe odjeka cilja prema 1. Swerlingovom modelu [73] (u pozadinskoj smetnji navedenih razdioba, bez utjecaja termičkog šuma), sa specifičnim vrijednostima parametara za koje se vjeruje da reflektiraju stanja Jadranskoga mora u otprilike dvije trećine vremena, kako je i navedeno u odjeljku 5.1.2. U osnovi je metoda procjene usporedba očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti za scenarij mjerenja bez primjene kvantizacije i scenarij s primjenom kvantizacije, za partikularnu razdiobu i određenu arhitekturu neuronske mreže. Za ovaj je primjer odabrana arhitektura radijalne mreže (RBF) zbog povoljnog omjera točnosti estimacije razdiobe i računalnog opterećenja u odnosu na arhitekturu acikličke mreže s jednim slojem, vidi rezultate primjera u odjeljcima 5.1.2 i 5.2.2. Drugi je važan faktor u izboru ove arhitekture svojstvo da je estimirana razdioba uvijek probabilistička funkcija, u cijelom opsegu skupa realnih brojeva (dakle i van dinamičkog područja vrijednosti amplituda za učenje), za razliku od estimacije primjenom acikličke mreže koja to nužno ne mora biti. Ova je činjenica posebno važna u određivanju praga nekoherentne detekcije za vjerojatnosti lažne detekcije koje su približno $1/N$ (pri čemu je N broj uzoraka za učenje), dakle u scenariju kada ne postoji dovoljan broj uzoraka za dovoljno točnu estimaciju repa razdiobe, vidi primjere u odjeljcima 5.1.2 i 5.2.2. Estimacija razdiobe radijalnom mrežom provodi se maksimizacijom vjerodostojnosti u logaritamskoj domeni, metodom maksimizacije očekivanja, vidi odjeljak 5.1.1. Pri tome je spe-

cifičnosti ovog primjera opis prijenosne funkcije realnog logaritamskog prijemnika (detektora) u obliku

$$\zeta^{(*)} = f(\zeta) = \mathrm{c}\log_{\mathrm{e}}(1+\mathrm{s}\zeta) \tag{6.17}$$

pri čemu je sa ζ označena amplituda odjeka na ulazu prijemnika. Konstante s i c odabrane su tako da je dinamičko područje prijemnika ≈ 100 dB, što je uobičajena vrijednost za komercijalno dostupne radarske senzore namijenjene nadzoru morske površine. Ako se sa ζ_{min} i ζ_{max} označe minimalna i maksimalna vrijednost amplitude odjeka na ulazu u logaritamski prijemnik (detektor) (6.17), vrijednost konstante s zadovoljava uvjet $\mathrm{s}\zeta_{min} \gg 1$, a konstante c uvjet da je vrijednost $\mathrm{c}\log_{\mathrm{e}}(1+\mathrm{s}\zeta_{max})$ jednaka maksimalnoj ostvarivoj amplitudi radarskog senzora IPIX [213], vidi tablicu 6.1. Sam tijek simulacije ilustriran je slikom 6.7, a koraci simulacije slijede korake iz odjeljka 5.1.2:

K1 inicijalizacija s parametrima prema tablici 6.1

K2 vidi korak K2 na stranici 226

K3 vidi korak K3 na stranici 227, uz dodatne korake

K3a generiranje skupa $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}(T)}$ od N uzoraka nekoherentno detektiranih odjeka cilja, razdiobe prema Swerlingovom modelu br. 1 [73], u pozadinskoj smetnji K- i Paretove razdiobe i bez utjecaja termičkog šuma (rezultirajuća razdioba označena je s $p^{(\mathrm{b})}_{\boldsymbol{\zeta}(T)}$ i nije dana u analitičkom obliku)

$$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}(T)} = \left\{ \zeta_i : \zeta_i \sim p^{(\mathrm{b})}_{\boldsymbol{\zeta}(T)}, \zeta_i = \left| \zeta_i^{(\mathrm{I})} + \mathrm{i}\zeta_i^{(\mathrm{Q})} \right|, i = 1, \ldots, N \right\}, \tag{6.18}$$

pri čemu $\zeta^{(\mathrm{I})}$ označava faznu, a $\zeta^{(\mathrm{Q})}$ kvadraturnu komponentu za koje vrijedi

$$\zeta_i^{(\mathrm{I})} = \zeta_{(T),i}^{(\mathrm{I})} + \zeta_{(F),i}^{(\mathrm{I})}, \quad \zeta_i^{(\mathrm{Q})} = \zeta_{(T),i}^{(\mathrm{Q})} + \zeta_{(F),i}^{(\mathrm{Q})}, \tag{6.19}$$

gdje su komponente odjeka koje potječu od cilja odnosno smetnje označene indeksima (T) i (F) i realizacije su Gaussove razdiobe prema

$$\zeta_{(T),i}^{(\mathrm{I})} \sim \mathscr{N}\left(0, \mathcal{R}\frac{\nu^{(K)}\beta^{(K)}}{2}\right), \quad \zeta_{(T),i}^{(\mathrm{Q})} \sim \mathscr{N}\left(0, \mathcal{R}\frac{\nu^{(K)}\beta^{(K)}}{2}\right) \tag{6.20}$$

za K-razdiobu, odnosno

$$\zeta_{(T),i}^{(\mathrm{I})} \sim \mathscr{N}\left(0, \frac{2\mathcal{R}}{\beta^{(P)}\left(\nu^{(P)}-1\right)}\right), \quad \zeta_{(T),i}^{(\mathrm{Q})} \sim \mathscr{N}\left(0, \frac{2\mathcal{R}}{\beta^{(P)}\left(\nu^{(P)}-1\right)}\right) \tag{6.21}$$

za Paretovu razdiobu i

$$\zeta_{(F),i}^{(\mathrm{I})} \sim \mathscr{N}(0, \eta_i), \quad \zeta_{(F),i}^{(\mathrm{Q})} \sim \mathscr{N}(0, \eta_i) \tag{6.22}$$

za pozadinsku smetnju, pri čemu je radarski presjek η_i realizacija gama-razdiobe kao $\eta_i \sim \mathscr{G}\left(\nu^{(K)}, \beta^{(K)}\right)$ za pozadinsku smetnju prema K-razdiobi, odnosno $\eta_i^{-1} \sim \mathscr{G}\left(\nu^{(P)}, \beta^{(P)}\right)$ za pozadinsku smetnju prema Paretovoj razdiobi

K3b generiranje skupa $\mathbb{W}$ od N uzoraka šuma, $\mathbb{W} = \{w_{D_i}, i = 1, \ldots, N\}$, „spektralno ograničene" karakteristične funkcije $\varphi_w(\cdot)$ koja zadovoljava uvjet (6.5), razdiobe prema (6.13) uz $i = 2$, iz čega proizlazi vrijednost konstante $\mathrm{c} = \frac{8}{3}\Delta z$

K3c generiranje uzoraka šuma w_D primjenom metode opisane u odjeljku 4.5 (stranica 178), rješavanjem

$$\int_0^u \mathscr{U}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{3}{8\Delta z}\int_{-\infty}^{w_D}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi r}{4\Delta z}\right)}{\left(\frac{\pi r}{4\Delta z}\right)}\right)^4 \mathrm{d}r \tag{6.23}$$

odnosno

$$u = \frac{1}{2} + \frac{3}{8\Delta z}\int_0^{w_D}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi r}{4\Delta z}\right)}{\left(\frac{\pi r}{4\Delta z}\right)}\right)^4 \mathrm{d}r \tag{6.24}$$

po w_D, pri čemu je $u \sim \mathscr{U}(0,1)$

K4 estimacija parametara radijalne mreže metodom maksimizacije vjerodostojnosti u logaritamskoj domeni, primjenom iteracijskih koraka (5.20) – (5.23) i procjena točnosti estimacije

K4a estimacija skupa parametara $\mathbb{Y}$ na temelju uzoraka $\left\{\zeta_i^{(*)}, i = 1, \ldots, N\right\}$ (mjerenja bez kvantizacije)

K4b za metodu kvantizacije mjerenja prema slici 6.2, estimacija skupa parametara $\mathbb{Y}_Q$ na temelju uzoraka $\left\{h_Q\left(\zeta_i^{(*)}, N_Q\right), i = 1, \ldots, N\right\}$

K4c za metodu kvantizacije mjerenja prema slici 6.6, estimacija skupa parametara $\mathbb{Y}_{Q_w}$ na temelju uzoraka $\left\{h_Q\left(\zeta_i^{(*)} + w_D, N_Q\right), i = 1, \ldots, N\right\}$

K4d konstrukcija razdiobe $\hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}$ na temelju skupa parametara $\mathbb{Y}$ te razdioba $\hat{q}_{Q,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}$ i $\hat{q}_{Q_w,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}$ na temelju skupova $\mathbb{Y}_Q$ i $\mathbb{Y}_{Q_w}$

K4e određivanje kvadrata Hellingerove udaljenosti $d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)$, $d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)$ i $d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q_w,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)$

K5 $\forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$, prag nekoherentne detekcije, određen rješenjem

$$P_{FA} = \int_{\hat{Z}_{\upsilon,m}}^{\infty} \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{i=1}^{m} w_i \int_{\hat{Z}_{\upsilon,m}}^{\infty} q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta \mid \boldsymbol{\upsilon}_i)\,\mathrm{d}\zeta \tag{5.44}$$

po $\hat{Z}_{\upsilon,m}$ za mjerenja bez kvantizacije te rješenjem

$$P_{FA_Q} = \int_{\hat{Z}_{Q,\upsilon,m}}^{\infty} \hat{q}_{Q,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{i=1}^{m} w_{Q,i} \int_{\hat{Z}_{Q,\upsilon,m}}^{\infty} q_{\upsilon}^{(\mathrm{b,r})}\left(\zeta \mid \boldsymbol{\upsilon}_{Q,i}\right)\mathrm{d}\zeta \tag{5.44}$$

i

$$P_{FA_{Q_w}} = \int_{\hat{Z}_{Q_w,\upsilon,m}}^{\infty} \hat{q}^{(\mathrm{b,r})}_{Q_w,\upsilon,m}(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \sum_{i=1}^{m} w_{Q_w,i} \int_{\hat{Z}_{Q_w,\upsilon,m}}^{\infty} q^{(\mathrm{b,r})}_{\upsilon}\left(\zeta \,|\, \boldsymbol{\upsilon}_{Q_w,i}\right)\mathrm{d}\zeta \tag{5.44}$$

po $\hat{Z}_{Q,\upsilon,m}$ odnosno $\hat{Z}_{Q_w,\upsilon,m}$ za mjerenja s kvantizacijom

K6 $\forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$ i za svaku i-tu realizaciju, primjenom pragova detekcije $\hat{Z}_{\upsilon,m}$, $\hat{Z}_{Q,\upsilon,m}$ i $\hat{Z}_{Q_w,\upsilon,m}$ na stvarnu razdiobu $p^{(\mathrm{b,r})}_{\boldsymbol{\zeta}}$, slijede ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije P_{FA_i} kao

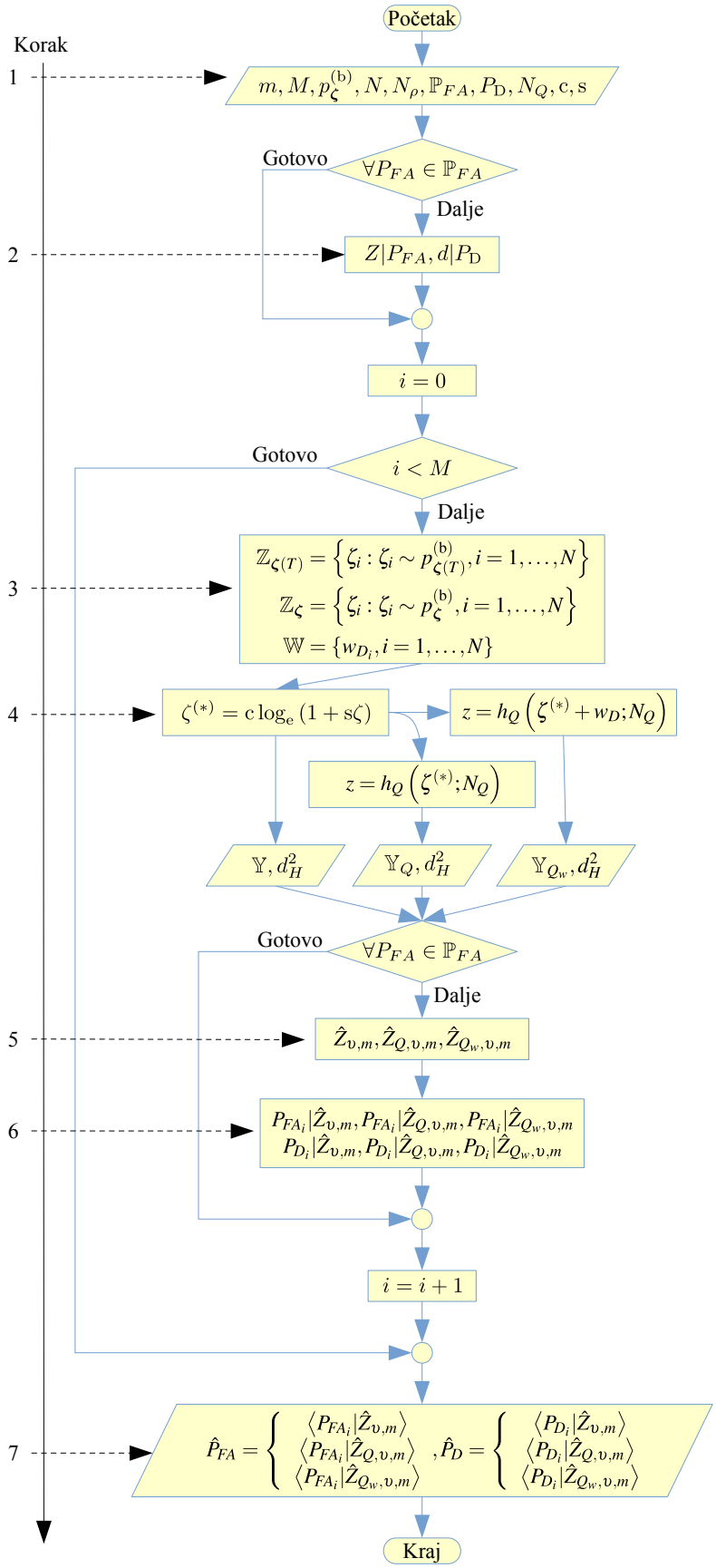
$$P_{FA_i} = \int_{f(Z)}^{\infty} p^{(\mathrm{b})}_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \tag{5.52}$$

te ostvarene vjerojatnost detekcije

$$P_{D_i} = \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{\beta^{(K)}}{2}\right)^{\nu^{(K)}}\Gamma\left(\nu^{(K)}\right)} \int_{f(Z)}^{\infty} \zeta\mathrm{d}\zeta \int_0^{\infty} \frac{\eta^{\nu^{(K)}-1}}{\eta+d^{(K)}} \exp\left(-\frac{2\eta}{\beta^{(K)}} - \frac{\zeta^2}{2\left(\eta+d^{(K)}\right)}\right)\mathrm{d}\eta, & p^{(\mathrm{b})}_{\boldsymbol{\zeta}} = \mathcal{K} \\ \frac{1}{\left(\frac{\beta^{(P)}}{2}\right)^{\nu^{(P)}}\Gamma\left(\nu^{(P)}\right)} \int_{f(Z)}^{\infty} \zeta\mathrm{d}\zeta \int_0^{\infty} \frac{\eta^{-\nu^{(P)}-1}}{\eta+d^{(P)}} \exp\left(-\frac{2}{\beta^{(P)}\eta} - \frac{\zeta^2}{2\left(\eta+d^{(P)}\right)}\right)\mathrm{d}\eta, & p^{(\mathrm{b})}_{\boldsymbol{\zeta}} = \mathcal{P}a \end{cases} \tag{5.46}$$

pri čemu je $f(Z) = \hat{Z}_{\upsilon,m}$ za mjerenja bez kvantizacije, $f(Z) = \hat{Z}_{Q,\upsilon,m}$ za kvantizaciju mjerenja metodom prema slici 6.2 te $f(Z) = \hat{Z}_{Q_w,\upsilon,m}$ za metodu kvantizacije prema slici 6.6

K7 $\forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$, evaluacija operativnih karakteristika prijemnika primjenom uzoračke srednje vrijednosti, izražene kroz ovisnost ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA} = \langle\{P_{FA_i}, i = 1,\ldots,M\}\rangle$ i vjerojatnosti detekcije $\hat{P}_D = \langle\{P_{D_i}, i = 1,\ldots,M\}\rangle$ o dizajniranoj vrijednosti P_{FA}, za mjerenja bez kvantizacije i mjerenja s kvantizacijom.



Slika 6.7. Shematski prikaz simulacije za određivanje operativnih karakteristika prijemnika u scenariju mjerenja s kvantizacijom.

Tablica 6.1. Parametri simulacije operativnih karakteristika prijemnika u scenariju mjerenja s kvantizacijom.

Parametar	Vrijednost	Opis
m	8	Broj baznih komponenti
M	100	Broj stohastičkih realizacija
$p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}$	$\mathcal{K}$	Referentna K-razdioba
	$\mathcal{P}a$	Referentna Paretova razdioba
$p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}^{(\mathrm{b})}$	–	Referentna razdioba prema 1. Swerlingovom modelu u pozadinskoj smetnji K-razdiobe, bez termičkog šuma
	–	Referentna razdioba prema 1. Swerlingovom modelu u pozadinskoj smetnji Paretove razdiobe, bez termičkog šuma
$\nu^{(K)}$	1,00	Parametar oblika za referentnu K-razdiobu
$\nu^{(P)}$	1,02	Parametar oblika za referentnu Paretovu razdiobu
$\beta^{(K)}$	0,0062 V^2	Parametar skaliranja za referentnu K-razdiobu
$\beta^{(P)}$	49678,2 V^{-2}	Parametar skaliranja za referentnu Paretovu razdiobu
N_Q	$2^p, p = 3, \ldots, 12$	Broj razina kvantizacije
$\mathbb{P}_{FA}$	$\{10^{-4}, \ldots, 10^{-1}\}$	Skup dizajniranih vrijednosti vjerojatnosti lažne detekcije
P_D	0,8	Dizajnirana vrijednost vjerojatnosti detekcije
–	100 dB	Dinamički opseg logaritamskog prijemnika
s	39215,686 V^{-1}	Konstanta skaliranja, vidi (6.17)
c	0,22149 V	Konstanta pojačanja, vidi (6.17)
ζ_{max}	2,55 V	Maksimalni ulazni napon u logaritamski prijemnik
ζ_{min}	0 V	Minimalni ulazni napon u logaritamski prijemnik
$\zeta_{max}^{(*)}$	2,55 V	Maksimalni izlazni napon logaritamskog prijemnika
$\zeta_{min}^{(*)}$	0 V	Minimalni izlazni napon logaritamskog prijemnika
$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}$	–	Skup uzoraka referentne razdiobe
–	10^{-6}	Kriterij konvergencije za metodu maksimizacije očekivanja
–	10^{-4}	Tolerancija za evaluaciju integrala (5.13)
d	10^{-3}	Tolerancija određivanja središta metodom LBG (5.30)
–	200	Maksimalni broj iteracija za metodu maksimizacije očekivanja
N_ρ	1	Broj koreliranih radijalnih ćelija razlučivosti

Utjecaj kvantizacije na točnost estimacije razdiobe provodi se testiranjem hipoteze da je estimacija točnija kada mjerenja nisu kvantizirana. Kako je točnost estimacije opisana očekiva-

njem kvadrirane Hellingerove udaljenosti (5.12), testiranje hipoteze provedeno je evaluacijom testne statistike

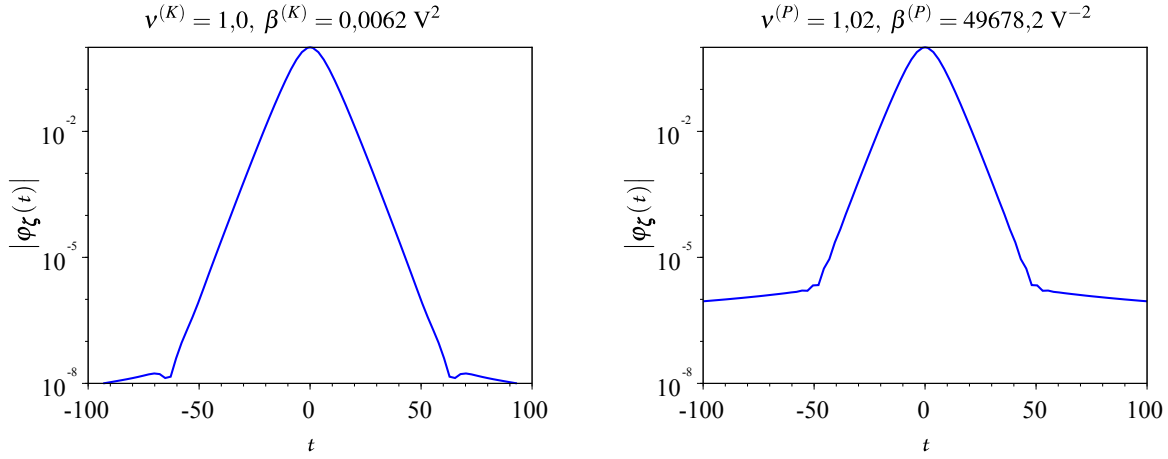
$$\mathcal{T}\left(d_H^2\right) = \frac{\overline{\Delta J}\left(d_H^2\right)}{\sigma_{\overline{\Delta J}\left(d_H^2\right)}} = \frac{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\Delta C_i\left(d_H^2\right)}{\sqrt{\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\left(\Delta C_i\left(d_H^2\right) - \overline{\Delta J}\left(d_H^2\right)\right)^2}}, \tag{5.151}$$

uz

$$\Delta C\left(d_H^2\right) = \begin{cases} C\left(d_H^2\right)^{(Q)} - C\left(d_H^2\right), & \text{za metodu prema slici 6.2} \\ C\left(d_H^2\right)^{(Q_w)} - C\left(d_H^2\right), & \text{za metodu prema slici 6.6} \end{cases}. \tag{6.25}$$

Dok se kriterijska funkcija $C\left(d_H^2\right) = d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)$ odnosi na mjerenja bez kvantizacije, kriterijske se funkcije $C\left(d_H^2\right)^{(Q)} = d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)$ i $C\left(d_H^2\right)^{(Q_w)} = d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q_w,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)$ odnose na mjerenja s kvantizacijom.

Numerička evaluacija karakterističnih funkcija K- i Paretove razdiobe prema (6.3) (na izlazu logaritamskog prijemnika (6.17)), pokazuje da su apsolutne vrijednosti funkcija gotovo identične unutar vrijednosti argumenta $|t| \lesssim 50$, kako je prikazano slikom 6.8. Ako je $\varphi_{\boldsymbol{\zeta}}(t) \approx 0\ \forall\, |t| \gtrsim 50$, prema uvjetu (6.5), maksimalni korak kvantizacije iznosi $|\Delta z| = 62{,}8$ mV, čemu odgovara minimalno $N_Q = \frac{\zeta_{max}^{(*)} - \zeta_{min}^{(*)}}{\Delta z} \approx 40$ kvantizacijskih razina kako ne bi došlo do efekta „spektralnog preklapanja".



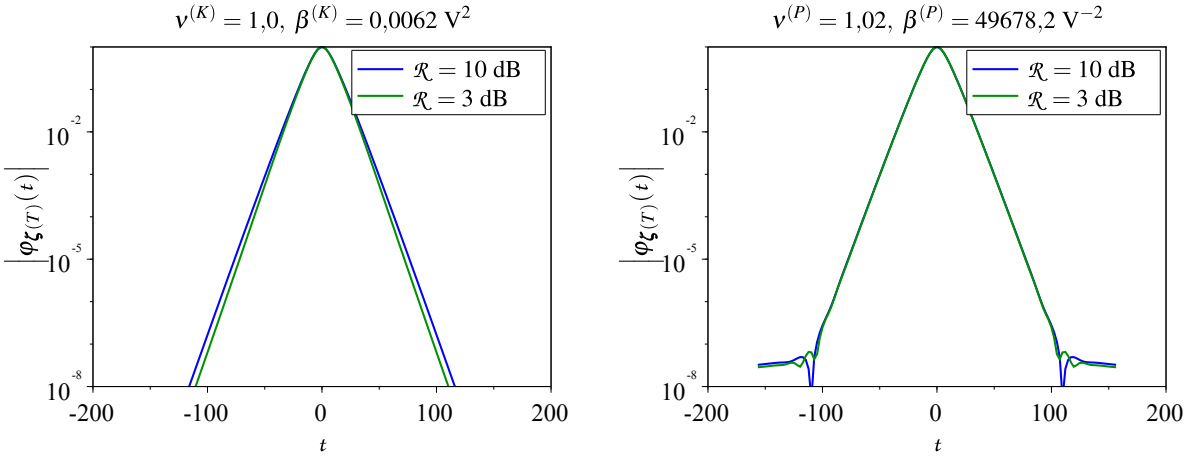
(a) K-razdioba.

(b) Paretova razdioba.

Slika 6.8. Apsolutna vrijednost karakterističnih funkcija K- i Paretove razdiobe na izlazu logaritamskog prijemnika (6.17).

Razdiobu odjeka cilja $p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\zeta)$ prema Swerlingovom modelu br. 1 [73], u pozadinskoj smetnji K- i Paretove razdiobe te uz zanemaren termički šum, opisuje (5.155). Numerička evaluacija karakteristične funkcije $\varphi_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}tz)\, p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(z)\, \mathrm{d}z$, pri čemu je $z = \mathrm{c}\log_{\mathrm{e}}(1 + \mathrm{s}\zeta)$ zbog prijenosne funkcije logaritamskog prijemnika (6.17), prikazana je slikom 6.9 i pokazuje neznatnu ovisnost o omjeru $\mathcal{R}$ te širi „spektar" u odnosu na smetnju (vidi

sliku 6.8). Veća širina „spektra" posljedica je manje teškog repa razdiobe $p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\zeta)$ u odnosu na razdiobu smetnje $p_{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta)$, zbog čega se može dobro aproksimirati Rayleighovom razdiobom (iznad omjera snage signala prema smetnji $\mathcal{R} \gtrsim 3$ dB, kako je to na primjeru pozadinske smetnje K-razdiobe prikazano slikom 4.13). Tako za aproksimaciju „spektralno ograničene" karakteristične funkcije $\varphi_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(t) \approx 0 \; \forall |t| \gtrsim 100$, prema uvjetu (6.5), odgovara maksimalni korak kvantizacije $|\Delta z| = 31{,}4$ mV, odnosno, potrebno je minimalno $N_Q \approx 80$ kvantizacijskih razina za izbjegavanje efekta „spektralnog preklapanja".

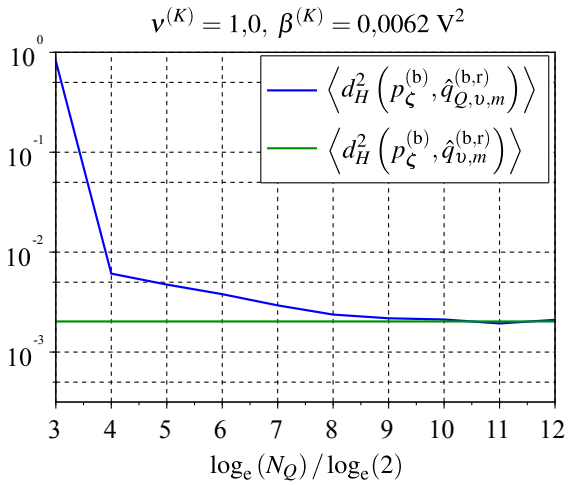


(a) K-razdioba.

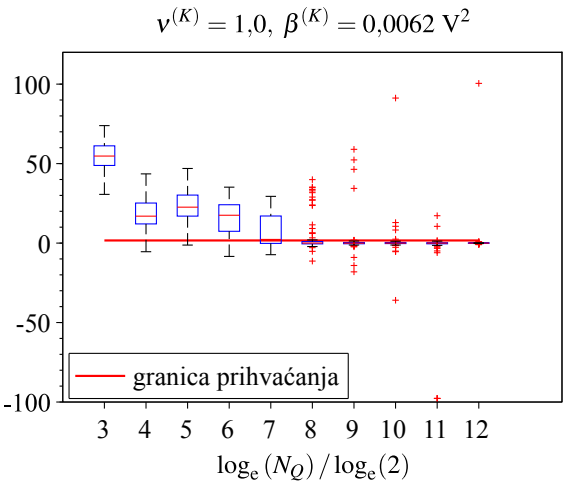
(b) Paretova razdioba.

Slika 6.9. Apsolutna vrijednost karakterističnih funkcija odjeka cilja prema 1. Swerlingovom modelu [73], u smetnji K- i Paretove razdiobe te nakon logaritamskog prijema (6.17).

Rezultat evaluacije testne statistike (5.151) za scenarij amplitudne K-razdiobe i metodu kvantizacije mjerenja prema slici 6.2, prikazuje slika 6.10b. Za broj kvantizacijskih razina $N_Q \geq 256$, utjecaj kvantizacije nije značajan, pri čemu se za granicu značajnosti uzima vrijednost $d = 1{,}65$, čemu odgovara pouzdanost testa 95 % uz pretpostavku Gaussove razdiobe veličine (6.25). Slika 6.11 ilustrira ostvarene operativne karakteristike prijemnika za scenarij amplitudne K-razdiobe i mjerenja bez kvantizacije te uz kvantizaciju s $N_Q = 16$ i $N_Q = 256$ razina. U praktičnom opsegu dizajniranih vrijednosti vjerojatnosti lažne detekcije $P_{FA} \gtrsim 1/N \approx 10^{-3}$ i broj razina kvantizacije $N_Q = 256$, ostvarena vjerojatnost lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$ te ostvarena vjerojatnost detekcije $\hat{P}_D$ za cilj s fluktuacijom odjeka prema Swerlingovom modelu br. 1 [73], ne odstupaju značajnije od ostvarenih vjerojatnosti u scenariju mjerenja bez kvantizacije. A prema slici 6.11a, kvantizacija amplitude manifestira se u očekivano težem repu estimirane razdiobe $\hat{q}^{(\mathrm{b,r})}_{Q,\upsilon,m}$ u odnosu na $\hat{q}^{(\mathrm{b,r})}_{\upsilon,m}$, a porastom broja kvantizacijskih razina N_Q, očekivana se težina repa razdiobe $\hat{q}^{(\mathrm{b,r})}_{Q,\upsilon,m}$ smanjuje te u graničnom slučaju vrijedi $\lim_{N_Q\to\infty}\left(\hat{q}^{(\mathrm{b,r})}_{Q,\upsilon,m}\right) = \hat{q}^{(\mathrm{b,r})}_{\upsilon,m}$.

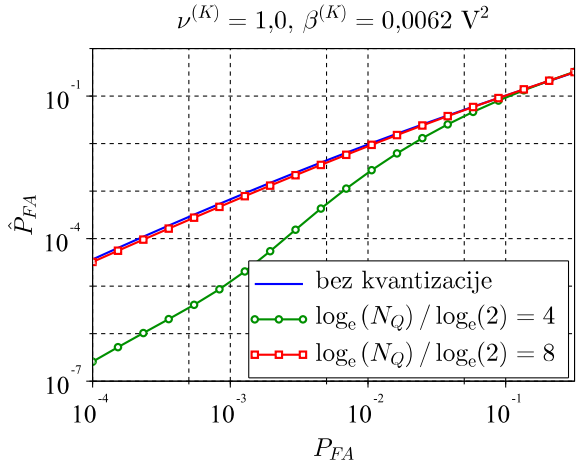


(a) Usporedba rezultata.

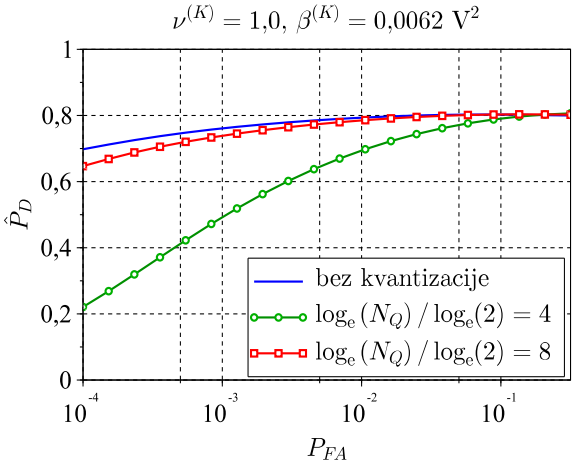


(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 6.10. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina N_Q na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti $\left\langle d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)\right\rangle$ za smetnju prema K-razdiobi i metodu kvantizacije prema slici 6.2. Estimacija razdiobe provodi se metodom maksimizacije vjerodostojnosti, primjenom skupa od $N = 1024$ uzoraka i radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti.



(a) Ostvarena vjerojatnost lažne detekcije.

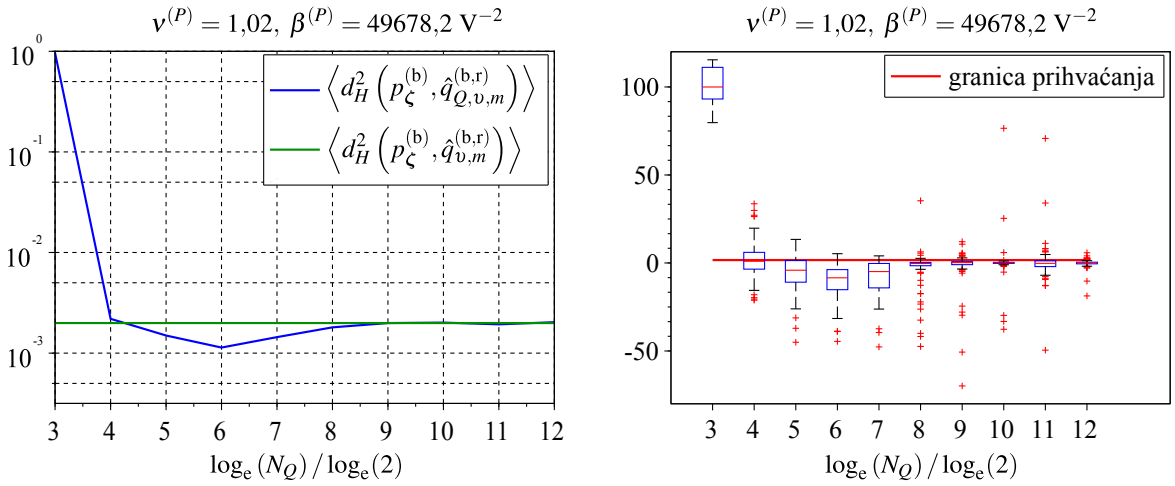


(b) Ostvarena vjerojatnost detekcije.

Slika 6.11. Utjecaj broja kvantizacijskih razina N_Q na operativne karakteristike prijemnika pri smetnji amplitudne K-razdiobe, metodom kvantizacije prema slici 6.2. Estimacija razdiobe provodi se radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti, metodom maksimizacije vjerodostojnosti skupa od $N = 1024$ uzoraka. Pri tome je amplitudna razdioba odjeka cilja modelirana kao Swerlingov model br. 1 [73], a dizajnirana vjerojatnost detekcije, $\forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$, iznosi $P_D = 0{,}8$.

Evaluacija točnosti estimacije te operativnih karakteristika prijemnika implementacijom metode kvantizacije prema slici 6.2, za scenarij Paretove razdiobe smetnje i amplitudnu fluktuaciju odjeka cilja prema Swerlingovom modelu br. 1 [73], prikazuju slike 6.12 i 6.13. Evaluacija testne statistike (5.151) pokazuje da kvantizacija ne utječe značajnije na točnost estimacije za broj kvantizacijskih razina $N_Q \gtrsim 256$, vidi sliku 6.12b. Pri tome je, kao i u prethodnim primje-

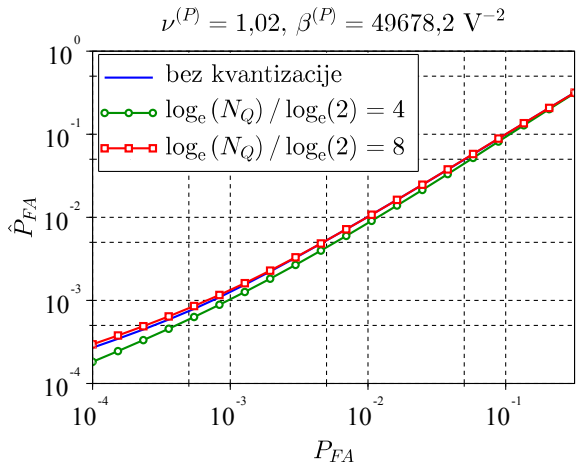
rima, vrijednost granice prihvaćanja jednaka $d = 1{,}65$, za pouzdanost testa 95 % te za Gaussovu razdiobu veličine (6.25). Dok je za ovaj partikularni primjer referentne Paretove razdiobe, očekivani rep razdiobe $\hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}$, estimirane na temelju uzoraka bez kvantizacije amplitude, lakši od repa referentne razdiobe (vidi također i primjer u odjeljku 5.1.2, posebno sliku 5.19), za broj razina u opsegu $32 \lesssim N_Q \lesssim 256$, očekivani rep razdiobe $\hat{q}_{Q,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}$ bolje pristaje repu referentne razdiobe zbog toga što se kvantizacija manifestira u očekivano težem repu (ove razdiobe) u odnosu na razdiobu $\hat{q}_{\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}$. Kako pokazuju slike 6.12a i 6.13a, navedeno se ogleda u nižoj vrijednosti očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti (5.12) te u boljem slaganju ostvarene vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$ u odnosu na idealnu ovisnost $\hat{P}_{FA} = P_{FA}$, u opsegu dizajniranih vjerojatnosti lažne detekcije $10^{-4} \leq P_{FA} \leq 10^{-3}$.



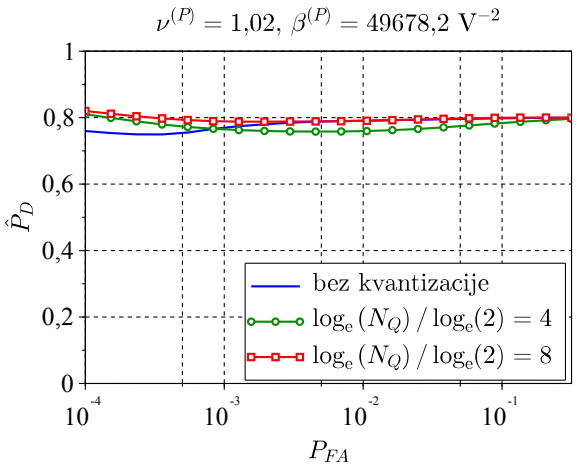
(a) Usporedba rezultata.

(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 6.12. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina N_Q na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti $\left\langle d_H^2\left(p_\zeta^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)\right\rangle$ za smetnju prema Paretovoj razdiobi i metodu kvantizacije prema slici 6.2. Estimacija razdiobe provodi se metodom maksimizacije vjerodostojnosti, primjenom skupa od $N = 1024$ uzoraka i radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti.



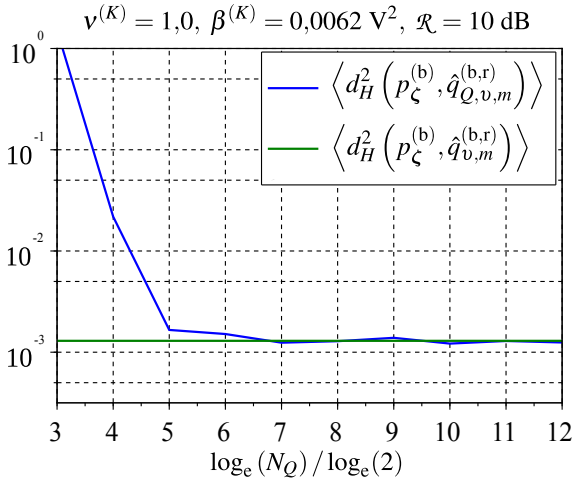
(a) Ostvarena vjerojatnost lažne detekcije.



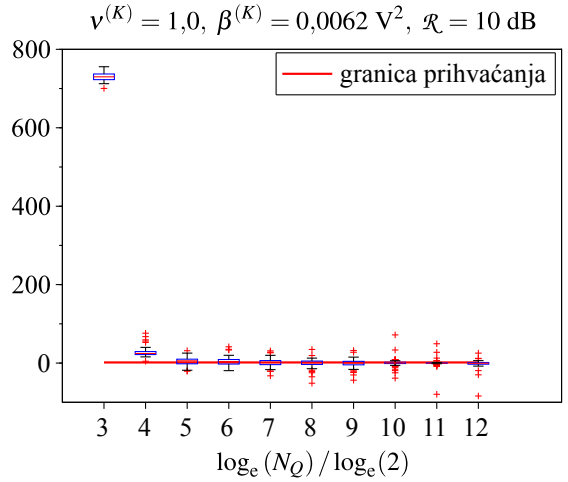
(b) Ostvarena vjerojatnost detekcije.

Slika 6.13. Utjecaj broja kvantizacijskih razina N_Q na operativne karakteristike prijemnika pri smetnji amplitudne Paretove razdiobe i metodu kvantizacije prema slici 6.2. Estimacija razdiobe provodi se radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti, metodom maksimizacije vjerodostojnosti skupa od $N = 1024$ uzoraka. Pri tome je amplitudna razdioba odjeka cilja modelirana kao Swerlingov model br. 1 [73]. Dizajnirana vjerojatnost detekcije iznosi $P_D = 0{,}8, \forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$.

Točnost estimacije razdiobe $p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}\left(\zeta^{(*)}\right)$ (razdioba (5.155) nakon logaritamskog prijema (6.17)), primjenom metode kvantizacije prema slici 6.2, prikazuje slika 6.14a za K-razdiobu te slika 6.15a za Paretovu razdiobu pozadinske smetnje. Evaluacija testne statistike (5.151) pokazuje da pri $N_Q \gtrsim 64$ kvantizacijskih razina ne postoji značajna razlika između točnosti estimacije ostvarene primjenom kvantiziranih mjerenja i točnosti estimacije ostvarene bez kvantizacije mjerenja. Pri tome je granica značajnosti jednaka $d = 1{,}65$ što, uz pretpostavku Gaussove razdiobe veličine (6.25), rezultira pouzdanošću testa 95 %.

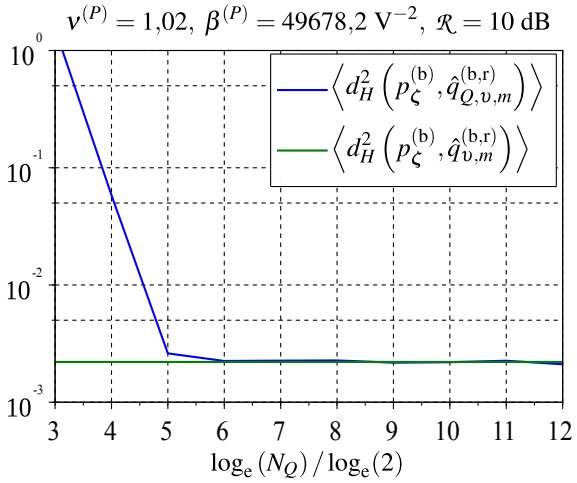


(a) Usporedba rezultata.

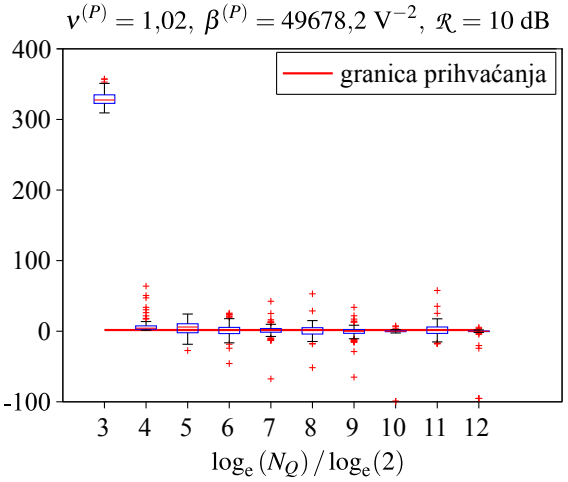


(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 6.14. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina N_Q na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti $\left\langle d_H^2\left(p_{\zeta}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)\right\rangle$ za odjek cilja prema Swerlingovom modelu br. 1 [73] u smetnji K-razdiobe. Metoda kvantizacije ilustrirana je slikom 6.2. Estimacija razdiobe provodi se metodom maksimizacije vjerodostojnosti, primjenom skupa od $N = 1024$ uzoraka i radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti.



(a) Usporedba rezultata.

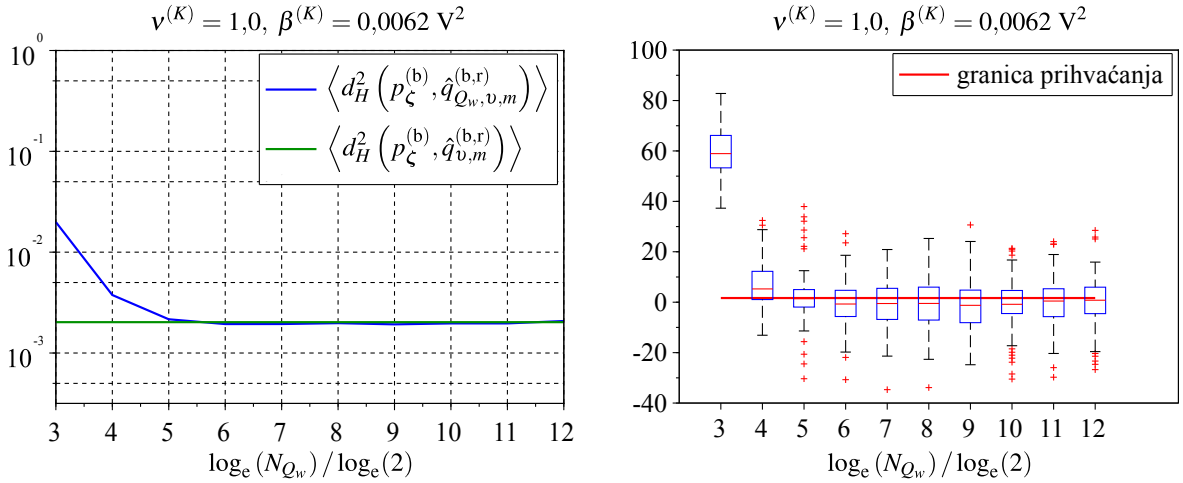


(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 6.15. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina N_Q na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti $\left\langle d_H^2\left(p_{\zeta}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)\right\rangle$ za odjek cilja prema Swerlingovom modelu br. 1 [73] u smetnji Paretove razdiobe. Metoda kvantizacije ilustrirana je slikom 6.2. Estimacija razdiobe provodi se metodom maksimizacije vjerodostojnosti, primjenom skupa od $N = 1024$ uzoraka i radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti.

Evaluacija točnosti estimacije K- i Paretove razdiobe uz metodu kvantizacije mjerenja prema slici 6.6 (uvođenje šuma w_D, *dither*), prikazana je slikom 6.16a (za K-razdiobu) te slikom 6.17a (za Paretovu razdiobu). Evaluacija testne statistike (5.151) pokazuje da za K-razdiobu ne postoji značajna razlika u odnosu na mjerenja bez kvantizacije pri $N_{Q_w} \geq 32$ (slika 6.16b) te, za

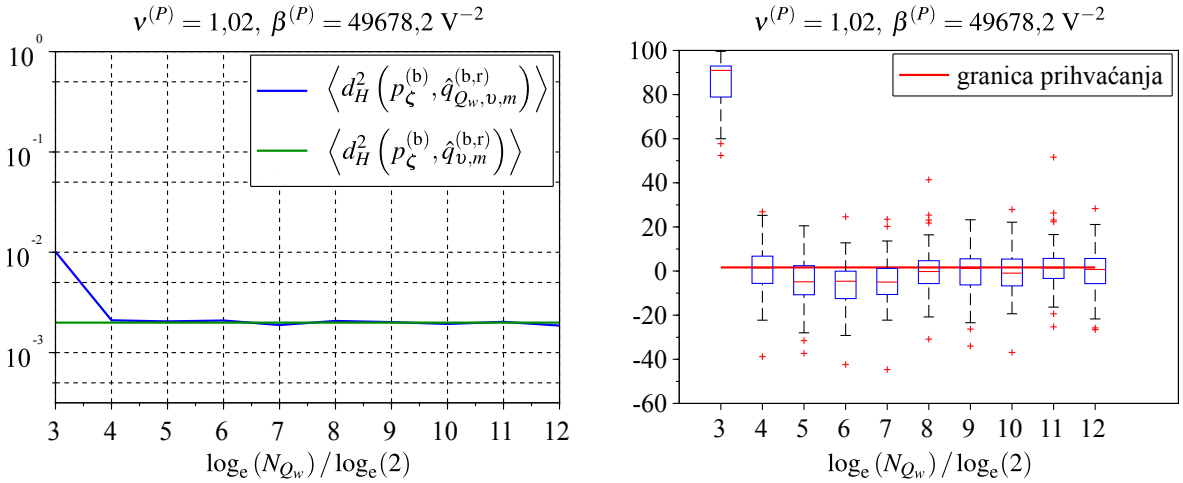
Paretovu razdiobu, pri $N_{Q_w} \geq 16$ (slika 6.17b). Pri tome je, za razinu značajnosti $d = 1{,}65$ te pod pretpostavkom Gaussove razdiobe veličine (6.25), pouzdanost testa 95 %.



(a) Usporedba rezultata.

(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 6.16. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina N_{Q_w} na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti $\left\langle d_H^2\left(p_\zeta^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q_w,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)\right\rangle$ za smetnju prema K-razdiobi i metodu kvantizacije prema slici 6.6. Estimacija razdiobe provodi se metodom maksimizacije vjerodostojnosti, primjenom skupa od $N = 1024$ uzoraka i radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti.

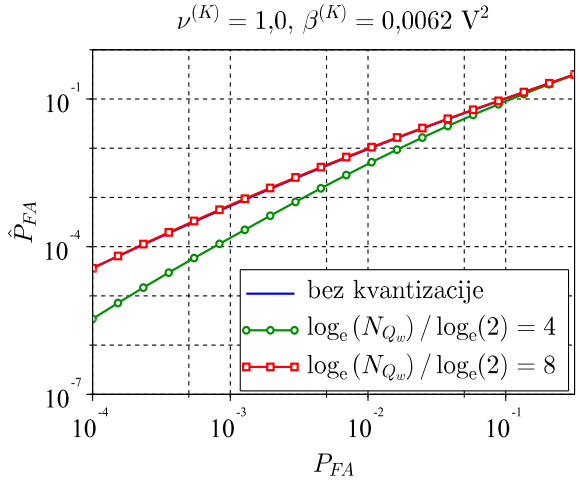


(a) Usporedba rezultata.

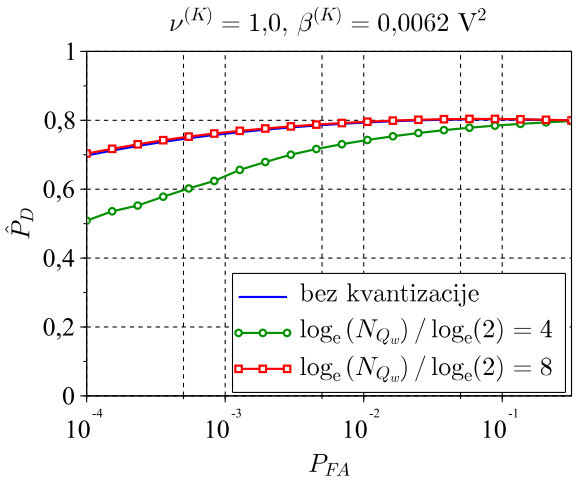
(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 6.17. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina N_{Q_w} na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti $\left\langle d_H^2\left(p_\zeta^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q_w,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)\right\rangle$ za smetnju prema Paretovoj razdiobi i metodu kvantizacije prema slici 6.6. Estimacija razdiobe provodi se metodom maksimizacije vjerodostojnosti, primjenom skupa od $N = 1024$ uzoraka i radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti.

Primjena metode kvantizacije prema slici 6.6 rezultira boljim slaganjem ostvarenih vjerojatnosti $\hat{P}_{FA}$ i $\hat{P}_D$ u odnosu na dizajnirane vrijednosti te u odnosu na metodu prema slici 6.2, za jednak broj razina kvantizacije (za usporedbu, vidi slike 6.11 i 6.13).

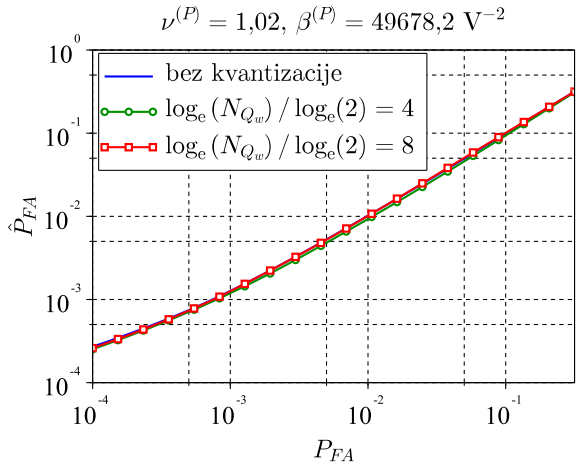


(a) Ostvarena vjerojatnost lažne detekcije.

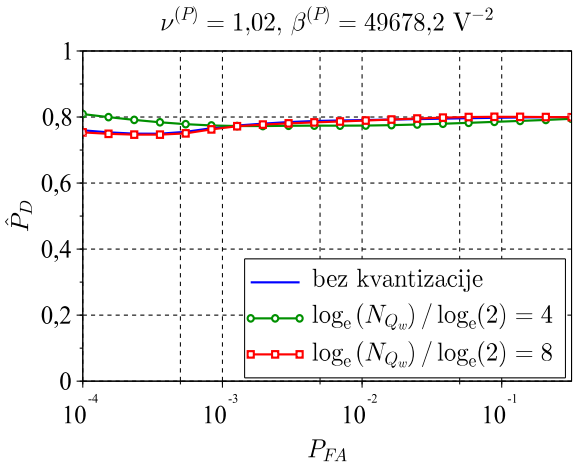


(b) Ostvarena vjerojatnost detekcije.

Slika 6.18. Utjecaj broja kvantizacijskih razina N_{Q_w} na operativne karakteristike prijemnika pri smetnji amplitudne K-razdiobe, metodom kvantizacije prema slici 6.6. Estimacija razdiobe provodi se radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti, metodom maksimizacije vjerodostojnosti skupa od $N = 1024$ uzoraka. Pri tome je amplitudna razdioba odjeka cilja modelirana kao Swerlingov model br. 1 [73], a dizajnirana vjerojatnost detekcije, $\forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$, iznosi $P_D = 0{,}8$.



(a) Ostvarena vjerojatnost lažne detekcije.

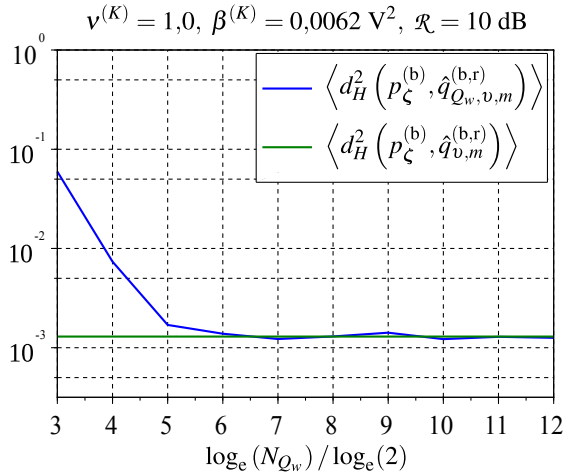


(b) Ostvarena vjerojatnost detekcije.

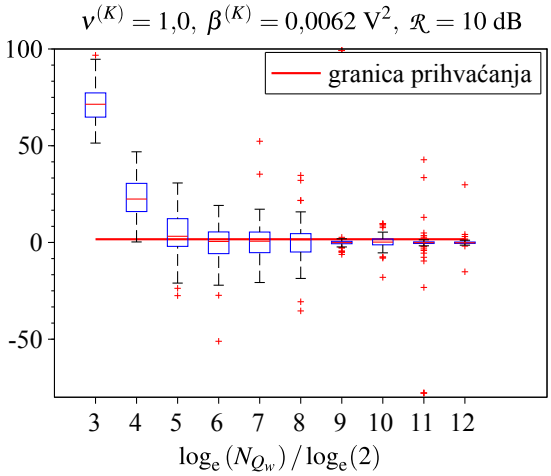
Slika 6.19. Utjecaj broja kvantizacijskih razina N_{Q_w} na operativne karakteristike prijemnika pri smetnji amplitudne Paretove razdiobe i metodu kvantizacije prema slici 6.6. Estimacija razdiobe provodi se radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti, metodom maksimizacije vjerodostojnosti skupa od $N = 1024$ uzoraka. Pri tome je amplitudna razdioba odjeka cilja modelirana kao Swerlingov model br. 1 [73]. Dizajnirana vjerojatnost detekcije iznosi $P_D = 0{,}8, \forall P_{FA} \in \mathbb{P}_{FA}$.

U scenariju fluktuirajućeg cilja prema prvom Swerlingovom modelu [73] i metodu kvantizacije prema slici 6.6 (*dither)*, točnost estimacije nakon logaritamskog prijema (6.17), u odnosu na metodu kvantizacije prema slici 6.2, bolja je za broj kvantizacijskih razina $N_{Q_w} \leq 16$ i jednaka za $N_{Q_w} \geq 32$, kako to prikazuju slike 6.20a (za pozadinsku smetnju prema K-razdiobi) te 6.21a (za pozadinsku smetnju prema Paretovoj razdiobi). Evaluacija testne statistike (5.151)

pokazuje da pri broju kvantizacijskih razina $N_{Q_w} \gtrsim 64$, jednako kao i za metodu kvantizacije prema slici 6.2, nema značajne razlike između točnosti estimacije primjenom metode kvantizacije mjerenja prema slici 6.6 i primjenom metode bez kvantizacije mjerenja, kako prikazuju slike 6.20b i 6.21b. Pri tome je granica značajnosti $d = 1{,}65$, što rezultira pouzdanošću testa 95 %, pod pretpostavkom Gaussove razdiobe veličine (6.25).

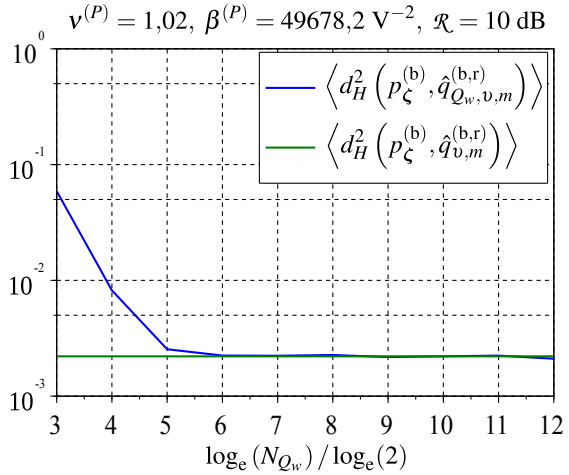


(a) Usporedba rezultata.

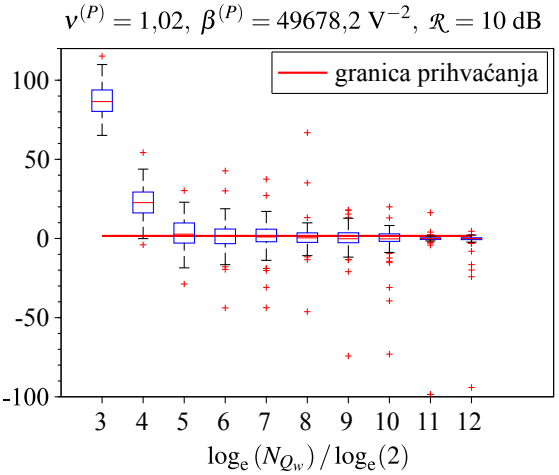


(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 6.20. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina N_{Q_w} na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti $\left\langle d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q_w,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)\right\rangle$ za odjek cilja prema Swerlingovom modelu br. 1 [73], u smetnji K-razdiobe. Metoda kvantizacije ilustrirana je slikom 6.6. Estimacija razdiobe provodi se metodom maksimizacije vjerodostojnosti, primjenom skupa od $N = 1024$ uzoraka i radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti.



(a) Usporedba rezultata.



(b) Normirana razdioba rezultata.

Slika 6.21. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina N_{Q_w} na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti $\left\langle d_H^2\left(p_{\boldsymbol{\zeta}}^{(\mathrm{b})}, \hat{q}_{Q_w,\upsilon,m}^{(\mathrm{b,r})}\right)\right\rangle$ za odjek cilja prema Swerlingovom modelu br. 1 [73], u smetnji Paretove razdiobe. Metoda kvantizacije ilustrirana je slikom 6.6. Estimacija razdiobe provodi se metodom maksimizacije vjerodostojnosti, primjenom skupa od $N = 1024$ uzoraka i radijalnom mrežom s $m = 8$ komponenti.

6.3. Zaključak

U ovom je poglavlju analiziran utjecaj kvantizacije mjerenja (amplituda radarskih odjeka) na točnost estimacije razdiobe, kako smetnje tako i odjeka cilja. Provedena je procjena minimalnog broja kvantizacijskih razina pri kojem utjecaj kvantizacije nije više značajan, i to za dvije klasične metode kvantizacije. U prvoj metodi, slika 6.2, estimacija na izlaznoj strani komunikacijskog kanala temelji se na diskretnoj razdiobi, a u drugoj, slika 6.6, unosi se šum (*dither*), koji kontrolira statističke osobine greške kvantizacije, tako da se u ovom slučaju estimacija na izlaznoj strani temelji na kontinuiranoj razdiobi. Analiza utjecaja kvantizacije mjerenja potrebna je, u kontekstu rezultata iz odjeljaka 5.1.2, 5.2.2 i 5.3, za određivanje značajki operativnih karakteristika prijemnika u kontekstu nekoherentne detekcije te procesa praćenja, za partikularni slučaj komercijalno dostupnih radarskih senzora kojima se upravlja na daljinu.

Tako je znanstveni doprinos ovog poglavlja procjena potrebnog broja kvantizacijskih razina za obje metode kvantizacije i za specifični model smetnje, s vrijednostima parametara koji se, u kontekstu opisa Jadranskoga mora u poglavlju 3, očekuju u preko dvije trećine vremena, kako je i navedeno u odjeljku 5.1.2. Rezultati procjene sažeti su u tablici 6.2 i jasno pokazuju boljitak metode s unosom šuma (*dither*) u partikularnom slučaju estimacije smetnje prema K- i Paretovoj razdiobi. Međutim, potrebni broj kvantizacijskih razina za estimaciju razdiobe odjeka cilja prema prvom Swerlingovom modelu [73], u pozadinskoj smetnji K- i Paretove razdiobe, ne razlikuje se između metoda. S druge strane, prema rezultatima primjera iz odjeljka 5.3, razdioba odjeka površinskog cilja u valovitom moru bolje je opisana K- ili Paretovom razdiobom (zbog efekta maskiranja cilja valovima), nego Rayleighovom razdiobom (prema prvom Swerlingovom modelu [73]). Zaključno, metoda s unosom šuma (*dither*) preferirana je metoda kvantizacije mjerenja za prijenos amplitude kao digitalnog signala kroz komunikacijski kanal.

Tablica 6.2. Minimalni broj kvantizacijskih razina N_Q pri kojem točnost estimacije primjenom kvantizacije mjerenja nije značajno lošija u odnosu na točnost estimacije bez kvantizacije mjerenja.

Razdioba	Metoda kvantizacije	
	Prema slici 6.2	Prema slici 6.6 (*dither*)
K-razdioba	256	32
Paretova razdioba	256	16
Swerlingov model br. 1 i pozadinska smetnja prema K-razdiobi	64	64
Swerlingov model br. 1 i pozadinska smetnja prema Paretovoj razdiobi	64	64

Zaključak

Predloženom se Viterbijevom metodom (s konceptom primjetljivosti koji dozvoljava da cilj bude privremeno neprimjetljiv, ali da i dalje postoji unutar volumena motrenja), u okviru višemodelne estimacije IMM s dva modela, ostvaruje veća vjerojatnost zadržavanja staze manevrirajućeg cilja u odnosu na klasičnu metodu vjerojatnosnog pridruživanja (IPDA). Rezultat simulacije pokazuje da je za vjerojatnosti detekcije $P_D \approx 0{,}8$, dobitak u omjeru snage signala prema snazi smetnje $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \lesssim 4$ dB. Dok uvođenje parametra volumne gustoće smetnje ne rezultira velikim dobitkom (svega $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \lesssim 0{,}5$ dB), uvođenje omjera vjerodostojnosti rezultira značajnim povećanjem vjerojatnosti zadržavanja staze (u smislu statističke značajnosti), pri čemu je dobitak $\Delta P_{TT} \lesssim 0{,}4$.

U kontekstu stvarnovremenske primjene, rezultati pokazuju da se arhitekturom radijalne mreže čiji se parametri evaluiraju maksimizacijom vjerodostojnosti (implementacijom metode maksimizacije očekivanja, skraćeno EM), postiže najpovoljniji omjer točnosti estimacije i računalnog opterećenja. Za jednaku točnost estimacije, računalno je opterećenje metode jezgrene estimacije (KDE) za dva reda veličine veće, a metoda nepristrane unakrsne provjere (UCV), premda po računalnom opterećenju jednaka metodi EM, za red je veličina manje točna.

Analiza značajki acikličke neuronske mreže s jednim slojem pokazuje da se, u odnosu na metodu EM, kvazi-Newtonovom metodom (QN) minimizacije srednje kvadratne greške, jednaka točnost estimacije (K- i Paretove razdiobe smetnje) postiže manjim brojem neurona ($m = 3$ u odnosu na $m = 8$ za metodu EM), ali i da je računalna složenost za red veličine veća, a konvergencija ovisno o broju uzoraka N, približno jednaka $o\left(N^{-0{,}9}\right)$. Rezultati primjene Kalmanovog okvira za minimizaciju varijance greške estimacije koeficijenata mreže pokazuju da se primjenom proširenog Kalmanovog filtra s iteracijama (IEKF) ostvaruje približno jednaka točnost estimacije kao i kvazi-Newtonovom metodom. Dok je konvergencija ovisno o broju uzoraka nešto manja u odnosu na metodu EM, računalna je složenost približno triput veća, i to u arhitekturi mreže koja za učenje primjenjuje slijed grupa s $n_z = 32$ uzoraka. Ostalim se metodama (bezderivacijski Kalmanov filtar s iteracijama (IUKF), čestični filtar (PF) te bezderivacijsko-čestični filtar (UPF)), ostvaruje manja točnost uz jedan do dva reda veličine veće računalno opterećenje u odnosu na metodu EM. U pogledu ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$, metode IEKF i QN najmanje odstupaju od idealne ovisnosti $\hat{P}_{FA} = P_{FA}$ (gdje P_{FA} označava zadanu vje-

rojatnost), ali velika devijacija u određivanju praga detekcije čini ove metode upotrebljivima u opsegu vjerojatnosti lažnih detekcija $P_{FA} \gtrsim 10/N$, za razliku od metode EM koja je upotrebljiva u opsegu $P_{FA} \gtrsim 1/N$.

Metoda slijednog učenja ostvarena Kalmanovim filtrom u procesu učenja acikličke neuronske mreže atraktivna je za primjenu u estimaciji razdiobe odjeka cilja, gdje po prirodi procesa praćenja uzorci stižu slijedno. Predložena adaptacija metode stohastičkog učenja kumulativa vjerojatnosti uzoraka (SIC) u inkrementalnu inačicu ISIC, adaptacija je metode grupnog učenja u slijedno učenje. Dok se predloženom metodom ne ostvaruje značajno odstupanje u točnosti estimacije K- i Paretove razdiobe smetnje te vjerojatnosti lažne detekcije $\hat{P}_{FA}$ u odnosu na metodu SIC (a time i na metodu EM, jer je za obje primijenjeno učenje implementacijom Kalmanovog filtriranja IEKF), pri estimaciji Rayleighove razdiobe (odjeka cilja prema Swerlingovom modelu br. 1 [73]), metodom ISIC ostvaruje se veća točnost. U kontekstu računalnog opterećenja, rezultati simulacije pokazuju da je tek za broj uzoraka $N \gtrsim 200$, računalno opterećenje manje od onog primjenom metode EM. Navedene razlike između acikličke slojevite i radijalne mreže sugeriraju primjenu radijalne mreže i metode EM za estimaciju razdiobe, kako odjeka smetnje, tako i odjeka cilja. Sugestija je naglašena činjenicom da je razdioba ostvarena radijalnom mrežom uvijek probabilistička funkcija (ako su komponente probabilističke funkcije, a koeficijenti vjerojatnosti, što jesu u predloženoj metodi EM), za razliku od estimacije acikličkom mrežom (metodom izglađivanja kumulativa vjerojatnosti) koja to ne mora nužno biti, pa se stoga provodi nametanje monotonosti te normiranje distribucije kao $h^{(*)}\left(\zeta, \hat{\boldsymbol{W}}\right) = \mathrm{b} + \mathrm{c}\, h\left(\zeta, \hat{\boldsymbol{W}}\right)$, gdje je b konstanta pristranosti tako da je $\lim_{\zeta \to 0}\left(h\left(\zeta, \hat{\boldsymbol{W}}\right)\right) = 0$, a c konstanta skaliranja tako da vrijedi $\lim_{\zeta \to \infty}\left(\mathrm{b} + \mathrm{c}\, h\left(\zeta, \hat{\boldsymbol{W}}\right)\right) = 1$, pri čemu su $\hat{\boldsymbol{W}}$ vrijednosti koeficijenata mreže nakon završenog postupka učenja.

U realnom scenariju praćenja površinskog i manevrirajućeg cilja male radarske površine (mala gumena ili plastična brodica bez nadgrađa, radarske površine od ≈ 1 m^2 do ≈ 5 m^2 [157]), amplitudna razdioba odjeka odstupa od klasičnog prvog Swerlingovog modela zbog efekta maskiranja valovima. Implementacijom neuronske mreže u Viterbijevoj metodi pridruživanja, poluparametarskom metodom estimacije otiska smetnje i cilja, ostvaruje se značajno veća vjerojatnost zadržavanja staze praćenja ovakvog cilja u odnosu na parametarsku metodu koja primjenjuje klasični Swerlingov model br. 1, uobičajeni model amplitudne fluktuacije površinskog cilja na moru, bez efekta maskiranja. Ostvarene vjerojatnosti $P_{TT} = 0{,}26$ za K-razdiobu te $P_{TT} = 0{,}3$ za Paretovu razdiobu smetnje, značajno su veće od onih ostvarenih primjenom parametarskog Swerlingovog modela br. 1 ($P_{TT} = 0{,}18$ za K- te $P_{TT} = 0{,}017$ za Paretovu razdiobu), u sustavu s dizajniranom vjerojatnošću detekcije smetnje $P_{FA} = 0{,}5$ i vjerojatnošću detekcije cilja $P_D \approx 0{,}8$. Time je potvrđena hipoteza H2$^{(**)}$ (vidi stranicu 9). Pri tome je vrijednost parametara referentne K- i Paretove razdiobe temeljena na stvarnim mjerenjima radara IPIX [213, 214], prikupljenim pri stanjima mora od 3 do 4 te od 4 do 5, što su stanja koja se

u Jadranu očekuju u preko dvije trećine vremena. Ovako visoke vjerojatnosti detekcije lažnih odjeka sugeriraju primjenu metode praćenja prije detekcije (TBD), gdje se eksplicitni proces detekcije eliminira te se implicitno provodi unutar procesa estimacije, pri čemu je točnost razdioba odjeka smetnje i cilja od krucijalne važnosti za dobre značajke metode.

U scenariju praćenja cilja čija amplitudna razdioba odjeka uistinu odgovara Swerlingovom modelu br. 1, ostvarena vjerojatnost zadržavanja staze metodom neuronske mreže značajno je manja (u odnosu na parametarsku metodu) za omjere snaga signala prema smetnji K-razdiobe $\mathcal{R} \lesssim 15$ dB (čemu odgovara $P_{FA} \gtrsim 0{,}01$ za vjerojatnost detekcije $P_D \approx 0{,}8$ i $P_{TT} \lesssim 0{,}95$) te za $\mathcal{R} \lesssim 2$ dB i smetnju prema Paretovoj razdiobi (čemu odgovara $P_{FA} \gtrsim 0{,}05$ i $P_{TT} \lesssim 0{,}85$, također za vjerojatnost detekcije $P_D \approx 0{,}8$). Tako u navedenim opsezima omjera $\mathcal{R}$, gubici u omjeru snage signala prema smetnji iznose $\mathcal{L}_{\mathcal{R}} \lesssim 2$ dB i hipoteza H1$^{(**)}$, vidi stranicu 9, nije prihvaćena. Razlog neprihvaćanja je estimacija omjera vjerodostojnosti koja je značajno manje točna nego estimacija u scenariju parametarskih modela amplitudne razdiobe odjeka cilja i smetnje, gdje se parametri evaluiraju pod hipotezom ispravnog modela i uz beskonačno veliki broj uzoraka. Primarni uzrok manje točnosti estimacije je mali broj uzoraka koji se primjenjuje za estimaciju amplitudne razdiobe odjeka cilja (približno jedna desetina u odnosu na broj uzoraka za estimaciju smetnje), što rezultira otprilike jednim redom veličine lošijom točnošću estimacije u odnosu na estimaciju amplitudne razdiobe smetnje. Sekundarni uzrok je pogrešna asocijacija koja se zbiva kada se, umjesto stvarnog odjeka cilja, skupu uzoraka odjeka od cilja pridružuje odjek smetnje. Broj pogrešnih asocijacija svakako raste s brojem uzoraka smetnje unutar volumena valjanosti, što je u korelaciji s rastom vjerojatnosti detekcije smetnje. Rezultati simulacije pokazuju da primjena omjera vjerodostojnosti koji je estimiran neuronskom mrežom još uvijek rezultira značajnim dobitkom u vjerojatnosti zadržavanja staze ($\mathcal{A}_{\mathcal{R}} \approx 2$ dB) u odnosu na scenarij bez primjene omjera, za K-razdiobu smetnje i cilj prema Swerlingovom modelu br. 1, ali i da za Paretovu razdiobu nema značajnog dobitka za omjere $\mathcal{R} \lesssim 2$ dB.

U procesu detekcije, implementacija neuronske mreže izvedene u arhitekturi radijalne mreže pokazuje da estimacija u logaritamskoj domeni metodom maksimizacije vjerodostojnosti uzoraka ostvaruje dobro slaganje operativnih karakteristika prijemnika (ROC) sve do vrijednosti parametra vjerojatnosti lažne detekcije $P_{FA} \approx 1/N$, pri čemu je N broj uzoraka. Za razliku od acikličke mreže s jednim slojem, za približno jednaku točnost operativnih karakteristika, primjenjivi opseg vjerojatnosti lažne detekcije je $P_{FA} \gtrsim 10/N$, u okviru učenja mreže proširenim Kalmanovim filtrom s iteracijama (IEKF). Implementacija amplitudne razdiobe smetnje dovoljno je točna tako da ne postoji značajna razlika u ostvarenoj vjerojatnosti zadržavanja staze u odnosu na referentnu parametarsku metodu, osim za visoke omjere snage signala prema smetnji ($\mathcal{R} \gtrsim 15$ dB) i K-razdiobu smetnje gdje je razlika u ostvarenim vjerojatnostima $\Delta P_{TT} \approx 0{,}05$, što je zanemarivo. Tako je hipoteza H1$^{(*)}$ (vidi stranicu 9), potvrđena. Rezultati simulacije pokazuju da hipoteza H2$^{(*)}$ (vidi stranicu 9) nije zadovoljena u cijelom opsegu omjera snaga signala

prema snazi smetnje $\mathcal{R}$ i svim razmatranim razdiobama smetnje, pri čemu je referentna parametarska metoda [zlog(z)]. Ova metoda precjenjuje rep razdiobe kada je apriorni parametarski model Paretova razdioba (a u stvarnosti je smetnja amplitudne K-razdiobe), odnosno podcjenjuje kada je apriorni model K-razdioba (a stvarna razdioba smetnje je Paretova). U području dizajniranih vrijednosti $P_{FA} \lesssim 0{,}01$ i K-razdiobu (čemu odgovara $\mathcal{R} \gtrsim 16$ dB za vjerojatnost detekcije $P_D \approx 0{,}8$), hipoteza $\mathrm{H2}^{(*)}$ je potvrđena, a gubici za $\mathcal{R} \lesssim 16$ dB iznose $\mathcal{L}_{\mathcal{R}} \approx 0{,}2$ dB što je vrijednost koja se može zanemariti. Za Paretovu razdiobu smetnje, hipoteza $\mathrm{H2}^{(*)}$ je potvrđena za vrijednosti $\mathcal{R} \lesssim 5$ dB (čemu odgovara $P_{FA} \gtrsim 0{,}05$ uz $P_D \approx 0{,}8$). Za $\mathcal{R} \gtrsim 5$ dB, dobitak vjerojatnosti zadržavanja staze ΔP_{TT} nije veći od $\approx 0{,}1$.

U kontekstu prijenosa amplitude odjeka kao digitalnog signala kroz komunikacijski kanal, klasičnom se metodom prijenosa sa suptrakcijom na prijemnoj strani kanala (*dither*) ostvaruje, uz jednaki broj kvantizacijskih razina, značajno točnija estimacija razdiobe. Rezultati simulacije pokazuju da je za smetnju (K- i Paretove razdiobe), minimalni broj kvantizacijskih razina $N_{Q_w} \approx 32$ (za prijenos bez značajnih gubitaka u točnosti estimacije), ali i da je potrebno $N_{Q_w} \gtrsim 64$ za prijenos amplitude odjeka cilja prema Swerlingovom modelu br. 1. Iz navedenoga, implicitno proizlazi da uz $N_{Q_w} \approx 64$ kvantizacijskih razina nema značajne razlike između vjerojatnosti zadržavanja staze ostvarene predloženom metodom pridruživanja i kvantizacijom mjerenja od one ostvarene predloženom metodom, ali bez kvantizacije mjerenja.

Za kraj, specifičnosti Jadranskoga mora sugeriraju potrebu provedbe velikog broja mjerenja za evaluaciju dobrog parametarskog modela smetnje, i to s obzirom na amplitudnu razdiobu, Dopplerov spektar, radijalnu i azimutnu korelaciju i polarimetriju, za upadne kutove ispod 1° koji se mogu očekivati u primjenama senzora na bespilotnom površinskom vozilu (USV) te visokih upadnih kutove (iznad 10°) koji se mogu očekivati primjenom senzora na bespilotnoj letjelici. Alternativno se značajke smetnje mogu ekstrahirati iz rješenja elektromagnetskog raspršenja od neregularne dvodimenzionalne površine koja reflektira značajke Jadrana u pogledu spektra gustoće valne energije (Tabainov spektar [180]), za različite scenarije stanja mora i karakteristika senzora. Ideja je da se, transformacijom spektra gustoće valne energije u spektar po valnim brojevima, brzom Fourierovom transformacijom nađe rješenje u obliku neregularne dvodimenzionalne površine sa spektrom prema [180]. Kako komponente spektra imaju slučajnu fazu, svaka realizacija površine je stohastička, tako da se na temelju velikog broja realizacija mogu estimirati statističke značajke elektromagnetskog raspršenja. Ovakav pristup primijenjen je u [174, 335, 336]. Događaji poput lomljenih valova, zasjenjivanja i višestrukih interferencija, dodatno se modeliraju [7]. U međuvremenu, poluparametarska metoda implementirana neuronskom mrežom u procesima pridruživanja i nekoherentne detekcije premošćuje jaz stvoren nepoznavanjem dobrog parametarskog modela elektromagnetskog raspršenja za specifične uvjete Jadranskoga mora.

Literatura

[1] Arasaratnam, I., „Cubature Kalman filtering: Theory & applications", doktorski rad, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada, 2009.

[2] Rosenberg, L., Watts, S., „High grazing angle sea-clutter literature overview", tehnički izvještaj, Defence Science and Technology Organisation, Edinburgh, South Australia 5111, Australia, Mar. 2013.

[3] Johnsen, T., „Characterization of X-band radar sea-clutter in a limited fetch condition from low to high grazing angles", in IEEE Radar Conference, Johannesburg, South Africa, 2015., str. 109-114.

[4] Johnsen, T., Ødegaard, N., Knapskog, A. O., „X-band radar sea-clutter measurements from low to medium grazing angles recorded from a helicopter platform", Meeting Proceedings STO-MP-SET-239, Oct. 2016.

[5] Dong, Y., „Distribution of X-band high resolution and high grazing angle sea clutter", tehnički izvještaj, Defence Science and Technology Organisation, Edinburgh, South Australia 5111, Australia, Jul. 2005.

[6] Crisp, D. J., Rosenberg, L., Stacy, N. J., Dong, Y., „Modelling X-band sea clutter with the K-distribution: Shape parameter variation", in 2009 International Radar Conference „Surveillance for a Safer World", Bordeaux, France, 2009., str. 1-6.

[7] Ward, K. D., Watts, S., „Use of sea clutter models in radar design and development", IET Radar, Sonar & Navigation, Vol. 4, Issue: 2, Apr. 2010, str. 146-157.

[8] Bar-Shalom, Y., Li, X. R., „Multitarget-multisensor tracking. Principles and techniques", YBS, Box U-157, Storrs, CT 06269-2157, 1995.

[9] Lerro, D., Bar-Shalom, Y., „Interacting multiple model tracking with target amplitude feature", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 29, No. 2, Apr. 1993, str. 494-509.

[10] Wang, X., Scala, B. L., Ellem, R., „Feature aided probabilistic data association for multi-target tracking”, in 11th International Conference on Information Fusion, Cologne, Germany, 2008., str. 1-7.

[11] Kirubarajan, T., Bar-Shalom, Y., „Probabilistic data association techniques for target tracking in clutter”, Proceedings of the IEEE, Vol. 92, Issue 3, Mar. 2004, str. 536-557.

[12] Bar-Shalom, Y., Birmiwal, K., „Variable dimension filter for maneuvering target tracking”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-18, Issue 5, Sep. 1982.

[13] Chan, Y. T., Hu, A. G. G., Plant, J. B., „A Kalman filter based tracking scheme with input estimation”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-15, Issue 2, Mar. 1979, str. 237-244.

[14] Bogler, P. L., „Tracking a maneuvering target using input estimation”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 23, No. 3, May 1987, str. 298-310.

[15] Bar-Shalom, Y., Li, X. R., „Estimation and tracking. Principles, techniques and software”, YBS, Box U-157, Storrs, CT 06269-2157, 1998.

[16] Li, X. R., Jilkov, V. P., „Survey of maneuvering target tracking. Part V. Multiple-model methods”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 41, No. 4, Oct. 2005, str. 1255-1321.

[17] Tugnait, J. K., „Detection and estimation for abruptly changing systems”, in 20th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes, San Diego, CA, USA, 1981., str. 1357-1362.

[18] Tugnait, J. K., „Detection and identification of abrupt changes in linear systems”, in American Control Conference, San Francisco, CA, USA, 1983., str. 960-965.

[19] Forney, G. D., „The Viterbi algorithm”, Proceedings of the IEEE, Vol. 61, No. 3, Mar. 1973, str. 268-278.

[20] Blom, H. A. P., „An efficient filter for abruptly changing systems”, in Proceedings of 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas, NV, USA, 1984., str. 656-658.

[21] Blom, H. A. P., Bar-Shalom, Y., „The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, No. 8, Aug. 1988, str. 780-783.

[22] Jakeman, E., Pusey, P. N., „A model for non-Rayleigh sea echo”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 24, No. 6, Nov. 1976, str. 806-814.

[23] Abraham, D. A., Lyons, A. P., „Novel physical interpretations of K-distributed reverberation”, IEEE Journal Of Oceanic Engineering, Vol. 27, No. 4, Oct. 2002, str. 800-813.

[24] Farshchian, M., Posner, F. L., „The Pareto distribution for low grazing angle and high resolution X-band sea clutter”, in 2010 IEEE Radar Conference, Washington, DC, USA, 2010., str. 789-793.

[25] Jakeman, E., Tough, R. J. A., „Non-Gaussian models for the statistics of scattered waves”, Advances in Physics, Vol. 37, No. 5, 1988, str. 471-529.

[26] Bouvier, C., Martinet, L., Favier, G., Artaud, M., „Simulation of radar sea clutter using autoregressive modelling and K-distribution”, in IEEE International Radar Conference, Alexandria, VA, USA, 1995., str. 425-430.

[27] Middleton, D., „New physical-statistical methods and models for clutter and reverberation: The KA-distribution and related probability structures”, IEEE Journal of Oceanic Engineering, Vol. 24, No. 3, Jul. 1999, str. 261-284.

[28] Rosenberg, L., Crisp, D. J., Stacy, N. J., „Analysis of the KK-distribution with X-band medium grazing angle sea-clutter”, IET Radar, Sonar & Navigation, Vol. 4, No. 2, Apr. 2010, str. 209-222.

[29] Bar-Shalom, Y., Kirubarajan, T., Lin, X., „Probabilistic data association techniques for target tracking with applications to sonar, radar and EO sensors”, IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, Vol. 20, No. 8, Aug. 2005, str. 37-56.

[30] Smith, P., Buechler, G., „A branching algorithm for discriminating and tracking multiple objects”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 20, Issue 1, Feb. 1975, str. 101-104.

[31] Quach, T., Farooq, M., „Maximum likelihood track formation with the Viterbi algorithm”, in Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, Lake Buena Vista, FL, USA, 1994., str. 271-276.

[32] Gad, A., Majdi, F., Farooq, M., „A comparison of data association techniques for target tracking in clutter”, in Proceedings of the Fifth International Conference on Information Fusion, Vol. 2, Annapolis, MD, USA, 2002., str. 1126-1133.

[33] PCE, „Radarski sustavi - integracija”, dostupno na: http://www.pce.hr/radar_systems/integration/integration.html (13. ožujka 2017.)

[34] Bar-Shalom, Y., Chang, K. C., Blom, H. A. P., „Automatic track formation in clutter with a recursive algorithm”, in Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 2, Tampa, FL, USA, 1989., str. 1402-1408.

[35] Mušicki, D., Evans, R. J., Stanković, S., „Integrated probabilistic data association”, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 39, No. 6, Jun. 1994, str. 1237-1241.

[36] Pulford, G. W., Scala, B. F. L., „Multihypothesis Viterbi data association. Algorithm development and assessment”, IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems, Vol. 46, No. 2, Apr. 2010, str. 583-609.

[37] Scala, B. L., Pulford., G. W., „Manoeuvring target tracking with the IMM-VDA algorithm”, in 8th International Conference on Information Fusion, Vol. 1, Philadelphia, PA, USA, 2005.

[38] Boers, Y., Driessen, J. N., „Particle filter based detection for tracking”, in Proceedings of the 2001 American Control Conference, Vol. 6, Arlington, VA, USA, 2001., str. 4393-4397.

[39] Salmond, D. J., Birch, H., „A particle filter for track-before-detect”, in Proceedings of the 2001 American Control Conference, Vol. 5, Arlington, VA, USA, 2001., str. 3755-3760.

[40] Rutten, M. G., Ristić, B., Gordon, N. J., „A comparison of particle filters for recursive track-before-detect”, in 7th International Conference on Information Fusion, Vol. 1, Philadelphia, PA, USA, 2005., str. 169-175.

[41] Brekke, E. F., „Clutter mitigation for target tracking”, doktorski rad, Norwegian University of Science and Technology, Norway, 2010.

[42] Blackman, S. S., „Multiple hypothesis tracking for multiple target tracking”, IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, Vol. 19, No. 1, Jan. 2004, str. 5-18.

[43] Mahler, R. P. S., „Multitarget Bayes filtering via first-order multitarget moments”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 39, No. 4, Oct. 2003, str. 1152-1178.

[44] Vo, B.-N., Mallick, M., Bar-Shalom, Y., Coraluppi, S., Osborne, R., Mahler, R., Vo, B.-T., „Multitarget tracking”, in Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, John Wiley & Sons, Inc., New York, Sep. 2015.

[45] Erdinc, O., Willett, P., Bar-Shalom, Y., „Probability hypothesis density filter for multitarget multisensor tracking”, in 7th International Conference on Information Fusion, Vol. 1, Philadelphia, PA, USA, 2005., str. 146-153.

[46] Punithakumar, K., Kirubarajan, T., Sinha, A., „Multiple-model probability hypothesis density filter for tracking maneuvering targets”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 44, Issue 1, Jan. 2008, str. 87-98.

[47] Panta, K., Vo, B.-N., Singh, S., Doucet, A., „Probability hypothesis density filter versus multiple hypothesis tracking”, Proceedings of SPIE, Vol. 5429, Aug. 2004, str. 284-295.

[48] Clark, D., Panta, K., Vo, B.-N., „The GM-PHD filter multiple target tracker”, in 9th International Conference on Information Fusion, Florence, Italy, 2006., str. 1-8.

[49] Clark, D., Ristić, B., Vo, B.-N., „PHD filtering with target amplitude feature”, in 11th International Conference on Information Fusion, Cologne, Germany, 2008., str. 1702-1708.

[50] Clark, D., Ristić, B., Vo, B.-N., Vo, B.-T., „Bayesian multi-object filtering with amplitude feature likelihood for unknown object SNR”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 58, Issue 1, Jan. 2010, str. 26-37.

[51] Mahler, R. P. S., „Statistical multisource-multitarget information fusion”, Artech House, Norwood, MA 02062, 2007.

[52] Vo, B.-T., Vo, B.-N., Cantoni, A., „The cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filter and its implementations”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 57, No. 2, Feb. 2009, str. 409-423.

[53] Vo, B.-T., Vo, B.-N., „Labeled random finite sets and multi-object conjugate priors”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 61, No. 16, Jul. 2013, str. 3460–3475.

[54] Vo, B.-N., Vo, B.-T., Phung, D., „Labeled random finite sets and the Bayes multi-target tracking filter”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 62, No. 24, Dec. 2014, str. 6554-6567.

[55] Dulčić, A., „Mehanika”, dostupno na: http://www.knjiznica.phy.pmf.unizg.hr/fizicari/Dulcic/Mehanika.pdf (24. ožujka 2017.)

[56] Granström, K., Willett, P., Bar-Shalom, Y., „An extended target tracking model with multiple random matrices and unified kinematics”, in 18th International Conference on Information Fusion, Washington, DC, USA, 2015., str. 1007-1014.

[57] Beard, M., Reuter, S., Granström, K., Vo, B.-T., Vo, B.-N., Scheel, A., „A generalised labelled multi-Bernoulli filter for extended multi-target tracking”, in 18th International Conference on Information Fusion, Washington, DC, USA, 2015.

[58] Li, X. R., Li, N., „Integrated real-time estimation of clutter density for tracking”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 48, No. 10, Oct. 2000, str. 2797-2805.

[59] Mahler, R. P. S., Vo, B.-T., Vo, B.-N., „CPHD filtering with unknown clutter rate and detection profile”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 59, No. 8, Aug. 2011, str. 3497-3513.

[60] Beard, M., Vo, B.-T., Vo, B.-N., „Multi-target filtering with unknown clutter density using a bootstrap GMCPHD filter”, IEEE Signal Processing Letters, Vol. 20, No. 4, Apr. 2013, str. 323-326.

[61] Parzen, E., „On estimation of a probability density function and mode”, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 33, No. 3, Sep. 1963, str. 1065-1076.

[62] Chen, X., Tharmarasa, R., Kirubarajan, T., Pelletier, M., „Online clutter estimation using a Gaussian kernel density estimator for target tracking”, in 14th International Conference on Information Fusion, Chicago, Illinois, USA, 2011., str. 1317-1324.

[63] Vondra, B., Bonefačić, D., „Estimation of heavy-tailed clutter density using adaptive RBF network”, in 22nd International Conference on Applied Electromagnetics and Communications (ICECom), Dubrovnik, Croatia, 2016., str. 1-6.

[64] Farkas, A., Parunov, J., Katalinić, M., „Wave statistics for the middle Adriatic Sea”, Journal of Maritime & Transportation Sciences, Vol. 52, No. 1, Dec. 2016, str. 33-47.

[65] Horst, M. N., Dyer, F. B., Tuley, M. T., „Radar sea clutter model”, in International IEEE AP/S URSI Symposium, Maryland, USA, 1978., str. 6-10.

[66] Crisp, D. J., Kyprianou, R., Rosenberg, L., Stacy, N. J. S., „Modelling X-band sea clutter at moderate grazing angles”, in 2008 International Conference on Radar, Adelaide, SA, Australia, 2008., str. 569-574.

[67] Rosenberg, L., „Characterisation of high grazing angle X-band sea-clutter Doppler spectra”, tehnički izvještaj, Defence Science and Technology Organisation, Edinburgh, South Australia 5111, Australia, Aug. 2013.

[68] Mušicki, D., Challa, S., Suvorova, S., „Automatic track initiation of manoeuvring target in clutter”, in 5th Asian Control Conference, Vol. 2, Melbourne, Australia, 2004., str. 1009-1015.

[69] Pulford, G. W., „Multi-target Viterbi data association”, in 9th International Conference on Information Fusion, Florence, Italy, 2006., str. 1-6.

[70] Mušicki, D., Evans, R., „Joint integrated probabilistic data association - JIPDA”, in Proceedings of the Fifth International Conference on Information Fusion, Vol. 2, Annapolis, MD, USA, 2002., str. 1120-1125.

[71] Magdon-Ismail, M., Atiya, A., „Density estimation and random variate generation using multilayer networks”, IEEE Transactions On Neural Networks, Vol. 13, Issue 3, May 2002, str. 497-520.

[72] Jazwinski, A. H., „Stochastic processes and filtering theory”, Academic Press, Inc., New York, 111 Fifth Avenue, New York, New York 10003, 1970.

[73] Swerling, P., „Probability of detection for fluctuating targets”, Research Memorandum RM-1217, The Rand Corporation, 1700 Main St. Santa Monica, CA, USA, Mar. 1954, research Memorandum.

[74] Kayacan, E., Ulutas, B., Kaynak, O., „Grey system theory-based models in time series prediction”, Expert Systems with Applications, Vol. 37, No. 2, Mar. 2010, str. 1784-1789.

[75] Li, X. R., Jilkov, V. P., „Survey of maneuvering target tracking. Part I. Dynamic models”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 39, No. 4, Oct. 2003, str. 1333-1364.

[76] Kasper, J. F., Nash, R. A., Price, C. F., Sutherland, A. A., „Applied optimal estimation”, Gelb, A., (ur.), The M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1974.

[77] Vondraček, Z., „Financijsko modeliranje, poglavlje 5”, dostupno na: http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/fm-p5.pdf (22. ožujka 2017.)

[78] Singer, R. A., „Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering target”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 6, No. 4, Jul. 1970, str. 473-483.

[79] Blackman, S. S., „Multiple-target tracking with radar application”, Artech House Inc., 685 Canton Street, Norwood, MA 02062, 1986.

[80] Zhou, H., „A “current” statistical model and adaptive tracking algorithm for maneuvering targets”, Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, Vol. 4, No. 1, 1983, str. 73-86.

[81] Zhou, H., Kumar, K. S. P., „A “current” statistical model and adaptive algorithm for estimating maneuvering targets”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 7, No. 5, Sep. 1984, str. 596-602.

[82] Helferty, J. P., „Improved tracking of maneuvering targets: the use of turn-rate distributions for acceleration modeling”, in Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems, Las Vegas, NV, USA, 1994., str. 515-520.

[83] Helferty, J. P., „Improved tracking of maneuvering targets: The use of turn-rate distributions for acceleration modeling”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 32, Issue 4, Oct. 1996, str. 1355-1361.

[84] Morelande, M. R., Gordon, N. J., „Target tracking through a coordinated turn”, IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 4, May 2005, str. 21-24.

[85] Best, R. A., Norton, J. P., „A new model and efficient tracker for a target with curvilinear motion”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 33, Issue 3, Jul. 1997, str. 1030-1037.

[86] Li, X. R., Jilkov, V. P., „Survey of maneuvering target tracking. Part II: motion models of ballistic and space targets”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 46, No. 1, Jan. 2010, str. 96-119.

[87] Lušić, Z., „Terestrička navigacija”, dostupno na: http://documents.tips/documents/zvonimir-lusic-terestricka-navigacija-skripta.html (28. travnja 2017.)

[88] Li, X. R., Jilkov, V. P., „A survey of maneuvering target tracking. Part III. Measurement models”, in Proceedings of SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets, San Diego, CA, USA, 2001.

[89] Arasaratnam, I., Haykin, S., „Cubature Kalman filters”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 54, Issue 6, Jun. 2009, str. 1254-1269.

[90] Kalman, R. E., „A new approach to linear filtering and prediction problems”, Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering, Vol. 82 (Series D), Mar. 1960, str. 35-45.

[91] Beneš, V. E., „Exact finite-dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift”, Stochastics, Vol. 5, No. 1-2, 1981, str. 65-92.

[92] Daum, F. E., „Exact finite dimensional nonlinear filters for continuous time processes with discrete time measurements”, in 23rd IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, NV, USA, 1984., str. 16-22.

[93] Arulampalam, M. S., Maskell, S., Gordon, N., Clapp, T., „A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 50, Issue 2, Feb. 2002, str. 174-188.

[94] Li, X. R., Jilkov, V. P., „A survey of maneuvering target tracking. Part VI. Approximation techniques for nonlinear filtering", in Proceedings of 2004 SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets, San Diego, CA, USA, 2004., str. 537-550.

[95] Julier, S. J., Uhlmann, J. K., „Unscented filtering and nonlinear estimation", Proceedings of the IEEE, Vol. 92, Issue 3, Mar. 2004, str. 401-422.

[96] Alspach, D., Sorenson, H., „Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 17, Issue: 4, Aug. 1972, str. 439-448.

[97] Haykin, S., Bakker, R., Currie, B. W., „Uncovering nonlinear dynamics - the case study of sea clutter", Proceedings of the IEEE, Vol. 90, No. 5, May 2002, str. 860-881.

[98] Kalman, R. E., Bucy, R. S., „New results in linear filtering and prediction theory", Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering, Vol. 83 (Series D), Mar. 1961, str. 95-108.

[99] Julier, S., Uhlmann, J. K., „Data fusion in nonlinear systems", in Multisensor Data Fusion, Liggins, M. E., Hall, D. L., Llinas, J., (ur.), CRC Press, Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300 Boca Raton, FL 33487-2742, USA, 2009, str. 345-368.

[100] Julier, S. J., Uhlmann, J. K., Durrant-Whyte, H. F., „A new approach for filtering nonlinear systems", in Proceedings of the 1995 American Control Conference, Vol. 3, Seattle, WA, USA, 1995., str. 1628-1632.

[101] Julier, S., Uhlmann, J. K., „A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions", tehnički izvještaj, Department of Engineering Science, University of Oxford, Nov. 1996.

[102] Julier, S. J., Uhlmann, J. K., „A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems", in 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls, Orlando, FL, USA, 1997., str. 182-193.

[103] Wan, E. A., Merwe, van der, R., „The unscented Kalman filter for nonlinear estimation", in Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium, Lake Louise, Alberta, Canada, 2000., str. 153-158.

[104] Wan, E. A., Merwe, van der, R., Nelson, A. T., „Dual estimation and the unscented transformation", in Advances in Neural Information Processing Systems 12, Solla, S. A., Leen, T. K., Müller, K., (ur.), MIT Press, 2000, str. 666-672.

[105] Wan, E., Merwe, van der, R., „The unscented Kalman filter", in Kalman Filtering and Neural Networks, Haykin, S., (ur.), John Wiley & Sons, Inc., New York, Oct. 2001, str. 221-280.

[106] Julier, S. J., „The scaled unscented transformation", in Proceedings of the 2002 American Control Conference, Vol. 6, Anchorage, Alaska, USA, 2002., str. 4555-4559.

[107] Bhaumik, S., Swati, „Cubature quadrature Kalman filter", IET Signal Processing, Vol. 7, Issue 7, 2013, str. 533-541.

[108] Hildebrand, F. B., „Introduction to numerical analysis", McGraw-Hill, Inc., New York, 1974.

[109] Pesonen, H., Piché, R., „Cubature-based Kalman filters for positioning", in 7th Workshop on Positioning Navigation and Communication, Dresden, Germany, 2010., str. 45-49.

[110] Xin-Chun, Z., Cheng-Jun, G., „Cubature Kalman filters: Derivation and extension", Chinese Physics B, Vol. 22, No. 12, 2013, str. 128 401(1)-128 401(6).

[111] Freitas, de, J. F. G., „Bayesian methods for neural networks", doktorski rad, Trinity College, University of Cambridge and Cambridge University Engineering Department, UK, 1999.

[112] Polymenis, A., „The multivariate central limit theorem and its relationship with univariate statistics", International Journal of Advanced Mathematics and Statistics, Vol. 2, Issue 1, Oct. 2016, str. 64-67.

[113] Papoulis, A., „Probability, random variables and stochastic processes", McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[114] Liggins, M. E., Chang, K.-C., „Introduction to particle filtering: the next stage in tracking", in Multisensor Data Fusion, Liggins, M. E., Hall, D. L., Llinas, J., (ur.), CRC Press, Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300 Boca Raton, FL 33487-2742, USA, 2009, str. 177-201.

[115] Geweke, J., „Bayesian inference in econometric models using Monte Carlo integration", Econometrica, Vol. 57, No. 6, Nov. 1989, str. 1317-1339.

[116] Doucet, A., „On sequential simulation-based methods for Bayesian filtering", tehnički izvještaj, Cambridge University Department of Engineering, 1998.

[117] Doucet, A., Gordon, N. J., Krishnamurthy, V., „Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 49, No. 3, Mar. 2001, str. 613-624.

[118] Merwe, van der, R., Doucet A., Freitas, de, N., Wan, E., „The unscented particle filter", tehnički izvještaj, Cambridge University Engineering Department, Aug. 2000.

[119] Liu, J. S., Chen, R., „Sequential Monte Carlo methods for dynamic systems", Journal of the American Statistical Association, Vol. 93, Sep. 1998, str. 1032-1044.

[120] Fearnhead, P., „Sequential Monte Carlo methods in filter theory", doktorski rad, Merton College, University of Oxford, UK, 1998.

[121] Agresti, A., „An introduction to categorical data analysis", The John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, USA, 2007.

[122] Carpenter, J., Clifford, P., Fearnhead, P., „Building robust simulation-based filters for evolving data sets", tehnički izvještaj, Department of Statistics, Oxford University, 1999.

[123] Kitagawa, G., „Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models", Journal of Computational and Graphical Statistics, Vol. 5, No. 1, Mar. 1996, str. 1-25.

[124] Musso, C., Oudjane, N., Gland, F. L., „Improving regularised particle filters", in Sequential Monte Carlo Methods in Practice, Doucet, A., Freitas, de, N., Gordon, N., (ur.), Springer, New York, NY, 2001, str. 247-271.

[125] Sheather, S. J., „Density estimation", Statistical Science, Vol. 19, No. 4, Nov. 2004, str. 588-597.

[126] Scott, D. W., Terrell, G. R., „Biased and unbiased cross-validation in density estimation", Journal of the American Statistical Association, Vol. 82, Issue 400, Dec. 1987, str. 1131-1146.

[127] Gilks, W., Richardson, S., Spiegelhalter, D., „Introducing Markov chain Monte Carlo", in Markov Chain Monte Carlo in Practice, Gilks, W., Richardson, S., Spiegelhalter, D., (ur.), Chapman & Hall/CRC, CRC Press LLC, 2000 N.W. Blvd., Boca Raton, FLA, USA, 1995, str. 1-19.

[128] Hastings, W. K., „Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications", Biometrika, Vol. 57, No. 1, Apr. 1970, str. 97-109.

[129] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., Teller, E., „Equation of state calculations by fast computing machines", Journal of Chemical Physics, Vol. 21, No. 6, Jun. 1953, str. 1087-1092.

[130] Moose, R. H., „An adaptive state estimation solution to the maneuvering target problem", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 20, No. 3, Jun. 1975, str. 359-362.

[131] Gholson, N. H., Moose, R. L., „Maneuvering target tracking using adaptive state estimation", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 13, No. 3, May 1977, str. 310-317.

[132] Li, X. R., Jilkov, V. P., „A survey of maneuvering target tracking. Part IV. Decision based methods", in Proceedings of SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets, Orlando, FL, USA, 2002.

[133] Lee, H., Tahk, M.-J., „Generalized input-estimation technique for tracking maneuvering targets", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 35, No. 4, Oct. 1999, str. 1388-1402.

[134] Mehra, R. K., „Approaches to adaptive filtering", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 17, No. 5, Oct. 1972, str. 693-698.

[135] Li, X. R., Bar-Shalom, Y., „A recursive multiple model approach to noise identification", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 30, No. 3, Jul. 1994, str. 671-684.

[136] Li, X. R., Bar-Shalom, Y., „A recursive hybrid system approach to noise identification", in Proceedings on 1st IEEE Conference on Control Applications, Dayton, OH, USA, 1992., str. 847-852.

[137] Magill, D. T., „Optimal adaptive estimation of sampled stochastic processes", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 10, No. 4, Oct. 1965, str. 434-439.

[138] Lainiotis, D. G., „Performance measure for adaptive Kalman estimators", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 15, Issue 2, Apr. 1970, str. 249-250.

[139] Baram, Y., N. R. Sandell, J., „Consistent estimation on finite parameter sets with application to linear systems identification", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 23, No. 3, Jun. 1978, str. 451-454.

[140] Baram, Y., N. R. Sandell, J., „An information theoretic approach to dynamical systems modeling and identification", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 23, No. 1, Feb. 1978, str. 61-66.

[141] Bar-Shalom, Y., Chang, K. C., Shertude, H. M., „Performance evaluation of a cascaded logic for track formation in clutter", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 25, No. 6, Nov. 1989, str. 873-878.

[142] PCE, „Zaštita zelene i plave granice", dostupno na: http://www.pce.hr/ptns/border_protect/border_protect.html (8. kolovoza 2017.)

[143] Innovative Navigation GmbH, „VTS system at Neum Bay in Croatia supports authorities in safeguarding the EU's borders", dostupno na: http://www.innovative-navigation.de/wp-content/uploads/2015/04/inPRESSEMITTEILUNG_Kroatien_Neum_inBetrieb.pdf (8. kolovoza 2017.)

[144] Aslan, N., „Maneuverability estimation of high-speed craft", magistarski rad, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, USA, Jun. 2015.

[145] Field, T. R., Tough, R. J. A., „Diffusion processes in electromagnetic scattering generating K-distributed noise", Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences, Vol. 459, Issue: 2037, Sep. 2003, str. 2169-2193.

[146] Field, T. R., Tough, R. J. A., „Stochastic dynamics of the scattering amplitude generating K-distributed noise", Journal of Mathematical Physics, Vol. 44, No. 11, Nov. 2003, str. 5212-5223.

[147] Field, T. R., Haykin, S., „Nonlinear dynamics of sea clutter", International Journal of Navigation and Observation, Vol. 2008, 2008.

[148] Bakker, R., Currie, B., „The Dartmouth database", dostupno na: http://soma.ece.mcmaster.ca/ipix/dartmouth/index.html (4. siječnja 2017.)

[149] Li, L., Kong, L., Yang, X., „A new amplitude probability density function estimation method for IPIX Grimsby data", in Proceedings of 2011 IEEE CIE International Conference on Radar, Vol. 2, Chengdu, China, 2011., str. 1288-1290.

[150] Watts, S., „Radar detection prediction in sea clutter using the compound K-distribution model", IEE Proceedings F - Communications, Radar and Signal Processing, Vol. 132, No. 7, Dec. 1985, str. 613-620.

[151] Wetzel, L. B., „Sea clutter", in Radar Handbook, 2nd ed., Skolnik, M. I., (ur.), McGraw-Hill, Inc., New York, Oct. 1990, str. 13.1-13.37.

[152] Chan, H. C., „Radar sea-clutter at low grazing angles", IEE Proceedings F - Radar and Signal Processing, Vol. 137, No. 2, Apr. 1990, str. 102-112.

[153] Watts, S., Wicks, D. C., „Empirical models for detection prediction in K-distribution radar sea clutter", in IEEE International Conference on Radar, Arlington, VA, USA, 1990.

[154] Nathanson, F. E., „Radar design principles: signal processing and the environment", McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[155] Nohara, T. J., Haykin, S., „Canadian east coast radar trials and the K-distribution", IEE Proceedings F - Radar and Signal Processing, Vol. 138, No. 2, Apr. 1991, str. 80-88.

[156] Ward, K. D., Tough, R. J. A., Shepherd, P. W., „Modelling sea clutter: correlation, resolution and non-gaussian statistics", in Radar 97 (Conf. Publ. No. 449), Edinburgh, UK, 1997., str. 95-99.

[157] Herselman, P. L., Baker, C. J., Wind, de, H. J., „An analysis of X-band calibrated sea clutter and small boat reflectivity at medium-to-low grazing angles", International Journal of Navigation and Observation, Vol. 2008, 2008, str. 1-14.

[158] Watts, S., Ward, K., Tough, R., „Modelling the shape parameter of sea clutter", in International Radar Conference - Surveillance for a Safer World, Bordeaux, France, 2009., str. 1-6.

[159] Strempel, M. D., Villiers, J. P. D., Cilliers, J. E., McDonald, A., „Distribution analysis of segmented wave sea clutter in littoral environments", in 2015 IEEE Radar Conference, Johannesburg, South Africa, 2015., str. 133-138.

[160] Dong, Y., „High grazing angle and high resolution clutter. Correlation and polarisation analyses", tehnički izvještaj, Defence Science and Technology Organisation, Edinburgh, South Australia 5111, Australia, Mar. 2007.

[161] Melief, H. W., Greidanus, H., Genderen, van, P., Hoogeboom, P., „Analysis of sea spikes in radar sea clutter data", IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 44, No. 4, Apr. 2006, str. 985-993.

[162] Rosenberg, L., „Sea-spike detection in high grazing angle X-band sea-clutter", tehnički izvještaj, Defence Science and Technology Organisation, Edinburgh, South Australia 5111, Australia, Apr. 2012.

[163] Wei, Y., Guo, L., Li, J., „Numerical simulation and analysis of the spiky sea clutter from the sea surface with breaking waves", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 63, No. 11, Nov. 2015, str. 4983-4994.

[164] Tough, R., Ward, K., Watts, S., „Modelling of sea clutter temporal correlation in detection calculations”, in IET International Conference on Radar Systems, Edinburgh, UK, 2007., str. 139-142.

[165] Soriano, G., Guerin, C. A., „A cutoff invariant two-scale model in electromagnetic scattering from sea surfaces”, IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, Vol. 5, No. 2, Apr. 2008, str. 199-203.

[166] Roy, L. P., Kumar, R. V. R., „Accurate K-distributed clutter model for scanning radar application”, IET Radar, Sonar and Navigation, Vol. 4, No. 2, Apr. 2010, str. 158-167.

[167] Dong, Y., Rosenberg, L., Weinberg, G., „Generating correlated gamma sequences for sea-clutter simulation”, tehnički izvještaj, Defence Science and Technology Organisation, Edinburgh, South Australia 5111, Australia, Mar. 2012.

[168] Karimian, A., Yardim, C., Gerstoft, P., Hodgkiss, W. S., Barrios, A. E., „Multiple grazing angle sea clutter modeling”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 60, No. 9, Sep. 2012, str. 4408-4417.

[169] Fiche, A., Khenchaf, A., Cochin, C., Hurtaud, Y., „Combination of empirical/asymptotic models to characterize sea clutter at intermediate angles”, in 2013 International Conference on Radar, Adelaide, SA, Australia, 2013., str. 351-355.

[170] Bocquet, S., „Parameter estimation for Pareto and K distributed clutter with noise”, IET Radar, Sonar & Navigation, Vol. 9, No. 1, 2015, str. 104-113.

[171] Chen, H., Yu, W. M., Zhou, X. Y., Zhang, M., Cui, T. J., „Simplification of linear short-gravity waves for modeling sea clutter returns due to Bragg scattering at X band”, in 2016 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, Beijing, China, 2016., str. 2680-2683.

[172] Mezache, A., Chalabi, I., Soltani, F., Sahed, M., „Estimating the Pareto plus noise distribution parameters using non-integer order moments and [zlog(z)] approaches”, IET Radar, Sonar & Navigation, Vol. 10, No. 1, 2016, str. 192-204.

[173] Yu, H., Shui, P. L., Huang, Y. T., „Low-order moment-based estimation of shape parameter of CGIG clutter model”, Electronics Letters, Vol. 52, No. 18, 2016, str. 1561-1563.

[174] O’Donnell, B., LeBaron, R., Diaz, R., Papandreou-Suppappola, A., „Physics-based sea clutter model for improved detection of low radar cross-section targets”, in 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2014., str. 6830-6833.

[175] The Open University, (ur.), „Waves, tides and shallow-water processes”, ser. Oceanography series, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1999.

[176] „Pomorska enciklopedija II. izdanje”, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 1972.-1989.

[177] Katalinić, M., Parunov, J., „Pregled klimatskih prilika u Jadranskom moru”, in Sorta, 21. simpozij Teorija i praksa brodogradnje, Krk, Hrvatska, 2014., str. 555-562.

[178] Katalinić, M., Ćorak, M., Parunov, J., „Analysis of wave heights and wind speeds in the Adriatic Sea”, in Maritime Technology and Engineering, Soares, C. G., Santos, T. A., (ur.), Taylor & Francis Group, London, 2015, str. 1389-1394.

[179] Zorović, D., Mohović, R., Mohović, Đ., „Prilog određivanju duljine vjetrovnih valova na Jadranu”, Naše more, Vol. 60, No. 3-4, 2003, str. 145-150.

[180] Tabain, T., „Standard wind wave spectrum for the Adriatic sea revisited (1977-1997)”, Brodogradnja, Vol. 45, No. 4, 1997, str. 303-313.

[181] Hasselmann, K., Barnett, T. P., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D. E., Enke, K., Ewing, J. A., Gienapp, H., Hasselmann, D. E., Kruseman, P., Meerburg, A., Müller, P., Olbers, D. J., Richter, K., Sell, W., Walden, H., „Measurements of wind-wave growth and swell decay during the joint north sea wave project (JONSWAP)”, Herausgegeben vom Deutschen Hydrographischen Zeitschrift, Vol. A, (8°), No. 12, Jan. 1973, str. 1-95.

[182] Lee, P. H. Y., Barter, J. D., Beach, K. L., Hindman, C. L., Lake, B. M., Rungaldier, H., Shelton, J. C., Williams, A. B., Yee, R., Yuen, H. C., „X band microwave backscattering from ocean waves”, Journal of Geophysical Research: Oceans, Vol. 100, No. C2, Feb., str. 2591-2611.

[183] Whitrow, J. L., „A model of low grazing angle sea clutter for coherent radar performance analysis”, tehnički izvještaj, Defence Science and Technology Organisation, Edinburgh, South Australia 5111, Australia, Mar. 2017.

[184] Plant, W. J., Keller, W. C., Hayes, K., „X-band backscatter from the ocean at low-grazing angles”, in 2007 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, Barcelona, Spain, 2007., str. 1303-1306.

[185] Gregers-Hansen, V., Mital, R., „An improved empirical model for radar sea clutter reflectivity”, tehnički izvještaj, Naval Research Laboratory, 4555 Overlook Avenue, SW, Washington, DC, USA, 2012.

[186] Reilly, J. P., Dockery, G. D., „Influence of evaporation ducts on radar sea return”, IEE Proceedings F: Radar and Signal Processing, Vol. 137, Apr. 1990, str. 81-88.

[187] Ulaby, F. T., Moore, R. K., Fung, A. K., „Microwave remote sensing: active and passive. Volume II: radar remote sensing and surface scattering and emission theory”, Artech House, 685 Canton Street, Norwood, MA 02062, 1982.

[188] Ollila, E., Tyler, D. E., Koivunen, V., Poor, H. V., „Complex elliptically symmetric distributions: Survey, new results and applications”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 60, No. 11, Nov. 2012, str. 5597-5625.

[189] Gini, F., Greco, M., „Texture modeling and validation using recorded high resolution sea clutter data”, in Proceedings of the 2001 IEEE Radar Conference (Cat. No.01CH37200), Atlanta, GA, USA, 2001., str. 387-392.

[190] Barkat, M., „Signal detection and estimation”, Artech House, 685 Canton Street, Norwood, MA 02062, 2005.

[191] Glasser, L., Kohl, K., Koutschan, C., Moll, V. H., Straub, A., „The integrals in Gradshteyn and Ryzhik. Part 22: Bessel-K functions”, Scientia, Series A: Mathematical Sciences, Vol. Sciences 22, 2012, str. 129-151.

[192] Blacknell, D., Tough, R. J. A., „Parameter estimation for the K-distribution based on [z log(z)]”, IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation, Vol. 148, Issue: 6, 2001, str. 309-312.

[193] Ward, K. D., Tough, R. J. A., „Radar detection performance in sea clutter with discrete spikes”, in RADAR 2002, Edinburgh, UK, 2002., str. 253-257.

[194] Balleri, A., Nehorai, A., Wang, J., „Maximum likelihood estimation for compound-gaussian clutter with inverse gamma texture”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 43, No. 2, Apr. 2007, str. 775-779.

[195] Stinco, P., Greco, M., Gini, F., „Adaptive detection in compound-gaussian clutter with inverse-gamma texture”, in Proceedings of 2011 IEEE CIE International Conference on Radar, Vol. 1, Chengdu, China, 2011., str. 434-437.

[196] Sangston, K. J., Gini, F., Greco, M. S., „Coherent radar target detection in heavy-tailed compound-Gaussian clutter”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 48, No. 1, Jan. 2012, str. 64-77.

[197] Mezache, A., Soltani, F., Sahed, M., Chalabi, I., „Model for non-Rayleigh clutter amplitudes using compound inverse Gaussian distribution: an experimental analysis”, IEEE

Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 51, No. 1, Jan. 2015, str. 142-153.

[198] Palamà, R., Greco, M. S., Stinco, P., Gini, F., „Statistical analysis of bistatic and monostatic sea clutter", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 51, No. 4, Oct. 2015, str. 3036-3054.

[199] Weinberg, G. V., „An investigation of the Pareto distribution as a model for high grazing angle clutter", tehnički izvještaj, Defence Science and Technology Organisation, Edinburgh, South Australia 5111, Australia, Mar. 2011.

[200] Gautschi, W., Cahill, W. F., „Exponential integral and related functions", in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, ninth Dover printing, tenth GPO printing, ed., Abramowitz, M., Stegun, I. A., (ur.), Dover, New York, 1964, str. 227-237.

[201] Oberhettinger, F., „Hypergeometric functions", in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, ninth Dover printing, tenth GPO printing, ed., Abramowitz, M., Stegun, I. A., (ur.), Dover, New York, 1964, str. 555-566.

[202] Dereziński, J., „Hypergeometric type functions and their symmetries", Annales Henri Poincaré, Vol. 15, Aug. 2014.

[203] Lee, P. H. Y., Barter, J. D., Beach, K. L., Caponi, E., Hindman, C., Lake, B. M., Rungaldier, H., Shelton, J., „Power spectral lineshapes of microwave radiation backscattered from sea surfaces at small grazing angles", IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation, Vol. 142, Nov. 1995, str. 252-258.

[204] Temme, N. M., „Error functions, Dawson's and Fresnel integrals", in The NIST Handbook of Mathematical Functions, Olver, F. W., Lozier, D. W., Boisvert, R. F., Clark, C. W., (ur.), Cambridge University Press, New York, NY, USA, May 2010, str. 159-172.

[205] Raynal, A. M., Doerry, A. W., „Doppler characteristics of sea clutter", tehnički izvještaj, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico 87185 and Livermore, California 94550, USA, Jun. 2010.

[206] Walker, D., „Doppler modelling of radar sea clutter", IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation, Vol. 148, No. 2, Apr. 2001, str. 73-80.

[207] Walker, D., „Experimentally motivated model for low grazing angle radar Doppler spectra of the sea surface", IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation, Vol. 147, Jul. 2000, str. 114-120.

[208] Ulaby, F. T., Elachi, C., „Radar Polarimetry for Geoscience Applications”, ser. Artech House remote sensing library, Artech House, Norwood, Massachussetts, USA, 1990.

[209] Morris, J. T. S., „Polarimetric properties of radar echoes from features on the ocean surface”, doktorski rad, Department of Electrical and Electronic Engineering, The University of Adelaide, South Australia 5005, Australia, Sep. 2004.

[210] Cloude, S. R., „Target decomposition theorems in radar scattering”, Electronics Letters, Vol. 21, No. 1, Jan. 1985, str. 22-24.

[211] Cloude, S. R., Pottier, E., „An entropy based classification scheme for land applications of polarimetric SAR”, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 35, No. 1, Jan. 1997, str. 68-78.

[212] Zyl, van, J. J., „On the importance of polarization in radar scattering problems”, doktorski rad, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA, Dec. 1985.

[213] Drosopoulos, A., „Description of the OHGR database”, tehnički izvještaj, Defence Reasearch Establishment Ottawa, 3701 Carling Ave., Ottawa, Ontario, Canada, Dec. 1994.

[214] Chen, X., Guan, J., He, Y., Zhang, J., „Detection of low observable moving target in sea clutter via fractal characteristics in fractional Fourier transform domain”, IET Radar, Sonar & Navigation, Vol. 7, No. 6, Jul. 2013, str. 635-651.

[215] Gini, F., Greco, M., „Texture modelling, estimation and validation using measured sea clutter data”, IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation, Vol. 149, No. 3, Jun. 2002, str. 115-124.

[216] Greco, M., Gini, F., Rangaswamy, M., „Statistical analysis of measured polarimetric clutter data at different range resolutions”, IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation, Vol. 153, No. 6, Dec. 2006, str. 473-481.

[217] Muehe, C. E., O'Donnell, R. M., „Automating radars for air traffic control”, in Electro Conference, Boston, MA, USA, 1978.

[218] Bar-Shalom, Y., Campo, L. J., Luh, P. B., „From receiver operating characteristic to system operating charcteristic. Evaluation of a track formation system”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 2, Feb. 1990, str. 172-179.

[219] Li, X. R., Li, N., „Intelligent PDAF: refinement of IPDAF for tracking in clutter”, in Proceedings of the Twenty-Ninth Southeastern Symposium on System Theory, Cookeville, TN, USA, 1997., str. 133-137.

[220] Li, N., Li, X. R., „Target perceivability and its applications”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 49, No. 11, Nov. 2001, str. 2588-2604.

[221] Mušicki, D., Morelande, M., Scala, B. L., „Non parametric target tracking in non uniform clutter”, in 8th International Conference on Information Fusion, Philadelphia, PA, USA, 2005.

[222] Pulford, G., „A survey of manoeuvring target tracking methods”, CoRR, Vol. abs/1503.07828, 2015.

[223] Li, X. R., „Tracking in clutter with strongest neighbor measurements. Part I. Theoretical Analysis”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, Issue: 11, Nov. 1998, str. 1560-1578.

[224] Pulford, G., Scala, B. L., „Over-the-horizon radar tracking using the Viterbi algorithm. Second Report to DSTO”, tehnički izvještaj, 1995.

[225] Pulford, G., Scala, B. L., „Over-the-horizon radar tracking using the Viterbi algorithm. Third Report to DSTO”, tehnički izvještaj, 1999.

[226] Rosenblatt, M., „Remarks on some nonparametric estimates of a density function”, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 27, No. 3, Sep. 1956, str. 832-837.

[227] Specht, D. F., „A general regression neural network”, IEEE Transactions On Neural Networks, Vol. 2, No. 6, Nov. 1991, str. 568-576.

[228] Zambom, A. Z., Dias, R., „A review of kernel density estimation with applications to econometrics”, International Econometric Review, Vol. 5, No. 1, Apr. 2013, str. 20-42.

[229] Scott, D. W., „On optimal and data-based histograms”, Biometrika, Vol. 66, No. 3, Dec. 1979, str. 605-610.

[230] Rudemo, M., „Empirical choice of histogram and kernel density estimators”, Scandinavian Journal of Statistics, Vol. 9, No. 2, 1982, str. 65-78.

[231] Bowman, A. W., „An alternative method of cross-validation for the smoothing of density estimates”, Biometrika, Vol. 71, No. 2, Aug. 1984, str. 353-360.

[232] Stone, J. C., „An asymptotically optimal window selection rule for kernel density estimates”, The Annals of Statistics, Vol. 12, No. 4, Dec. 1984, str. 1285-1297.

[233] Wand, M. P., Jones, M. C., „Kernel smoothing”, Chapman and Hall, London, 1995.

[234] Houles, A., Bar-Shalom, Y., „Multisensor tracking of a maneuvering target in clutter", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 25, No. 2, Mar. 1989, str. 176-189.

[235] Dong, Y., Haywood, B., „High grazing angle x-band sea clutter distributions", in 2007 IET International Conference on Radar Systems, Edinburgh, UK, 2007., str. 1-5.

[236] Lefaida, S., Soltani, F., Mezache, A., „Radar sea-clutter modelling using fractional generalised Pareto distribution", Electronics Letters, Vol. 54, No. 16, Aug. 2018, str. 999-1001.

[237] Neyman, J., Pearson, E. S., „On the problem of the most efficient test of statistical hypotheses", in Philosophical Transactions of the Royal Society of London, ser. Series A, 1933., str. 289-337.

[238] Hennessey, G., Leung, H., Drosopoulos, A., Yip, P. C., „Sea-clutter modeling using a radial-basis-function neural network", IEEE Journal of Oceanic Engineering, Vol. 26, No. 3, Jul. 2001, str. 358-372.

[239] Mezache, A., Chalabi, I., „Estimation of the RiIG-distribution parameters using the artificial neural networks", in 2013 IEEE International Conference on Signal and Image Processing Applications, Melaka, Malaysia, 2013., str. 291-296.

[240] Cheikh, K., Soltani, F., „Application of neural networks to radar signal detection in K-distributed clutter", IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation, Vol. 153, No. 5, Oct. 2006, str. 460-466.

[241] Zhou, H., Li, Y., Jiang, T., „Sea clutter distribution modeling: A kernel density estimation approach", in 2018 10th International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP), Hangzhou, China, 2018., str. 1-6.

[242] Pan, M., Chen, J., Wang, S., Dong, Z., „A novel approach for marine small target detection based on deep learning", in 2019 IEEE 4th International Conference on Signal and Image Processing (ICSIP), Wuxi, China, 2019., str. 395-399.

[243] Zhu, L., Xiong, G., Yu, W., „Radar HRRP group-target recognition based on combined methods in the backgroud of sea clutter", in 2018 International Conference on Radar (RADAR), Brisbane, QLD, Australia, 2018., str. 1-6.

[244] del-Rey-Maestre, N., Mata-Moya, D., Jarabo-Amores, P., Gomez-del-Hoyo, P., Martin-de-Nicolas, J., „Single mlp-cfar for a radar doppler processor based on the ml criterion. validation on real data", in 2015 European Radar Conference (EuRAD), Paris, France, 2015., str. 53-56.

[245] Vicen-Bueno, R., Carrasco-Álvarez, R., Rosa-Zurera, M., Nieto-Borge, J. C., „Sea clutter reduction and target enhancement by neural networks in a marine radar system", Sensors (Basel, Switzerland), Vol. 9, No. 3, Mar. 2009, str. 1913-1936.

[246] Sarikaya, T. B., Soysal, G., Efe, M., Sobaci, E., Kirubarajan, T., „Sea-land classification using radar clutter statistics for shore-based surveillance radars", in International Conference on Radar Systems (Radar 2017), Belfast, UK, 2017., str. 1-4.

[247] Vicen-Bueno, R., Rosa-Zurera, M., Jarabo-Amores, M. P., de la Mata-Moya, D., „Coherent detection of Swerling 0 targets in sea-ice Weibull-distributed clutter using neural networks", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 59, No. 12, Dec. 2010, str. 3139-3151.

[248] Modha, D. S., Fainman, Y., „A learning law for density estimation", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 5, No. 3, May 1994, str. 519-523.

[249] Likas, A., „Probability density estimation using artificial neural networks", Computer Physics Communications, Vol. 135, 2001, str. 167-175.

[250] Trentin, E., Freno, A., „Unsupervised nonparametric density estimation: A neural network approach", in 2009 International Joint Conference on Neural Networks, Atlanta, GA, USA, 2009., str. 3140-3147.

[251] Xiongfeng, F., Xianhui, Y., Yongmao, X., „A new method for density estimation by using forward neural network", in IJCNN'99. International Joint Conference on Neural Networks. Proceedings (Cat. No.99CH36339), Vol. 2, Washington, DC, USA, 1999., str. 1461-1464.

[252] Gowgi, P., Srinivasa, S. G., „Density transformation and parameter estimation from back propagation algorithm", in 2016 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN), Vancouver, BC, Canada, 2016., str. 84-91.

[253] Roth, Z., Baram, Y., „Multidimensional density shaping by sigmoids", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 7, No. 5, Sep. 1996, str. 1291-1298.

[254] Sarajedini, A., Hecht-Nielsen, R., Chau, P. M., „Conditional probability density function estimation with sigmoidal neural networks", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 10, No. 2, Mar. 1999, str. 231-238.

[255] Shannon, C. E., Weaver, W., „A Mathematical Theory of Communication", University of Illinois Press, Champaign, IL, USA, 1963.

[256] Tråvén, H. G. C., „A neural network approach to statistical pattern classification by 'semiparametric' estimation of probability density functions", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 2, No. 3, May 1991, str. 366-377.

[257] Bishop, C. M., „Mixture density networks", tehnički izvještaj NCRG/4288, Aston University, Birmingham, UK, 1994.

[258] Williams, P. M., „Using neural networks to model conditional multivariate densities", Neural Computation, Vol. 8, Jun. 1996, str. 843-854.

[259] Bishop, C. M., Legleye, C., „Estimating conditional probability distributions for periodic variables", in Advances in Neural Information Processing Systems, Touretzky, D. S., Tesauro, G., Leen, T. K., (ur.), Vol. 7, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1995, str. 641–648.

[260] Schioler, H., Kulczycki, P., „Neural network for estimating conditional distributions", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 8, No. 5, Sep. 1997, str. 1015-1025.

[261] Van Hulle, M. M., „Topographic map formation by maximizing unconditional entropy: a plausible strategy for "online" unsupervised competitive learning and nonparametric density estimation", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 7, No. 5, Sep. 1996, str. 1299-1305.

[262] Yin, H., Allinson, N. M., „Self-organizing mixture networks for probability density estimation", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 12, No. 2, Mar. 2001, str. 405-411.

[263] Kohonen, T., „The self-organizing map", Proceedings of the IEEE, Vol. 78, No. 9, Sep. 1990, str. 1464-1480.

[264] Nakamura, Y., Hasegawa, O., „Nonparametric density estimation based on self-organizing incremental neural network for large noisy data", IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, Vol. 28, No. 1, Jan. 2017, str. 8-17.

[265] Martinez, D., „Neural tree density estimation for novelty detection", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 9, No. 2, Mar. 1998, str. 330-338.

[266] Cho, H. C., Fadali, M. S., Lee, K. S., „Online probability density estimation on nonstationary random signal using dynamic Bayesian networks", International Journal of Control, Automation and Systems, Vol. 6, No. 1, Feb. 2008, str. 109-118.

[267] Wang, C., Wang, W., „Links between PPCA and subspace methods for complete Gaussian density estimation", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 17, No. 3, May 2006, str. 789-792.

[268] Tipping, M. E., Bishop, C. M., „Probabilistic principal component analysis”, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 61, No. 3, 1999, str. 611-622.

[269] Haykin, S., „Neural networks: a comprehensive foundation”, 2nd ed., Prentice Hall, New York, 1999.

[270] Moody, J., Darken, C. J., „Fast learning in networks of locally-tuned processing units”, Neural Computing, Vol. 1, No. 2, Jun. 1989, str. 281–294.

[271] Park, J., Sandberg, I. W., „Universal approximation using radial-basis-function networks”, Neural Computation, Vol. 3, Issue 2, Jun. 1991, str. 246-257.

[272] Wilamowski, B. M., Jaeger, R. C., „Implementation of RBF type networks by MLP networks”, in IEEE International Conference on Neural Networks, Washington, DC, USA, 1996., str. 1670-1675.

[273] Yu, H., Xi, T., Paszczynski, S., Wilamowski, B. M., „Advantages of radial basis function networks for dynamic system design”, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 58, Issue 12, Dec. 2011, str. 5438-5450.

[274] Brekke, E. F., Hallingstad, O., Glattetre, J. H., „Target tracking in heavy-tailed clutter using amplitude information”, in 12th International Conference on Information Fusion, Seattle, WA, USA, 2009., str. 2153-2160.

[275] Cui, Y., Yang, J., Yamaguchi, Y., Singh, G., Park, S., Kobayashi, H., „On semiparametric clutter estimation for ship detection in synthetic aperture radar images”, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 51, No. 5, May 2013, str. 3170-3180.

[276] Ghahramani, Z., „Solving inverse problems using an EM approach to density estimation”, in Proceedings of the 1993 Connectionist Models Summer School, Mozer, M. C., Smolensky, P., Touretzky, D. S., Elman, J. L., Weigend, A. S., (ur.), Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 10 Industrial Avenue, Mahwah, NJ 07430, USA, Sep. 1994, str. 316-323.

[277] Linde, Y., Buzo, Gray, R., „An algorithm for vector quantizer design”, IEEE Transactions on Communications, Vol. 28, Issue 1, Jan. 1980, str. 84-95.

[278] Silverman, D. W., „Density estimation for statistics and data analysis”, Chapman and Hall, London, 1986.

[279] Feller, W., „An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.”, second edition ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[280] Zeevi, A. J., Meir, R., „Density estimation through convex combinations of densities: Approximation and estimation bounds", Neural Networks, Vol. 10, No. 1, Jan. 1997, str. 99-109.

[281] Ma, J., Xu, L., Jordan, M. I., „Asymptotic convergence rate of the EM algorithm for Gaussian mixtures", Neural Computation, Vol. 12, No. 12, Dec. 2000, str. 2881-2907.

[282] Ben-Israel, A., „A Newton-Raphson method for the solution of systems of equations", Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 15, No. 2, Aug. 1966, str. 243-252.

[283] Duda, R. O., Hart, P. E., „Pattern classification and scene analysis", 1st ed., John Wiley, New York, 1973.

[284] „Scilab: Free and open source software for numerical computation", Scilab Enterprises, Orsay, France, dostupno na: http://www.scilab.org (10. srpnja 2019.)

[285] SUSE LLC, „Reference: openSUSE leap 15.1", 10 Canal Park Drive, Suite 200, Cambridge MA 02141, USA, dostupno na: https://doc.opensuse.org/documentation/leap/reference/book.opensuse.reference_color_en.pdf (10. srpnja 2019.)

[286] „Intel Core i5-3210M Processor", Intel, dostupno na: https://ark.intel.com/content/www/us/en/ark/products/65708/intel-core-i5-3210m-processor-3m-cache-up-to-3-10-ghz-bga.html (10. srpnja 2019.)

[287] Baudin, M., „Programming in Scilab", dostupno na: https://www.scilab.org/sites/default/files/progscilab-v.0.10_en.pdf (15. lipnja 2019.)

[288] Raykar, V. C., Duraiswami, R., Zhao, L. H., „Fast computation of kernel estimators", Journal of Computational and Graphical Statistics, Vol. 19, 2010, str. 205-220.

[289] Weinberg, G. V., Howard, S. D., Tran, C., „A bayesian-based CFAR detector for Pareto Type II clutter", in 2018 International Conference on Radar (RADAR), 2018., str. 1-6.

[290] Weinberg, G. V., Bateman, L., Hayden, P., „Constant false alarm rate detection in Pareto Type II clutter", Digital Signal Processing, Vol. 68, Sep. 2017, str. 192-198.

[291] Hazewinkel, M., (ur.), „Encyclopaedia of Mathematics: Supplement Volume II", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Nederlands, 2012.

[292] Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., Willian, R. J., „Learning representations of back-propagation errors", Nature, Vol. 323, Oct. 1986, str. 533-536.

[293] Sperduti, A., Starita, A., „Speed up learning and network optimization with extended back propagation”, Neural Networks, Vol. 6, Issue 3, 1993, str. 365-383.

[294] Ihm, B.-C., Park, D.-J., „Acceleration of learning speed in neural networks by reducing weight oscillations”, in International Joint Conference on Neural Networks, Washington, DC, USA, 1999.

[295] Hush, D. R., Salas, J. M., „Improving the learning rate of back-propagation with the gradient reuse algorithm”, in Proceedings of the IEEE Conference of Neural Networks, Vol. 1, San Diego, CA, USA, 1988., str. 441–447.

[296] Jacobs, R. A., „Increased rates of convergence through learning rate adaptation”, Neural Networks, Vol. 1, No. 4, 1988, str. 295–308.

[297] Vogl, T. P., Mangis, J. K., Rigler, A. K., Zink, W. T., Alkon, D. L., „Accelerating the convergence of back-propagation method”, Biological Cybernetics, Vol. 59, Issue 4, Sep. 1988, str. 257–263.

[298] Almeida, L. B., Langlois, T., Amaral, J. D., Plakhov, A., „Parameter adaptation in stochastic optimization”, in On-line Learning in Neural Networks, Saad, D., (ur.), Cambridge University Press, 1999, str. 111–134.

[299] Biegler-König, F., Bärmann, F., „A learning algorithm for multilayered neural networks based on linear least squares problems”, Neural Networks, Vol. 6, No. 1, 1993, str. 127-131.

[300] Pethel, S. D., Bowden, C. M., Scalora, M., „Characterization of optical instabilities and chaos using fast multilayer perceptron training algorithms”, Proceedings of SPIE, Chaos in Optics, Vol. 2039, No. 129, Dec. 1993.

[301] Yam, Y., Chow, T. W. S., Leung, C. T., „A new method in determining initial weights of feedforward neural networks for training enhancement”, Neurocomputing, Vol. 16, No. 1, 1997, str. 23-32.

[302] Fontenla-Romero, O., Erdogmus, D., Principe, J. C., Castillo, E., „Linear least-squares based methods for neural networks learning”, in Joint International Conference On Artificial Neural Networks and Neural Information Processing, Istanbul, Turkey, 2003., str. 84-91.

[303] Castillo, E., Fontenla-Romero, O., Guijarro-Berdiñas, B., Alonso-Betanzos, A., „A global optimum approach for one-layer neural networks”, Neural Computation, Vol. 14, No. 6, 2002, str. 1429-1449.

[304] Castillo, E., Guijarro-Berdiñas, B., Fontenla-Romero, O., Alonso-Betanzos, A., „A very fast learning method for neural networks based on sensitivity analysis", Journal of Machine Learning Research, Vol. 7, Dec. 2006, str. 1159-1182.

[305] Levenberg, K., „A method for the solution of certain non-linear problems in least squares", Quaterly Journal of Applied Mathematics, Vol. 2, No. 2, Jul. 1944, str. 164–168.

[306] Marquardt, D. W., „An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters", Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 11, No. 2, Jun. 1963, str. 431–441.

[307] Hestenes, M. R., Stiefel, E., „Methods of conjugate gradients for solving linear systems", Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 49, No. 6, Dec. 1952, str. 409-436.

[308] Hagan, M. T., Demuth, H. B., Beal, M. H., „Neural network design", PWS Publishing, Boston, MA, 1996.

[309] Singhal, S., Wu, L., „Training multilayer perceptrons with the extended Kalman algorithm", in Advances in Neural Information Processing Systems, Touretzky, D. S., (ur.), Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1989, str. 133-140.

[310] Puskorius, G., Feldkamp, L. A., „Decoupled extended Kalman filter training of feedforward layered networks", in Proceedings of International Joint Conference of Neural Networks, Vol. 1, Seattle, WA, 1991., str. 771-777.

[311] Husmeier, D., „Modelling conditional probability densities with neural networks", doktorski rad, King's College, University of London, London, UK, Dec. 1997.

[312] Abu-Mostafa, Y. S., „Learning from hints in neural networks", Journal of Complexity, No. 6, 1990, str. 192-198.

[313] Sill, J., Abu-mostafa, Y. S., „Monotonicity hints", in Advances in Neural Information Processing Systems 9, Mozer, M. C., Jordan, M. I., Petsche, T., (ur.), The MIT Press, One Rogers Street, Cambridge, MA 02142-1209, USA, May 1997.

[314] Adams, R. A., Fournier, J., „Sobolev Spaces", 2nd ed., ser. Pure and Applied Mathematics, Smith, P. A., Eilenberg, S., (ur.), Elsevier Ltd, The Boulevard Langford Lane, Kidlington, Oxford OX5 1GB, UK, 2003., Vol. 140.

[315] Hornik, K., Stinchcombe, M., White, H., Auer, P., „Degree of approximation results for feedforward networks approximating unknown mappings and their derivatives", Neural Computation, Vol. 6, No. 6, Nov. 1994, str. 1262-1275.

[316] Niculescu, C., Persson, L.-E., „Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach”, ser. CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2006.

[317] Broyden, C. G., „The convergence of a class of double-rank minimization algorithms: 1. General considerations”, IMA Journal of Applied Mathematics, Vol. 6, No. 1, Mar. 1970, str. 76-90.

[318] Broyden, C. G., „The convergence of a class of double-rank minimization algorithms: 2. The new algorithm”, IMA Journal of Applied Mathematics, Vol. 6, No. 3, Sep. 1970, str. 222-231.

[319] Fletcher, R., „A new approach to variable metric algorithms”, The Computer Journal, Vol. 13, No. 3, Jan. 1970, str. 317-322.

[320] Goldfarb, D., „A family of variable metric updates derived by variational means”, Mathematics of Computation, Vol. 24, No. 109, 1970, str. 23-26.

[321] Shanno, D. F., „Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization”, Mathematics of computation, Vol. 24, No. 111, Jul. 1970, str. 647-656.

[322] Fletcher, R., „Practical Methods of Optimization”, 2nd ed., Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1987.

[323] Ljung, L., Söderström, T., „Theory and practice of recursive identification”, MIT press, Cambridge, MA, USA, 1983.

[324] Puskorius, G. V., Feldkamp, L. A., „Parameter-based Kalman filter training. Theory and implementation”, in Kalman Filtering and Neural Networks, Haykin, S., (ur.), John Wiley & Sons, Inc., New York, Oct. 2001, str. 23-67.

[325] Sayed, A. H., Kailath, T., „A state-space approach to adaptive RLS filtering”, IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 11, No. 3, Jul. 1994, str. 18-60.

[326] Skoglund, M. A., Hendeby, G., Axehill, D., „Extended Kalman filter modifications based on an optimization view point”, in 2015 18th International Conference on Information Fusion (Fusion), Washington, DC, USA, 2015., str. 1856-1861.

[327] Bell, B. M., Cathey, F. W., „The iterated Kalman filter update as a Gauss-Newton method”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 2, Feb. 1993, str. 294-297.

[328] Bertsekas, D. P., „Incremental least squares methods and the extended Kalman filter”, SIAM J. on Optimization, Vol. 6, No. 3, Mar. 1996, str. 807-822.

[329] Zhan, R., Wan, J., „Iterated unscented Kalman filter for passive target tracking", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 43, No. 3, Jul. 2007, str. 1155-1163.

[330] Sibley, G., Sukhatme, G., Matthies, L., „The iterated sigma point Kalman filter with applications to long range stereo", Vol. 8, 2006.

[331] Baudin, M., Couvert, V., Steer, S., „Optimisation in Scilab", tehnički izvještaj, The Scilab Consortium – Digiteo / INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay, Cedex, France, Jul. 2010.

[332] Herselman, P. L., Baker, C. J., „Analaysis of calibrated sea clutter and boat reflectivity data at C- and X-band in South African coastal waters", in 2007 IET International Conference on Radar Systems, Edinburgh, UK, 2007., str. 1-5.

[333] Kay, S. M., „Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory", Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.

[334] Rosenberg, L., Bocquet, S., „Non-coherent radar detection performance in medium grazing angle X-band sea clutter", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 53, No. 2, Apr. 2017, str. 669-682.

[335] Coatanhay, A., „Analysis of the sea state observability by radar systems: Numerical simulations and stochastic diffusion modeling", in 2015 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications, Turin, Italy, 2015., str. 1479-1480.

[336] Overrein, Ø., Birkeli A., „Radar detection evaluation method for sea skimming targets including effective flight altitude simulations as seen by radar", Meeting Proceedings STO-MP-SET-239, Oct. 2016.

[337] Karlsson, R., Gustafsson, F., „Filtering and estimation for quantized sensor information", tehnički izvještaj LiTH-ISY-R-2553, Department of Electrical Engineering, Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden, Oct. 2003.

[338] Widrow, B., „A study of rough amplitude quantization by means of Nyquist sampling theory", IRE Transactions on Circuit Theory, Vol. 3, No. 4, Dec. 1956, str. 266-276.

[339] Widrow, B., Kollár, I., Liu, M.-C., „Statistical theory of quantization", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 45, No. 2, Apr. 1996, str. 353-361.

[340] Lukacs, E., „Characteristic Functions", 2nd ed., ser. Griffin books of cognate interest, Charles Griffin & Company Limited, 42 Drucy Lane. London W.C. 2, 1970.

[341] Sripad, A., Snyder, D., „A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white”, Vol. 25, No. 5, Oct. 1977, str. 442-448.

[342] Widrow, B., „Statistical analysis of amplitude-quantized sampled-data systems”, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry, Vol. 79, No. 6, Jan. 1961, str. 555-568.

[343] Wannamaker, R. A., Lipshitz, S. P., Vanderkooy, J., Wright, J. N., „A theory of nonsubtractive dither”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 48, No. 2, Feb. 2000, str. 499-516.

[344] Schuchman, L., „Dither signals and their effect on quantization noise”, IEEE Transactions on Communication Technology, Vol. 12, No. 4, Dec. 1964, str. 162-165.

[345] Gustafsson, F., Karlsson, R., „Generating dithering noise for maximum likelihood estimation from quantized data”, Automatica, Vol. 49, Issue 2, Feb. 2013, str. 554-560.

[346] Žiljak, V., „Tipografski rječnik”, dostupno na: http://www.ziljak.hr/vilko/predavanja/tipografija1/Tipografski%20rjecnik1.htm (23. listopada 2017.)

[347] Lang, S., „Linear algebra. Undergraduate texts in mathematics”, 3rd ed., Axler, S., Gehring, F. W., Ribet, K. A., (ur.), Springer-Verlag, New York, NY 10013, USA, 1987.

[348] Horn, R. A., Johnson, C. R., „Matrix analysis”, Cambridge University Press, Cambridge, CB2 2RU, UK, 1990.

[349] Reams, R., „Hadamard inverses, square roots and products of almost semidefinite matrices”, Linear Algebra and its Applications, Vol. 288, 1999, str. 35-43.

[350] Million, E., „The Hadamard product”, dostupno na: http://buzzard.ups.edu/courses/2007spring/projects/million-paper.pdf (2. travnja 2017.)

[351] Lefebvre, T., Bruyninckx, H., de Schutter, J., „Kalman filters for non-linear systems: a comparison of performance”, International Journal of Control, Vol. 77, 2004, str. 639-653.

[352] Grewal, M. S., Andrews, A. P., „Kalman filtering: theory and practice using MATLAB”, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2008.

[353] „Broadband 4g radar”, SIMRAD, dostupno na: https://www.simrad-yachting.com/simrad/type/radar/simrad-4g-bb-radar-kit/ (10. listopada 2020.)

[354] Barton, D., Ward, H., „Handbook of Radar Measurement”, ser. Prentice-Hall electrical engineering series. Microwaves and fields series, Prentice-Hall, 1969.

[355] „Glossary of meteorology. rain”, American Meteorological Society, dostupno na: https://glossary.ametsoc.org/wiki/Rain (19. listopada 2020.)

[356] Vondra, B., Bonefačić, D., „Mitigation of the effects of unknown sea clutter statistics by using radial basis function network”, Radioengineering, Vol. 29, No. 1, Apr. 2020, str. 215-227.

[357] Vondra, B., „Overview of the multisensor IMMPDA filter with an amplitude feature for tracking maneuvering target in cluttered environment”, in 21st International Conference on Applied Electromagnetics and Communications (ICECom), Dubrovnik, Croatia, 2013.

Popis oznaka

U nastavku je pružen popis korištenih akronima i simbola. U pravilu, akronim označava metodu prema engleskome nazivu. Pri korištenju simbola, u skladu s terminologijom prema [346], usvojena su sljedeća pravila označavanja: skalarne veličine označene su verzalnim („velikim") ili kurentnim („malim") slovom temeljnog (u ovom radu serifnog) fonta u kurzivu, npr. „skalarna veličina X ili y", verzalnim ili kurentnim slovom klase matematičkih znakova PI-fonta, npr. „vjerodostojnost Λ i α", kurentnim slovom klase izmjeničnog poteza rukopisnog fonta, npr. „u je realizacija jednolike razdiobe" te iznimno verzalnim ili kurentnim temeljnim slovom, npr. „medijan Q_2 i pozicija x"; konjugirano kompleksna vrijednost označena je s $*$ u eksponentu, npr. „x^* je konjugirano kompleksna vrijednost veličine x"; vektorske veličine, pri čemu se podrazumijeva stupčani vektor, označene su kurentnim slovom temeljnog fonta u masnom kurzivu, npr. „vektor mjerenja $\boldsymbol{z}$", kurentnim masnim slovom klase matematičkih znakova PI-fonta, npr. „$\boldsymbol{\beta}$ je vektor Brownovog gibanja" te iznimno masnim kurentnim slovom, npr. „vektor pozicije $\mathbf{x}$" ili verzalnim slovom klase izmjeničnog poteza rukopisnog fonta, npr. „sigma-točka $\boldsymbol{\mathcal{X}}$"; matrice su označene verzalnim slovom temeljnog fonta u masnom kurzivu, npr. „matrica mjerenja $\boldsymbol{H}$", verzalnim masnim slovom klase matematičkih znakova PI-fonta, npr. „$\boldsymbol{\Phi}$ je prijelazna matrica" te kurentnim masnim slovom klase izmjeničnog poteza rukopisnog fonta, npr. „$\boldsymbol{\mathcal{H}}$ je matrica mjerenja"; transpozicija je označena slovom T u eksponentu, npr. „$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$", a hermitsko adjungiranje slovom H u eksponentu; općenita skalarna funkcionalna ovisnost označena je kurentnim slovom temeljnog fonta u kurzivu, npr. „$y = f(x)$", verzalnim ili kurentnim slovom klase matematičkih znakova PI-fonta, npr. „funkcije $\Gamma(x)$ i $\chi^2(x)$", iznimno verzalnim slovom temeljnog fonta u kurzivu, npr. „ funkcija $Q(\Lambda)$ u koraku očekivanja" te verzalnim slovom klase izmjeničnog poteza rukopisnog fonta, npr. „ovisnost testne statistike $\mathcal{T}(x)$"; vektorska funkcionalna ovisnost označena je kurentnim slovom u masnom kurzivu, npr. „$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$"; eksplicitno definirane funkcije označene su u kurentnom temeljnom fontu, npr. „$\sin(x)$"; općenita razdioba gustoće vjerojatnosti označena je slovom p i argumentom, npr. „$p(x)$", iznimno nekim drugim kurentnim slovom temeljnog fonta u kurzivu, npr. „$q(x)$ je optimalna razdioba", a ako razdioba ima ime, verzalnim slovom klase izmjeničnog poteza rukopisnog fonta, npr. „binomna razdioba $\mathscr{B}$", u iznimnom slučaju kurentnim slovom klase matematičkih znakova PI-fonta, npr. „razdioba χ^2"; vjerojatnost je označena slovom P i ar-

gumentom, npr. „$P(x = X)$”, a u iznimnim slučajevima, kurentnim slovom klase izmjeničnog poteza rukopisnog fonta, npr. „$\mathcal{M}$ je vjerojatnost modela”; distribucija je označena slovom F i dodatnim argumentom, npr. „$F(x)$”; skup je označen verzalnim ili kurentnim slovom obrisnog rukopisnog fonta, npr. „skup modela $\mathbb{M}$ i indeksa $\mathbb{i}$”; konstante su označene kurentnim temeljnim slovom, npr. „ g je konstanta ubrzanja sile teže”, kurentnim slovom klase matematičkih znakova PI-fonta, npr. „π”.

Osnovnom simbolu može se pridružiti dodatna oznaka kao argument, indeks i/ili eksponent, ovisno o kontekstu u kojem se simbol koristi. Tako su npr. članovi skupa označeni indeksom, npr. „$\mathbb{X} = \{x_1, \ldots, x_N\}$”, kontinuirana vremenska ovisnost varijable argumentom, npr. „$x(t)$”, a u slučaju diskretnih vremenskih uzoraka indeksom, npr. „x_k”. Kontinuirana vremenska ovisnost skupa i njegovih članova također je označena argumentom, npr. „$\mathbb{X}(t) = \{x_1(t), \ldots, x_N(t)\}$”, a za diskretnu vremensku ovisnost indeksom, npr. „$\mathbb{X}_k = \{x_{k,1}, \ldots, x_{k,N}\}$”. Skup članova do nekog trenutka označen je eksponentom, npr. „$\mathbb{Z}^\tau$ označava skup $\{z(t_1), \ldots, z(\tau)\}$”, ili za diskretnu vremensku ovisnost npr. „$\mathbb{Z}^k = \{z_1, \ldots, z_k\}$”. Početni trenutak za diskretnu vremensku ovisnost može biti naglašen u eksponentu, npr. „$\mathbb{Z}^{k-N:k} = \{z_{k-N}, z_{k-N+1}, \ldots, z_k\}$”. Skup određenog uzorka označen je indeksom, npr. „skup i-tog uzorka $\mathbb{Z}_i^\tau = \{z_i(t_1), \ldots, z_i(\tau)\}$”, a za kontinuiranu vremensku ovisnost kao npr. „$\mathbb{Z}_i^k = \{z_{1,i}, \ldots, z_{k,i}\}$”.

Za neke veličine postoje istovjetni simboli, ali je iz konteksta jasno na koju se veličinu simbol odnosi.

Akronimi

AKF	Prema engleskome *Adaptive Kalman Filter*, u prijevodu adaptivni Kalmanov filtar
AM	Amplitudna modulacija
AMISE	Prema engleskome *Asymptotic Mean Integrated Square Error*, u prijevodu asimptotska srednja vrijednost integrirane kvadratne greške
BCV	Prema engleskome *Biased Cross-Validation*, u prijevodu pristrana unakrsna provjera
BFGS	Metoda Broydena, Fletchera, Goldfarba i Shannoa
BLAS	Prema engleskome *Basic Linear Algebra Subprograms*, u prijevodu osnovne rutine za linearnu algebru
BLUE	Prema engleskome *Best Linear Unbiased Estimator*, u prijevodu nepristrani linearni estimator s najmanjom varijancom
CA	Prema engleskome *Constant Acceleration*, u prijevodu jednolika akceleracija, označava model skoro jednolikog ubrzanog gibanja
CFAR	Prema engleskome *Constant False Alarm Rate*, u prijevodu konstantna stopa lažnih detekcija
CKF	Prema engleskome *Cubature Kalman Filter*, u prijevodu kubaturni Kalmanov filtar
CNN	Prema engleskome *Convolutional Neural Network*, u prijevodu konvolucijska neuronska mreža
COTS	Prema engleskome *Commercial Off-The-Shelf*, u prijevodu široj javnosti komercijalno dostupna stavka koja ne zahtijeva nikakvu posebnu izmjenu ili održavanje tijekom svog životnog ciklusa
CPHD	Prema engleskome *Cardinalized Probability Hypothesis Density*, u prijevodu kardinalizirana razdioba vjerojatnosti hipoteze
CUT	Prema engleskome *Cell Under Test*, u prijevodu testna ćelija
CV	Prema engleskome *Constant Velocity*, u prijevodu jednolika brzina, označava model skoro jednolikog gibanja
DBN	Prema engleskome *Dynamic Bayesian Networks*, u prijevodu dinamičke Bayesove mreže
DEKF	Prema engleskome *Decoupled Extended Kalman Filter*, u prijevodu nevezani prošireni Kalmanov filtar

EKF	Prema engleskome *Extended Kalman Filter*, u prijevodu prošireni Kalmanov filtar
EM	Prema engleskome *Expectation Maximization*, u prijevodu maksimizacija očekivanja
FDTD	Prema engleskome *Finite Difference Time Domain*, u prijevodu metoda konačnih razlika u vremenskoj domeni
FM	Frekvencijska modulacija
GEKF	Prema engleskome *Global Extended Kalman Filter*, u prijevodu globalni prošireni Kalmanov filtar
GGIW-GLMB	Prema engleskome *Gamma Gauss Inverse Wishart Generalized Labelled Multi-Bernoulli* što označava gama-Gaussovu inverznu Wishartovu razdiobu pod pretpostavkom poopćene multi-Bernoullijeve razdiobe s identitetom staza
GIT	Georgia Institute of Technology
GLMB	Prema engleskome *Generalized Labelled Multi-Bernoulli*, što označava metodu poopćene multi-Bernoullijeve razdiobe s identitetom staza
GM-CPHD	Prema engleskome *Gaussian Mixture Cardinalized Probability Hypothesis Density*, u prijevodu kardinalizirana razdioba vjerojatnosti hipoteze kao Gaussova mješavina
GM-PHD	Prema engleskome *Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density* u prijevodu razdioba vjerojatnosti hipoteze kao Gaussova mješavina
GPB	Prema engleskome *Generalized Pseudo Bayesian*, u prijevodu poopćeni prividno-Bayesov
IE	Prema engleskome *Input Estimation*, u prijevodu estimacija ulaza
IEKF	Prema engleskome *Iterated Extended Kalman Filter*, u prijevodu iterativni prošireni Kalmanov filtar
IMM	Prema engleskome *Interacting Multiple Models*, u prijevodu višestruki međudjelujući modeli
IMMPDA	Prema engleskome *Interacting Multiple Models Probabilistic Data Association*, u prijevodu višemodelno-međudjelujuće vjerojatnosno pridruživanje podataka
IPDA	Prema engleskome *Integrated Probabilistic Data Association*, u prijevodu integrirano vjerojatnosno pridruživanje podataka

IPIX	Prema engleskome *Intelligent Pixel Processing Radar*, u prijevodu radar s inteligentnim procesiranjem piksela
IRSG	Imaging Radar Systems Group
ISE	Prema engleskome *Integrated Square Error*, u prijevodu integrirana kvadratna greška
ISIC	Prema engleskome *Incremental Smooth Interpolation of Cumulative*, u prijevodu inkrementalna glatka interpolacija kumulativa
IUKF	Prema engleskome *Iterated Unscented Kalman Filter*, u prijevodu iterativni Kalmanov filtar bez derivacije
JIPDA	Prema engleskome *Joint Integrated Probabilistic Data Association*, u prijevodu združeno integrirano vjerojatnosno pridruživanje podataka
JONSWAP	Prema engleskome *Joint North Sea Wave Observation Project*, u prijevodu Projekt združene opservacije Sjevernoga mora
JPDA	Prema engleskome *Joint Probabilistic Data Association*, u prijevodu združeno vjerojatnosno pridruživanje podataka
KDE	Prema engleskome *Kernel Density Estimation*, u prijevodu estimacija jezgrenom metodom
LAPACK	Prema engleskome *Linear Algebra PACKage*, u prijevodu biblioteka rutina za linearnu algebru
LBG	Metoda Lindea, Buzoa i Greya
MCMC	Prema engleskome *Markov Chain Monte Carlo*, u prijevodu Markovljev lanac Monte Carlo
MH-VDA	Prema engleskome *Multihypothesis Viterbi Data Association*, u prijevodu Viterbijevo pridruživanja podataka s višestrukim hipotezama
MHT	Prema engleskome *Multihypothesis Testing*, u prijevodu testiranje višestrukih hipoteza
MISE	Prema engleskome *Mean Integrated Square Error*, u prijevodu srednja vrijednost integrirane kvadratne greške
ML	Prema engleskome *Maximum Likelihood*, u prijevodu maksimalna vjerodostojnost
MLP	Prema engleskome *Multilayer Perceptrons*, u prijevodu višeslojni perceptroni

MM	Prema engleskome *Method of Moments*, u prijevodu metoda momenata
NED	Prema engleskome *North East Down*, u prijevodu sjever-istok-dolje, oznaka za pravokutni Kartezijev koordinatni sustav
PDA	Prema engleskome *Probability Data Association*, u prijevodu vjerojatnosno pridruživanje podataka
PF	Prema engleskome *Particle Filter*, u prijevodu čestični filtar
PHD	Prema engleskome *Probability Hypothesis Density*, u prijevodu razdioba vjerojatnosti hipoteze
QN	Prema engleskome *Quasi-Newton*, u prijevodu kvazi-Newtonova metoda
RBF	Prema engleskome *Radial Basis Function*, u prijevodu radijalna bazna funkcija
RiIG	Prema engleskome *Ricean Inverse Gaussian*, u prijevodu Riceova inverzna Gaussova razdioba
ROC	Prema engleskome *Receiver Operating Characteristics*, u prijevodu operativne karakteristike prijemnika
SIC	Prema engleskome *Smooth Interpolation of Cumulative*, u prijevodu glatka interpolacija kumulativa
SIR	Prema engleskome *Sequential Importance Resampling*, u prijevodu sekvencijalno ponovno uzimanje uzoraka
SIS	Prema engleskome *Sequential Importance Sampling*, u prijevodu sekvencijalno uzimanje uzoraka
ST-VDA	Prema engleskome *Single Target Viterbi Data Association*, u prijevodu Viterbijevo pridruživanje podataka jednom cilju
SVM	Prema engleskome *Support Vector Machine*, u prijevodu stroj s potpornim vektorima
TBD	Prema engleskome *Track Before Detect*, u prijevodu praćenje prije detekcije
UCV	Prema engleskome *Unbiased Cross-Validation*, u prijevodu nepristrana unakrsna provjera
UKF	Prema engleskome *Unscented Kalman Filter*, u prijevodu Kalmanov filtar bez derivacije

UPF	Prema engleskome *Unscented Particle Filter*, u prijevodu bezderivacijsko-čestični filtar
USV	Prema engleskome *Unmanned Surface Vehicle*, u prijevodu bespilotno površinsko vozilo
VSD	Prema engleskome *Variable State Dimension*, u prijevodu vektor stanja s varijabilnom dimenzijom, odnosno s promjenjivim brojem članova
WGS	Prema engleskome *World Geodetic System*, u prijevodu svjetski geodetski sustav
WMO	Prema engleskome *World Meteorological Organization*, u prijevodu Svjetska meteorološka organizacija

Simboli

$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$, $(\dot{\mathrm{x}},\dot{\mathrm{y}},\dot{\mathrm{z}})$	Pozicija i brzina u Kartezijevom koordinatnom sustavu
(α,β), (δ,γ)	Kutovi raspršenja i faze raspršenja ortonormiranog svojstvenog vektora
$(\cdot)*(\cdot)$	Konvolucija
$(\cdot)\circ(\cdot)$	Hadamardov produkt
$(\cdot)^{k}$	Skup elemenata do diskretnog vremena k
$(\cdot)^{(*)}$, $(\cdot)^{(**)}$, $(\cdot)^{(***)}$	Mjerena veličina, preinaka veličine
$(\cdot)^{(\cdot)}$	Veličina evalvirana pod hipotezom $(\cdot)$
$(\cdot)^{\circ-1}$	Hadamardova inverzija
$(\cdot)^{k-N:k}$	Skup elemenata od diskretnog vremena $k-N$ do diskretnog vremena k
(a,b)	Poluosi elipse
(r,φ,θ), (r,φ,ε)	Pozicija u sfernom koordinatnom sustavu
$[d_1,d_2]$, $[-d,d]$	Interval prihvaćanja hipoteze
α	Razina značajnosti, parametar transformacije bez derivacije, parametar poopćenog Laguerreovog ili Čebišev-Laguerreovog polinoma, vjerojatnost prihvaćanja realizacije Markovljevog lanca, parametar adaptivnog skaliranja
$\bar{(\cdot)}$	Apriorna vrijednost (predikcija), srednja vrijednost, negacija događaja
β	Parametar za transformaciju bez derivacije, vjerojatnost da mjerenje pripada cilju, vjerojatnost pridruživanja, parametar skaliranja
$\boldsymbol{\beta}_x$, β_x, $\boldsymbol{\beta}_y$, β_y, β_ψ, β_ϕ	Brownovo gibanje
$\boldsymbol{\chi}$	Općenita vektorska varijabla
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Regularizacijski član
$\boldsymbol{\Gamma}$	Matrica pojačanja šuma linearnog diskretnog stohastičkog procesa
$\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\mathcal{L}}$	Matrica pojačanja upravljačkog ulaza diskretnog linearnog stohastičkog procesa
$\boldsymbol{\mu}$	Vektor vjerojatnosti stanja Markovljevog lanca, središta baznih funkcija
$\boldsymbol{\Phi}$	Prijelazna matrica linearnog stohastičkog procesa

$\boldsymbol{\rho}$	Korelacijski koeficijent manevra za Singerov model
$\boldsymbol{\sigma}^2$, σ^2	Matrica kovarijance, varijanca
$\boldsymbol{\sigma}_m$	Vektor trenutnih devijacija akceleracije po koordinatnim osima za Singerov model
$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\alpha}$	Vektor vremena manevra u Singerovom modelu, Hadamardova inverzija vektora vremena manevra u Singerovom modelu, vektor vremena korelacije akceleracije u modelu krivocrtnog gibanja
$\boldsymbol{\upsilon}$	Vektor parametara bazne razdiobe
$\boldsymbol{\Xi}$	Kvadraturno-kubaturna točka
$\boldsymbol{\xi}$	Stanje hibridnog sustava
$\boldsymbol{\zeta}$	Vektor mjerenja, vektor otiska
χ^2	Hi-kvadrat razdioba
δ	Diracova delta-funkcija, općenita skalarna varijabla, Kroneckerova delta
$\Delta\boldsymbol{\gamma}$	Inkrement gradijenata
$\Delta\boldsymbol{W}$	Inkrement vektora težinskih koeficijenata
$\Delta\zeta$	Inkrement amplitude
Δf_D	Širina Dopplerovog spektra
ΔP_{TT}	Dobitak vjerojatnosti zadržavanja staze stvarnog cilja
$\Delta r, \Delta\varphi$	Radijalna i azimutna razlučivost polarnog sustava
Δt, δt	Vremenski inkrement, maksimalni vremenski inkrement
Δz	Korak kvantizacije
ℓ	Omjer razdioba, omjer vjerodostojnosti
ε	Regularizacijski član, elevacija, upadni kut
ε_0, ε_t, K_g, K_s, K_p, K_d	Parametri hibridnog modela radarskog presjeka morske površine
η	Snaga odjeka smetnje, radarski presjek
η_0	Normirani radarski presjek
$\exp(\circ(\cdot))$	Hadamardov eksponencijal
Γ	Gama-funkcija

γ	Konstanta koja određuje veličinu volumena valjanosti unutar kojeg se, sa zahtijevanom vjerojatnošću, očekuje odjek cilja, parametar za transformaciju bez derivacije
$\hat{\lambda}_{CM}$	Estimacija gustoće smetnje metodom uvjetnog očekivanja
$\hat{\lambda}_{ML}$	Estimacija gustoće smetnje metodom maksimiziranja združene vjerodostojnosti
$\hat{\lambda}_{MML}$	Estimacija gustoće smetnje metodom maksimiziranja marginalne vjerodostojnosti
$\hat{(\cdot)}$	Estimacija
κ	Indeks vremena, parametar za transformaciju bez derivacije, korak iteracije
λ	Parametar za transformaciju bez derivacije, gustoća smetnje, svojstvena vrijednost, regularizacijski parametar
Λ, $\mathcal{L}$	Vjerodostojnost
λ_w	Duljina vala
$\lambda_{1/3}$	Značajna duljina vala
$\langle(\cdot)^r\rangle$	Uzorački moment r-tog reda
$\lfloor(\cdot)\rfloor$	Cjelobrojna vrijednost
$\log_{10}$, $\log_e$, $\log_3$	Logaritam po bazi broja 10, prirodni logaritam, logaritam po bazi broja 3
$\mathbb{A}$	Skup događaja
$\mathbb{B}$	Skup sljedova
$\mathbb{C}$	Skup kompleksnih brojeva
$\mathbb{D}$	Skup indikatora detekcije, skup događaja postojanja cilja
$\mathbb{G}$	Grupa
$\mathbb{H}$	Klasa neuronskih mreža
$\mathbb{H}_F$	Skup aproksimacija uzoračke distribucije
$\mathbb{P}$	Skup kovarijanci
$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\zeta}}$	Klasa nepoznatih kontinuiranih razdioba otiska
$\mathbb{P}_{FA}$	Skup dizajniranih vrijednosti vjerojatnosti lažne detekcije
$\mathbb{Q}$	Klasa baznih razdioba

$\mathbb{T}$	Općeniti otvoreni skup
$\mathbb{U}$	Skup uzoraka za učenje neuronske mreže
$\mathbb{V}$	Općeniti kompaktni skup
$\mathbb{W}$	Skup uzoraka šuma
$\mathbb{X}_{\boldsymbol{\zeta}}$	Kompaktni nosač funkcije razdiobe otiska
$\mathbb{Y}$	Skup parametara bazne razdiobe
$\mathbb{Z}$	Skup opservacija
$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}$, $\mathbb{z}_{\boldsymbol{\zeta}}$	Skup opservacija otiska
$\mathbb{1}$	Skup indikatorskih varijabli
$\mathbb{r}$	Skup integracijskih točaka
$\mathbb{x}$	Skup vektora stanja cilja
$\mathbb{I}$, $\mathbb{i}$, $\mathbb{J}$, $\mathbb{j}$	Skup indeksa
$\mathbb{M}$	Skup modela
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$	Skup realnih brojeva, skup pozitivnih realnih brojeva
$\mathbb{S}$	Skup sigma-točaka, skup modova gibanja
$\mathbb{X}$	Skup kubaturnih točaka, skup kvadraturno-kubaturnih točaka, skup uzoraka čestičnog filtra
$\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$	Vektori pozicije, brzine i akceleracije
$\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\boldsymbol{\mathcal{C}}$	Trokutaste matrice, drugi korijen kovarijance estimacije, inovacije i kovarijance između propagiranih kubaturnih točaka vektora stanja i mjerenja
$\boldsymbol{\mathcal{S}}$, s	Matrica raspršenja, element matrice raspršenja
$\boldsymbol{\mathcal{T}}$	Matrica koherencije
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	Trokutasta matrica, drugi korijen matrice kovarijance mjerenja
$\boldsymbol{\mathcal{W}}$	Trokutasta matrica, drugi korijen matrice kovarijance šuma procesa, sigma-točka transformacije bez derivacije
$\boldsymbol{\mathcal{Y}}$	Sigma-točka transformacije bez derivacije
$\boldsymbol{\mathcal{Z}}$	Trokutasta matrica, drugi korijen kovarijance propagiranih kubaturnih točaka
$\boldsymbol{\mathcal{X}}$	Sigma-točka transformacije bez derivacije, kubaturna točka, uzorak u metodi čestičnog filtriranja, drugi korijen kovarijance propagiranih kubaturnih točaka izražen trokutastom matricom

$\mathscr{B}$	Binomna razdioba
$\mathscr{G}$	Gama-razdioba
$\mathscr{K}$	Jezgrena funkcija
$\mathscr{L}$	Lorenzova ili Cauchyeva razdioba
$\mathscr{P}$	Poissonova razdioba
$\mathscr{R}$	Rayleighova razdioba
$\mathscr{M}$	Multinomna razdioba
$\mathscr{N}$	Normalna ili Gaussova razdioba
$\mathscr{U}$	Jednolika razdioba
$\mathscr{W}$	Koeficijent sferno-radijalne formule, normirani težinski koeficijent u metodi čestičnog filtriranja
$\mathscr{X}$	Točka kvadraturne Gauss-Laguerreove aproksimacije
$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$	Parametri dinamike smetnje mora
$\mathscr{A}_\mathscr{R}$	Dobitak u omjeru snage signala prema snazi smetnje
$\mathscr{C}$	Omjer snage smetnje prema snazi termičkog šuma
e	Kvadratna greška
$\mathscr{G}$	Komponenta mješavine
$\mathscr{K}$	K-razdioba
$\mathscr{L}_\mathscr{R}$	Gubitak u omjeru snage signala prema snazi smetnje
$\mathscr{M}$	Vjerojatnost modela, slijeda ili skupa modela, vjerojatnost stanja Markovljevog lanca
$\mathscr{R}$	Omjer snage signala prema snazi smetnje
$\mathscr{S}$	Stanje mora
$\mathscr{T}$	Testna statistika
t	Argument karakteristične funkcije
$\mathscr{KA}$	KA-razdioba
$\mathscr{KK}$	KK-razdioba
$\mathscr{Pa}$	Paretova razdioba
μ	Koeficijent multiplikacije, parametar Singerovog modela primjenom trenutnog vektora stanja cilja, stopa učenja, faktor zaborava, faktor

	u Robbins-Monrovoj stohastičkoj aproksimaciji, adaptivni korak, element vektora vjerojatnosti stanja Markovljevog lanca
μ_n	Moment n-tog reda
∇	Vektorski diferencijalni operator
∇^2	Hesseova matrica
ν	Broj valjanih mjerenja, parametar oblika
ω	Kutna brzina, kutna frekvencija
ω_m, σ_T	Modalna frekvencija i parametar oblika Tabainova spektra
Φ	Aktivacijska funkcija
ϕ	Kurs, geocentrična širina, općeniti kut
ϕ_w	Smjer vjetra
ψ	Intenzitet
$\Re$	Realni član kompleksnoga broja
ρ	Koeficijent autokorelacije, autokorelacija
ρ_ε	Koeficijent hrapavosti
σ	Standardna devijacija, parametar jezgrene funkcije, parametar bazne funkcije
σ_ω	Standardna devijacija kutne brzine
σ_m	Trenutna devijacija akceleracije za Singerov model primjenom vektora stanja
σ_n^2	Kovarijanca procesnog šuma normalne komponente akceleracije
σ_r, σ_φ	Točnost mjerenja radijalne i azimutne komponente
σ_t^2	Snaga termičkog šuma, kovarijanca procesnog šuma tangencijalne komponente akceleracije
$\sigma_{\dot{\mathbf{x}}}$	Standardna devijacija brzine
τ_t, τ_n	Vrijeme korelacije za tangencijalnu i normalnu komponentu akceleracije
b, c, d, p, r, s	Proizvoljne konstante
e	Eulerov broj
g	Konstanta ubrzanja sile teže
i	Indeks, imaginarna jedinica

j	Indeks
Q_1, Q_2, Q_3	Donji kvartil, medijan i gornji kvartil
$\mathbf{1}$	Indikatorska funkcija
$\boldsymbol{a}$	Vektor akceleracije
$\boldsymbol{A}$	Općenita matrica, matrica za određivanje koeficijenata u metodi nepoznatog generičkog ulaza
$\boldsymbol{b}$	Općenita funkcija mjerenja
$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$	Matrice za određivanje koeficijenata u metodi nepoznatog generičkog ulaza
$\boldsymbol{D}$	Aproksimacija inverzne Hesseove matrice
$\boldsymbol{e}_i$, e_i	Upadno električno polje, komponenta upadnog električnog polja
$\boldsymbol{e}_r$, e_r	Reflektirano električno polje, komponenta reflektiranog električnog polja
$\boldsymbol{F}$	Funkcija linearnog stohastičkog procesa
$\boldsymbol{f}$	Funkcija općenito nelinearnog stohastičkog procesa, općenita nelinearna vektorska funkcija
$\boldsymbol{g}$	Općenita nelinearna vektorska funkcija
$\boldsymbol{G}$	Funkcija općenito nelinearnog stohastičkog procesa
$\boldsymbol{H}$, $\mathcal{H}$	Matrica mjerenja linearnog sustava
$\boldsymbol{h}$, h	Funkcija mjerenja nelinearnog sustava
$\boldsymbol{i}$	Vektor zajedničke povijesti
$\boldsymbol{I}_n$	Jedinična matrica
$\boldsymbol{J}$	Jakobijeva matrica
$\boldsymbol{J}_{mn}$	Matrica s m redova i n stupaca pri čemu su svi elementi jednaki jedan
$\boldsymbol{k}$	Paulijev vektor
$\boldsymbol{K}$, $\mathcal{K}$	Matrica Kalmanovih koeficijenata
$\boldsymbol{L}$	Funkcija pojačanja upravljačkog ulaza linearnog stohastičkog procesa
$\boldsymbol{O}_{mn}$	Nul-matrica s m redova i n stupaca
$\boldsymbol{P}$, $\mathbf{P}$	Kovarijanca greške estimacije, općenita matrica kovarijance, prijelazna matrica vjerojatnosti

$\boldsymbol{p}_0$	Vektor vjerojatnosti nulte akceleracije po koordinatnim osima pri manevru za Singerov model
$\boldsymbol{p}_{max}$	Vektor vjerojatnosti maksimalne akceleracije po koordinatnim osima pri manevru za Singerov model
$\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}_x$	Kovarijanca šuma procesa
$\boldsymbol{Q}_m$	Trenutna kovarijanca akceleracije za Singerov model
$\boldsymbol{q}_x$	Spektralna gustoća snage šuma kod Singerovog modela
$\boldsymbol{r}$	Vektor autokorelacija
$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}_y$	Kovarijanca mjerenja
$\boldsymbol{S}$	Kovarijanca inovacije
$\boldsymbol{U}$	Unitarna matrica
$\boldsymbol{u}$	Ulazni upravljački vektor
$\boldsymbol{v}$, $\mathbf{v}$, v	Šum mjerenja
$\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}_x$, $w_{\mathscr{R}}$	Šum procesa
$\boldsymbol{x}$	Vektor stanja cilja, općenita vektorska varijabla
$\boldsymbol{y}$	Vektor mjerenja, vektorski izlaz neuronske mreže
$\boldsymbol{z}$, $\mathbf{z}$	Vektor mjerenja
$\mathbf{u}$	Vektor realizacija slučajne varijable jednolike razdiobe
diag	Dijagonalna matrica
tria	Triangularizacija matrice
tr	Trag matrice
var	Varijanca
Θ	Step-funkcija
$\tilde{(\cdot)}$	Greška estimacije
ε_x, ε_z, ε_u, $\varepsilon_{\ddot{\mathrm{x}}}$	Normalizirana kvadratna greška estimacije, inovacije, upravljačkog ulaza i akceleracije
φ	Azimut, karakteristična funkcija
ζ, Z	Amplituda (moguće kompleksna), amplitudni prag detekcije
${}_2F_0$, ${}_3F_2$	Poopćene hipergeometrijske funkcije
A	Događaj, mehanizam raspršenja

a, a_{max}, a_{-max}	Akceleracija i njena maksimalna pozitivna i negativna vrijednost
a_n, a_t	Normalna i tangencijalna komponenta akceleracije
A_r	Površina razlučivosti
A_w, A_i, A_u	Članovi stanja mora, višestruke propagacije i smjera vjetra u modelu GIT
B	Slijed
b, c, $\imath$, l, p, r, r, x	Općenite skalarne varijable
C	Kriterijska funkcija, prostor funkcija
c_{n_x}	Volumen jedinične hipersfere u prostoru $\mathbb{R}^{n_x}$
d	Udaljenost, stupanj monoma, indikator detekcije, snaga signala, granica intervala pouzdanosti
D, $\mathcal{D}$	Događaj, vjerojatnost primjetljivosti cilja
d_∇	Norma gradijenta u kvazi-Newtonovoj metodi
d_H^2	Kvadrirana Hellingerova udaljenost
d_{KL}	Kullback-Leiblerova udaljenost
E	Očekivanje
e	Razdioba mjerenja
E_p	Poopćena eksponencijalna integralna funkcija
F	Općenita funkcija distribucije
f	Općenita nelinearna skalarna funkcija
f_D, ω_D	Dopplerova frekvencija, Dopplerova kutna frekvencija
f_Q	Greška kvantizacije
f_S	Frekvencija uzimanja uzoraka
g	Općenita nelinearna skalarna funkcija
H	Entropija
h_Q	Funkcija kvantizacije
$H_{1/3}$, H_{RMS}	Značajna i efektivna visina vala
i, j	Indeks, općenita skalarna varijabla
i_D, $i_{D(T)}$	Indeks detekcije, indeks detekcije koja potječe isključivo od cilja
J	Očekivanje kriterijske funkcije

K	Modificirana Besselova funkcija druge vrste, Kalmanov koeficijent
k	Indeks vremena
k_{EM}, λ_{EM}, f_{EM}	Valni broj, valna duljina i frekvencija emitirane elektromagnetske energije
L_m^{α}	Poopćeni Laguerreov ili Čebišev-Laguerreov polinom m-tog reda, parametra α
L_p	P-norma, normirani prostor
m	Parametar poopćenog Laguerreovog ili Čebišev-Laguerreovog polinoma, model gibanja, događaj, broj komponenti
n	Broj komponenti vektora pozicije, brzine i akceleracije, broj komponenti, broj mjerenja, broj dimenzija, broj iteracija
N, M	Broj realizacija, broj uzoraka, broj hipoteza, broj modela, broj detekcija
N_ε	Broj uzoraka za nametanje monotonosti
N_ρ	Broj ćelija pri čemu je njihov sadržaj koreliran
N_φ	Broj azimutnih ćelija razlučivosti
N_A	Broj uzastopnih antenskih rotacija
N_C	Broj uzoraka za cenzuriranje
N_Q	Broj kvantizacijskih razina
N_T, N_{FA}	Broj odjeka koji potječu od cilja i broj odjeka koji potječu od smetnje
n_x, n_z	Broj komponenti vektora stanja i vektora mjerenja
$N_{(r,\varphi)}$	Broj radijalnih i azimutnih ćelija razlučivosti
N_{eff}	Efektivni broj uzoraka
N_{eps}	Maksimalni broj epoha
N_{nap}	Maksimalni broj poziva funkcije optimizacije za kvazi-Newtonovu metodu
N_{PF}	Broj čestica u metodi PF
$N_{r,j}$	Broj radijalnih ćelija razlučivosti
N_{UPF}	Broj čestica u metodi UPF
O	Računalna složenost
o	Pogreška aproksimacije

P	Općenita vjerojatnost, varijanca greške estimacije
p	Općenita funkcija razdiobe
P_0	Vjerojatnosti nulte akceleracije pri manevru za Singerov model
P_D	Vjerojatnost detekcije
P_F	Vjerojatnost potvrde staze lažnog cilja
P_G	Vjerojatnost pojave odjeka cilja unutar volumena valjanosti
P_Q	Diskretna razdioba na izlazu kvantizatora
P_T	Vjerojatnost potvrde staze stvarnog cilja
$p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}$, $p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}$	Razdioba otiska cilja i smetnje
$p_{\boldsymbol{\zeta}}$	Nepoznata kontinuirana razdioba otiska
$P_{F(T)}$	Vjerojatnost potvrde lažne staze u okolici staze cilja
P_{FA}	Vjerojatnost lažne detekcije
p_{FA}	Razdioba smetnje
P_{max}	Vjerojatnost maksimalne akceleracije pri manevru za Singerov model
$P_{T(1)}$, $P_{T(2)}$, $P_{T(3)}$	Vjerojatnost broja mjerenja koja potječu od cilja
$P_{T(F)}$	Vjerojatnost potvrde staze cilja u smetnji
P_{TT}	Vjerojatnost zadržavanja staze stvarnog cilja
Q	Funkcija očekivanja u algoritmu EM
q	Propozicijska razdioba u metodi čestičnog filtriranja, općenita razdioba
Q_x	Varijanca šuma procesa
R	Varijanca mjerenja, valovitost argumenta, maksimalni red omeđene derivacije funkcije
S	Sferni integral, spektar, prostor Soboljeva
s	Mod gibanja, događaj
T	Vrijeme između sukcesivnih opservacija
t, τ, t	Vrijeme
T_D	Ukupno vrijeme trajanja opservacija za detekcijsku logiku
$T_{1/3}$	Značajni valni period
t_{CPU}	Procesorsko vrijeme, računalno opterećenje

u, u	Realizacija slučajne varijable jednolike razdiobe
U, σ	Površina sfere i mjera elementa površine sfere
v_D	Brzina koja odgovara Dopplerovom pomaku
V_r, V, $\mathcal{V}$	Volumen razlučivosti, volumen valjanosti, volumen motrenja
v_w	Brzina vjetra
v_{max}	Maksimalna brzina gibanja
W	Koeficijent za transformaciju bez derivacije, koeficijent Gauss-Laguerreove kvadraturne formule, nenormirani težinski koeficijent u metodi čestičnog filtriranja, težinski koeficijent u metodi estimacije nepoznatog ulaza, koeficijent u modelu radarskog presjeka IRSG, općeniti težinski koeficijent
w	Težinski koeficijent neuronske mreže
w_D	Šum, engl. *dither*
y	Izlaz neuronske mreže
$(\boldsymbol{\mathcal{Q}}, \boldsymbol{\mathcal{R}})$	Ortogonalna i gornja trokutasta matrica QR-dekompozicije
$(\mathrm{d}r, \mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}\theta)$	Razlučivost radarskog senzora po radijalnoj udaljenosti, azimutu i elevaciji
$\boldsymbol{W}$	Vektor težinskih koeficijenata, vektor težinskih koeficijenata neuronske mreže

Kazalo pojmova

Aproksimacija
  Čebišev-Laguerreov polinom, 39
  Gauss-Laguerreova kvadraturna formula, 39
  kubaturne točke, 39
  kubaturno pravilo, 39
  kvadraturna
    Gauss-Kronrodova, 227
    Gaussova, 227
  Laguerreov polinom, 39
    kvadraturne točke, 39

Bayesova rekurzija, 30, 255
Brewsterov efekt, 91, 96

Čestični filtar, 333
  aciklička mreža, 246, 262, 274
  bezderivacijsko-čestični, 13, 31, 45, 263, 274, 333
  efektivni broj uzoraka, 46, 263, 265
  klasični, 13, 30, 41
  nenormirani koeficijenti, 42
  normirani koeficijenti, 43
  optimalna propozicijska razdioba, 44
    aproksimacija, 265
  prošireni Kalmanov, 45
  rezidualno uzorkovanje, 47
  sekvencijalno ponovno uzorkovanje, 47
  sekvencijalno uzorkovanje, 43
  sistematsko uzorkovanje, 48

Chapman-Kolmogorovljeva jednadžba, 30, 156
Cloude-Pottierova dekompozicija, 109, 111, 123
COTS, 1, 197, 224, 310

Detekcija, 8, 204, 226, 276, 307, 309
  CFAR, 226
  ekvivalentna razdioba, 225, 226, 228, 241
  geometrijska transformacija, 226
  Neyman-Pearsonov test, 199, 225
  radijalna mreža, 205, 225, 230, 241, 243, 318, 335
  uređena statistika, 226
Difuzni model smetnje, 139, 144, 188
Dinamičko programiranje, 155
Dither, 314, 327, 331
Dovoljna statistika, 165

Estimacija
  [zlog(z)]
    K-razdioba, 97, 226, 227, 296
    Paretova razdioba, 100, 213, 226, 228, 294, 296
  frakcionalni moment, 100, 232
  gustoća smetnje, 128, 164
  inicijalizacija, 77
  isključivo biranje modela, 53, 60
  jednomodelna, 3, 9, 52, 78

jezgrena, 8, 49, 164, 168, 201, 202, 204, 205, 221, 333
kvaliteta praćenja, 6, 128, 144, 243
linearna s minimalnom varijancom, 293
maksimizacija očekivanja, 208, 213, 221, 226, 237, 333
maksimizacija vjerodostojnosti, 101, 166, 202, 205, 207, 213, 216, 219, 221, 226, 228, 237, 274, 276, 277, 283, 294, 297, 300, 305–307, 316, 318, 333, 334
metoda necjelovitog reda, 101
multiobjektna, 7
najmanja kvadratna greška, 56
nepoznati ulaz, 54, 57, 58, 79
parametar oblika, 97, 100, 204, 226, 294, 296
parametar skaliranja, 97, 100, 204, 294, 296
praćenje prije detekcije, 6, 307
proširenje vektora stanja, 60, 79
redukcija hipoteza, 4, 66
višemodelna, 3, 9, 53, 62, 79, 146, 333
invarijantna, 63
varijantna, 65
Estimacija kumulativa vjerojatnosti, 203, 246, 247, 265, 278, 305, 306, 334
konvergencija, 248
Estimacija razdiobe
aciklička mreža, 201, 244, 246, 277, 333
konvergencija, 249, 269
cenzura, 232
jezgrena metoda, 49, 164, 168, 201, 202, 204, 205, 216, 219, 221, 333
maksimizacija entropije, 201
maksimizacija očekivanja, 9, 208, 213, 221, 226, 333
maksimizacija vjerodostojnosti, 9, 101, 201, 202, 205, 207, 213, 216, 219, 221, 226, 228, 237, 274, 276, 277, 283, 294, 297, 300, 305–307, 316, 318, 333, 334
neparametarska, 202
parametarska, 199, 227, 237, 241, 287, 296, 300, 304, 306
poluparametarska, 164, 199, 228, 295, 305, 307, 316, 318, 334
radijalna mreža, 202, 204, 205, 217, 237, 246, 276, 277, 283, 287, 288, 297, 300, 306, 307, 333
vjerojatnosna analiza glavnih komponenti, 202

Gaussov proces, 14
Geocentrična širina, 27
GIT, 10, 91
Gustoća smetnje, 139, 333
uzoračka, 144

Hibridni model, 93
Hibridni proces, 13
Hipergeometrijska funkcija, 102, 116

Indikator detekcije, 130
Indikatorska funkcija, 148, 208
Inicijalizacija staze
detekcijska logika, 127
kaskadna logika, 127, 129
kompozitna detekcijska logika, 128, 133
mjera kvalitete praćenja, 128, 151, 152, 181, 182
Viterbijeva metoda, 162
IPIX, 85, 113, 116, 205, 212, 293, 307, 334

IRSG, 10, 94

Jadransko more
  korelacija, 107
  širina Dopplerovog spektra, 104
  spektar, 87
  značajke, 11, 86, 198, 212, 304, 310, 331
Jezgrena funkcija
  Epanečnjikova, 50, 170
  Gaussova, 170, 209, 213
  logaritamski normalna, 213

Kalmanov filtar, 31
  aciklička mreža, 245, 253, 274
  bez derivacije, 13, 30, 34, 259
    iteracijski, 260, 274, 333
  kubaturni, 13, 30, 38
  prošireni, 13, 30, 33
    iteracijski, 256, 274, 333–335
Karakteristična funkcija, 312
  K-razdioba, 322
  Paretova razdioba, 322
  rekonstrukcija momenata, 313
  uvjet „spektralne ograničenosti”, 312
Kolmogorovljeva jednadžba, 30, 31
Koordinatni sustav
  Kartezijev, 17
  NED, 25, 26, 75
  pravokutni, 17
Kriterijska funkcija
  kvadratna greška, 80, 184, 250, 255
  kvadrirana Hellingerova udaljenost, 279, 322
  vjerojatnost lažne detekcije, 281
  vjerojatnost zadržavanja staze, 184, 237, 241, 287, 296
Kullback-Leiblerova divergencija, 201, 202, 207, 208
Kvadratna greška, 56, 80, 184
  asimptotsko očekivanje integrirane, 170
  integrirana, 214
  očekivanje integrirane, 169
  regularizacija, 248
  srednja, 33, 59, 248
Kvadrirana Hellingerova udaljenost, 208, 233, 269, 309
Kvantizacija
  amplitudna, 10, 309, 310, 323, 336
    zasićenje, 314
    značajke, 314
  broj razina, 309, 310, 322–324, 331, 336
  dither, 314, 327, 331
  preklapanje spektra, 312, 314
  šum, 309, 314

Logaritamski prijemnik, 310, 317
Lorenzova funkcija, 103

Ljapunov
  eksponent, 113
  jednadžba, 65

Maksimizacija očekivanja, 9, 208, 213, 221, 226, 237, 333
  odgovornost, 209
  skaliranje, 209
  središta, 209
Maksimizacija vjerodostojnosti, 9, 101, 154, 166, 201, 202, 204, 205, 207, 213, 216, 219, 221, 226, 228, 237, 274, 276, 277, 283, 294, 297, 300, 305–307, 318, 333, 334
Manevar

detekcija, 52
deterministički model, 52, 54
konstantni okret, 23, 75, 180
model, 14, 19, 52
model krivocrtnog gibanja, 24, 180, 299
primjer, 74, 180
Singerov model, 19, 79
primjena trenutnog stanja, 21
stohastički model, 52, 58, 75, 78
testiranje hipoteze, 3, 53
Mann-Whitneyev test, 113
Matrica koherentnosti, 109
Metoda momenata, 164, 168, 204
Metoda pridruživanja
dijeljenje staze, 5
integrirana vjerojatnosna, 6, 128, 139, 333
multihipotezni Viterbijev algoritam, 6
najbliži susjed, 5
neizrazita, 5
testiranje višestrukih hipoteza, 7
Viterbijev algoritam, 5, 6, 11, 152, 157, 243, 276, 287, 298, 306, 333, 334
vjerojatnosna, 5
vjerojatnosna s međudjelovanjem između modela, 6, 128, 151
združena vjerojatnosna, 7
Metropolis-Hastings, 51
Model gibanja
konstantni okret, 23, 180
krivocrtno gibanje, 24, 180, 299
nemanevrirajuće gibanje, 18, 75, 180, 299
Singerov model, 19, 79
Singerov model primjenom trenutnog stanja, 21
Multiobjektna estimacija
Bernoullijeva razdioba, 8
Gaussova mješavina, 7
Razdioba vjerojatnosti hipoteza, 7
Nepotpuna gama-funkcija, 148
Neuronska mreža, 199, 309
aciklička, 244, 266, 305, 333
dinamička Bayesova, 202
Kohonenova, 202
radijalna, 8, 199, 201, 203, 305, 333
samoorganizirajuća inkrementalna, 202
učenje, 9, 10, 202
k najbližih susjeda, 201
bezderivacijsko-čestični filtar, 263, 271, 274, 275, 333
čestični filtar, 246, 262, 271, 274, 333
EKF, 245
Gauss-Newtonova metoda, 255
IEKF, 11, 257, 271, 274, 276, 280, 283, 306, 333–335
IUKF, 260, 271, 274, 276, 333
kompetitivno, 202
konjugirani gradijent, 245
kvazi-Newtonova metoda, 220, 245, 251, 268, 271, 333
Levenburg-Marquardtova metoda, 245
minimizacija srednje kvadratne greške, 245
nadzirano, 201, 247
nadzirano s grupiranjem, 252, 273
nenadzirano, 201
Newtonova metoda, 251
širenje pogreške unazad, 201, 245
UKF, 246
višeslojna perceptronska, 200

Otisak cilja, 6, 9, 10, 112, 124, 139, 168, 174, 192, 282, 287, 293, 296, 334

Parametarski Poissonov model smetnje, 143, 188
Paulijev vektor, 109
Praćenje prije detekcije, 6, 307, 335
Prijelazna funkcija (matrica), 15, 55
Primjetljivost, 128, 140, 144, 145, 150, 152, 162, 299, 333
Proces opservacije, 2, 16, 309
Proces praćenja, 2
Proces pridruživanja, 2, 9, 127, 201, 309
  gustoća smetnje, 8
  jedan cilj, 5

Radijalni integral, 38
Razdioba
  binomna, 139
  gama, 96, 174
  gama-Gaussova inverzna Wishartova, 8
  Gaussova, 32, 209, 213
  inverzna gama, 198
  inverzna Gaussova, 198
  jednolika, 47
  K, 4, 10, 96, 117, 175, 198, 333
  KA, 4, 98, 198
  KK, 99, 198
  logaritamski normalna, 4, 213
  multi-Bernoullijeva, 8
  multinomna, 47
  Paretova, 4, 10, 100, 117, 198, 333
  Poissonova, 98, 139
  Rayleighova, 170, 174, 239, 293
  Riceova inverzna Gaussova, 200
  Weibullova, 4, 201
Redukcija hipoteza
  GPB1, 67, 129, 141, 155
  GPB2, 68
  IMM, 70, 79, 149, 157
  Viterbi, 72, 129
Robbins-Monrovljeva stohastička aproksimacija, 260, 264
ROC, 203, 226, 229, 230, 319, 323, 324, 331, 335

Sferni integral, 38
Sferno-radijalna pretvorba, 38
Sferno-radijalno kubaturno pravilo, 38
Shannonov indeks, 201, 207
Sigma-točke, 34
Smetnja mora
  amplitudna razdioba, 2, 4, 9, 96, 98–100, 117, 174, 198, 204
  deterministički kaos, 113
  Dopplerov spektar, 9, 102, 104–106, 122
  fizikalni model, 4, 9, 85, 86
    Braggovo raspršenje, 89, 198
    kompozitni, 90, 197
  igličasti odjeci, 4, 91, 98, 105, 198, 232
  korelacija, 9, 107, 108, 118, 197, 224
  opisna statistika, 4, 88
  polarimetrijske značajke, 9, 108
  radarski presjek, 2, 9, 88, 119
    GIT, 10, 91
    hibridni model, 93
    IRSG, 10, 94
  stohastički proces, 114, 115, 198
Stohastička diferencijalna jednadžba, 14
  linearna, 14
  nelinearna, 24, 114
Stohastička diferencijska jednadžba, 15
  linearna, 15
Swerlingov model, 174, 226, 237, 282, 293, 307, 322–324, 329, 331, 334

Testna statistika, 80, 184, 238, 241, 279, 281, 288, 289, 297, 300, 322
Trag matrice, 31

Unakrsna provjera
  nepristrana, 170, 205, 211, 214, 216, 220, 221, 333
  pristrana, 172
USV, 1, 336
Uvjetno očekivanje, 29, 44, 64, 66, 141, 157, 165

Vektor zajedničke povijesti, 135
Viterbijev algoritam, 5, 6, 10, 72, 157, 333, 334
  multihipotezni, 6
  rekurzivni, 129
Voigtova funkcija, 103
Volumen valjanosti, 2, 130, 151, 158, 183, 298

Završetak staze
  mjera kvalitete praćenja, 128, 152, 182, 243
  Viterbijeva metoda, 161, 182

Popis slika

1.1. Koncept centralizirane fuzije podataka 1
1.2. Ilustracija procesa praćenja manevrirajućeg cilja 3
1.3. Ilustracija višestrukih radarskih mjerenja 6

2.1. Ilustracija razdiobe akceleracije za Singerov model 21
2.2. Ilustracija ovisnosti razdiobe akceleracije za Singerov model primjenom trenutnog stanja cilja 23
2.3. Ilustracija tangencijalne i normalne komponente akceleracije u pravokutnom koordinatnom sustavu 25
2.4. Ilustracija krivocrtnog gibanja za različite vrijednosti tangencijalne i normalne akceleracije 26
2.5. Povezanost sfernih koordinata i sustava NED 27
2.6. Skup kubaturnih točaka za dvodimenzionalni prostor 39
2.7. Ilustracija iscrpljivanja uzoraka 46
2.8. Ilustracija metode sekvencijalnog ponovnog uzorkovanja 47
2.9. Ilustracija metode sistematskog uzorkovanja 48
2.10. Ilustracija estimacije aposteriorne razdiobe metodom jezgrene estimacije 50
2.11. Ilustracija Metropolisove metode 52
2.12. Klasifikacija osnovnih metoda estimacije 53
2.13. Vremenski dijagram određivanja djelovanja nepoznatog ulaza na gibanje cilja . 54
2.14. Ilustracija detekcije manevra i ponovne estimacije za metodu proširenog vektora stanja 62
2.15. Ilustracija eksponencijalno rastućeg broja filtara za optimalnu višemodelnu metodu 67
2.16. Ilustracija metode GPB1 68
2.17. Ilustracija metode GPB2 70
2.18. Ilustracija metode IMM 72
2.19. Ilustracija Viterbijeve metode redukcije hipoteza 72
2.20. Ilustracija rekurzivne Viterbijeve metode 74

2.21. Radarska snimka manevra površinskog cilja 75
2.22. Histogram brzine 76
2.23. Ilustracija realizacije stohastičkog procesa manevrirajućeg gibanja i kontrolnih veličina 81
2.24. Točnost estimacije pozicije i brzine 82

3.1. Ilustracija ćelije razlučivosti senzora ovisno o upadnom kutu 89
3.2. Braggovo raspršenje i kompozitni model 90
3.3. Ovisnosti radarskog presjeka morske površine u području interferencije za model GIT 92
3.4. Ovisnosti radarskog presjeka morske površine u području interferencije za hibridni model 94
3.5. Ovisnost radarskog presjeka morske površine u području umjerenih i visokih kutova 95
3.6. Usporedba K-, KA- i KK-razdioba 99
3.7. Širina Gaussovog spektra ovisno o stanju mora 105
3.8. Vrijeme korelacije ovisno o stanju mora 107
3.9. Klasifikacijski prostor određen metodom dekompozicije $H - \bar{\alpha}$ 112
3.10. Estimacija amplitudne razdiobe za stanje mora od 3 do 4 118
3.11. Estimacija amplitudne razdiobe za stanje mora od 4 do 5 118
3.12. Kratkoročna korelacija amplitude smetnje 119
3.13. Tijek intenziteta procesa smetnje za stanje mora od 3 do 4 120
3.14. Tijek intenziteta procesa smetnje za stanje mora od 4 do 5 121
3.15. Dugoročna korelacija amplitude smetnje 122
3.16. Normirani periodogram za stanje mora od 3 do 4 123
3.17. Normirani periodogram za stanje mora od 4 do 5 123
3.18. Dekompozicija tri radijalno susjedna uzorka smetnje u klasifikacijskom prostoru $H - \bar{\alpha}$ 124
3.19. Dekompozicija tri radijalno susjedna uzorka cilja u klasifikacijskom prostoru $H - \bar{\alpha}$ 124

4.1. Ilustracija Markovljevog lanca za kaskadnu detekcijsku logiku 131
4.2. Vjerojatnost potvrde staze primjenom kaskadne logike 132
4.3. Ilustracija kompozitne detekcijske logike 134
4.4. Ilustracija volumena za pridruživanje kaskadne detekcijske logike 134
4.5. Ilustracija eksponencijalno rastućeg broja sljedova za kaskadnu detekcijsku logiku 136
4.6. Ilustracija višestrukih dvodimenzionalnih pozicijskih mjerenja unutar volumena valjanosti 140

4.7. Ilustracija Viterbijeve metode pridruživanja 153
4.8. Ilustracija Viterbijeve metode pridruživanja u višemodelnoj metodi estimacije . 159
4.9. Ilustracija procesa potvrde staze Viterbijevom metodom 163
4.10. Ilustracija usporedbe metoda ocjenom njihovih statističkih značajki 174
4.11. Ilustracija utjecaja parametra oblika na razdiobu smetnje 175
4.12. Ilustracija utjecaja parametra oblika na karakter smetnje 176
4.13. Ilustracija aproksimacije amplitudne razdiobe 177
4.14. Ilustracija određivanja integracijskih točaka 178
4.15. Uklapanje metode pridruživanja u višemodelni okvir estimacije 179
4.16. Usporedba vjerojatnosti zadržavanja staze stvarnog cilja između metoda IPDA i ST-VDA, slabo izražena smetnja 186
4.17. Usporedba vjerojatnosti zadržavanja staze stvarnog cilja između metoda IPDA i ST-VDA, jako izražena smetnja 187
4.18. Testna statistika za usporedbu točnosti estimacije metodama IPDA i ST-VDA, slabo izražena smetnja 187
4.19. Testna statistika za usporedbu točnosti estimacije metodama IPDA i ST-VDA, jako izražena smetnja 188
4.20. Ilustracija usporedbe točnosti estimacije metodama IPDA i ST-VDA 188
4.21. Usporedba vjerojatnosti zadržavanja staze stvarnog cilja metode ST-VDA uz difuzni i parametarski model slabo izražene smetnje 189
4.22. Usporedba vjerojatnosti zadržavanja staze stvarnog cilja metode ST-VDA uz difuzni i parametarski model jako izražene smetnje 190
4.23. Testna statistika točnosti estimacije metode ST-VDA uz difuzni i parametarski model slabo izražene smetnje 190
4.24. Testna statistika točnosti estimacije metode ST-VDA uz difuzni i parametarski model jako izražene smetnje 191
4.25. Ilustracija točnosti estimacije metodom ST-VDA uz difuzni i parametarski model smetnje i visoki omjer snage signala prema smetnji 191
4.26. Ilustracija točnosti estimacije metodom ST-VDA uz difuzni i parametarski model smetnje i umjereni omjer snage signala prema smetnji 192
4.27. Primjena statistike otiska u metodi ST-VDA, slabo izražena smetnja 192
4.28. Primjena statistike otiska u metodi ST-VDA, jako izražena smetnja 193
4.29. Testna statistika točnosti estimacije primjenom statistike otiska u metodi ST-VDA, slabo izražena smetnja 193
4.30. Testna statistika točnosti estimacije primjenom statistike otiska u metodi ST-VDA, jako izražena smetnja 194

4.31. Ilustracija točnosti estimacije primjenom otiska u metodi ST-VDA i umjereni omjer snage signala prema smetnji 194

5.1. Struktura radijalne mreže 204
5.2. Ilustracija utjecaja modela radarskog presjeka na rep amplitudne razdiobe . . . 213
5.3. Shematski prikaz simulacije za usporedbu metoda EM, UCV i KDE 216
5.4. Ovisnost očekivane kvadrirane Hellingerove udaljenosti o broju komponenti i broju uzoraka za metodu maksimizacije vjerodostojnosti 217
5.5. Ovisnost očekivane kvadrirane Hellingerove udaljenosti o broju uzoraka za jezgrenu metodu te o broju komponenti za metodu UCV 218
5.6. Konvergencija očekivane kvadrirane Hellingerove udaljenosti ovisno o broju uzoraka za metodu maksimizacije vjerodostojnosti u logaritamskoj domeni . . 218
5.7. Konvergencija očekivane kvadrirane Hellingerove udaljenosti ovisno o broju uzoraka za metodu jezgrene estimacije u logaritamskoj domeni 219
5.8. Usporedba estimacije u ovisnosti o broju uzoraka 219
5.9. Usporedba računalne složenosti pri estimaciji K- i Paretove razdiobe metodama EM i KDE 220
5.10. Usporedba računalne složenosti pri estimaciji K- i Paretove razdiobe metodama EM i UCV 221
5.11. Usporedba rezultata estimacije za metode KDE, EM i UCV 222
5.12. Usporedba ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije između metoda KDE i EM . 222
5.13. Usporedba normiranih devijacija ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije između metoda KDE i EM 223
5.14. Usporedba ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije između metoda EM i UCV . 223
5.15. Usporedba normiranih devijacija ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije između metoda EM i UCV 224
5.16. Ilustracija referentnog skupa ćelija razlučivosti 225
5.17. Shematski prikaz simulacije operativnih karakteristika prijemnika 229
5.18. Operativne karakteristike prijemnika za K-razdiobu smetnje 231
5.19. Operativne karakteristike prijemnika za Paretovu razdiobu smetnje 232
5.20. Ilustracija pojave igličastog odjeka 233
5.21. Ilustracija utjecaja cenzure na estimaciju amplitudne razdiobe 233
5.22. Parametarska metoda u segmentu detekcije i Viterbijeve metode pridruživanja s višemodelnom estimacijom 238
5.23. Implementacija radijalne mreže u segmentu detekcije i Viterbijeve metode pridruživanja s višemodelnom estimacijom 238
5.24. Ovisnost omjera snage signala prema snazi smetnje o vjerojatnosti lažne detekcije za K- i Paretovu razdiobu 239

5.25. Značajnost metode maksimizacije vjerodostojnosti u primjeni nekoherentne detekcije pri smetnji K-razdiobe 240
5.26. Značajnost metode maksimizacije vjerodostojnosti u primjeni nekoherentne detekcije pri smetnji Paretove razdiobe 240
5.27. Dinamičke operativne karakteristike prijemnika izražene kroz vjerojatnost zadržavanja staze manevrirajućeg cilja u smetnji K-razdiobe 242
5.28. Dinamičke operativne karakteristike prijemnika izražene kroz vjerojatnost zadržavanja staze manevrirajućeg cilja u smetnji Paretove razdiobe 242
5.29. Dinamičke operativne karakteristike prijemnika pri smetnji K-razdiobe 244
5.30. Dinamičke operativne karakteristike prijemnika pri smetnji Paretove razdiobe . 244
5.31. Struktura acikličke mreže 245
5.32. Struktura acikličke mreže s jednim skrivenim slojem 267
5.33. Ovisnost očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti i računalne složenosti o broju neurona pri estimaciji K- i Paretove razdiobe kvazi-Newtonovom metodom270
5.34. Usporedba ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije i njihovih normiranih devijacija za kvazi-Newtonovu metodu 270
5.35. Ovisnost očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti i računalne složenosti o broju uzoraka pri estimaciji K- i Paretove razdiobe kvazi-Newtonovom metodom271
5.36. Konvergencija očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti ovisno o broju uzoraka za kvazi-Newtonovu metodu 271
5.37. Usporedba očekivanja kvadrirane Hellingerove udaljenosti o broju uzoraka pri estimaciji K-i Paretove razdiobe 274
5.38. Usporedba ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije za K- i Paretovu razdiobu . . 275
5.39. Usporedba normiranih devijacija ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije za K- i Paretovu razdiobu 275
5.40. Usporedba računalne složenosti o broju uzoraka pri estimaciji K- i Paretove razdiobe 276
5.41. Usporedba metoda SIC i ISIC pri K-razdiobi smetnje 280
5.42. Usporedba metoda SIC i ISIC pri Paretovoj razdiobi smetnje 280
5.43. Usporedba ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije metodama SIC i ISIC pri K-razdiobi smetnje 281
5.44. Usporedba ostvarenih vjerojatnosti lažne detekcije metodama SIC i ISIC pri Paretovoj razdiobi smetnje 282
5.45. Usporedba normiranih devijacija u estimaciji vjerojatnosti lažne detekcije za metode ISIC i SIC, pri K- i Paretovoj razdiobi smetnje 282
5.46. Usporedba točnosti estimacije amplitudne razdiobe odjeka cilja za metode ISIC i EM 284

5.47. Usporedba metoda ISIC i EM u kontekstu točnosti estimacije za $\mathcal{R} = 5$ dB . . . 284
5.48. Usporedba metoda ISIC i EM u kontekstu točnosti estimacije za $\mathcal{R} = 10$ dB . . 285
5.49. Usporedba metoda ISIC i EM u kontekstu točnosti estimacije za $\mathcal{R} = 15$ dB . . 285
5.50. Ovisnost računalnog opterećenja metoda ISIC i EM o broju uzoraka 286
5.51. Parametarska metoda u segmentu estimacije omjera vjerodostojnosti i Viterbijeve metode pridruživanja s višemodelnom estimacijom 289
5.52. Implementacija radijalne mreže u segmentu estimacije omjera vjerodostojnosti i Viterbijeve metode pridruživanja s višemodelnom estimacijom 289
5.53. Značajnost primjene estimacije omjera vjerodostojnosti pri smetnji K-razdiobe 290
5.54. Značajnost primjene estimacije omjera vjerodostojnosti u odnosu na parametarsku metodu pri smetnji K-razdiobe 291
5.55. Značajnost primjene estimacije omjera vjerodostojnosti pri smetnji Paretove razdiobe 292
5.56. Značajnost primjene estimacije omjera vjerodostojnosti u odnosu na parametarsku metodu pri smetnji Paretove razdiobe 292
5.57. Usporedba stvarne amplitudne razdiobe odjeka cilja i razdiobe prema Swerlingovom modelu br. 1 pri stanju mora od 3 do 4 294
5.58. Usporedba stvarne amplitudne razdiobe odjeka cilja i razdiobe prema Swerlingovom modelu br. 1 pri stanju mora od 4 do 5 294
5.59. Usporedba stvarne amplitudne razdiobe odjeka cilja i njene aproksimacije K- i Paretovom razdiobom pri stanju mora od 3 do 4 295
5.60. Usporedba stvarne amplitudne razdiobe odjeka cilja i njene aproksimacije K- i Paretovom razdiobom pri stanju mora od 4 do 5 295
5.61. Implementacija referentne parametarske metode u segmentu estimacije omjera vjerodostojnosti i Viterbijeve metode pridruživanja s višemodelnom estimacijom 297
5.62. Staza manevrirajućeg cilja u smetnji K-razdiobe 299
5.63. Primjetljivost i vjerojatnost modela za manevrirajući cilj u smetnji K-razdiobe . 300
5.64. Usporedba parametarske i poluparametarske metode u estimaciji razdiobe odjeka cilja te smetnje prema amplitudnoj K-razdiobi 301
5.65. Staza manevrirajućeg cilja u smetnji Paretove razdiobe 302
5.66. Primjetljivost i vjerojatnost modela za manevrirajući cilj u smetnji Paretove razdiobe 303
5.67. Usporedba parametarske i poluparametarske metode u estimaciji razdiobe odjeka cilja te smetnje prema amplitudnoj Paretovoj razdiobi 303

6.1. Ilustracija prijenosa amplitude kao digitalnog signala kroz komunikacijski kanal 310
6.2. Ilustracija procesa kvantizacije 311
6.3. Ilustracija kvantizacije amplitude 311

6.4. Ilustracija preklapanja spektra 313
6.5. Ilustracija aditivnog šuma 314
6.6. Ilustracija metode unošenja šuma sa suptrakcijom na prijemnoj strani 316
6.7. Shematski prikaz simulacije operativnih karakteristika prijemnika u scenariju mjerenja s kvantizacijom 320
6.8. Karakteristične funkcije K- i Paretove razdiobe 322
6.9. Karakteristične funkcije odjeka cilja prema 1. Swerlingovom modelu u smetnji K- i Paretove razdiobe 323
6.10. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti pri smetnji K-razdiobe 324
6.11. Utjecaj broja kvantizacijskih razina na operativne karakteristike prijemnika pri smetnji K-razdiobe 324
6.12. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti pri smetnji Paretove razdiobe 325
6.13. Utjecaj broja kvantizacijskih razina na operativne karakteristike prijemnika pri smetnji Paretove razdiobe 326
6.14. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti za odjek cilja prema Swerlingovom modelu br. 1 u smetnji K-razdiobe 327
6.15. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti za odjek cilja prema Swerlingovom modelu br. 1 u smetnji Paretove razdiobe 327
6.16. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti pri smetnji K-razdiobe i *dither* 328
6.17. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti pri smetnji Paretove razdiobe i *dither* 328
6.18. Utjecaj broja kvantizacijskih razina na operativne karakteristike prijemnika pri smetnji K-razdiobe i *dither* 329
6.19. Utjecaj broja kvantizacijskih razina na operativne karakteristike prijemnika pri smetnji Paretove razdiobe i *dither* 329
6.20. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti za odjek cilja prema Swerlingovom modelu br. 1, u smetnji K-razdiobe i *dither* 330
6.21. Testiranje utjecaja broja kvantizacijskih razina na očekivanje kvadrirane Hellingerove udaljenosti za odjek cilja prema Swerlingovom modelu br. 1, u smetnji Paretove razdiobe i *dither* 330

E.1. Ilustracija sustava za demonstraciju Viterbijeve metode pridruživanja 420

E.2. Ilustracija video isječka praćenja testnog cilja bez fluktuacije odjeka 423
E.3. Estimacija staze testnog cilja 426
E.4. Vjerojatnost primjetljivosti testnog cilja 427
E.5. Vjerojatnost modela gibanja testnog cilja 427
E.6. Ilustracija video isječka praćenja testnog cilja s fluktuacijom odjeka 429
E.7. Estimacija staze testnog cilja s fluktuacijom amplitude odjeka 430
E.8. Vjerojatnost primjetljivosti testnog cilja s fluktuacijom amplitude 430
E.9. Vjerojatnost modela gibanja testnog cilja s fluktuacijom amplitude 431
E.10. Ilustracija video isječka praćenja jahte u blizini obale 432
E.11. Estimacija staze jahte u blizini obale 433
E.12. Vjerojatnost primjetljivosti jahte 433
E.13. Vjerojatnost modela gibanja jahte 434
E.14. Broj mjerenja unutar volumena valjanosti pri praćenju jahte 434
E.15. Estimacija prostorne gustoće smetnje i vjerojatnosti lažne detekcije u procesu praćenja jahte 435
E.16. Ilustracija video isječka praćenja izoliranog cilja u varijanti 1 436
E.17. Estimacija staze izoliranog cilja u varijanti 1 437
E.18. Vjerojatnost primjetljivosti izoliranog cilja u varijanti 1 437
E.19. Vjerojatnost modela gibanja izoliranog cilja u varijanti 1 438
E.20. Broj mjerenja unutar volumena valjanosti pri praćenju izoliranog cilja u varijanti 1 438
E.21. Estimacija prostorne gustoće smetnje i vjerojatnosti lažne detekcije u procesu praćenja izoliranog cilja u varijanti 1 439
E.22. Ilustracija video isječka praćenja izoliranog cilja u varijanti 2 440
E.23. Estimacija staze izoliranog cilja u varijanti 2 441
E.24. Vjerojatnost primjetljivosti izoliranog cilja u varijanti 2 441
E.25. Vjerojatnost modela gibanja izoliranog cilja u varijanti 2 442
E.26. Broj mjerenja unutar volumena valjanosti pri praćenju izoliranog cilja u varijanti 2 442
E.27. Estimacija prostorne gustoće smetnje i vjerojatnosti lažne detekcije u procesu praćenja izoliranog cilja u varijanti 2 443
E.28. Ilustracija video isječka praćenja jednog od dva bliska cilja 444
E.29. Estimacija staze jednog od dva bliska cilja 445
E.30. Vjerojatnost primjetljivosti jednog od dva bliska cilja 445
E.31. Vjerojatnost modela gibanja jednog od dva bliska cilja 446
E.32. Broj mjerenja unutar volumena valjanosti pri praćenju jednog od dva bliska cilja 446

E.33. Estimacija prostorne gustoće smetnje i vjerojatnosti lažne detekcije u procesu praćenja jednog od dva bliska cilja 447
E.34. Ilustracija video isječka praćenja cilja u smetnji jake kiše 448
E.35. Estimacija staze cilja u smetnji jake kiše 449
E.36. Vjerojatnost primjetljivosti cilja u smetnji jake kiše 449
E.37. Vjerojatnost modela gibanja cilja u smetnji jake kiše 450
E.38. Broj mjerenja unutar volumena valjanosti pri praćenju cilja u smetnji jake kiše . 450
E.39. Estimacija prostorne gustoće smetnje i vjerojatnosti lažne detekcije u procesu praćenja cilja u smetnji jake kiše 451

Popis tablica

2.1. Rezultati usporedbe metoda VSD i IE 82
2.2. Rezultati usporedbe metoda IMM i VSD 82

3.1. Ljestvica stanja mora za Jadran 87
3.2. Vrijednosti koeficijenata linearnog modela IRSG 95
3.3. Podaci mjerenja radara instrumentalne točnosti IPIX 117
3.4. Kratkoročna korelacija amplitude smetnje 119
3.5. Usporedba radarskog presjeka morske površine s teorijskom vrijednošću 121

4.1. Primjer veličine volumena za pridruživanje kaskadne detekcijske logike 134
4.2. Ilustracija algoritma zajedničke povijesti. 136
4.3. Slijed aposteriorne i apriorne vjerojatnosti primjetljivosti, metoda IPDA 182
4.4. Slijed aposteriorne i apriorne vjerojatnosti primjetljivosti, metoda ST-VDA . . 183

5.1. Parametri razdioba ovisno o modelu radarskog presjeka 214
5.2. Parametri simulacije za metode EM, UCV i KDE 215
5.3. Parametri simulacije operativnih karakteristika prijemnika 230
5.4. Parametri simulacije za testiranje primjenjivosti radijalne mreže EM u segmentu nekoherentne detekcije pri dinamičkim uvjetima 234
5.5. Parametri simulacije za acikličku slojevitu mrežu 268
5.6. Parametri kvazi-Newtonove metode 269
5.7. Zajednički parametri za metode iteracijskog proširenog i iteracijskog bezderivacijskog Kalmanovog filtriranja 272
5.8. Parametri specifični za metodu iteracijskog Kalmanovog filtriranja bez derivacije 272
5.9. Parametri metode čestičnog filtriranja 273
5.10. Parametri metode čestičnog filtriranja s implementacijom bezderivacijskog Kalmanovog filtra 273
5.11. Parametri simulacije za testiranje utjecaja pogrešnog modela 298
5.12. Ostvarena vjerojatnost zadržavanja staze u smetnji K-razdiobe, primjenom referentne parametarske metode i metode radijalne mreže 301

5.13. Rezultat testiranja hipoteze $H2^{(**)}$ za scenarij smetnje K-razdiobe 301
5.14. Ostvarena vjerojatnost zadržavanja staze u smetnji Paretove razdiobe, primjenom referentne parametarske metode i metode radijalne mreže 304
5.15. Rezultat testiranja hipoteze $H2^{(**)}$ za scenarij smetnje Paretove razdiobe 304

6.1. Parametri simulacije operativnih karakteristika prijemnika u scenariju mjerenja s kvantizacijom 321
6.2. Minimalni broj kvantizacijskih razina za različite razdiobe 331

E.1. Značajke radarskog senzora 420
E.2. Parametri metode pridruživanja 421
E.3. Parametri simulacije testnog cilja 424

Dodatak A

A.1. Jedinična, dijagonalna i nul-matrica

Definicija A.1.1. (Jedinična matrica) Jedinična matrica $\boldsymbol{I}_n = \{I_{ij}\}$ je matrica s n redova i n stupaca pri čemu vrijedi, $\forall i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$ [76]:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \tag{A.1}$$

●

Definicija A.1.2. (Nul-matrica) Nul-matrica $\boldsymbol{O}_{mn} = \{O_{ij}\}$ je matrica s m redova i n stupaca pri čemu vrijedi, $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $O_{ij} = 0$ [347]. ●

Definicija A.1.3. (Dijagonalna matrica) Matrica $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ je dijagonalna ako $\forall i, j \in \{1,2,\ldots,n\},\ i \neq j \implies a_{i,j} = 0$ [348]. Ako je $\boldsymbol{a} = [a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}]^{\mathrm{T}}$ vektor čiji su elementi članovi dijagonale matrice $\boldsymbol{A}$, dijagonalna matrica može se označiti kao $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{a})$. ●

A.2. Hadamardov produkt

Definicija A.2.1. (Hadamardov produkt) Hadamardov produkt matrica $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ i $\boldsymbol{B} = \{b_{ij}\}$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, definiran je, $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\},\ j \in \{1,2,\ldots,n\}$, kao [349]:

$$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = \{a_{ij} b_{ij}\}.$$

●

Napomena A.2.1. (Hadamardov kvadrat) Analogno definiciji A.2.1, Hadamardov kvadrat matrice $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ jednak je, $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\},\ j \in \{1,2,\ldots,n\}$,

$$\boldsymbol{A}^{\circ 2} = \{a_{ij}^2\}.$$

○

Napomena A.2.2. (Hadamardova inverzija) Prema teoremu 1.4 u [350], Hadamardova inverzija matrice $\boldsymbol{A} = \{a_{ij} : a_{ij} \neq 0\}$, jednaka je, $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\},\ j \in \{1,2,\ldots,n\}$,

$$\boldsymbol{A}^{\circ -1} = \{a_{ij}^{-1}\}.$$

○

Napomena A.2.3. (Hadamardov eksponencijal) Prema lemi 2.3 u [349], proizlazi da je Hadamardov eksponencijal matrice $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ jednak, $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\},\ j \in \{1,2,\ldots,n\}$,

$$\exp(\circ \boldsymbol{A}) = \{\exp(a_{ij})\}.$$

○

Napomena A.2.4. (Hadamardova jedinična matrica) Prema teoremu 1.3 u [350], Hadamardova jedinična matrica, uvažavajući Hadamardov produkt prema definiciji A.2.1, je matrica $\boldsymbol{J}_{mn} = \{J_{ij} : J_{ij} = 1\},\ \forall i \in \{1,2,\ldots,m\},\ j \in \{1,2,\ldots,n\}$. ○

Dodatak B

B.1. Konzistentnost estimacije

Za nelinearne funkcije gibanja (2.1) i opservacije (2.19), u klasi linearnih estimatora, Kalmanov filtar je optimalan u smislu minimalne varijance greške estimacije. Provedbom metode Kalmanovog filtriranja kao što je EKF [15, 94], UKF [95], CKF [89] te njihovim varijantama, aposteriorna razdioba pretpostavljeno je Gaussova, pa se testom konzistencije ispituje stvarna kovarijanca greške u odnosu na estimiranu. Tako je u [351] konzistentnost zadovoljena ako je stvarna kovarijanca greške manja od estimirane. Zadovoljenje ovoga uvjeta važno je radi sprječavanja divergencije estimacije jer se apriorna estimacija (budući vremenski indeks) provodi aposteriornom estimacijom (kurentnog vremenskog indeksa), tako da je za što točniju (apriornu) estimaciju potrebna konzistentnost. Ako uvjet nije zadovoljen, estimacija je „optimističnija" od stvarne i mjerenje nema veliki utjecaj na estimaciju u korekcijskoj fazi što u konačnici može rezultirati divergencijom. U [15], test konzistentnosti, pod pretpostavkom Gaussovih razdioba, proširen je u smislu:

- Konačnog broja uzoraka, kroz potvrdu nepristranosti estimacije te konzistentnošću estimirane kovarijance,

$$E\left(\tilde{\boldsymbol{x}}(t_k)\right) = 0, \tag{B.1}$$

$$E\left(\tilde{\boldsymbol{x}}(t_k)\tilde{\boldsymbol{x}}(t_k)^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{P}(t_k), \tag{B.2}$$

  gdje je $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_k) = \boldsymbol{x}(t_k) - \hat{\boldsymbol{x}}(t_k)$ stvarna greška estimacije, a $\boldsymbol{P}(t_k)$ estimirana kovarijanca greške estimacije, pri čemu se očekivanje provodi nad realizacijama stohastičkog procesa $\{\boldsymbol{x}(t), t \geq 0\}$ za trenutak t_k.
- Beskonačnog broja uzoraka (asimptotska konzistencija), kroz potvrdu hipoteza:
  - H1 da je očekivanje greške estimacije nula, a vrijednosti greške se s visokom vjerojatnošću nalaze unutar raspona koji je sukladan estimiranoj kovarijanci i definiran razinom značajnosti

H2 da je očekivanje inovacije nula, da su inovacije nekorelirane, s vrijednostima koje se nalaze s visokom vjerojatnošću unutar raspona koji je sukladan estimiranoj kovarijanci i definiran razinom značajnosti.

Prvu i najvažniju hipotezu moguće je testirati samo provedbom računalne simulacije, dok je drugu moguće testirati sa stvarnim podacima. Neka je definirana normalizirana kvadratna greška estimacije kao

$$\varepsilon_x(t_k) = \tilde{\boldsymbol{x}}(t_k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}(t_k)^{-1} \tilde{\boldsymbol{x}}(t_k). \tag{B.3}$$

Razdioba greške $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_k)$ pretpostavljeno je Gaussova pa shodno tome razdioba normalizirane kvadratne greške podliježe χ^2 razdiobi s n_x stupnjeva slobode, gdje je n_x broj komponenti vektora stanja $\boldsymbol{x}(t)$. Očekivanje normalizirane kvadratne greške tako je

$$E\big(\varepsilon_x(t_k)\big) = n_x. \tag{B.4}$$

Hipoteza H1 je prihvaćena ako se normalizirana kvadratna greška (B.3) nalazi unutar intervala pouzdanosti $[d_1, d_2]$ s visokom vjerojatnošću,

$$P\big(\varepsilon_x(t_k) \in [d_1, d_2] \,|\, \mathrm{H0}\big) = 1 - \alpha, \tag{B.5}$$

gdje je α razina značajnosti i H0 hipoteza da je stvarna kovarijanca estimacije konzistentna s estimiranom. Realizacijom N nezavisnih pokušaja, definira se srednja normalizirana kvadratna greška kao

$$\bar{\varepsilon}_x(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{x,i}(t_k). \tag{B.6}$$

U ovom je slučaju hipoteza H1 prihvaćena ako je zadovoljen uvjet

$$P\big(\bar{\varepsilon}_x(t_k) \in [d_1, d_2] \,|\, \mathrm{H0}\big) = 1 - \alpha, \tag{B.7}$$

pri čemu je interval pouzdanosti $[d_1, d_2]$ definiran s

$$1 - \alpha = \int_{d_1}^{d_2} \chi^2(\delta; N n_x)\, \mathrm{d}\delta = \frac{1}{2^{\frac{N n_x}{2}}\, \Gamma\left(\frac{N n_x}{2}\right)} \int_{d_1}^{d_2} \delta^{\frac{N n_x}{2} - 1} \exp\left(-\frac{\delta}{2}\right) \mathrm{d}\delta, \tag{B.8}$$

gdje $\Gamma(\cdot)$ označava gama-funkciju. Pristranost estimacije povećava normaliziranu kvadratnu grešku (B.3). Ako je znatno, vjerojatnosti (B.5) i (B.7) nisu značajne.

U praksi se testiranje kvalitete estimacije provodi sa stvarnim podacima metodom normalizirane kvadratne inovacije [15]. Pod pretpostavkom diskretnih mjerenja (2.24), normalizirana kvadratna inovacija definirana je, za indeks vremena k, kao

$$\varepsilon_{z,k} = \tilde{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_k^{-1} \tilde{\boldsymbol{z}}_k, \tag{B.9}$$

pri čemu je inovacija jednaka $\tilde{z}_k = z_k - \bar{z}_k$. Uz N nezavisnih pokušaja, srednja normalizirana kvadratna inovacija tada je

$$\bar{\varepsilon}_{z,k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{z,k,i}. \tag{B.10}$$

Razdioba greške inovacije također podliježe χ^2 razdiobi s n_z stupnjeva slobode, pri čemu je n_z broj komponenti vektora mjerenja z_k. Tako je interval prihvaćanja hipoteze H2 jednak

$$1-\alpha = \int_{d_1}^{d_2} \chi^2(\delta; Nn_z)\,\mathrm{d}\delta = \frac{1}{2^{\frac{Nn_z}{2}}\,\Gamma\left(\frac{Nn_z}{2}\right)} \int_{d_1}^{d_2} \delta^{\frac{Nn_z}{2}-1} \exp\left(-\frac{\delta}{2}\right) \mathrm{d}\delta. \tag{B.11}$$

Test autokorelacije inovacije, u sklopu testiranja hipoteze H2, provodi se prema

$$\bar{\rho}_{k,\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{z}_{k,i}^{\mathrm{T}} \tilde{z}_{\kappa,i}}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{z}_{k,i}^{\mathrm{T}} \tilde{z}_{k,i} \sum_{j=1}^{N} \tilde{z}_{\kappa,j}^{\mathrm{T}} \tilde{z}_{\kappa,j}}. \tag{B.12}$$

Za velike vrijednosti N te za indekse vremena $k \neq \kappa$, autokorelacija (B.12) podliježe Gaussovoj razdiobi. Ako su inovacije nekorelirane i spektralno bijele, očekivanje od (B.12) je nula s kovarijancom $1/N$. Tako se hipoteza H2 o nekoreliranosti inovacije prihvaća ako je zadovoljen uvjet

$$\bar{\rho}_{k,\kappa} \in [-d, d], \tag{B.13}$$

pri čemu su granice intervala pouzdanosti $[-d, d]$ određene s

$$1-\alpha = \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \int_{-d}^{d} \exp\left(-\frac{1}{2}N\delta^2\right) \mathrm{d}\delta. \tag{B.14}$$

Testiranje hipoteze H2 o nekoreliranosti inovacije i njenoj spektralnoj bjelini može se provesti sa stvarnim podacima u stvarnom vremenu primjenom svojstva ergodičnosti inovacijskog procesa [15], pa se usrednjavanje preko N članova procesa u (B.10) i (B.12) zamjenjuje usrednjavanjem preko N uzoraka po vremenu,

$$\bar{\varepsilon}_z = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \tilde{z}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{S}_k^{-1} \tilde{z}_k, \tag{B.15}$$

odnosno,

$$\bar{\rho}_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{z}_i^{\mathrm{T}} \tilde{z}_{i+k}}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{z}_i^{\mathrm{T}} \tilde{z}_i \sum_{j=1}^{N} \tilde{z}_{j+k}^{\mathrm{T}} \tilde{z}_{j+k}}. \tag{B.16}$$

Hipoteza H2 se prihvaća ako (B.15) i (B.16) zadovoljavaju interval pouzdanosti (B.13), odnosno (B.11).

Dodatak C

C.1. Testiranje značajki metoda

Usporedba značajki dviju metoda zahtijeva definiciju kriterijske funkcije koja opisuje tu značajku. Neka je definirano stvarno očekivanje kriterijske funkcije C za metode 1 i 2, $J^{(1)} = E\left(C^{(1)}\right)$ i $J^{(2)} = E\left(C^{(2)}\right)$. Usporedba značajki metoda provodi se testiranjem hipoteze

$$\mathrm{H0} : \Delta J = J^{(2)} - J^{(1)} \leq 0 \tag{C.1}$$

da značajka metode 1 nije bolja od značajke metode 2, u odnosu na hipotezu

$$\mathrm{H1} : \Delta J = J^{(2)} - J^{(1)} > 0 \tag{C.2}$$

da je značajka metode 1 bolja od značajke metode 2, s obzirom na razinu značajnosti α, vjerojatnost prihvaćanja hipoteze H1 iako je hipoteza H0 točna, $P(\mathrm{H1}\,|\,\mathrm{H0}) = \alpha$ [15]. U praksi se testiranje hipoteza provodi uzoračkom srednjom vrijednošću $\overline{\Delta J}$ preko N realizacija (rezultata simulacije),

$$\overline{\Delta J} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Delta C_i, \tag{C.3}$$

pri čemu je

$$\Delta C_i = C_i^{(2)} - C_i^{(1)}. \tag{C.4}$$

Hipoteza H1 se prihvaća ako je zadovoljen uvjet testne statistike $\overline{\Delta J}/\sigma_{\overline{\Delta J}} > d$. Pri tome je varijanca srednje vrijednosti $\overline{\Delta J}$ jednaka stvarnoj varijanci skupa $\{\Delta C_i, i = 1,\ldots,N\}$, podijeljenoj s brojem realizacija N, a kako stvarna varijanca nije poznata, zamjenjuje se uzoračkom varijancom. Stoga je

$$\sigma_{\overline{\Delta J}} = \sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\Delta C_i - \overline{\Delta J}\right)^2}. \tag{C.5}$$

Pod pretpostavkom da $\overline{\Delta J}$ ima Gaussovu razdiobu, granica prihvaćanja hipoteze H1 za razinu greške $\alpha = 0{,}05$ iznosi $d = 1{,}65$.

Dodatak D

D.1. Drugokorijenski kubaturni Kalmanov filtar

Dva bitna svojstva matrice kovarijance estimacije, pozitivna definitnost i simetrija, narušavaju se, zbog konačne preciznosti prezentacije broja u digitalnom računalu, operacijama poput drugog korijena (faktorizacije) (2.164) i (2.167), kvadriranja i inverzije (2.166), (2.169) i (2.170) te oduzimanja (2.146) u rekurzivnoj propagaciji [89]. Također se svojstvo pozitivne definitnosti najvjerojatnije gubi pri estimaciji stanja sustava kada je varijanca mjerenja bitno manja u odnosu na varijancu procesnog šuma ili kada je određena linearna kombinacija komponenti vektora stanja poznata s većom točnošću od ostalih kombinacija koje u biti nisu osmotrive [89]. Prema [352], prinudna simetrija matrice kovarijance poboljšava numeričku stabilnost filtriranja pa se stoga u provedbi filtriranja primjenjuje matrična triangularizacija te nalaženje Kalmanovog koeficijenta metodom najmanjih kvadrata. Triangularizacijom se nalazi drugi korijen kovarijance u formi trokutaste matrice bez potrebe za eksplicitnom operacijom drugog korijena, a metoda najmanjih kvadrata omogućuje nalaženje Kalmanovog koeficijenta bez eksplicitnog dijeljenja.

Matrica kovarijance $\boldsymbol{P}$ može se izraziti kao

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \tag{D.1}$$

pri čemu je $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}, m \geq n$. Poštujući označavanje prema [89], triangularizacijom

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathrm{tria}(\boldsymbol{A}) \tag{D.2}$$

se nalazi trokutasta matrica $\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tako da je

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}. \tag{D.3}$$

Triangularizacija se može provesti npr. QR-dekompozicijom matrice $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}\boldsymbol{\mathcal{R}}, \tag{D.4}$$

pri čemu je $\boldsymbol{\mathcal{Q}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ortogonalna matrica i $\boldsymbol{\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gornja trokutasta matrica. Uvrštenjem (D.4) u (D.1) proizlazi

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{Q}}\boldsymbol{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{T} \tag{D.5}$$

i donja trokutasta matrica

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathrm{T}}. \tag{D.6}$$

Budući da je kovarijanca estimacije $\boldsymbol{P}_k$ izražena produktom trokutastih matrica $\boldsymbol{\mathcal{A}}_k\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{\mathrm{T}}$, zamjenom $\sqrt{\boldsymbol{P}_k} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_k$ u (2.164) te primjenom (D.6) na (2.166) proizlazi drugi korijen apriorne kovarijance kao

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_{k+1} = \mathrm{tria}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1} & \boldsymbol{\mathcal{W}}_k\end{bmatrix}\right), \tag{D.7}$$

pri čemu je $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1}$ drugi korijen kovarijance propagiranih kubaturnih točaka vektora stanja,

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1} = \begin{bmatrix}\sqrt{W_1}\left(\boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{\Xi}_{k,1}\right) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1}\right) & \cdots & \sqrt{W_{2n_x}}\left(\boldsymbol{f}_k\left(\boldsymbol{\Xi}_{k,2n_x}\right) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1}\right)\end{bmatrix}, \tag{D.8}$$

jer su koeficijenti $\{W_i, i = 1,\ldots,2n_x\}$ jednaki $\frac{1}{2n_x}$, a za kovarijancu procesnog šuma vrijedi $\boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{\Gamma}_k^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\mathcal{W}}_k\boldsymbol{\mathcal{W}}_k^{\mathrm{T}}$. Drugi korijen kovarijance inovacije (2.169) dan je s

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_{k+1} = \mathrm{tria}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k+1} & \boldsymbol{\mathcal{V}}_{k+1}\end{bmatrix}\right) \tag{D.9}$$

uz $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k+1}$ kao drugim korijenom kovarijance propagiranih kubaturnih točaka mjerenja,

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k+1} = \begin{bmatrix}\sqrt{W_1}\left(\boldsymbol{h}_{k+1}\left(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{k+1,1}\right) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1}\right) & \cdots & \sqrt{W_{2n_x}}\left(\boldsymbol{h}_{k+1}\left(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{k+1,2n_x}\right) - \bar{\boldsymbol{z}}_{k+1}\right)\end{bmatrix} \tag{D.10}$$

i kovarijancu mjerenja kao $\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{\mathcal{V}}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\mathrm{T}}$. Neka je definirana kovarijanca između propagiranih kubaturnih točaka vektora stanja i mjerenja, $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{k+1} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k+1}^{\mathrm{T}}$. Kalmanov koeficijent (2.170) dan je s

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{k+1} = \left(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{k+1}/\boldsymbol{\mathcal{B}}_{k+1}^{\mathrm{T}}\right)/\boldsymbol{\mathcal{B}}_{k+1} = \left(\boldsymbol{\mathcal{C}}_{k+1}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}}_{k+1}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\mathcal{B}}_{k+1}^{-1}, \tag{D.11}$$

pri čemu je s "/" označena metoda dijeljenja prema nazad, vidi npr. [352]. Tako je drugi korijen aposteriorne kovarijance (2.146), donja trokutasta matrica, dan s [89]

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{k+1} = \mathrm{tria}\left(\begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1}^{(*)} - \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k+1}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k+1}\right) & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{k+1}\boldsymbol{\mathcal{V}}_{k+1}\end{bmatrix}\right), \tag{D.12}$$

pri čemu je

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k+1}^{(*)} = \left[\sqrt{W_1}\left(\boldsymbol{f}_k\left(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{k,1}\right) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \right) \quad \dots \quad \sqrt{W_{2n_x}}\left(\boldsymbol{f}_k\left(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{k,2n_x}\right) - \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} \right) \right]. \tag{D.13}$$

Primjenom (D.6) na račun kovarijance (4.78) u metodi vjerojatnosnog pridruživanja, vidi odjeljak 4.3.1, pod hipotezom da je model m_i stvarni mod gibanja za trenutak $t = t_k$ te uz n_k mjerenja i kovarijancu raspršenja $\tilde{\boldsymbol{P}}_k^{(i)} = \tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k^{(i)} \left(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}$, daje

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k^{(i)} = \boldsymbol{\mathcal{K}}_k \left[\sqrt{\beta_{k,1}^{(i)}} \left(\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,1}^{(i)} - \tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)} \right) \quad \dots \quad \sqrt{\beta_{k,n_k}^{(i)}} \left(\tilde{\boldsymbol{z}}_{k,n_k}^{(i)} - \tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)} \right) \quad \sqrt{\beta_{k,0}^{(i)}} \tilde{\boldsymbol{z}}_k^{(i)} \right], \tag{D.14}$$

tako da je drugi korijen kovarijance estimacije (4.95) jednak

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{(i)} = \mathrm{tria}\left(\left[\sqrt{\beta_{k,0}^{(i)}} \bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k^{(i)} \quad \sqrt{\frac{\beta_{k,0}^{(i)} P_D P_G (1-c_\gamma)}{1 - P_D P_G}} \boldsymbol{K}_k^{(i)} \boldsymbol{\mathcal{B}}_k^{(i)} \quad \sqrt{1 - \beta_{k,0}^{(i)}} \boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{(i,j)} \quad \tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k^{(i)} \right] \right), \tag{D.15}$$

pri čemu je $\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{(i,j)}$ drugi korijen standardne kovarijance estimacije (4.92), izražen u formi umnoška donjih trokutastih matrica tako da vrijedi $\boldsymbol{P}_k^{(i,j)} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{(i,j)} \left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_k^{(i,j)}\right)^{\mathrm{T}}$, a $\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}_k^{(i)}$ drugi korijen apriorne kovarijance prema (D.7).

Primjena (D.6) na početni uvjet kovarijance (2.301) u višemodelnoj metodi IMM rezultira donjom trokutastom matricom

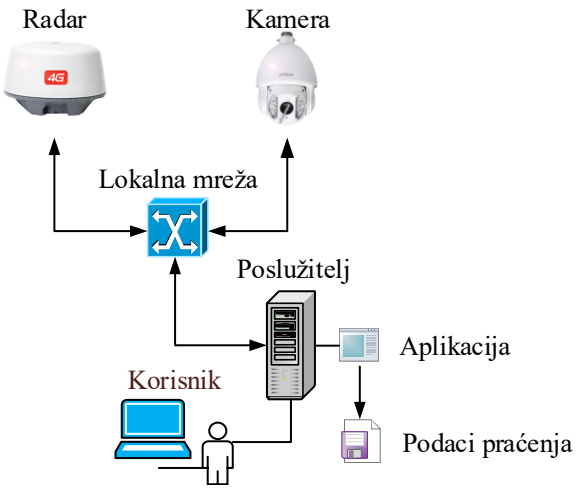
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{k-1}^{(i*)} = \mathrm{tria}\Bigg(\Bigg[& \sqrt{P\left(m_{k-1} = m_1 \,|\, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right)} \left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{k-1}^{(1)} + \left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(1)} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)} \right) \right) \\ & \dots \\ & \sqrt{P\left(m_{k-1} = m_M \,|\, m_k = m_i, \mathbb{Z}^{k-1}\right)} \left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{k-1}^{(M)} + \left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(M)} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)} \right) \right) \Bigg] \Bigg), \end{aligned} \tag{D.16}$$

pri čemu je broj modela jednak M, početni uvjet $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i*)}$ dan s (2.298) i $\boldsymbol{P}_{k-1}^{(i*)} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{k-1}^{(i*)} \left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{k-1}^{(i*)}\right)^{\mathrm{T}}$. Kovarijanca estimacije pod hipotezom modela m_j u trenutku t_{k-1} dana je s $\boldsymbol{P}_{k-1}^{(j)} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{k-1}^{(j)} \left(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{k-1}^{(j)}\right)^{\mathrm{T}}$.

Dodatak E

E.1. Demonstracija rada Viterbijeve metode pridruživanja

U ovome su dodatku prikazani rezultati demonstracije rada Viterbijeve metode pridruživanja u različitim scenarijima praćenja testnog i stvarnog cilja. Kako je ilustrirano slikom E.1, demonstracija je provedena pomoću sustava koji se sastojao od radarskog senzora i kamere. Pri tome se koristio radarski senzor SIMRAD Broadband 4G [353], čije su značajke dane tablicom E.1. Pozicija radarskog senzora i kamere bila je (43,523925° N, 16,431340° E) (u referentnom koordinatnom sustavu WGS84), na nadmorskoj visini 30 m, a ciljevi su praćeni unutar Kaštelanskog zaljeva od 29. do 31. svibnja 2019. Radarskim senzorom, kamerom te procesom praćenja unutar kojeg je bila implementirana metoda Viterbijevog pridruživanja prema opisu u odjeljku 4.5, upravljalo se putem aplikacije. Pri tome neuronska mreža nije bila implementirana u segmentima detekcije i pridruživanja zbog toga što je, za estimaciju amplitudne razdiobe odjeka smetnje i cilja prema rezultatima odjeljka 6.2, bilo potrebno 256 kvantizacijskih razina (jer nije bio dostupan analogni video signal, pa se nije mogla provesti metoda s unosom šuma (*dither*)), a proizvođač je omogućio samo 16 kvantizacijskih razina. Kamerom je zabilježeno praćenje s radarskog senzora kako bi se provela vizualna inspekcija kvalitete praćenja. Kamera nije bila kalibrirana te se nije mogla tretirati kao mjerni instrument, već samo kao indikator.



Slika E.1. Ilustracija sustava za demonstraciju Viterbijeve metode pridruživanja.

Tablica E.1. Značajke radarskog senzora SIMRAD Broadband 4G [353].

Značajka	Vrijednost
Radiofrekvencijska snaga	165 mW
Frekvencija zračenja	Od 9,3 GHz do 9,4 GHz
Modulacija	Frekvencijska, devijacije 75 MHz
Valni oblik signala modulacije	Pila, vremena trajanja 1,5 ms
Frekvencija ponavljanja	Od 200 Hz do 540 Hz
Širina antenskog snopa (kriterij -3 dB)	5,2° u horizontalnoj ravnini 25° u vertikalnoj ravnini
Polarizacija	Horizontalna
Kutna brzina antene	2,513 rad s^{-1} (24 o/min), 3,77 rad s^{-1} (36 o/min), 5,027 rad s^{-1} (48 o/min)
Razina bočnih latica u horizontalnoj ravnini	< -18 dB unutar širine snopa $\pm 10°$ < -24 dB izvan širine snopa $\pm 10°$
Faktor šuma	6 dB

Parametre Viterbijeve metode pridruživanja koja je bila implementirana u procesu praćenja prikazuje tablica E.2. Kako točna pozicija i brzina praćenih ciljeva nije bila dostupna, nije bila moguća ni analiza kovarijance greške estimacije, već samo tijek vjerojatnosti primjetljivosti kroz vrijeme trajanja staze (prema kojoj se može ocijeniti kvaliteta praćenja), tijek vjerojatnosti modela (iz koje se može zaključiti o karakteru gibanja praćenog cilja), estimirana staza s

mjerenjima i njihov broj unutar volumena valjanosti iz kojeg, prema (4.37), poznavajući volumen razlučivosti radarskog senzora, proizlazi uzoračka estimacija vjerojatnosti lažne detekcije. Važno je napomenuti da je aplikacija zapisivala podatke samo za opservacije u kojima je postojalo barem jedno mjerenje unutar volumena valjanosti.

Tablica E.2. Parametri metode pridruživanja.

Parametar	Vrijednost	Opis
–	IMM	Okvir višemodelne estimacije, vidi odjeljak 2.3.3 (stranica 70)
–	CKF	Estimator, drugokorijenski kubaturni Kalmanov filtar, vidi odjeljak 2.3.1 (stranica 38) i dodatak D.1
$\lvert\mathbb{M}\rvert$	2	Broj modela u višemodelnoj estimaciji IMM
Q_x	$0{,}3\ \mathrm{m^2\,s^{-3}}$	Kovarijanca procesnog šuma za linearni model gibanja u okviru višemodelne estimacije IMM, jednak za koordinatu x (sjever) i za koordinatu y (istok), tako da je $\boldsymbol{Q}_x = Q_x \boldsymbol{I}_2$, vidi odjeljak 2.1.2
τ_t, τ_n	25 s	Vrijeme korelacije tangencijalne i normalne komponente akceleracije za model krivocrtnog gibanja (model manevra) u okviru višemodelne estimacije IMM, vidi odjeljak 2.1.3 (stranica 25)
$\mathrm{d}r$	25 m	Radijalna razlučivost senzora
$\mathrm{d}\varphi$	5°	Azimutna razlučivost senzora
Δr	25 m	Radijalna razlučivost polarnog sustava
$\Delta\varphi$	1°	Azimutna razlučivost polarnog sustava
σ_t^2, σ_n^2	$8\ \mathrm{m^2\,s^{-4}}$	Procesni šum tangencijalne i normalne komponente akceleracije za model krivocrtnog gibanja (model manevra) u okviru višemodelne estimacije IMM, vidi odjeljak 2.1.3 (stranica 25)
P_{11}	0,9	Vjerojatnost zadržavanja u modu linearnog gibanja, vidi (2.335) i (2.336)
P_{22}	0,98	Vjerojatnost zadržavanja u modu manevrirajućeg gibanja, vidi (2.335) i (2.336)
–	ST-VDA	Metoda pridruživanja, vidi odjeljak 4.3.2 te primjer u odjeljku 4.5
$P(D_{k+1} \mid D_k)$	0,99	Prijelazna vjerojatnost primjetljivog cilja, vidi primjer u odjeljku 4.5 (stranica 182)

Tablica E.2. (nastavak).

Parametar	Vrijednost	Opis
$P(D_{k+1}\,\vert,\bar{D}_k)$	0,1	Prijelazna vjerojatnost neprimjetljivog cilja u primjetljiv cilj, vidi primjer u odjeljku 4.5 (stranica 182)
$\mathcal{D}_0$	0,50	Početna vjerojatnost primjetljivosti
γ	16	Veličina volumena valjanosti
–	Polarni	Koordinatni sustav mjerenja, vidi odjeljak 2.2
T	2,5 s	Vrijeme između dviju sukcesivnih opservacija (vrijeme okreta antene)
σ_r	7,217 m	Devijacija greške mjerenja po udaljenosti
σ_φ	5,0383 mrad	Devijacija greške mjerenja po azimutu

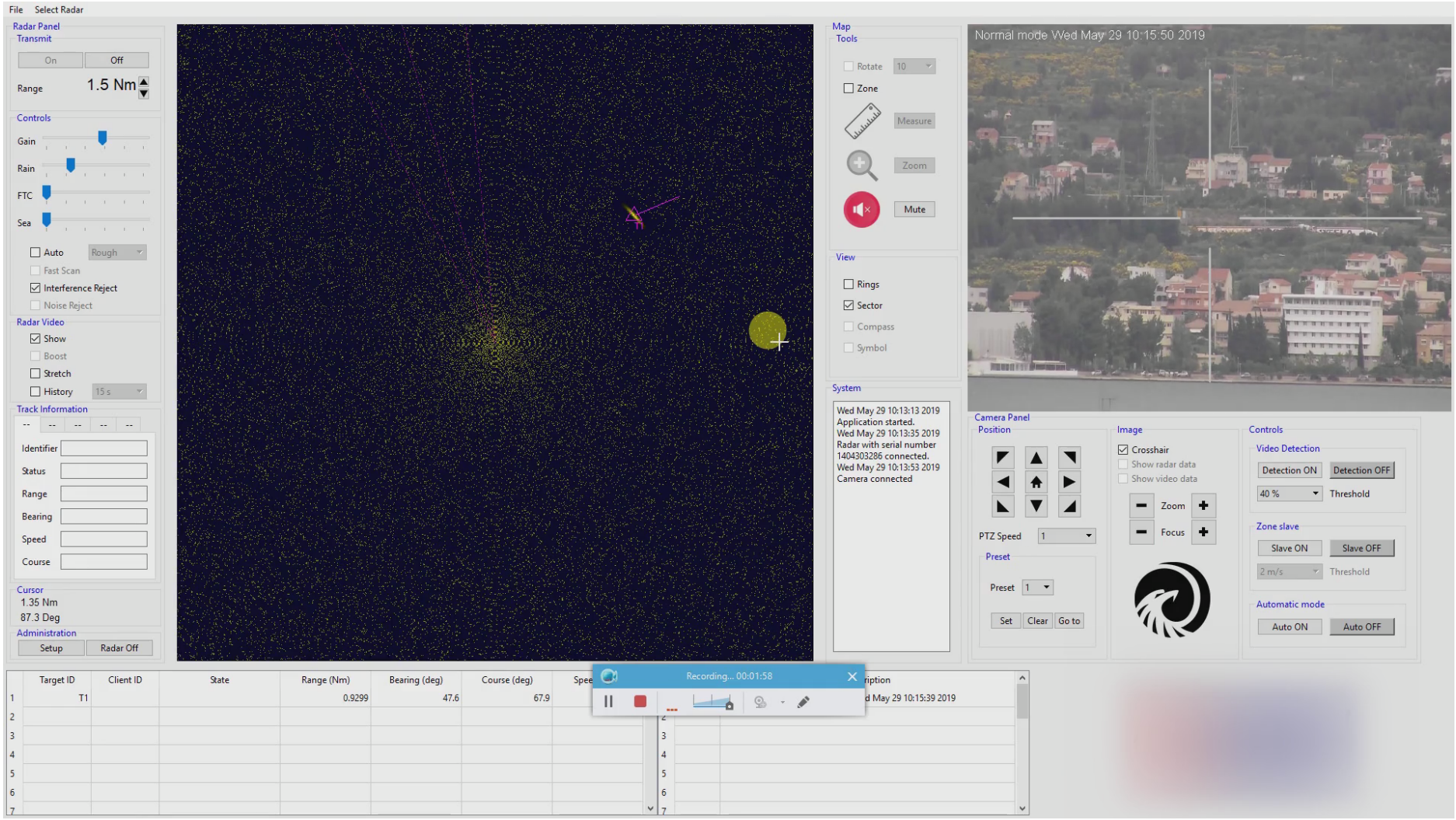
Video isječci demonstracije priloženi su na kompaktnom disku kao dodatak. Scenariji su redom:

1. praćenje testnog cilja nefluktuirajućeg odjeka
2. praćenje testnog cilja fluktuirajućeg odjeka
3. praćenje jahte u blizini obale
4. praćenje izolirane brodice, varijanta 1
5. praćenje izolirane brodice, varijanta 2
6. praćenje brodice u blizini druge brodice
7. praćenje izolirane brodice pri smetnji kiše

i detaljnije su opisani u narednim odjeljcima.

E.1.1. Praćenje testnog cilja

Video isječak (datoteka „E-1-1_Viterbi_Simulated_target_no_fluctuations.mp4” priložena na kompaktnom disku) prikazuje praćenje testnog cilja, staze prema primjeru u odjeljku 2.4 (vidi primjere realizacije staze ilustrirane slikama 2.23a, 5.62 i 5.65), nefluktuirajućeg odjeka, u pozadinskom šumu prema Rayleighovoj razdiobi (3.32). Ilustracija video isječka prikazana je slikom E.2, a tablica E.3 prikazuje parametre simulacije.



Slika E.2. Ilustracija video isječka praćenja testnog cilja bez fluktuacije odjeka.

Tablica E.3. Parametri simulacije testnog cilja.

Parametar	Vrijednost	Opis
–	NED	Koordinatni sustav za dinamički model gibanja cilja te za estimaciju
T	2,5 s	Vrijeme između dviju sukcesivnih opservacija (vrijeme okreta antene)
–	25 s	Trajanje manevra
t_1	50 s	Početak manevra
$\mathrm{x}(t_0)$	1.000 m	Početna koordinata x (sjever)
$\mathrm{y}(t_0)$	1.000 m	Početna koordinata y (istok)
$\dot{\mathrm{x}}(t_0)$	10 ms^{-1}	Početna brzina duž koordinate x
$\dot{\mathrm{y}}(t_0)$	10 ms^{-1}	Početna brzina duž koordinate y
Q_x	0,6 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-3}$	Kovarijanca procesnog šuma u segmentu linearnog gibanja, jednaka za koordinatu x (sjever) i za koordinatu y (istok), tako da je $\boldsymbol{Q}_x = Q_x \boldsymbol{I}_2$, vidi odjeljak 2.1.2
$\bar{\omega}$	157 $\mathrm{mrad\,s}^{-1}$	Srednja kutna brzina okreta u segmentu manevra, vidi odjeljak 2.1.3 (stranica 24) te primjer u odjeljku 2.4 (stranica 77)
$\sigma^2_{\dot{\mathbf{x}}}$	0,6 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-3}$	Procesni šum obodne brzine u segmentu manevra, vidi odjeljak 2.1.3 (stranica 24)
σ^2_{ω}	0,0001 $\mathrm{rad}^2\,\mathrm{s}^{-3}$	Procesni šum kutne brzine u segmentu manevra, vidi odjeljak 2.1.3 (stranica 24)
$\Delta r^{(*)}$	8 m	Radijalna razlučivost polarnog sustava u kontekstu prikaza radarskog videa
$\Delta\varphi^{(*)}$	0,2°	Azimutna razlučivost polarnog sustava u kontekstu prikaza radarskog videa
P_D	1	Dizajnirana vjerojatnost detekcije
P_{FA}	0,1	Dizajnirana vjerojatnost lažne detekcije
$p_{\boldsymbol{\zeta}(F)}$	$\mathscr{R}(\cdot;\eta)$	Referentna Rayleighova razdioba termičkog šuma (3.32)
η	$4{,}14\times10^{-15}$ W	Snaga termičkog šuma pri sobnoj temperaturi 300 °K i frekvencijskoj širini pojasa 1 MHz
–	$\mathrm{c}+\log_{\mathrm{e}}(\mathrm{s}\zeta)$	Prijenosna funkcija logaritamskog prijemnika
s	10^8 V^{-1}	Konstanta skaliranja

Tablica E.3. (nastavak).

Parametar	Vrijednost	Opis
c	7	Konstanta pristranosti
$\zeta_{min}^{(*)}$	$-\infty$	Minimalna izlazna vrijednost logaritamskog prijemnika
$\zeta_{max}^{(*)}$	$+\infty$	Maksimalna izlazna vrijednost logaritamskog prijemnika
N_Q	16	Broj razina kvantizacije
z_{min}	0	Minimalna izlazna veličina
z_{max}	15	Maksimalna izlazna veličina
Δz	1	Korak kvantizacije

Odjek cilja modeliran je kao Gaussov, tako da je za polarne koordinate (r,φ) ovisan o poziciji (r_k,φ_k) u trenutku vremenskog indeksa k kao [354]

$$\zeta_k(r,\varphi) = \mathrm{s}^{-1}\exp(z_{max}-\mathrm{c})\exp\left(-\frac{(r-r_k)^2}{0{,}36\,\mathrm{d}r^2}\right)\exp\left(-\frac{(\varphi-\varphi_k)^2}{0{,}36\,\mathrm{d}\varphi^2}\right), \tag{E.1}$$

pri čemu su vrijednosti dr i dφ dane u tablici E.2, a c, s i $\zeta_{max}^{(*)}$ u tablici E.3. Termički šum generiran je u skladu s Raleighovom razdiobom (3.32)

$$p_{\zeta(F)}(\zeta\,|\,\eta) = \mathscr{R}(\zeta;\eta) = \frac{\zeta}{\eta}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\eta}\right), \quad \eta>0\wedge\zeta\geq 0. \tag{3.32}$$

Za radijalnu udaljenost $r\in[r_k-3\mathrm{d}r, r_k+3\mathrm{d}r]$ i azimut $\varphi\in[\varphi_k-\mathrm{d}\varphi,\varphi_k+\mathrm{d}\varphi]$, generiran je isključivo odjek cilja prema (E.1), a za ostale vrijednosti koordinata (r,φ) isključivo termički šum amplitudne razdiobe (3.32). Nadalje, simuliran je logaritamski prijemnik tako da je prema (6.11),

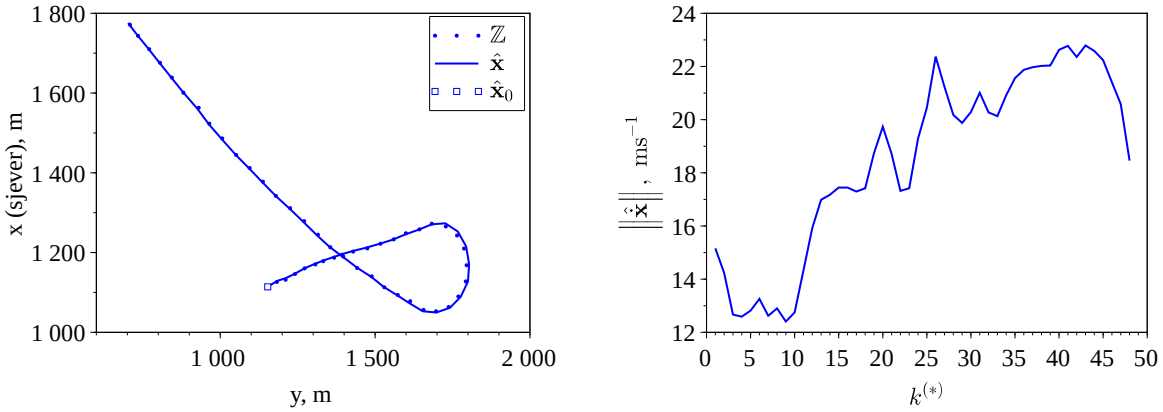
$$z_k(r,\varphi) = h_Q\left(\mathrm{c}+\log_\mathrm{e}\left(\mathrm{s}\zeta_k^{(*)}(r,\varphi)\right), N_Q\right), \tag{E.2}$$

vrijednost koja je prikazana na radarskom zaslonu.

U ovoj je simulaciji azimutna razlučivost polarnog sustava $\Delta\varphi^{(*)}$ u kontekstu prikaza radarskog videa (vidi tablicu E.3) bila manja od razlučivosti polarnog sustava $\Delta\varphi$ prema tablici E.2 zbog toga što je značajka senzora 2048 azimutnih vrijednosti po jednom punom okretu antene, a u simulaciji se svaka tretirala posebno. Radijalna je razlučivost d$r^{(*)}$ također bila manja

od razlučivosti senzora dr zbog toga što je značajka prikaza uzimanje približno tri uzorka po radijalnom odjeku stvarnog cilja koji se može opisati čestičnim modelom. Drugim riječima, razlučivost polarnog sustava za prikaz radarskog videa bila je veća od razlučivosti senzora. Međutim, u procesu praćenja bila je primijenjena vrijednosti greške mjerenja po udaljenosti σ_r i azimutu σ_φ u skladu s tablicom E.2.

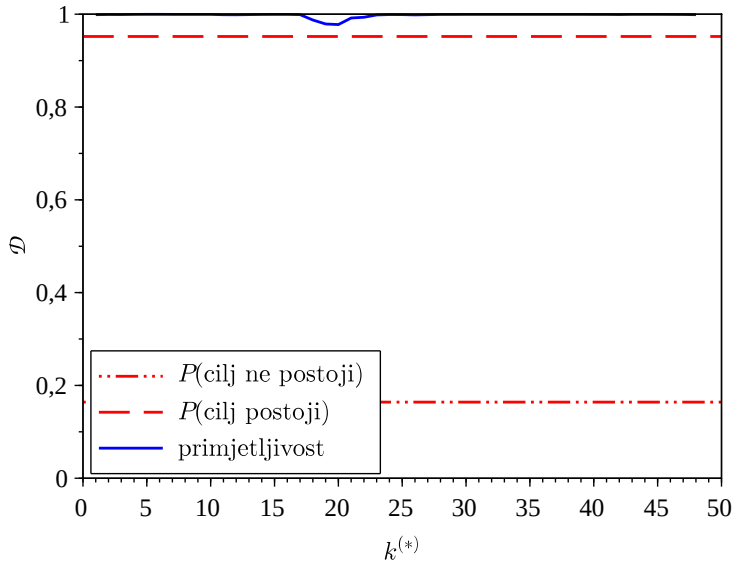
Slika E.3 ilustrira tijek estimacije staze. Dok je tijek vjerojatnosti primjetljivosti ilustriran slikom E.5, tijek vjerojatnosti modela linearnog gibanja i manevra ilustriran je slikom E.4. Vjerojatnost primjetljivosti kroz cijelo je vrijeme praćenja visoka, a vjerojatnost modela m_2 jasno indicira manevar u indeksu $k^{(*)} \approx 18$ (čemu odgovara indeks opservacije $k = 22$ zbog toga što su potrebne četiri opservacije s mjerenjima kako bi se deklariralo postojanje cilja, vidi sliku 4.9).



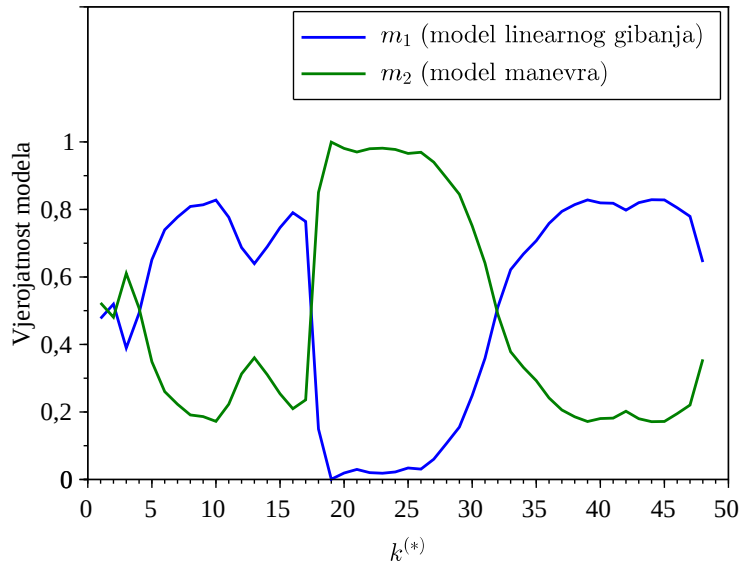
(a) Estimacija pozicije.

(b) Estimacija brzine.

Slika E.3. Estimacija staze testnog cilja. Estimacija pozicije označena je s $\hat{\mathbf{x}}$, a estimacija pozicije u trenutku deklaracije postojanja cilja s $\hat{\mathbf{x}}_0$. Skup mjerenja označen je sa $\mathbb{Z}$. Redni broj opservacije s najmanje jednim mjerenjem i od trenutka deklaracije postojanja cilja označen je s $k^{(*)}$.



Slika E.4. Tijek vjerojatnosti primjetljivosti testnog cilja $\mathcal{D}$ ovisno o rednom broju opservacije s najmanje jednim mjerenjem $k^{(*)}$ od trenutka deklaracije postojanja cilja.



Slika E.5. Tijek vjerojatnosti modela gibanja testnog cilja ovisno o rednom broju opservacije s najmanje jednim mjerenjem $k^{(*)}$ (od trenutka deklaracije postojanja cilja).

E.1.2. Praćenje testnog cilja fluktuirajućeg odjeka

Video isječak (datoteka „E-1-2_Viterbi_Simulated_target_fluctuations.mp4" priložena na kompaktnom disku), ilustriran slikom E.6, prikazuje praćenje testnog cilja s fluktuacijom amplitude odjeka prema Swerlingovom modelu br. 1 [73]. Gibanje cilja opisano je parametrima prema tablici E.3 u odjeljku E.1.1. Odjek cilja generiran je prema

$$\zeta_k(r,\varphi) = \zeta_0 \exp\left(-\frac{(r-r_k)^2}{0{,}36\,\mathrm{d}r^2}\right) \exp\left(-\frac{(\varphi-\varphi_k)^2}{0{,}36\,\mathrm{d}\varphi^2}\right) \tag{E.1}$$

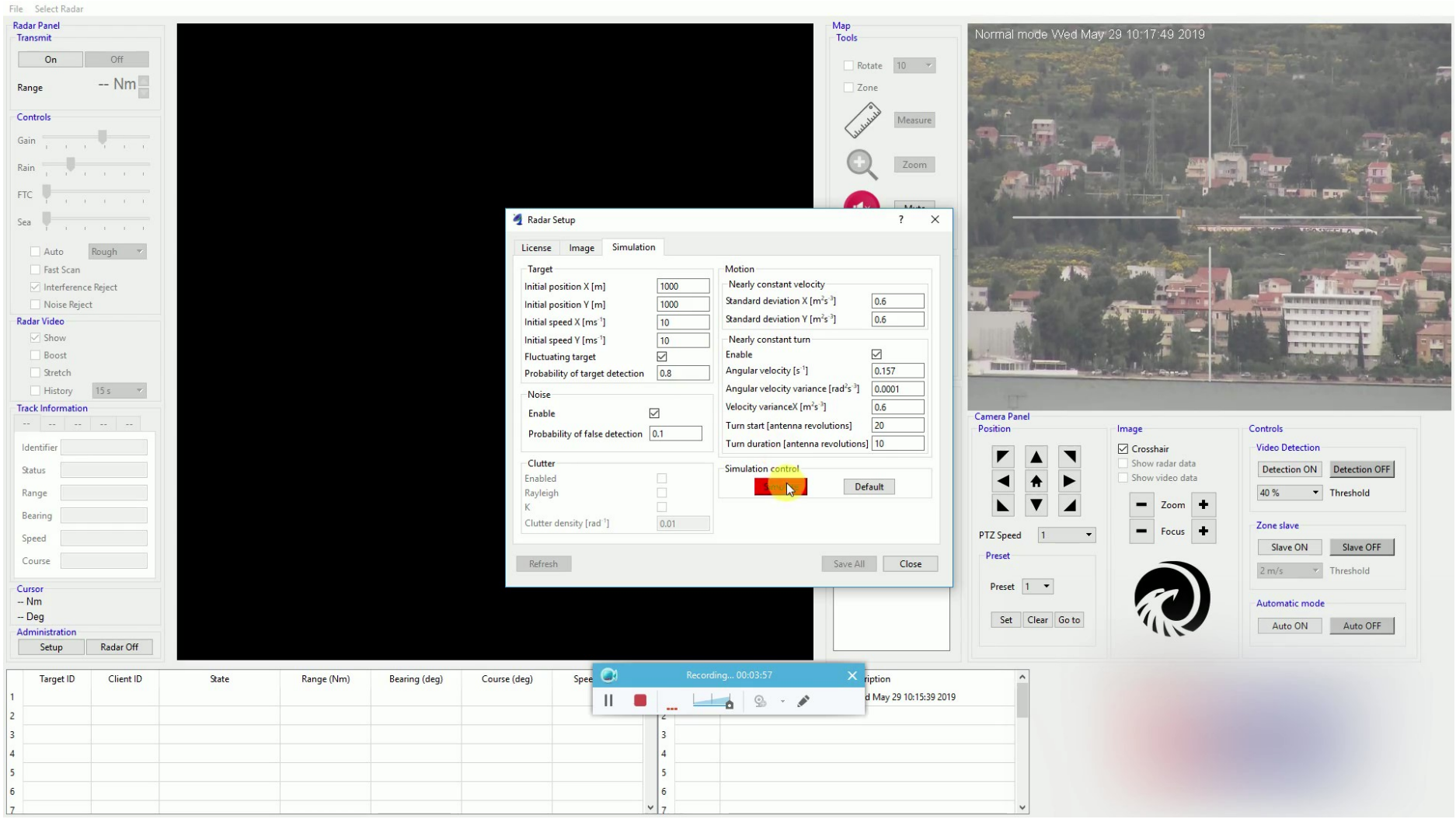
unutar intervala radijalne udaljenosti $r \in [r_k - 3\mathrm{d}r, r_k + 3\mathrm{d}r]$ i azimuta $\varphi \in [\varphi_k - \mathrm{d}\varphi, \varphi_k + \mathrm{d}\varphi]$. Za vrijednosti $r \notin [r_k - 3\mathrm{d}r, r_k + 3\mathrm{d}r]$ i $\varphi \notin [\varphi_k - \mathrm{d}\varphi, \varphi_k + \mathrm{d}\varphi]$, generiran je termički šum prema (3.32). Veličina ζ_0 je slučajna varijabla Rayleighove razdiobe $p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\zeta)$,

$$p_{\boldsymbol{\zeta}(T)}(\zeta) = \mathscr{R}(\zeta; d) = \frac{\zeta}{d} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2d}\right), \quad \zeta, d \geq 0, \tag{E.3}$$

pri čemu je d snaga odjeka cilja i vrijedi da je $d = \mathcal{R}\eta$. Omjer $\mathcal{R}$ bio je određen dizajniranim vrijednostima vjerojatnosti lažne detekcije P_{FA} i vjerojatnosti detekcije cilja P_D. Iz (3.32) i (E.3), proizlazi da je

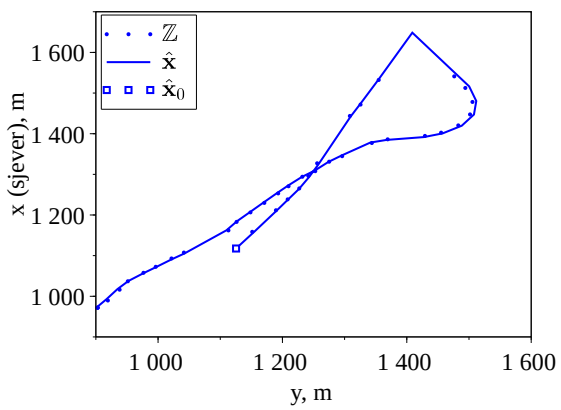
$$\mathcal{R} = \frac{\log_{\mathrm{e}}(P_{FA})}{\log_{\mathrm{e}}(P_D)}. \tag{E.4}$$

U ovom je primjeru dizajnirana vjerojatnost detekcije bila $P_D = 0{,}8$ i vjerojatnost lažne detekcije $P_{FA} = 0{,}1$, pa je prema (E.4), omjer snage signala prema snazi smetnje bio $\mathcal{R} \approx 10$ dB.

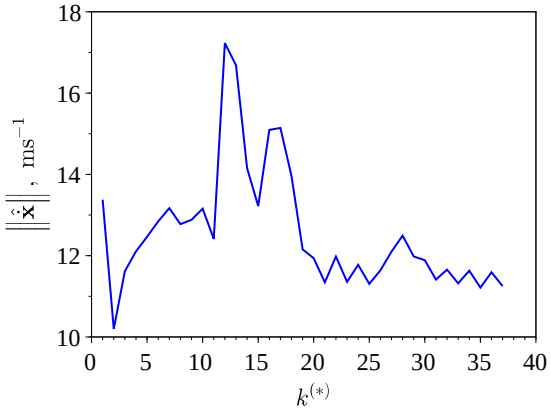


Slika E.6. Ilustracija video isječka praćenja testnog cilja s fluktuacijom odjeka.

Estimaciju pozicije i brzine jedne stohastičke realizacije staze ilustrira slika E.7. Zbog opservacija bez mjerenja (posljedica realne vjerojatnosti detekcije $P_D < 1$), primjetljivost je cilja u određenim indeksima $k^{(*)}$ malena, kako ilustrira slika E.8, ali tijek vjerojatnosti modela jasno indicira početak manevra u trenutku $k^{(*)} = 12$, slika E.9.

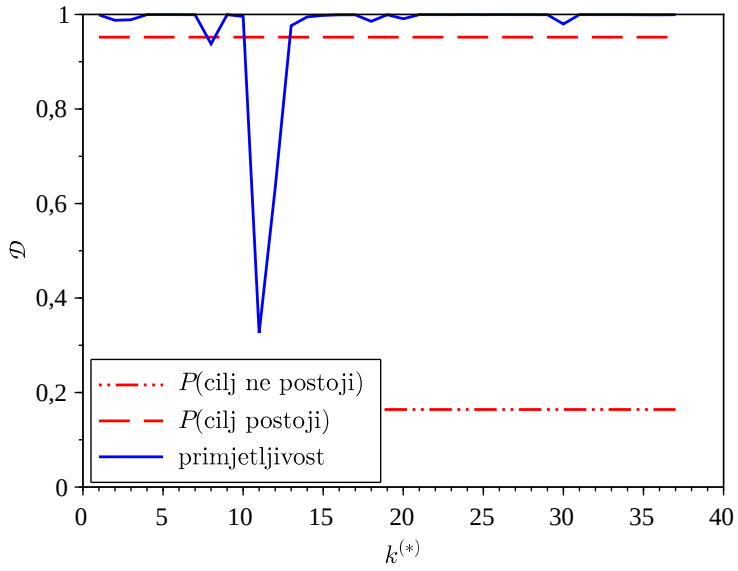


(a) Estimacija pozicije.

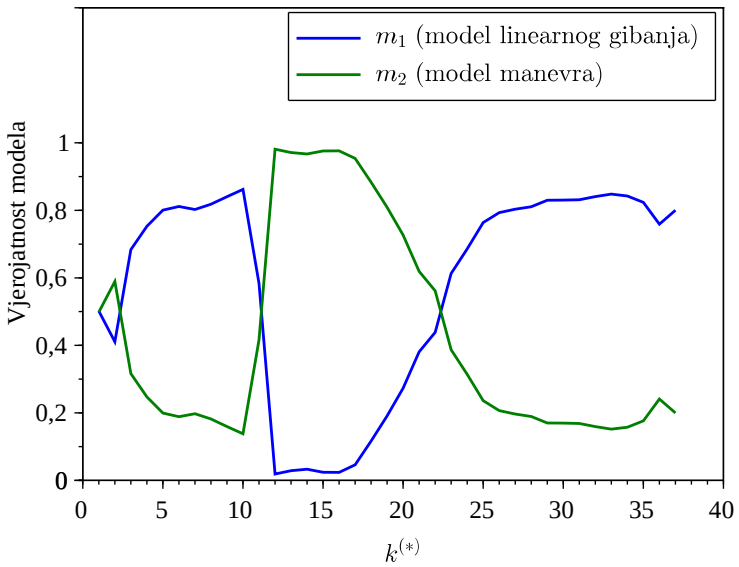


(b) Estimacija brzine.

Slika E.7. Estimacija staze testnog cilja s fluktuacijom amplitude odjeka uz vjerojatnost detekcije $P_D = 0{,}8$. Estimacija pozicije označena je s $\hat{\mathbf{x}}$, pri čemu $\hat{\mathbf{x}}_0$ označava estimaciju pozicije u trenutku deklaracije postojanja cilja. Skup mjerenja označen je sa $\mathbb{Z}$, a redni broj opservacije s najmanje jednim mjerenjem i od trenutka deklaracije postojanja cilja s $k^{(*)}$.



Slika E.8. Tijek vjerojatnosti primjetljivosti testnog cilja s fluktuacijom amplitude $\mathcal{D}$ ovisno o rednom broju opservacije s najmanje jednim mjerenjem $k^{(*)}$ (od trenutka deklaracije postojanja cilja), uz vjerojatnost detekcije $P_D = 0{,}8$.



Slika E.9. Tijek vjerojatnosti modela gibanja testnog cilja s fluktuacijom amplitude ovisno o rednom broju opservacije s najmanje jednim mjerenjem $k^{(*)}$ (od trenutka deklaracije postojanja cilja). Vjerojatnost detekcije iznosi $P_D = 0{,}8$.

E.1.3. Praćenje jahte u blizini obale

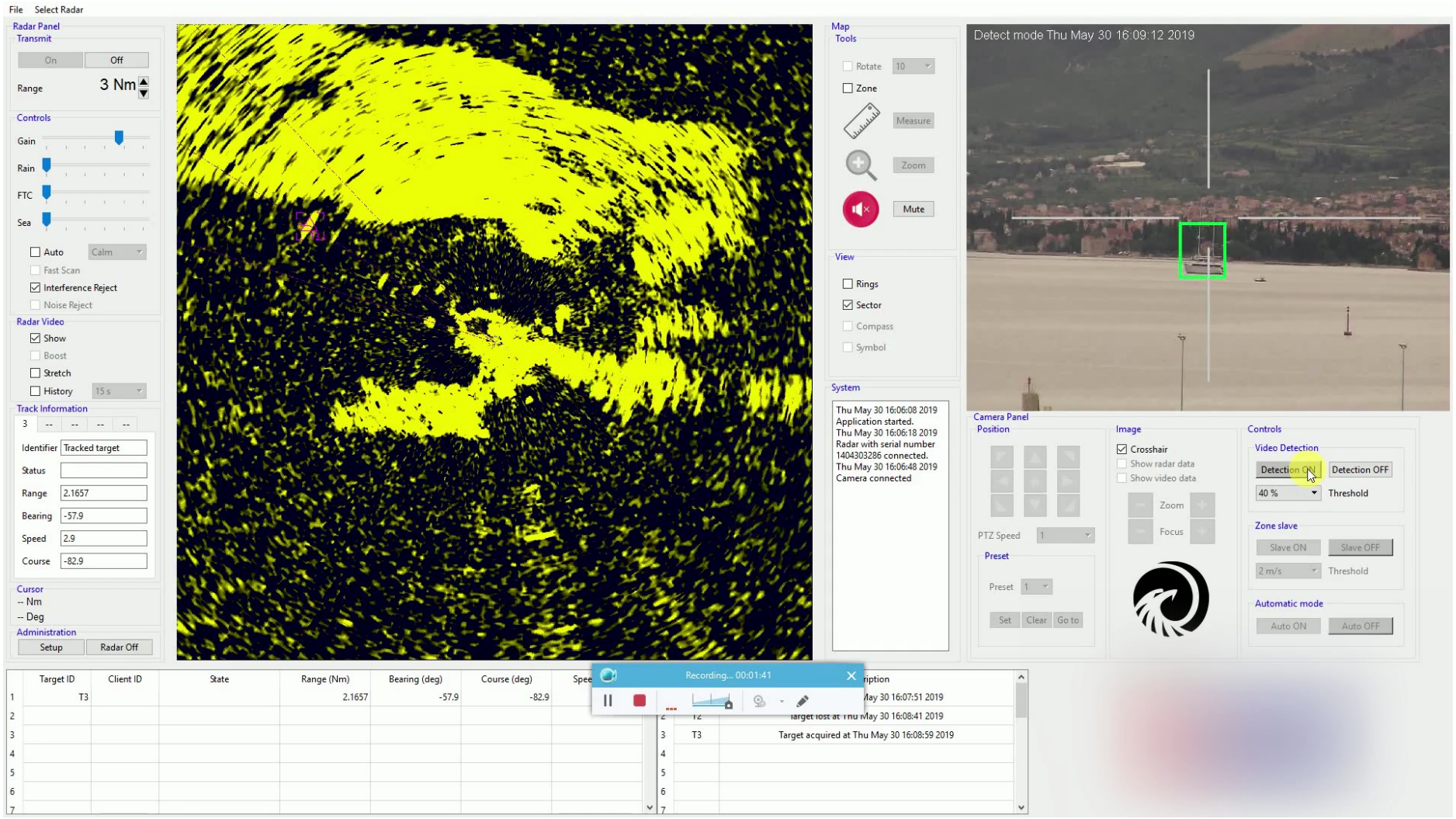
Video isječak (datoteka „E-1-3_Viterbi_Steady_target.mp4" priložena na kompaktnom disku), ilustriran slikom E.10, prikazuje praćenje jahte (prema klasifikaciji Pravilnika o brodicama, čamcima i jahtama, Narodne novine, br. 13/2020) u blizini obale. U ovom scenariju, odjeci smetnje u okolici praćenog cilja bili su kombinacija odjeka mora i šuma svojstvenog radarskom senzoru s frekvencijskom modulacijom. Dok slika E.11 ilustrira estimaciju staze, slika E.12 ilustrira kvalitetu praćenja. Vjerojatnost primjetljivosti $\mathcal{D}$ vrlo je visoka kroz cijelo vrijeme praćenja, osim u intervalu $k^{(*)} \in (12, 14)$, što je posljedica povećane greške estimacije zbog kolebanja estimirane pozicije duž azimutne komponente fluktuirajućeg odjeka cilja. Slika E.13 ilustrira tijek vjerojatnosti modela, slika E.14 tijek broja mjerenja unutar volumena valjanosti, a slika E.15a tijek uzoračke estimacije prostorne gustoće smetnje

$$\hat{\lambda}_{k^{(*)}} = \frac{n_{k^{(*)}}}{V_{k^{(*)}}}, \tag{E.5}$$

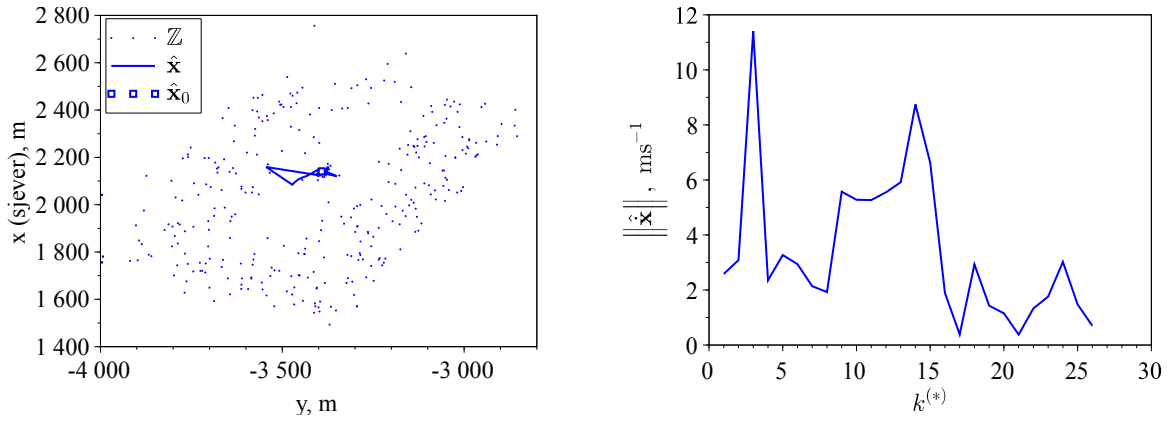
gdje su $n_{k^{(*)}}$ i $V_{k^{(*)}}$ broj mjerenja i volumen valjanosti za trenutak $k^{(*)}$. Iz (E.5) i (4.37) proizlazi uzoračka estimacija vjerojatnosti lažne detekcije (ilustrirana slikom E.15b), kao

$$\hat{P}_{FA_{k^{(*)}}} = \frac{\lambda_{k^{(*)}}}{V_r}, \tag{E.6}$$

pri čemu je $V_r = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \approx \pi \Delta r \Delta\varphi$ volumen razlučivosti senzora.



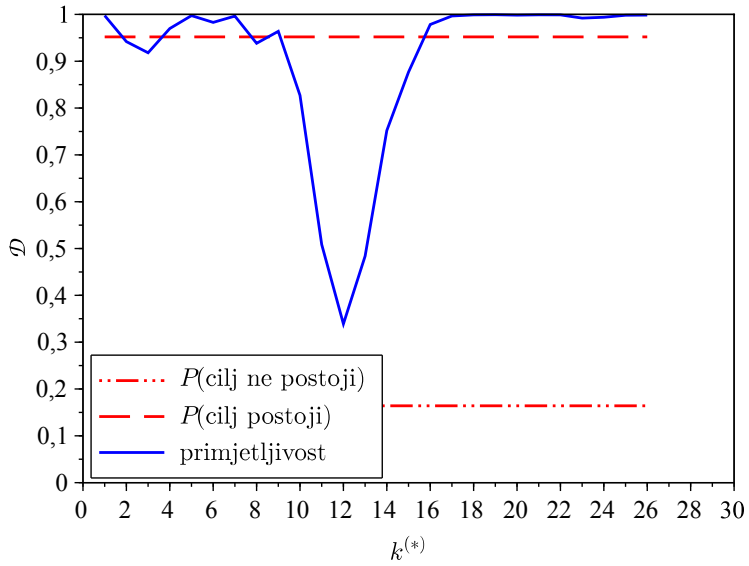
Slika E.10. Ilustracija video isječka praćenja jahte u blizini obale.



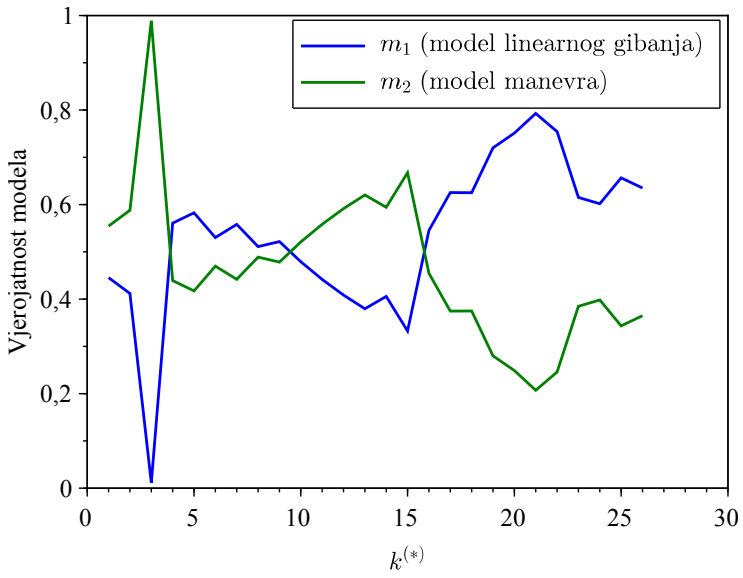
(a) Estimacija pozicije.

(b) Estimacija brzine.

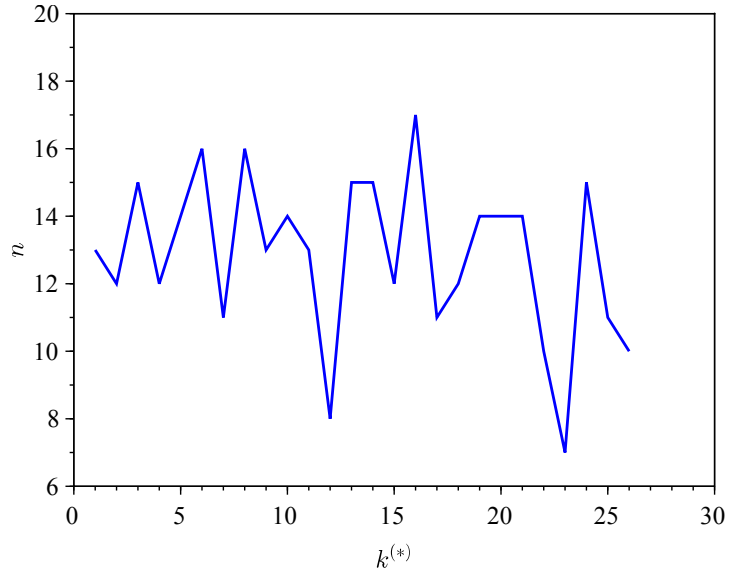
Slika E.11. Estimacija staze jahte u blizini obale. Estimacija pozicije označena je s $\hat{\mathbf{x}}$, a $\hat{\mathbf{x}}_0$ označava estimaciju pozicije u trenutku potvrde staze. Skup mjerenja označen je sa $\mathbb{Z}$, a redni broj opservacije s najmanje jednim mjerenjem i od trenutka potvrde staze s $k^{(*)}$.



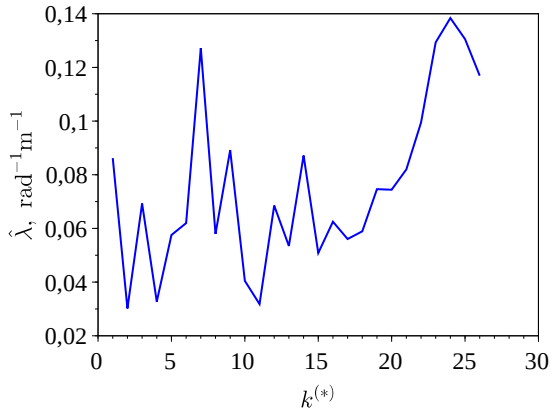
Slika E.12. Tijek vjerojatnosti primjetljivosti jahte ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



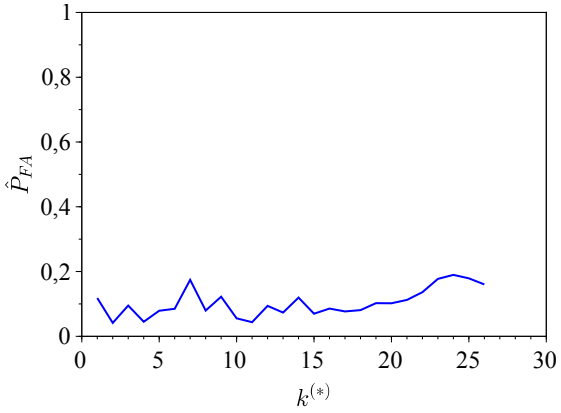
Slika E.13. Tijek vjerojatnosti modela gibanja jahte ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



Slika E.14. Broj mjerenja unutar volumena valjanosti pri praćenju jahte, ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



(a) Prostorna gustoća smetnje.

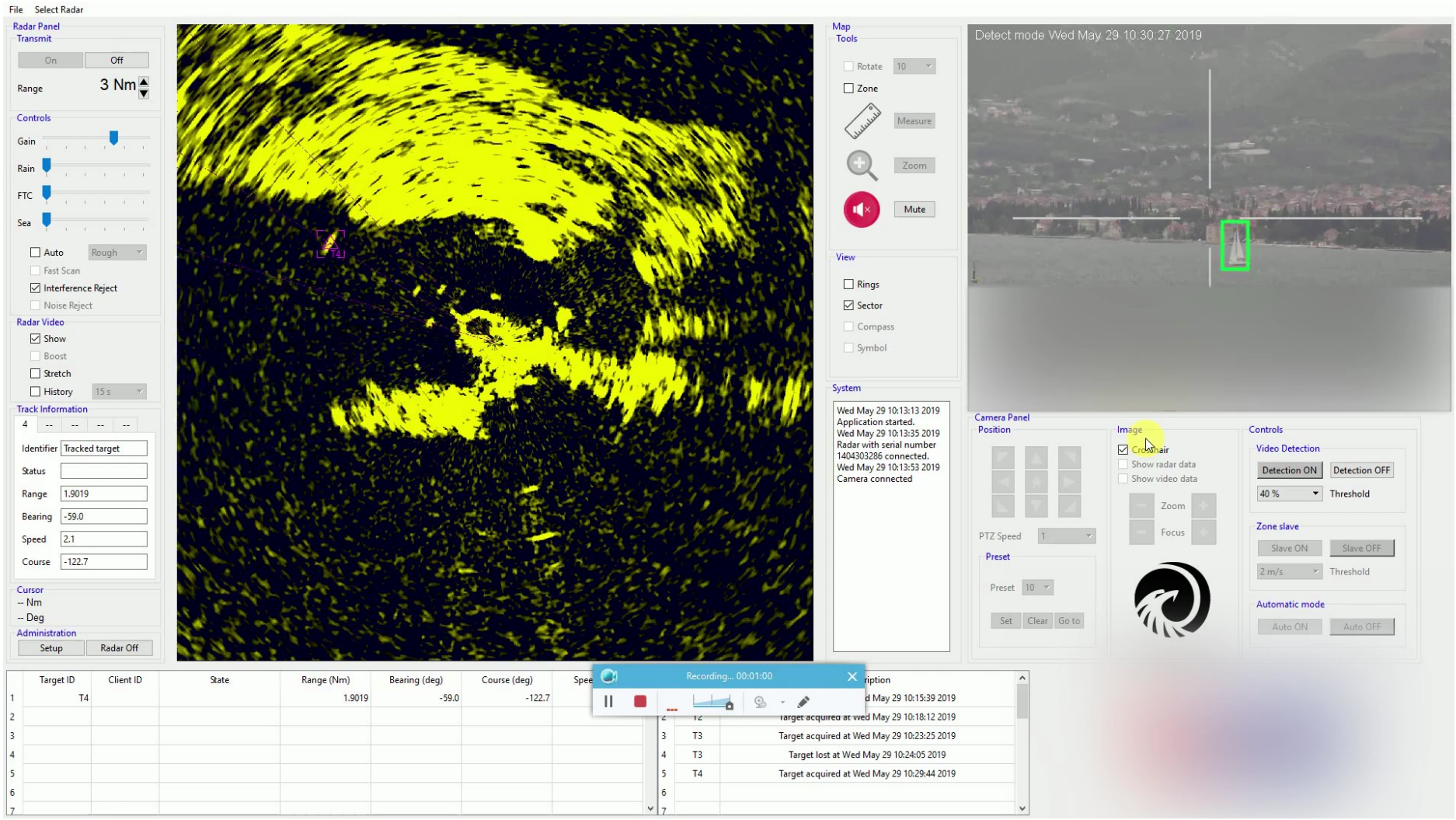


(b) Vjerojatnost lažne detekcije.

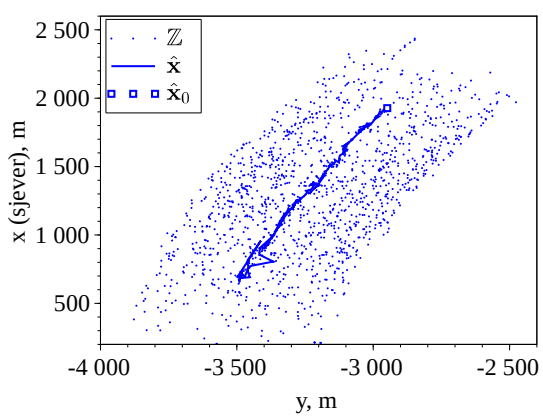
Slika E.15. Uzoračka estimacija prostorne gustoće smetnje i vjerojatnosti lažne detekcije u procesu praćenja jahte u blizine obale.

E.1.4. Praćenje izolirane brodice, varijanta 1

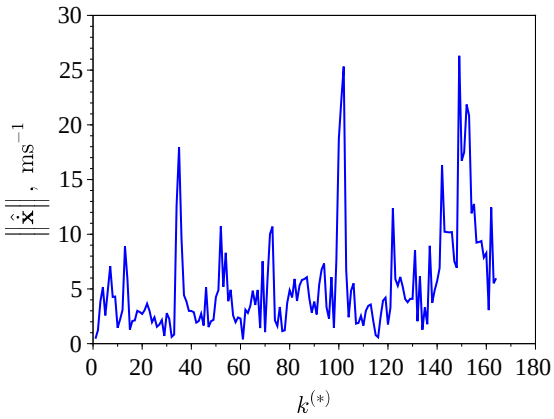
Video isječak (datoteka „E-1-4_Viterbi_Real_target_stable_track.mp4" priložena na kompaktnom disku), prikazuje praćenje izolirane brodice za sport i razonodu (prema klasifikaciji Pravilnika o brodicama, čamcima i jahtama, Narodne novine, br. 13/2020), a ilustriran je slikom E.16. Smetnja u okolici praćenog cilja bila je kombinacija smetnje mora i šuma svojstvenog radarskom senzoru s frekvencijskom modulacijom. Estimacija staze ilustrirana je slikom E.17. Tijek vjerojatnosti modela ilustriran slikom E.19 otkriva skoro linearno gibanje cilja za vrijeme trajanja staze, a tijek primjetljivosti, ilustriran slikom E.18, pokazuje dosta visoku vjerojatnost primjetljivosti što ukazuje na stabilno praćenje, neovisno o velikom broju mjerenja unutar volumena valjanosti kako prikazuje slika E.20. Uzoračke estimacije prostorne gustoće smetnje prema (E.5) i vjerojatnosti lažne detekcije prema (E.6) ilustrirane su slikom E.21.



Slika E.16. Ilustracija video isječka praćenja izoliranog cilja, brodice za sport i razonodu.

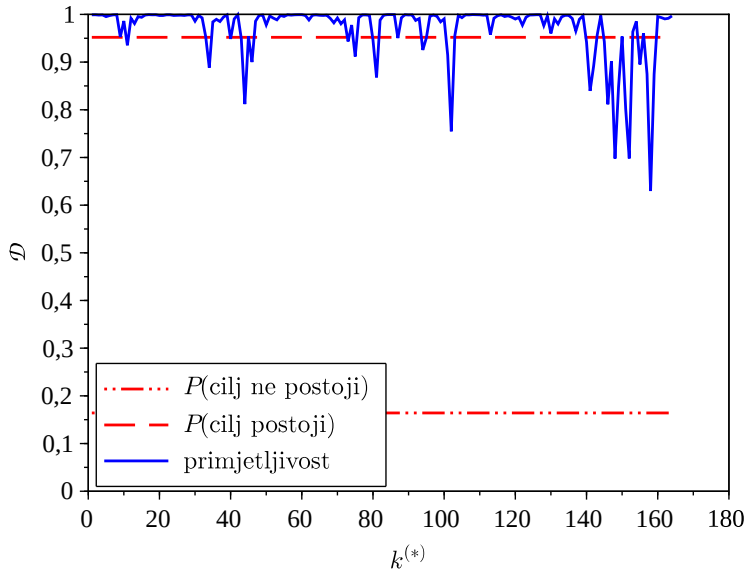


(a) Estimacija pozicije.

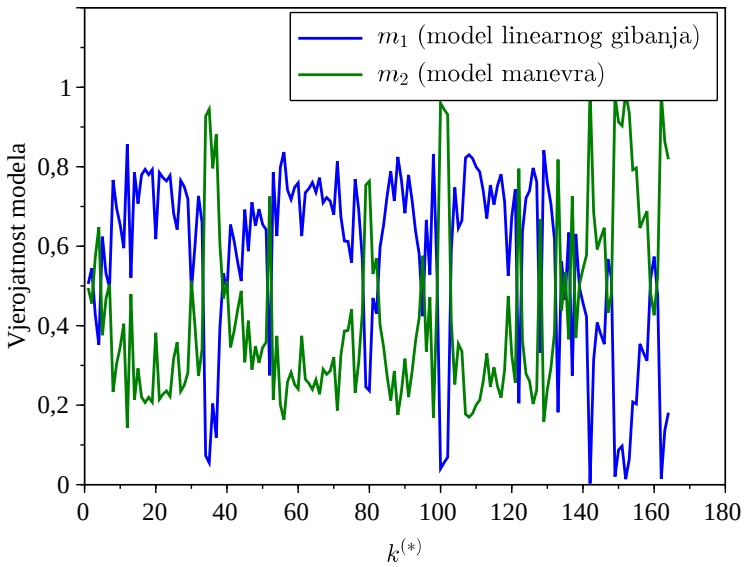


(b) Estimacija brzine.

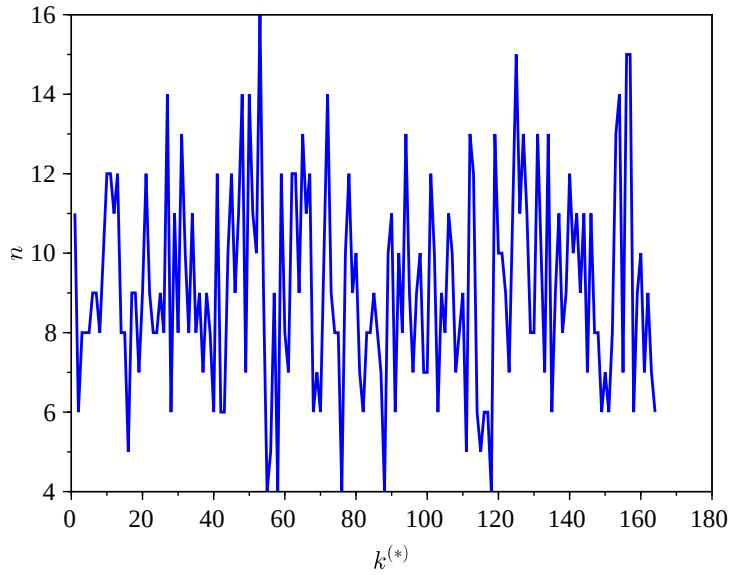
Slika E.17. Estimacija staze izoliranog cilja, brodice za sport i razonodu. Estimacija pozicije označena je s $\hat{\mathbf{x}}$, a $\hat{\mathbf{x}}_0$ označava estimaciju pozicije u trenutku potvrde staze. Skup mjerenja označen je sa $\mathbb{Z}$, a redni broj opservacije s najmanje jednim mjerenjem i od trenutka deklaracije postojanja cilja s $k^{(*)}$.



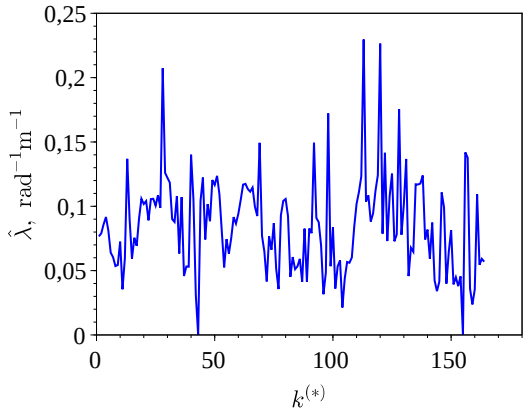
Slika E.18. Tijek vjerojatnosti primjetljivosti izoliranog cilja (brodice za sport i razonodu), ovisno o indeksu $k^{(*)}$, rednom broju opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze.



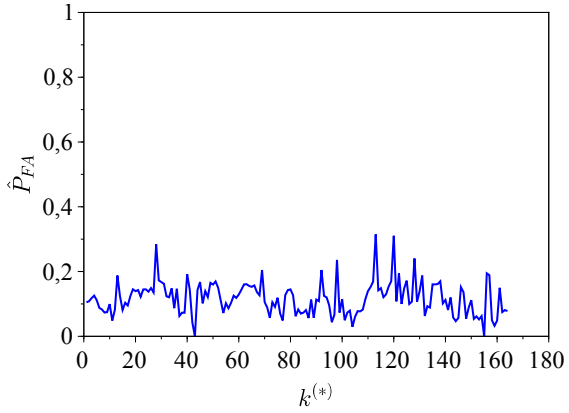
Slika E.19. Tijek vjerojatnosti modela gibanja izoliranog cilja (brodice za sport i razonodu), ovisno o indeksu $k^{(*)}$, rednom broju opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze.



Slika E.20. Broj mjerenja unutar volumena valjanosti pri praćenju izoliranog cilja (brodice za sport i razonodu), ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



(a) Prostorna gustoća smetnje.

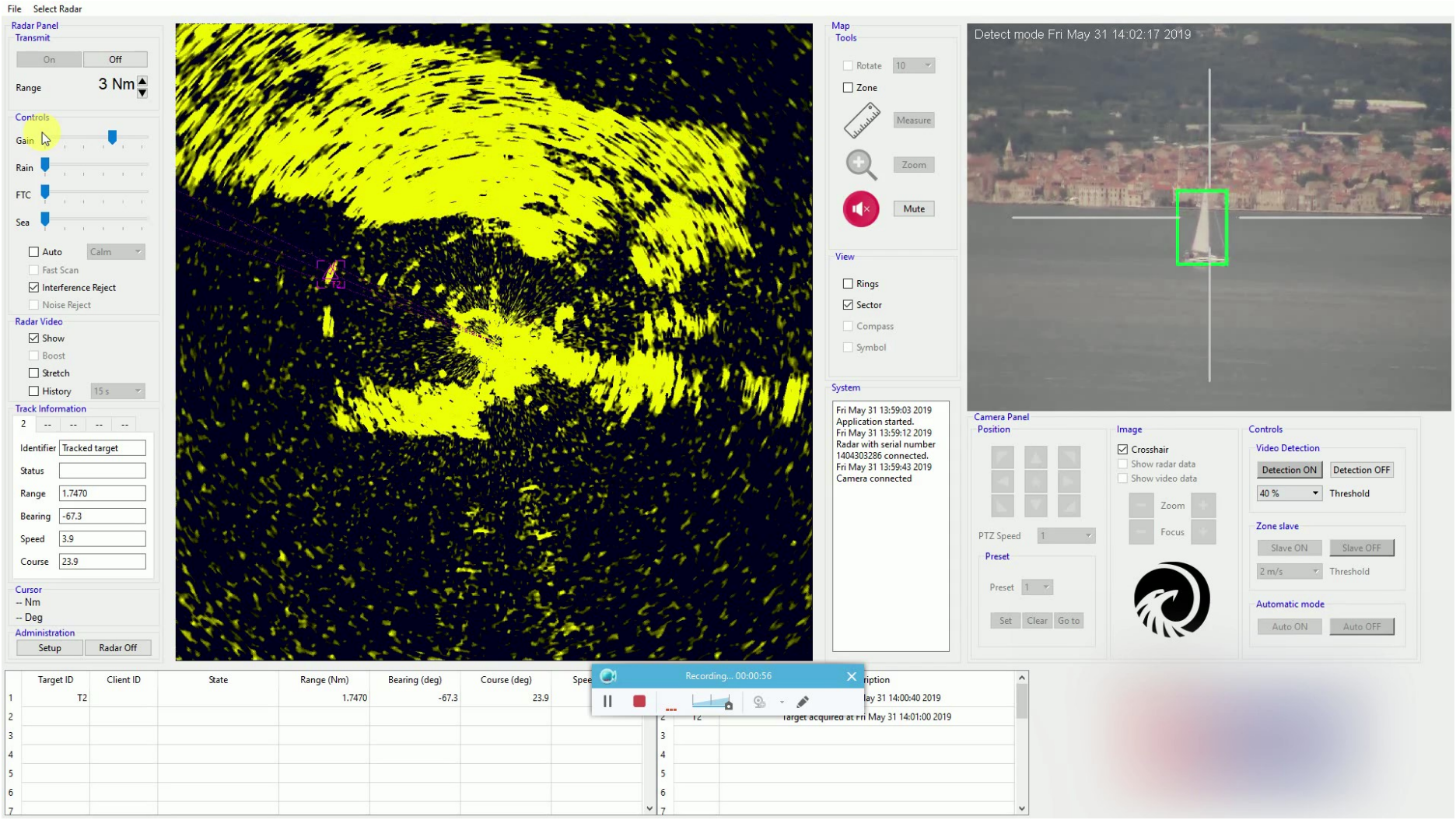


(b) Vjerojatnost lažne detekcije.

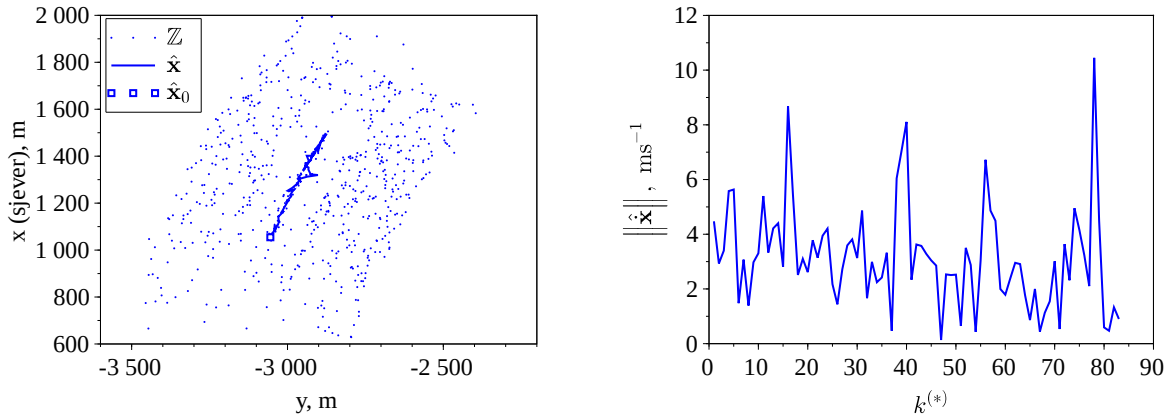
Slika E.21. Uzoračka estimacija prostorne gustoće smetnje i vjerojatnosti lažne detekcije u procesu praćenja izoliranog cilja, brodice za sport i razonodu.

E.1.5. Praćenje izolirane brodice, varijanta 2

Video isječak (datoteka „E-1-5_Viterbi_Sailing_boat.mp4" priložena na kompaktnom disku), prikazuje praćenje izolirane brodice za sport i razonodu (prema klasifikaciji Pravilnika o brodicama, čamcima i jahtama, Narodne novine, br. 13/2020), a ilustriran je slikom E.22. Smetnja u okolici praćenog cilja bila je kombinacija smetnje mora i šuma svojstvenog radarskom senzoru s frekvencijskom modulacijom. Estimacija staze ilustrirana je slikom E.23. Tijek vjerojatnosti modela, ilustriran slikom E.25, pokazuje skoro linearno gibanje cilja za vrijeme trajanja staze. Zbog fluktuacije amplitude odjeka, postojale su opservacije u kojima cilj nije bio detektiran, što je rezultiralo smanjenom vjerojatnošću primjetljivosti za $k^{(*)} \in (39, 46)$, kako ilustrira slika E.24. Međutim, staza je bila zadržana, bez obzira na opservacije bez detekcije i veliki broj mjerenja unutar volumena valjanosti, slika E.26. Uzoračke estimacije prostorne gustoće smetnje prema (E.5) i vjerojatnosti lažne detekcije prema (E.6), ilustrira slika E.27.



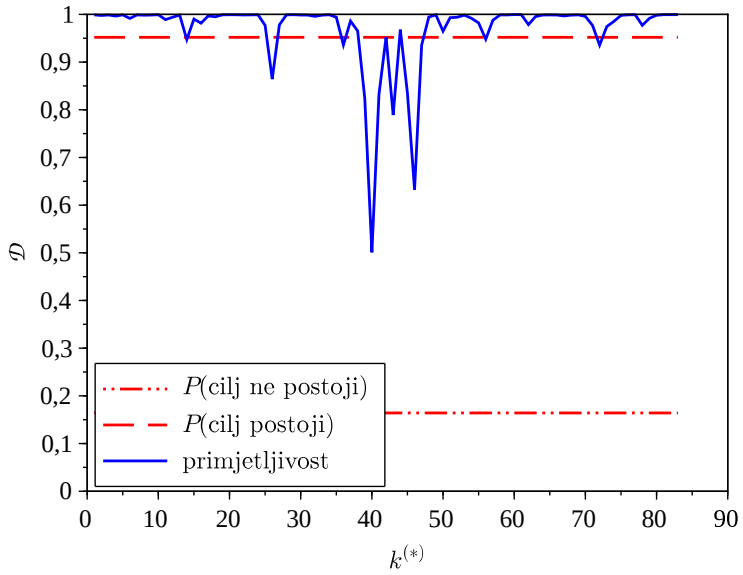
Slika E.22. Ilustracija video isječka praćenja izoliranog cilja, brodice za sport i razonodu.



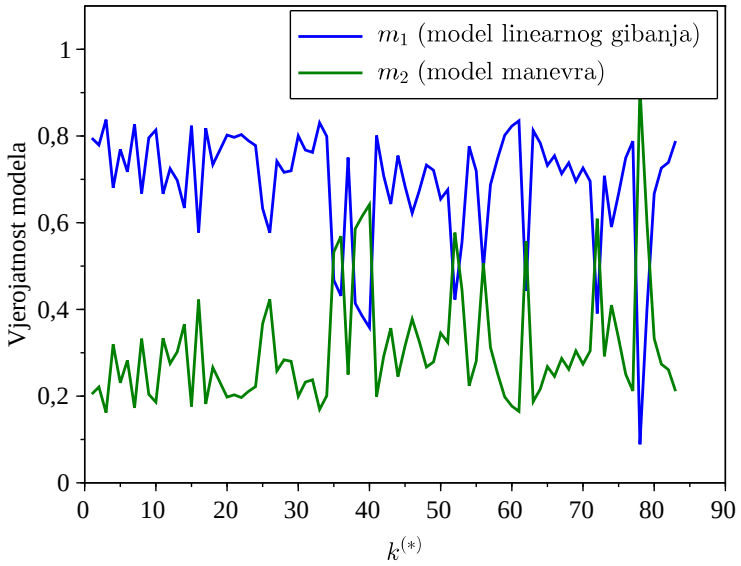
(a) Estimacija pozicije.

(b) Estimacija brzine.

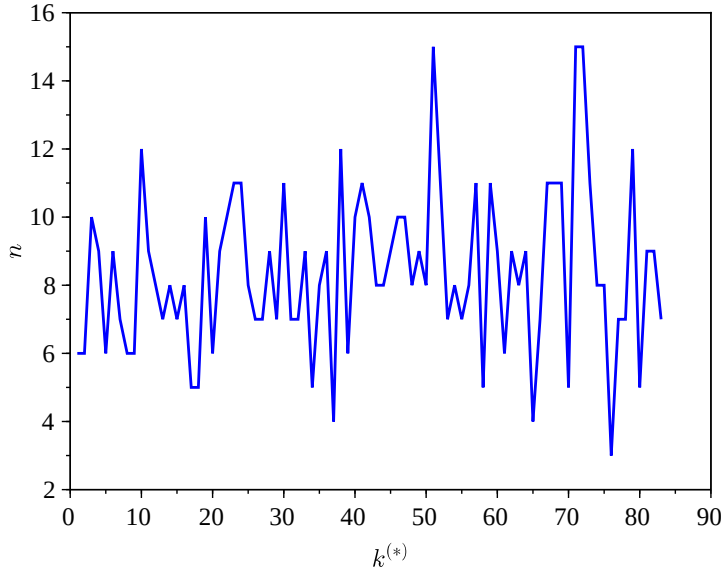
Slika E.23. Estimacija staze izoliranog cilja, brodice za sport i razonodu. Estimacija pozicije označena je s $\hat{\mathbf{x}}$, a $\hat{\mathbf{x}}_0$ označava estimaciju pozicije u trenutku potvrde staze. Skup mjerenja označen je sa $\mathbb{Z}$, a redni broj opservacije s najmanje jednim mjerenjem i od trenutka potvrde staze s $k^{(*)}$.



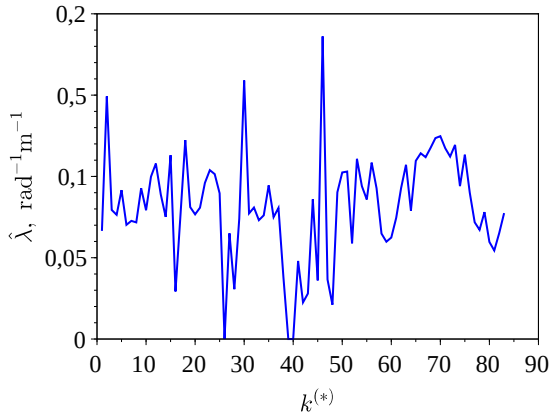
Slika E.24. Tijek vjerojatnosti primjetljivosti izoliranog cilja (brodice za sport i razonodu), ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



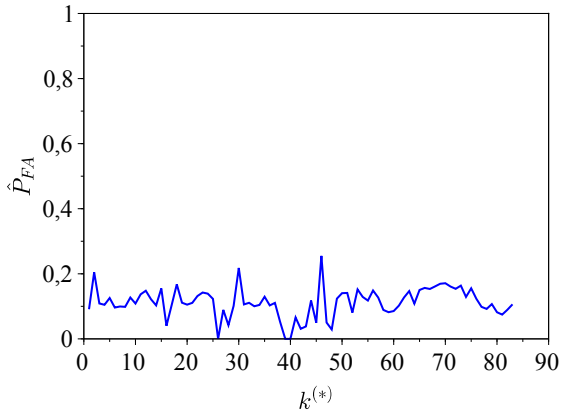
Slika E.25. Tijek vjerojatnosti modela gibanja izoliranog cilja (brodice za sport i razonodu), ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



Slika E.26. Broj mjerenja unutar volumena valjanosti pri praćenju izoliranog cilja (brodice za sport i razonodu), ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



(a) Prostorna gustoća smetnje.

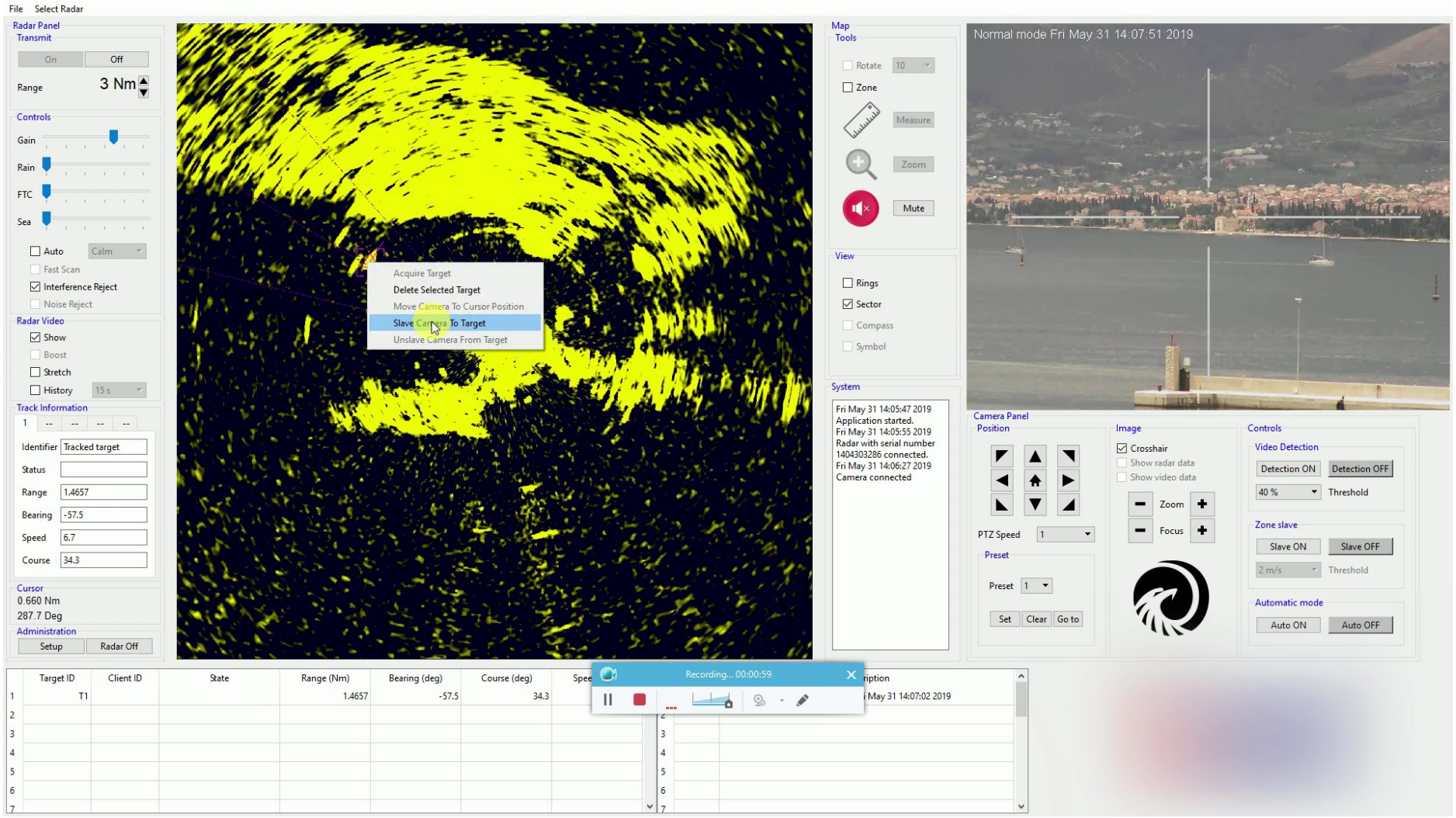


(b) Vjerojatnost lažne detekcije.

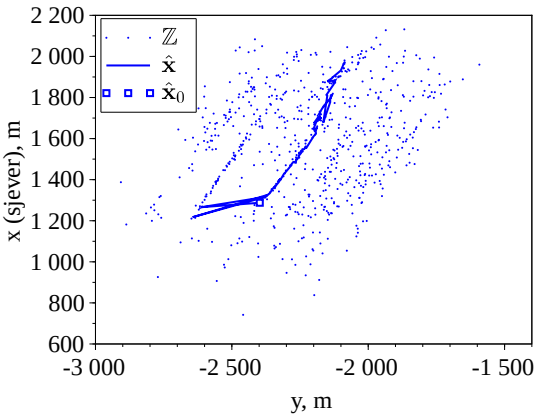
Slika E.27. Uzoračka estimacija prostorne gustoće smetnje i vjerojatnosti lažne detekcije u procesu praćenja izoliranog cilja, brodice za sport i razonodu.

E.1.6. Praćenje brodice u blizini druge brodice

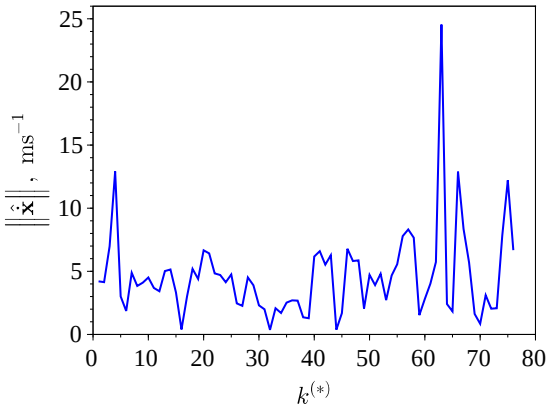
Video isječak (datoteka „E-1-6_Viterbi_Two_sailing_boats.mp4" priložena na kompaktnom disku), prikazuje praćenje brodice za sport i razonodu (prema klasifikaciji Pravilnika o brodicama, čamcima i jahtama, Narodne novine, br. 13/2020), u blizini druge brodice. Video isječak ilustriran je slikom E.28. Smetnja u okolici praćenog cilja bila je kombinacija smetnje mora i šuma svojstvenog radarskom senzoru s frekvencijskom modulacijom. Estimacija staze ilustrirana je slikom E.29. Tijek vjerojatnosti modela, ilustriran slikom E.31, otkriva skoro linearno gibanje praćenog cilja za vrijeme trajanja staze. Visoka vjerojatnost primjetljivosti, ilustrirana slikom E.30, ukazuje na stabilno praćenje, bez obzira na bliski cilj (brodicu za sport i rekreaciju, odjeka u približno susjednoj ćeliji razlučivosti) i veliki broj mjerenja unutar volumena valjanosti, kako prikazuje slika E.32. Osim u početnom dijelu staze (za prve tri opservacije nakon potvrde staze), nije primijećena zamjena odjeka ovako bliskih ciljeva. Naposljetku, uzoračku estimaciju prostorne gustoće smetnje prema (E.5) i vjerojatnosti lažne detekcije prema (E.6), prikazuje slika E.33.



Slika E.28. Ilustracija video isječka praćenja jednog od dva bliska cilja (brodica za sport i razonodu).

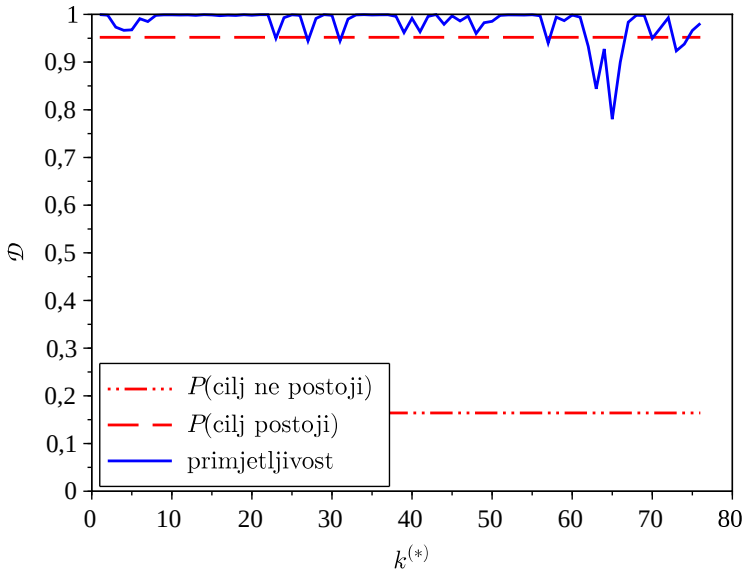


(a) Estimacija pozicije.

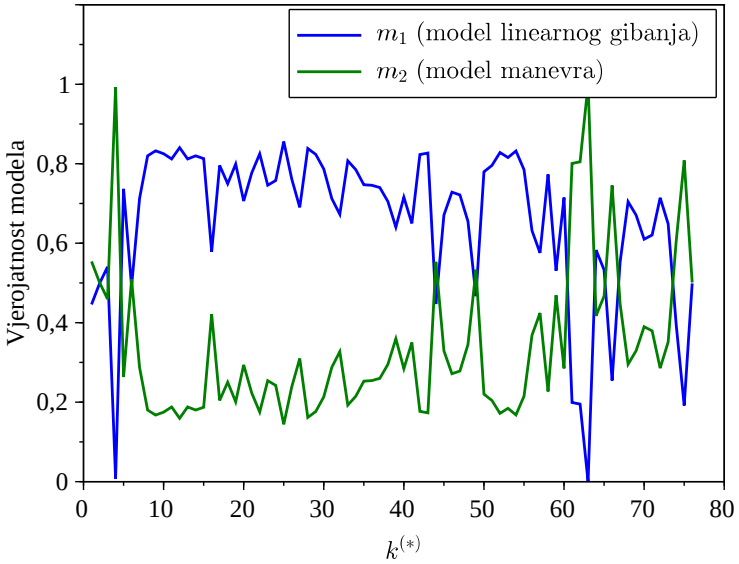


(b) Estimacija brzine.

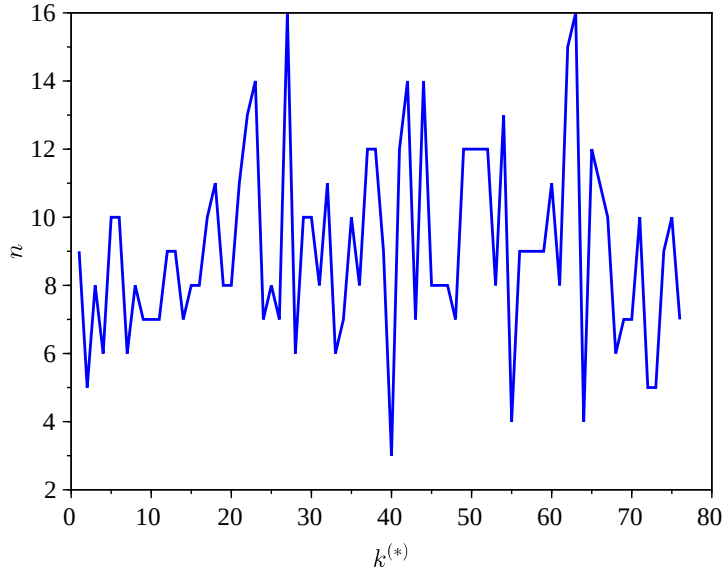
Slika E.29. Estimacija staze jednog od dva bliska cilja (brodica za sport i razonodu). Estimacija pozicije označena je s $\hat{\mathbf{x}}$, a $\hat{\mathbf{x}}_0$ označava estimaciju pozicije u trenutku potvrde staze. Skup mjerenja označen je sa $\mathbb{Z}$, a redni broj opservacije s najmanje jednim mjerenjem i od trenutka potvrde staze s $k^{(*)}$.



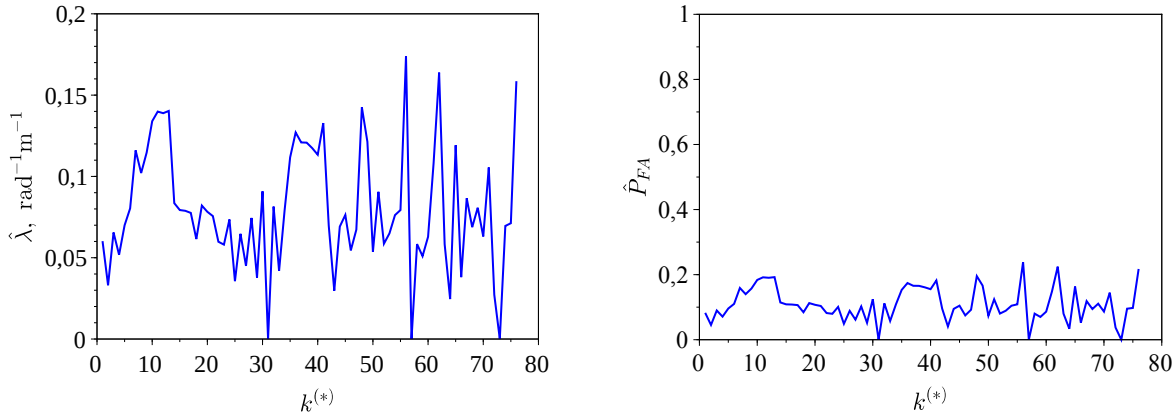
Slika E.30. Tijek vjerojatnosti primjetljivosti jednog od dva bliska cilja (brodica za sport i razonodu), ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



Slika E.31. Tijek vjerojatnosti modela gibanja jednog od dva bliska cilja (brodica za sport i razonodu), ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



Slika E.32. Broj mjerenja unutar volumena valjanosti pri praćenju jednog od dva bliska cilja (brodica za sport i razonodu), ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



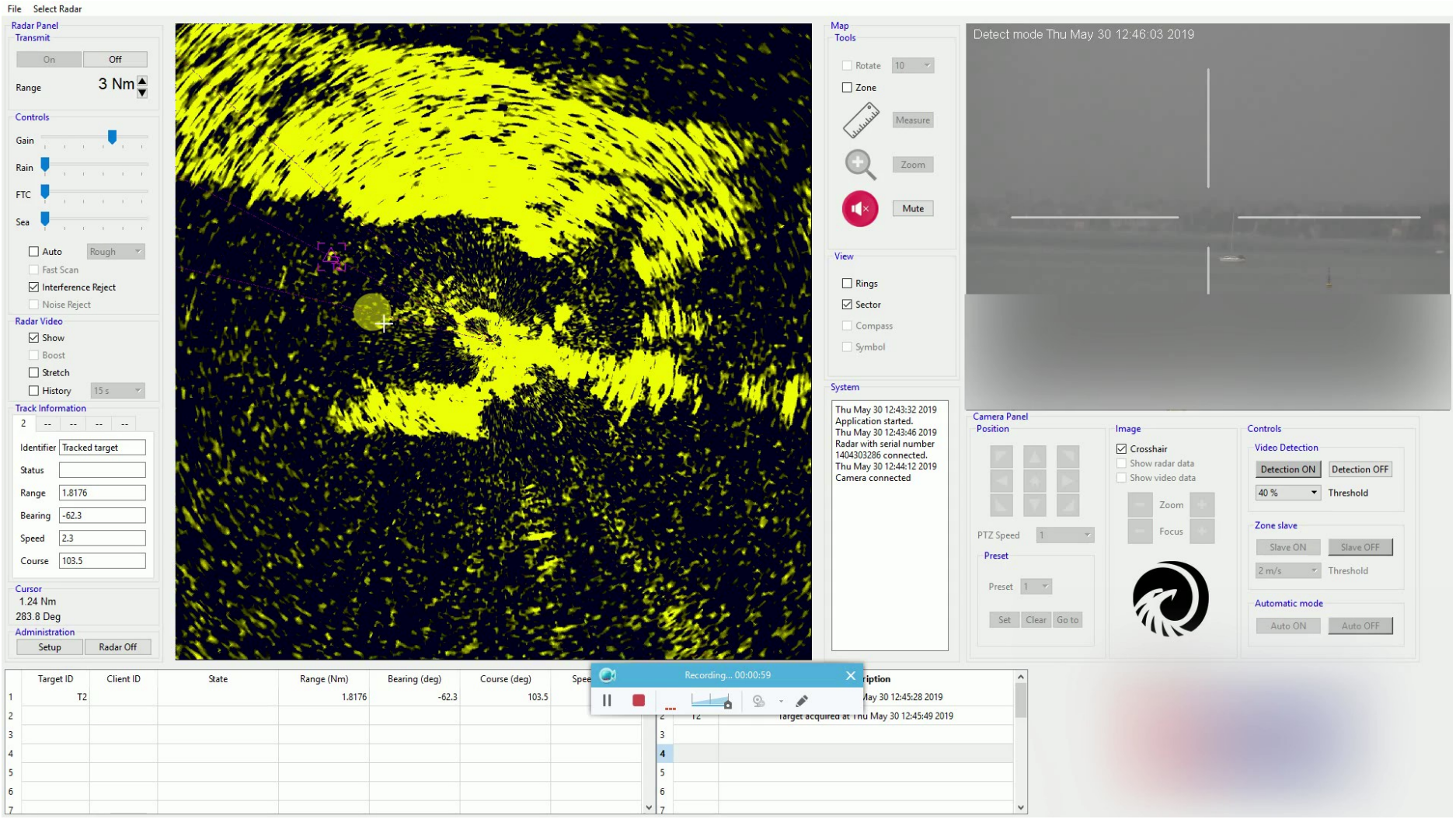
(a) Prostorna gustoća smetnje.

(b) Vjerojatnost lažne detekcije.

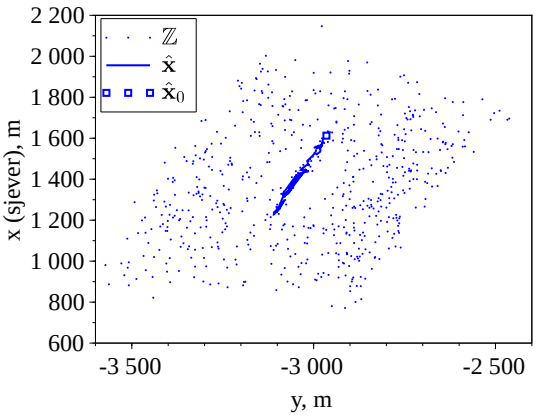
Slika E.33. Uzoračka estimacija prostorne gustoće smetnje i vjerojatnosti lažne detekcije u procesu praćenja jednog od dva bliska cilja (brodica za sport i razonodu).

E.1.7. Praćenje izolirane brodice pri smetnji kiše

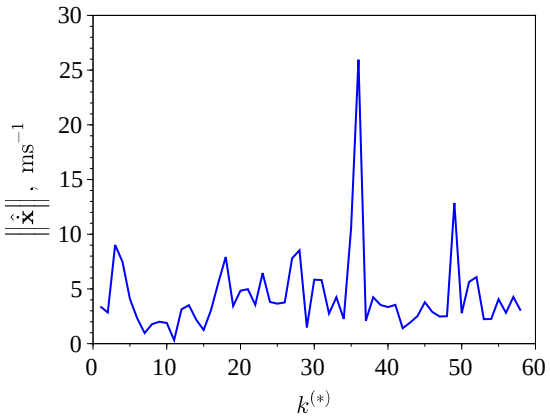
Video isječak (datoteka „E-1-7_Viterbi_Real_target_rain.mp4" priložena na kompaktnom disku), prikazuje praćenje brodice za sport i razonodu (prema klasifikaciji Pravilnika o brodicama, čamcima i jahtama, Narodne novine, br. 13/2020), a ilustriran je slikom E.34. Smetnja u okolici praćenog cilja bila je kombinacija smetnje mora i jake kiše, uz količinu oborina preko 7,62 mm h^{-1} po subjektivnoj procjeni autora (jaka kiša prema klasifikaciji [355]) te šuma svojstvenog radarskom senzoru s frekvencijskom modulacijom. Estimacija staze ilustrirana je slikom E.35. Visoka vjerojatnost primjetljivosti, ilustrirana slikom E.36, ukazuje na stabilno praćenje, unatoč velikom broju mjerenja unutar volumena valjanosti kako prikazuje slika E.38. Također je gibanje cilja skoro linearno kroz cijelo vrijeme trajanja staze, kako pokazuje tijek vjerojatnosti modela ilustriran slikom E.37. Uzoračke estimacije prostorne gustoće smetnje prema (E.5) i vjerojatnosti lažne detekcije prema (E.6) ilustrira slika E.39.



Slika E.34. Ilustracija video isječka praćenja cilja, brodice za sport i razonodu, u smetnji jake kiše (količina oborina preko 7,62 $\mathrm{mm\,h^{-1}}$ po subjektivnoj procjeni autora).

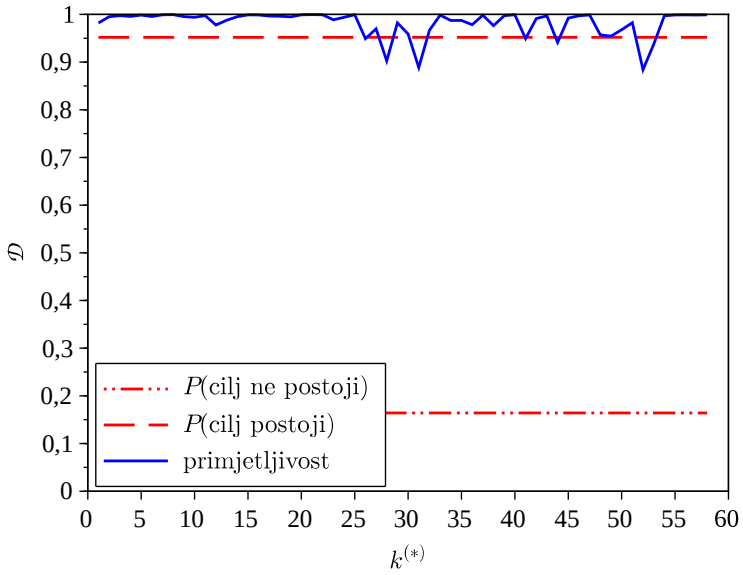


(a) Estimacija pozicije.

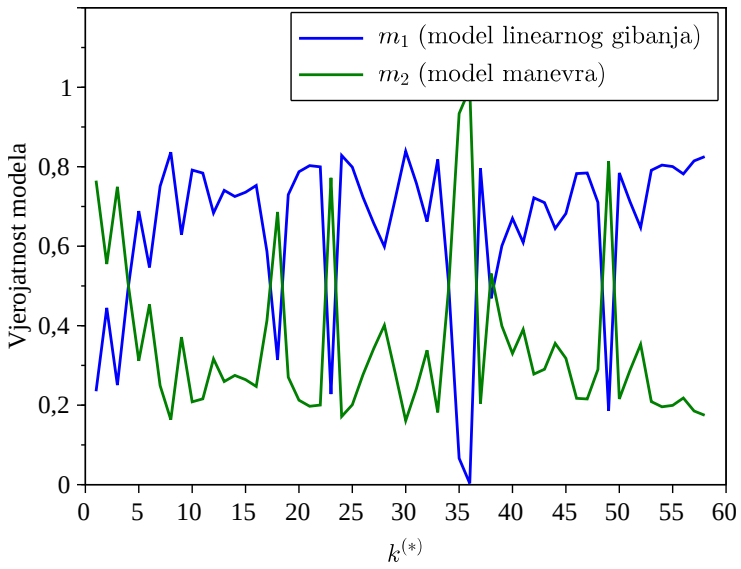


(b) Estimacija brzine.

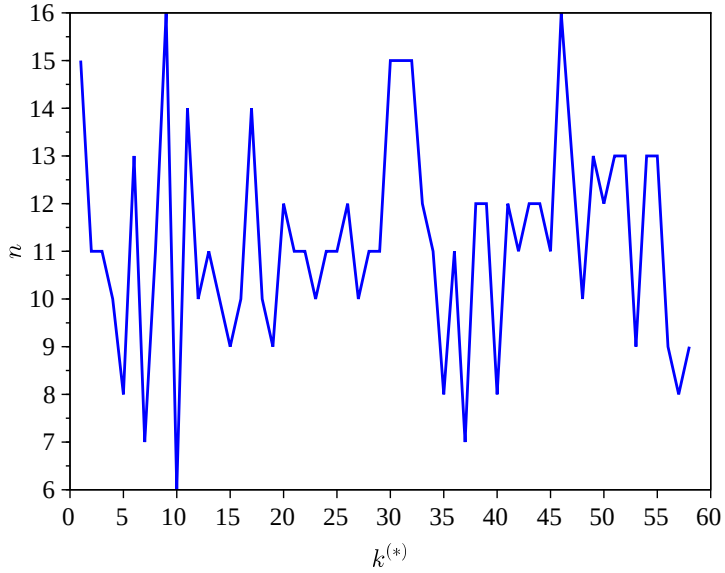
Slika E.35. Estimacija staze cilja, brodice za sport i razonodu, u smetnji jake kiše. Estimacija pozicije označena je s $\hat{\mathbf{x}}$, a $\hat{\mathbf{x}}_0$ označava estimaciju pozicije u trenutku potvrde staze. Skup mjerenja označen je sa $\mathbb{Z}$, a redni broj opservacije s najmanje jednim mjerenjem i od trenutka potvrde staze s $k^{(*)}$.



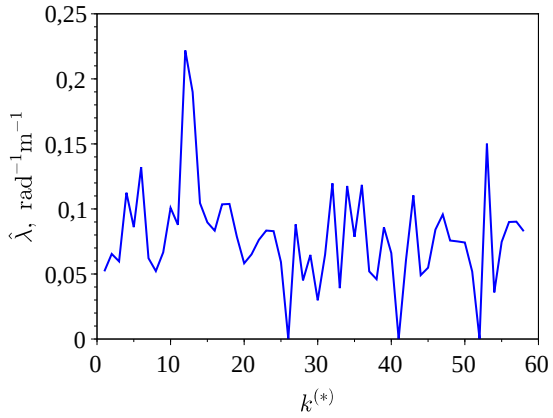
Slika E.36. Tijek vjerojatnosti primjetljivosti cilja, brodice za sport i razonodu, u smetnji jake kiše, ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



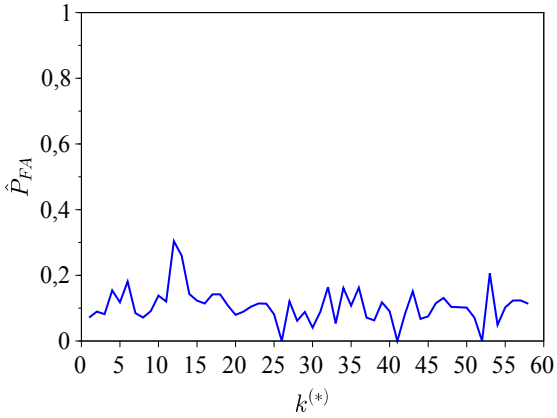
Slika E.37. Tijek vjerojatnosti modela gibanja cilja, brodice za sport i razonodu, u smetnji jake kiše, ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



Slika E.38. Broj mjerenja unutar volumena valjanosti pri praćenju cilja, brodice za sport i razonodu, u smetnji jake kiše, ovisno o rednom broju opservacije $k^{(*)}$ (opservacije s najmanje jednim mjerenjem od trenutka potvrde staze).



(a) Prostorna gustoća smetnje.



(b) Vjerojatnost lažne detekcije.

Slika E.39. Uzoračka estimacija prostorne gustoće smetnje i vjerojatnosti lažne detekcije u procesu praćenja cilja, brodice za sport i razonodu, u smetnji jake kiše.

Životopis

Bojan Vondra stekao je titulu diplomiranog inženjera elektrotehnike na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, 1990. Od 1992. do 2001. zaposlen je u Pomorskom centru za elektroniku na poslovima tehničkog održavanja brodskih i obalnih radarskih sustava. Od 2001. do 2004. zaposlen je u podružnici tvrtke Siemens u Splitu gdje sudjeluje u projektima projektiranja radiofrekvencijskih krugova uređaja s Bluetooth-povezivošću, a od 2004. do 2013. radi u Pomorskom centru za elektroniku na projektima uvezivanja obalnih radarskih sustava, fuzije podataka i algoritmima za radarsko praćenje malih ciljeva. Od 2013. voditelj je Odsjeka za radarsku tehniku Pomorskog centra za elektroniku. Od 2019. zaposlen je u emovis tehnologijama na poslovima primjene strojnog učenja za prepoznavanju oblika vozila, implementacijom konvolucijskih neuronskih mreža.

Popis objavljenih djela

Rad u časopisima

1. Vondra, B., Bonefačić, D., „Mitigation of the effects of unknown sea clutter statistics by using radial basis function network", Radioengineering, Vol. 29, No. 1, Apr. 2020, str. 215-227.

Međunarodna konferencija

1. Vondra, B., „Overview of the multisensor IMMPDA filter with an amplitude feature for tracking maneuvering target in cluttered environment", in 21st International Conference on Applied Electromagnetics and Communications (ICECom), Dubrovnik, Croatia, 2013.
2. Vondra, B., Bonefačić, D., „Estimation of heavy-tailed clutter density using adaptive RBF network", in 22nd International Conference on Applied Electromagnetics and Communications (ICECom), Dubrovnik, Croatia, 2016., str. 1-6.

Biography

Bojan Vondra received his Dipl.Ing. degree in electrical engineering from the University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing (FER), Zagreb, Croatia, in 1990. From 1992 to 2001 he is with the Center for Marine Electronics (PCE), Split, engaged in maintenance of naval marine radar systems. From 2001 to 2004 he is with Radio Communication Devices branch of Siemens, working on radio-frequency front-ends for Bluetooth devices. Since 2004 he is with the Center for Marine Electronics again, involved in fusion of coastal radar systems and algorithms for radar tracking of small targets. In 2013 he was promoted to Manager of Radar Department in the same company. From 2019 he is with the emovis technologies, engaged in tasks of vehicle recognition by employing machine learning, involving convolutional neural networks.