

Modeliranje konstitutivnog ponašanja densificiranog sinteriranog čelika

Rafaj, Vilim

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:056620>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-20**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Vilim Rafaj

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar, mag. ing. mech.

Student:

Vilim Rafaj

Zagreb, 2024.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru doc. dr. sc. Tomislavu Lesičaru na pomoći i savjetima tijekom izrade ovog rada.

Također se zahvaljujem svojoj obitelji na pruženoj podršci tijekom dosadašnjeg studiranja.

Vilim Rafaj



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 24 - 06 / 1	
Ur.broj: 15 - 24 -	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Vilim Rafaj**

JMBAG: 0035210087

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Modeliranje konstitutivnog ponašanja densificiranog sinteriranog čelika**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Modelling of Constitutive Behaviour of Densified Sintered Steel**

Opis zadatka:

U modernoj industriji sve se više primjenjuju materijali dobiveni metalurgijom praha, koja omogućuje niže troškove proizvodnje i visoku iskoristivost materijala u usporedbi s klasičnom metalurgijom. Zbog navedenih prednosti se proizvodnja konstrukcijskih komponenata od sinteriranog čelika proteklih godina ubrzano povećava. Sinterirani čelik se dobiva postupkom sinteriranja, gdje se praškasti materijal preko kalupa tlači u konačni oblik, nakon čega slijedi toplinska obrada. Zbog načina proizvodnje, u jezgri materijala dolazi do pojave pora i smanjene gustoće u usporedbi s čelikom dobivenim klasičnom metalurgijom. Kako bi se postigla bolja mehanička svojstva konstrukcijskih komponenata od sinteriranog čelika podvrgnutih zamoru uslijed klizno-valjnog kontakta, provodi se densifikacija (progušćivanje) površinskog sloja. Kako bi se numeričkim simulacijama opisalo konstitutivno ponašanje densificiranih komponenti od sinteriranog čelika, potrebno je modelirati promjenjivo konstitutivno ponašanje materijala u ovisnosti o gustoći materijala.

U ovom diplomskom radu razmatrat će se sinterirani čelik Astaloy Mo+0,2C gustoće $6,5\text{g/cm}^3$, kojem je površinski sloj progušćen do gustoće $7,5\text{g/cm}^3$. U razmatranje uzeti dvije dubine densificiranog sloja: 0,5 mm i 1 mm. Potrebno je:

1. Proučiti literaturu vezanu uz numeričko modeliranje elastoplastičnog ponašanja materijala, modeliranje oštećenja primjenom metode faznog polja i progušćivanje sinteriranog čelika.
2. Odrediti ovisnost parametara konstitutivnog ponašanja sinteriranog čelika o gustoći materijala na temelju rezultata eksperimentalnih ispitivanja provedenih za različite gustoće materijala.
3. Numeričkim modeliranjem statičkog vlačnog pokusa odrediti utjecaj densifikacije na konstitutivno i lomno ponašanje densificiranog materijala.

Za provedbu numeričkih simulacija primijeniti komercijalni programski paket Abaqus. Promjenjiva materijalna svojstva densificiranog materijala potrebno je modelirati pomoću korisničke rutine UMAT i programskog jezika FORTRAN. U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

16. studenoga 2023.

18. siječnja 2024.

22. – 26. siječnja 2024.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	II
POPIS TABLICA	IV
POPIS OZNAKA	V
SAŽETAK	VII
SUMMARY	VIII
1. METALURGIJA PRAHA	1
1.1. Metalurgija praha.....	1
1.2. Postupak sinteriranja.....	3
1.3. Sinteriranje u čvrstoj fazi.....	4
1.4. Sinteriranje u prisutnosti tekuće faze.....	5
1.5. Sinterirani čelici.....	6
2. DENSIFIKACIJA POVRŠINSKOG SLOJA.....	9
3. ELASTOPLASTIČNO PONAŠANJE MATERIJALA	11
3.1 Statički vlačni test.....	11
3.2 Tenzor naprezanja.....	12
3.3 Elastoplastično ponašanje.....	14
3.4 Teorije čvrstoće i plohe tečenja.....	16
3.5 Zakoni očvršćenja.....	18
3.5.1 Idealna plastičnost.....	18
3.5.2 Izotropno očvršćenje.....	18
3.5.3 Kinematičko očvršćenje.....	21
4. NUMERIČKO MODELIRANJE ELASTOPLASTIČNOG PONAŠANJA MATERIJALA.....	23
4.1 Metoda konačnih elemenata.....	23
4.2 Osnovni pravokutni element.....	24
4.3 Linearna analiza.....	27
4.4 Materijalna nelinearnost.....	28
4.5 Pristup numeričkom rješavanju nelinearnih problema.....	29
4.6 Algoritam numeričkog modeliranja nelinearnog ponašanja materijala.....	30
5. OŠTEĆENJE I LOM MATERIJALA.....	31
5.1 Osnove oštećenja i loma materijala.....	31
5.2 Tolerancija oštećenja i kontrola loma.....	32

5.3	Rast pukotine i lom.....	34
5.4	Metoda faznog polja.....	36
6.	MODELIRANJE KONSTITUTIVNOG PONAŠANJA DENSIFICIRANOG SINTERIRANOG ČELIKA.....	39
6.1	Geometrija i materijal ispitnog uzorka.....	39
6.2	Određivanje materijalnih parametara.....	40
7.	NUMERIČKO MODELIRANJE PONAŠANJA DENSIFICIRANOG SINTERIRANOG ČELIKA.....	46
7.1	Kreiranje modela.....	46
7.2	Određivanje optimalne mreže konačnih elemenata.....	48
7.3	Programski kod za analizu s elastičnim ponašanjem materijala	51
7.4	Rezultati analize s elastičnim ponašanjem materijala.....	52
7.5	Analiza s elastoplastičnim ponašanjem materijala.....	56
7.6	Rezultati analize s elastoplastičnim ponašanjem materijala.....	59
7.7	Analiza oštećenja densificiranog sinteriranog čelika primjenom metode faznog polja.....	63
7.8	Rezultati analize oštećenja.....	63
8.	ZAKLJUČAK.....	66
	LITERATURA.....	67

POPIS SLIKA

- Slika 1. Četiri osnovna procesa metalurgije praha
- Slika 2. Prahovi molibdena i željeza
- Slika 3. Tipovi sinteriranja
- Slika 4. Stadiji sinteriranja u čvrstoj fazi
- Slika 5. Proces sinteriranja dviju čestica
- Slika 6. Faze zgušnjavanja kod sinteriranja u prisutnosti tekuće faze
- Slika 7. Karakteristični dijelovi od sinteriranog čelika
- Slika 8. Mikrostruktura sinteriranog čelika
- Slika 9. Utjecaj gustoće na mehanička svojstva sinteriranih čelika
- Slika 10. Utjecaj legirajućih elemenata na vlačnu čvrstoću sinteriranog čelika
- Slika 11. Kontaktni pritisak na bok zuba
- Slika 12. Postupak densifikacije valjanjem
- Slika 13. Mikrostruktura densificiranog sloja
- Slika 14. Raspodjela poroznosti po dubini
- Slika 15. Epruveta kružnog poprečnog presjeka
- Slika 16. Tenzor naprezanja
- Slika 17. Tipična krivulja naprezanje - deformacija
- Slika 18. Određivanje konvencionalne granice tečenja
- Slika 19. Plohe tečenja u prostoru glavnih naprezanja
- Slika 20. a) π ravnina b) Plohe tečenja u π ravnini
- Slika 21. Plohe tečenja rijeđe korištenih teorija u π ravnini
- Slika 22. Idealna plastičnost
- Slika 23. Izotropno očvršćenje
- Slika 24. Moduli kod izotropnog očvršćenja
- Slika 25. Rad elastičnog i plastičnog deformiranja
- Slika 26. Promjena granice tečenja pri simetričnom cikličkom testu
- Slika 27. Kinematičko očvršćenje
- Slika 28. Osnovni tipovi konačnih elemenata
- Slika 29. Osnovni pravokutni konačni element
- Slika 30. Područja linearnog i nelinearnog ponašanja materijala
- Slika 31. Dijagram preostale čvrstoće
- Slika 32. Vremenski ovisno radno opterećenje za različite tipove konstrukcija
- Slika 33. Krivulja rasta pukotine u vremenu
- Slika 34. Nastajanje krhkog loma
- Slika 35. Nastajanje duktilnog loma
- Slika 36. Tri načina otvaranja pukotine
- Slika 37. Površina pukotine modelirana difuznim pristupom

- Slika 38. Dimenzije epruvete
- Slika 39. Raspodjela gustoće po poprečnom presjeku pri dubini densifikacije 0,5 mm
- Slika 40. Raspodjela gustoće po poprečnom presjeku pri dubini densifikacije 1 mm
- Slika 41. Ovisnost modula elastičnosti o gustoći
- Slika 42. Ovisnost granice tečenja o gustoći
- Slika 43. Ovisnost parametra Q_{∞} o gustoći
- Slika 44. Ovisnost granice tečenja o plastičnoj deformaciji za različite gustoće
- Slika 45. Ovisnost parametra b o gustoći
- Slika 46. Dijagram naprezanje – deformacija za sinterirani čelik gustoće 7,5 g/cm³
- Slika 47. Ovisnost parametra ψ_c o gustoći
- Slika 48. Dodjeljivanje sekcija numeričkom modelu ispitnog uzorka
- Slika 49. Rubni uvjeti i opterećenje ispitnog uzorka
- Slika 50. Neprilagođena mreža s 2 elementa po poprečnom presjeku
- Slika 51. Prilagođena mreža sa 6 elemenata po poprečnom presjeku
- Slika 52. Konvergencija naprezanja
- Slika 53. Ekvivalentna naprezanja pri određivanju optimalne mreže
- Slika 54. Optimalna mreža
- Slika 55. Ispitni dio epruvete diskretiziran optimalnom mrežom
- Slika 56. Programski kod za analizu s elastičnim ponašanjem materijala
- Slika 57. Usporedba ekvivalentnih naprezanja epruvete za različite dubine densifikacije
- Slika 58. Usporedba ekvivalentnih naprezanja na sredini ispitnog dijela epruvete za različite dubine densifikacije
- Slika 59. Usporedba naprezanja u smjeru osi y na sredini ispitnog dijela epruvete za različite dubine densifikacije
- Slika 60. Usporedba ekvivalentnih naprezanja po poprečnom presjeku epruvete za različite dubine densifikacije
- Slika 61. Usporedba naprezanja u smjeru osi y po poprečnom presjeku epruvete za različite dubine densifikacije
- Slika 62. Usporedba deformacije u smjeru osi y epruvete za različite dubine densifikacije
- Slika 63. Usporedba deformacije u smjeru osi y na mjestu nagle promjene materijalnih svojstava za različite dubine densifikacije
- Slika 64. Funkcije promjene materijalnih parametara u ovisnosti o gustoći materijala unutar rutine UMAT
- Slika 65. Usporedba ekvivalentnih naprezanja ovisno o konstitutivnom ponašanju prihvatnog dijela epruvete
- Slika 66. Usporedba ekvivalentne plastične deformacije ovisno o konstitutivnom ponašanju prihvatnog dijela epruvete
- Slika 67. Usporedba ekvivalentnih naprezanja kod elastoplastičnog ponašanja materijala epruvete za različite dubine densifikacije
- Slika 68. Usporedba ekvivalentnih naprezanja na sredini ispitnog dijela epruvete

- Slika 69. Usporedba ekvivalentnih naprezanja po poprečnom presjeku kod elastoplastičnog ponašanja materijala epruvete za različite dubine densifikacije
- Slika 70. Usporedba maksimalne vrijednosti ekvivalentne plastične deformacije za različite dubine densifikacije
- Slika 71. Usporedba ekvivalentne plastične deformacije na sredini ispitnog dijela epruvete za različite dubine densifikacije
- Slika 72. Usporedba ekvivalentne plastične deformacije po poprečnom presjeku epruvete
- Slika 73. Usporedba krivulja sila – pomak
- Slika 74. Lokacija pojave loma ovisno o dubini densificiranog sloja
- Slika 75. Detaljan prikaz loma
- Slika 76. Usporedba krivulja sila – pomak za različita materijalna svojstva
- Slika 77. Lokacija pojave loma epruvete od sinteriranog čelika u statičkom vlačnom testu

POPIS TABLICA

- Tablica 1. Ovisnost materijalnih parametara o gustoći
Tablica 2. Ovisnost parametara faznog polja o gustoći

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
Latinične oznake		
a		Matrica koeficijenata
a_0	mm	Početni polumjer sinterirane čestice, inicijalna veličina pukotine
a_1	mm	Najveći radijus zakrivljenosti površine čestice
a_2	mm	Najmanji radijus zakrivljenosti površine čestice
a_f	mm	Konačni polumjer sinterirane čestice
a_p	mm	Kritična veličina pukotine
b		Materijalni parametar izotropnog očvršćenja
B		Matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima
C		Matrica međusobne ovisnosti stupnjeva slobode i koeficijenta interpolacijskih polinoma
D	GPa	Matrica elastičnosti
D_k		Diferencijalni kinematički operator
E	GPa	Modul elastičnosti
E^{ep}	GPa	Elastoplastični tangentni modul
f		Funkcija tečenja
f_0		Inicijalna ploha tečenja
F_{res}	MPa	Preostala čvrstoća
F_s	MPa	Maksimalno predviđeno opterećenje
F_u	MPa	Čvrstoća konstrukcije
$g(\varphi)$		Degradacijska funkcija
$\mathbf{G}(\mathbf{V})$		Matrica nelinearnih vektorskih funkcija unutarnjih sila
G_c	J	Lomna žilavost
H	GPa	Modul linearnog kinematičkog očvršćenja
I_1, I_2, I_3		Invarijante tenzora naprezanja
J_1, J_2, J_3		Invarijante tenzora devijatorskog naprezanja
\mathbf{k}	N/mm	Matrica krutosti konačnog elementa
\mathbf{K}_T	N/mm	Tangencijalna matrica krutosti
K	GPa	Modul očvršćenja

l	mm	Duljinski parametar faznog polja
N_i		Funkcija oblika
\mathbf{N}		Matrica funkcija oblika
p	Pa	Laplaceov tlak
Q_∞	MPa	Materijalni parametar izotropnog očvršćenja
\mathbf{R}	N	Vektor čvornih sila
$\bar{\mathbf{R}}$	N	Vektor čvornih sila osnovnog stanja
$\mathbf{R}_i(\bar{\mathbf{V}})$	N	Vektor unutarnjih sila
$\Delta\mathbf{R}$	mm	Prirast opterećenja
S		Faktor sigurnosti
\mathbf{S}	MPa	Tenzor devijatorskog naprezanja
u, v, w	mm	Pomaci u smjeru osi Kartezijeva koordinatnog sustava
\mathbf{u}	mm	Polje pomaka
\mathbf{v}^T	mm	Vektor stupnjeva slobode konačnog elementa
\mathbf{V}	mm	Globalni vektor stupnjeva slobode
$\bar{\mathbf{V}}$	mm	Vektor čvornih pomaka osnovnog stanja
$\Delta\mathbf{V}$	mm	Prirast pomaka
V_p	mm ³	Volumen pora sinteriranog dijela
V_t	mm ³	Ukupni volumen sinteriranog dijela
w	J	Rad
w^e	J	Elastičan rad
w^{pl}	J	Plastičan rad
∂W^{int}	J	Inkrementalni rad unutarnjih sila
∂W^{ext}	J	Inkrementalni rad vanjskih sila

Grčke oznake

β	MPa	Tenzor povratnog naprezanja
γ	J/mm	Specifična slobodna površinska energija
$\gamma(\varphi, \nabla\varphi)$		Funkcija gustoće pukotine
δ_{ij}		Kroneckerov delta simbol
$\boldsymbol{\varepsilon}$		Tenzor deformacije
ε_{ekv}		Ekvivalentna deformacija
ε^e		Elastična deformacija
ε^p		Plastična deformacija
$\Delta\varepsilon$		Prirast deformacije

η		Tenzor relativnog naprezanja
λ	GPa	Lameov parametar
λ		Faktor opterećenja
$\Delta\lambda$		Prirast opterećenja
μ		Lameov parametar
ν		Poissonov koeficijent
ρ	g/cm ³	Gustoća
σ	MPa	Tenzor naprezanja
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	MPa	Glavna naprezanja
σ_0	MPa	Hidrostatsko naprezanje
σ_{ekv}	MPa	Ekvivalentno naprezanje
σ_y	MPa	Granica tečenja
φ		Parametar faznog polja
Φ		Poroznost
Ψ^b	J	Ukupno akumulirana energija deformiranja
Ψ^s	J	Disipacijska energija pukotine
ψ_e	J	Elastična energija deformiranja
ψ_p	J	Plastična energija deformiranja
ψ_c	MPa	Parametar faznog polja

SAŽETAK

U radu je prikazan postupak numeričkog modeliranja konstitutivnog ponašanja densificiranog sinteriranog čelika na numeričkom modelu ispitnog uzorka tj. epruvete.

U suvremenoj industriji se sve više koriste materijali dobiveni metalurgijom praha, koja omogućuje niže troškove proizvodnje u usporedbi s klasičnom metalurgijom. Sinterirani čelici su jedan od najčešće korištenih materijala metalurgije praha te dominiraju po proizvedenoj masi. Sinterirani čelik se dobiva postupkom sinteriranja pri kojem se prah tlači i naknadno toplinski obrađuje pri čemu dolazi do povezivanja čestica te povećanja čvrstoće. Sinterirane čelike karakterizira poroznost i smanjena gustoća iz razloga što se kao polazni materijal koristi prah. Uslijed dinamičkog opterećenja, na mjestima pora je moguća pojava koncentracije naprezanja i polagane akumulacije oštećenja. Kako bi se poboljšala mehanička svojstva i reducirala poroznost, sinterirani čelici se podvrgavaju postupku densifikacije, pri kojem dolazi do eliminacije pora površinskog sloja uslijed primjene kontaktnog pritiska. Postupak densifikacije poboljšava mehanička svojstva površinskog sloja te dovodi do promjenjivih materijalnih svojstava sinteriranog dijela.

Promjenjiva svojstva sinteriranog čelika su opisana pomoću funkcija ovisnosti materijalnih parametara o gustoći. Funkcije ovisnosti materijalnih parametara o gustoći su određene pomoću poznatih eksperimentalnih podataka i programskog paketa *Matlab*, korištenjem metode najmanjih kvadrata. Konstitutivno ponašanje sinteriranog čelika je opisano primjenom programskog paketa *Abaqus*, koji se temelji na metodi konačnih elemenata, i korisničke rutine UMAT, u koju su unesene funkcije ovisnosti materijalnih parametara o gustoći. Ispitane su dvije dubine densificiranog sloja: 0,5 mm i 1 mm.

Provedena su tri tipa numeričkih analiza: s elastičnim ponašanjem materijala, s elastoplastičnim ponašanjem materijala i analiza oštećenja primjenom metode faznog polja. Teorijska pozadina spomenutih analiza je detaljno objašnjena kroz rad. Također je prikazan postupak određivanja optimalne mreže konačnih elemenata. Pri numeričkim analizama materijala s elastičnim i elastoplastičnim ponašanjem je korišten osnovni pravokutni konačni element, dok je pri analizi oštećenja korišten korisnički konačni element koji rješava problem rubnih vrijednosti metode faznog polja. Na kraju rada su dani rezultati provedenih numeričkih analiza i zaključak.

SUMMARY

This thesis deals with numerical modeling of the constitutive behaviour of densified sintered steel, performed on test specimen.

Usage of materials produced by powder metallurgy processes is increasing in modern times. Powder metallurgy provides lower production costs compared to classical metalurgy. Sintered steel is one of the most common materials used in powder metallurgy. Sintered steel is manufactured by sintering process, in which the powder is pressed and subsequently heat-treated, which results in the bonding of particles and increased material strength. It is characterized by porosity and reduced density due to powder used as the starting material. As a result of dynamic load, stress concentration and slow accumulation of damage appears. In order to improve mechanical properties and reduce porosity, sintered steel is subjected to the densification process. The densification process eliminates surface layer pores by application of contact pressure. It also improves the mechanical properties of the surface layer and leads to variable material properties of sintered parts.

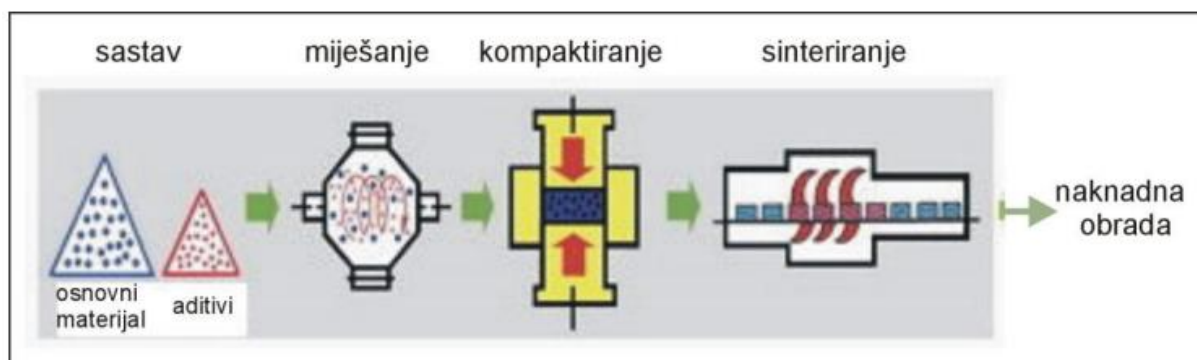
The variable material properties of sintered steel are modeled using density dependent functions. They are determined using known experimental data and the least square fit method in *Matlab* software. The constitutive behaviour of sintered steel is described using the *Abaqus* software, which is based on finite element method and the UMAT subroutine, which contains density dependent functions. Two depths of the densified layer were tested: 0,5 mm and 1 mm. Three types of numerical analyses were performed: with elastic material behaviour, with elastoplastic material behaviour and fracture analysis using the phase field method. The theoretical background of the aforementioned simulations is explained in detail throughout the thesis. The procedure for determining the optimal finite element mesh is also presented. In the numerical analyzes assuming elastic and elastoplastic behaviour, the basic rectangular finite element is used, while in the damage analysis, the user finite element is used, solving the boundary value problem of the phase field method. The results of the numerical analyzes and the conclusion are given at the end of the paper.

1. UVOD

1.1 Metalurgija praha

Poznato je da se danas velika većina legura i metala dobiva standardnim postupcima taljenja i lijevanja. Postupci metalurgije praha ne koriste taljenje kao polaznu fazu, već se do proizvoda dolazi pomoću konsolidacije prahova legura ili metala. Konsolidirani dijelovi nadalje prolaze kroz postupak sinteriranja koji obuhvaća toplinsku obradu u pećima ispod temperature tališta. Svojstva konačnog proizvoda dobivenog opisanim postupcima jako ovise o karakteristikama polaznog praha te uvjetima i parametrima procesa kompaktiranja i sinteriranja. Optimiranjem mikrostrukture i sastava se također utječe na svojstva konačnog proizvoda. Metalurgija praha se najčešće koristi za proizvodnju dijelova visoke kvalitete te poboljšanih svojstava za razna područja primjene [1].

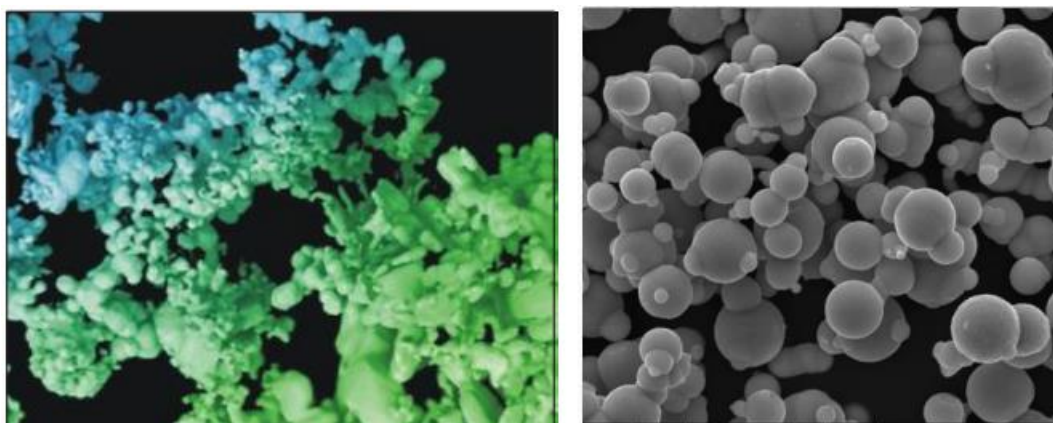
Postupci metalurgije praha se generalno sastoje od četiri osnovne operacije. Spomenute osnovne operacije su prikazane na slici 1.



Slika 1. Četiri osnovna procesa metalurgije praha [1]

Nakon odabira polaznog praha te aditiva slijedi mljevenje praha osnovnog materijala te njegovo miješanje sa matricom, uz prisutstvo tekućeg medija koji doprinosi smanjenju trenja. Pri završetku miješanja se provodi sušenje smjese kako bi se otklonio tekući medij. Kompaktiranje se provodi u kalupu pomoću vertikalnog pomaka žiga. Proces kompaktiranja također dovodi do ograničenja dimenzija i oblika završnog proizvoda. Slijedi postupak sinteriranja koji se provodi u pećima pri različitim atmosferama te ovisno o mehanizmu sinteriranja razlikujemo sinteriranje u čvrstoj fazi ili sinteriranje u tekućoj fazi. Karakteristike gotovog proizvoda uvelike ovise o svim spomenutima operacijama. Naknadna obrada u većini slučajeva nije potrebna [1].

Proizvodnja praha je važna osnova, jer karakteristike polaznog praha metala ili legure imaju velik utjecaj na karakteristike konačnog proizvoda. Najčešći postupci proizvodnje praha su: mehanički, elektrolitički, kemijski te atomizacija. Osnovna fizikalna svojstva čestice praha su njen oblik i veličina. Oblik čestica varira ovisno o njihovoj veličini i postupku proizvodnje. Veličina čestice je važan parametar pri procesu miješanja prahova. Slika 2 prikazuje prahove molibdena i željeza [1].



Slika 2. Prahovi molibdena i željeza [1]

Uz brojne prednosti postupaka metalurgije praha također postoje i određene mane.

Prednosti postupaka metalurgije praha:

- postizanje jednolike mikrostrukture
- postizanje točnih dimenzija proizvoda
- omogućavanje proizvodnje dijelova od smjesa međusobno netopljivih metala
- proizvodnja jednostavnih i složenih oblika
- jednostavna automatizacija procesa
- visok stupanj iskoristivosti materijala

a nedostaci su:

- visoka cijena praha
- visoka cijena alata
- rukovanje prahovima je zahtjevno
- moguća pojava oksidacije i poroznosti
- ekonomično samo za velike serije proizvoda
- složena izrada kalupa.

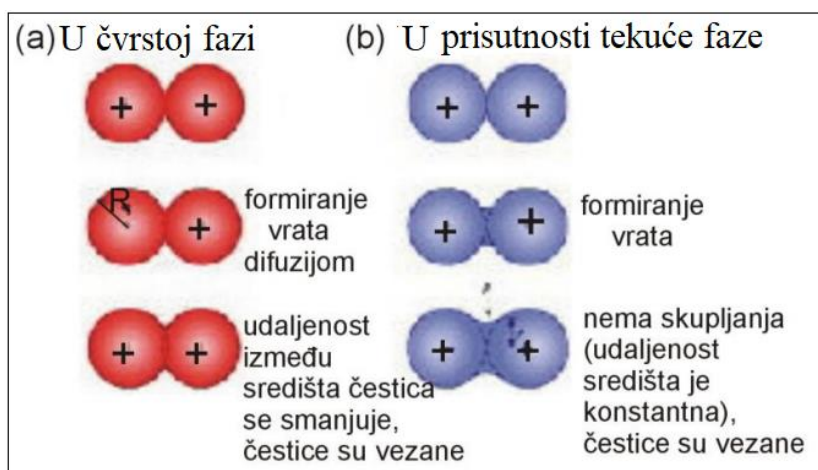
1.2 Postupak sinteriranja

Sinteriranje je postupak pri kojem se prah ili kompaktirani komad toplinski obrađuje pri temperaturi nižoj od temperature tališta pri čemu dolazi do povezivanja čestica te povećanja čvrstoće kompaktiranog dijela. Čestice se povezuju uslijed povišene temperature pri čemu dolazi do brzih difuzijskih procesa između čestica praha što dovodi do njihovog povezivanja te nastanka čvrstog komada. U većini slučajeva gustoća praha pri sinteriranju raste te se pri povoljnoj temperaturi i odgovarajućem vremenu trajanja procesa gustoća može približiti teorijskoj gustoći tj. gustoći čvrstog metala [1].

Proces sinteriranja kontrolira nekoliko parametara. To su:

- temperatura i vrijeme – vrijeme sinteriranja, potrebno za postizanje željene povezanosti čestica praha, će biti kraće što je temperatura sinteriranja viša,
- geometrija čestica praha – poroznost i stanje površine čestica praha utječu na brzinu sinteriranja,
- sastav praha – utječe na konačna fizikalna svojstva,
- gustoća praha – veća gustoća znači veću dodirnu površinu između čestica te efektivnije povezivanje,
- sastav atmosfere peći – zaštitna atmosfera štiti prah od oksidacije te ovisno o njegovom sastavu sprečava karbonizaciju ili dekarbonizaciju.

Postupak sinteriranja se općenito dijeli na sinteriranje u čvrstoj fazi i sinteriranje u prisutnosti tekuće faze. Slika 3 prikazuje proces vezivanja čestica ovisno o tipu sinteriranja.



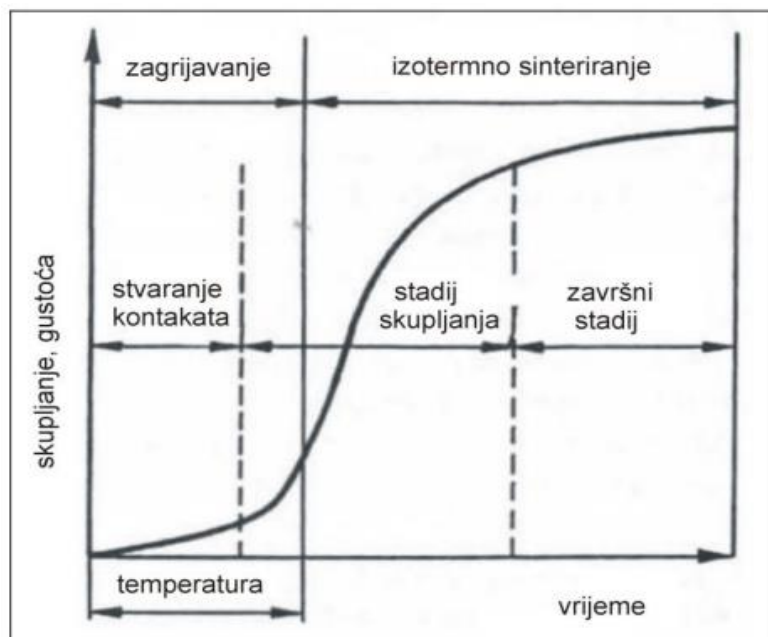
Slika 3. Tipovi sinteriranja [1]

1.3 Sinteriranje u čvrstoj fazi

Sinteriranje u čvrstoj fazi se provodi kada je prah u potpunosti u čvrstom stanju. To je složeni proces kojeg karakterizira istovremeno djelovanje nekoliko mehanizama prijenosa materijala te promjena oblika čestice. Proces pokreće višak površinske slobodne energije te jaka difuzija koja doprinosi sveukupnom zgušnjavanju [1].

Stadiji sinteriranja u čvrstoj fazi su prikazani na slici 4 te se mogu podijeliti na:

- početni stadij – stvaranje i rast kontakata između čestica,
- srednji stadij – karakterizira ga velika brzina skupljanja čestica,
- završni stadij – polagano približavanje konačnoj gustoći.



Slika 4. Stadiji sinteriranja u čvrstoj fazi [1]

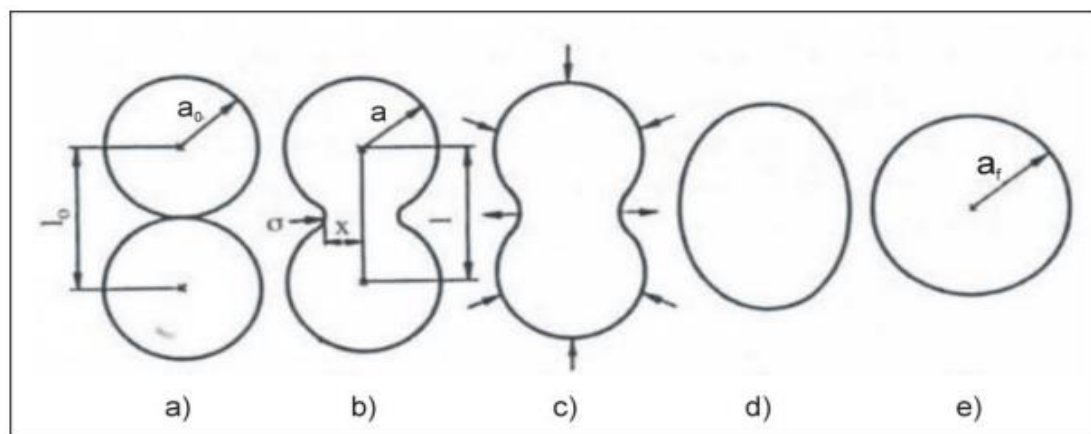
Uslijed djelovanja površinske energije, čestice imaju težnju smanjenja ukupne površine što dovodi do formiranja kugle polumjera a_f . Veza između početnog polumjera čestica a_0 i konačnog polumjera formirane čestice a_f je dana izrazom:

$$a_f = a_0 \sqrt[3]{2}. \quad (1)$$

Stvaranje čvrstog kontakta i formiranje vrata (kohezijske zone) između čestica posljedica je Laplaceovog tlaka, koji je općenito definiran izrazom:

$$p = \gamma \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right). \quad (2)$$

γ u prethodnom izrazu označavu specifičnu slobodnu površinsku energiju, a a_1 i a_2 najveći i najmanji radijus zakrivljenosti površine čestice. Slika 5 prikazuje stvaranje kontakta i formiranje vrata između čestica početnog polumjera a_0 , te proces njihovog srastanja u česticu polumjera a_f [1].



Slika 5. Proces sinteriranja dviju čestica [1]

1.4 Sinteriranje u prisutnosti tekuće faze

Sinteriranje u prisutnosti tekuće faze karakterizira velika brzina odvijanja procesa uzrokovana ubrzanom difuzijom. Potpuno zgušnjavanje produkta se postiže bez upotrebe vanjskog tlaka [1].

Stadiji procesa sinteriranja u prisutnosti tekuće faze se mogu podijeliti na:

- a) fazu preraspodjele,
- b) fazu otopina – reprecipitacija,
- c) konačnu fazu.

Preraspodjela predstavlja prvu fazu zgušnjavanja te se dijeli na primarno i sekundarno. Primarna preraspodjela se javlja kao posljedica utjecaja kapilarnih sila koje odvlače tekuću fazu u šupljine između čestica praha. Kapilarne sile također uzrokuju brzo skupljanje čestica. Sekundarna preraspodjela je posljedica viskoznosti tekuće faze te se odnosi na preraspodjelu malih čestica između većih koja doprinosi eliminaciji pora [1].

U fazi otopina – reprecipitacija dolazi do dodatnog zgušnjavanja koje se ostvaruje prijenosom mase ili reprecipitacijom otopine. Čestice praha mijenjaju oblik i raspodjelu što rezultira većom gustoćom. Također se javlja rast zrna radi otapanja manjih zrna i reprecipitacije u veća.

U konačnoj fazi sinteriranja dolazi do formiranja čvrste strukture koja uzrokuje vrlo sporo zgušnjavanje. Daljnja preraspodjela se nastavlja te dolazi do rasta zaostalih pora ako se u njima nalazi zrak. Slika 6 prikazuje faze procesa sinteriranja u prisutnosti tekuće faze [1].



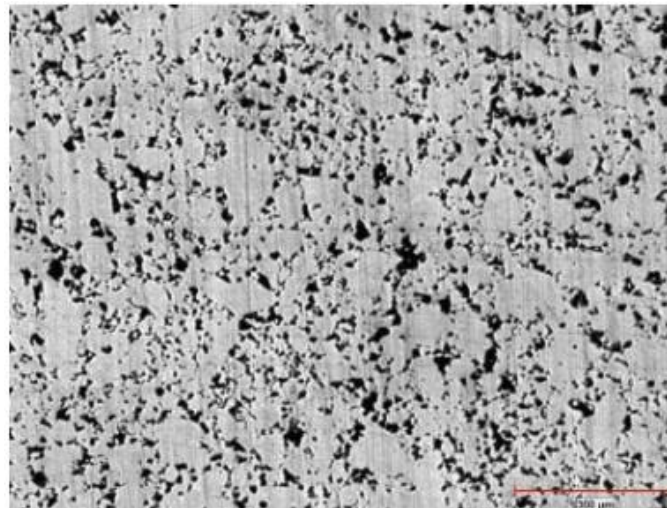
Slika 6. Faze zgušnjavanja kod sinteriranja u prisutnosti tekuće faze [1]

1.5 Sinterirani čelici

Sinterirani čelici su najvažniji i najčešći proizvodi metalurgije praha te dominiraju po proizvedenoj masi. Cilj sinteriranja čelika je postizanje izotropnih svojstava konačnog proizvoda. Izotropna struktura ih čini prikladnim za termokemijsku obradu i obradu prevlačenjem. Glavna mana sinteriranih čelika je visoka krhkost dok je njihova uporaba u sustavima prijenosa snage pokazala znatne prednosti u odnosu na dijelove dobivene klasičnom metalurgijom. Razlog tomu su relativno niska cijena proizvodnje, visok udio iskoristivosti materijala te reducirane razine buke pri eksploataciji. Svojstva im ovise o kemijskom sastavu, poroznosti, postupku proizvodnje i završnoj obradi. Poroznost konačnog proizvoda od sinteriranog čelika ima značajan utjecaj na njegova dinamička svojstva. Čvrstoća nelegiranih čelika sa niskim sadržajem ugljika ne prelazi 200 – 250 MPa dok je za čelike sa većim sadržajem ugljika moguća čvrstoća i do 430 MPa. Karakteristični dijelovi od sinteriranog čelika su prikazani na slici 7 dok slika 8 prikazuje njihovu mikrostrukturu [1].



Slika 7. Karakteristični dijelovi od sinteriranog čelika [1]

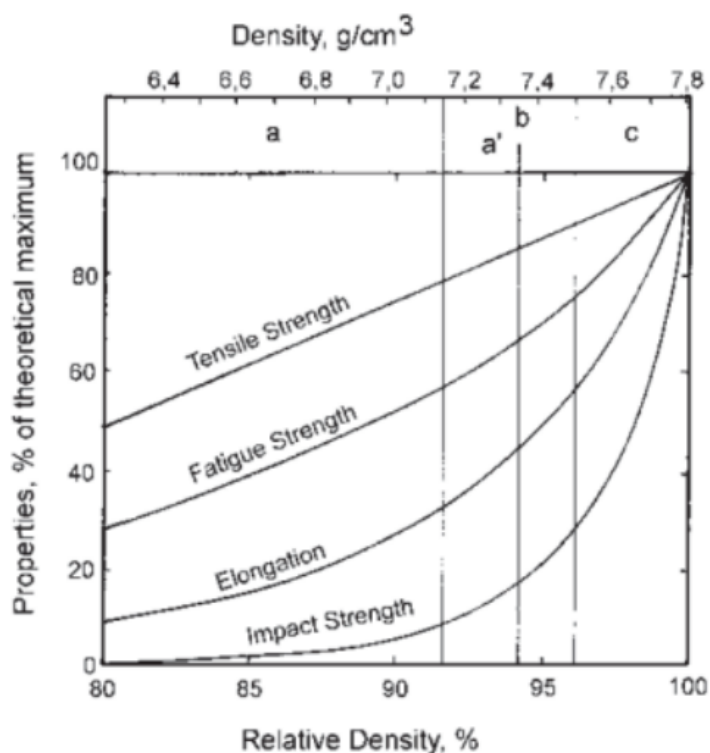


Slika 8. Mikrostruktura sinteriranog čelika [2]

Gustoća i poroznost imaju najveći utjecaj na mehanička svojstva sinteriranog čelika. Poroznost je definirana kao omjer volumena praznog prostora (pora) te sveukupnog volumena [1]:

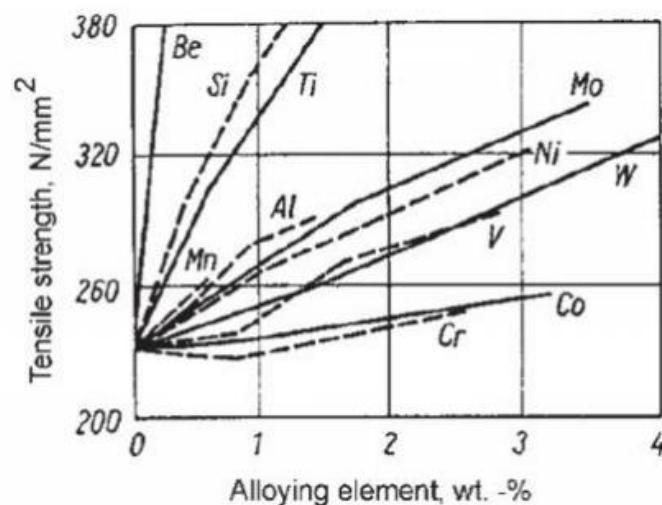
$$\Phi = \frac{V_p}{V_t}. \quad (3)$$

Kada je materijal podvrgnut dinamičkom opterećenju, na mjestima pora će doći do pojave koncentracije naprezanja te polagane akumulacije oštećenja. Povećanjem gustoće vlačna čvrstoća raste linearno dok istezljivost i lomna žilavost rastu eksponencijalno. Zamorna čvrstoća raste linearno do određene gustoće te nakon toga eksponencijalno. Slika 9 prikazuje utjecaj gustoće na mehanička svojstva sinteriranog čelika [2].



Slika 9. Utjecaj gustoće na mehanička svojstva sinteriranog čelika [2]

Sinteriranje čelika se provodi u pećima pri temperaturama od 1120 °C do 1150 °C. Vrijeme postupka iznosi od 20 do 30 minuta a naknadna obrada uglavnom nije potrebna. Sinterirani čelici se najčešće legiraju bakrom, niklom i molibdenom, a otopljeni legirajući elementi poboljšavaju mehanička svojstva i uzrokuju formiranje različitih mikrostruktura. Slika 10 prikazuje utjecaj legirajućih elemenata na vlačnu čvrstoću sinteriranih čelika [2].



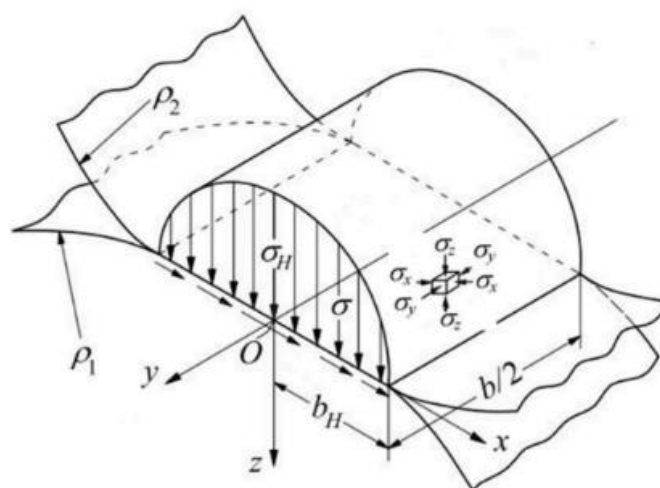
Slika 10. Utjecaj legirajućih elemenata na vlačnu čvrstoću sinteriranog čelika [2]

2. DENSIFIKACIJA POVRŠINSKOG SLOJA

Densifikacija površine je postupak hladne obrade s ciljem eliminacije pora površinskog sloja. Eliminacija pora se postiže primjenom kontaktnog pritiska, koji uzrokuje zatvaranje pora. Spomenuti postupak će biti detaljnije objašnjen na primjeru sinteriranih zupčanika [3].

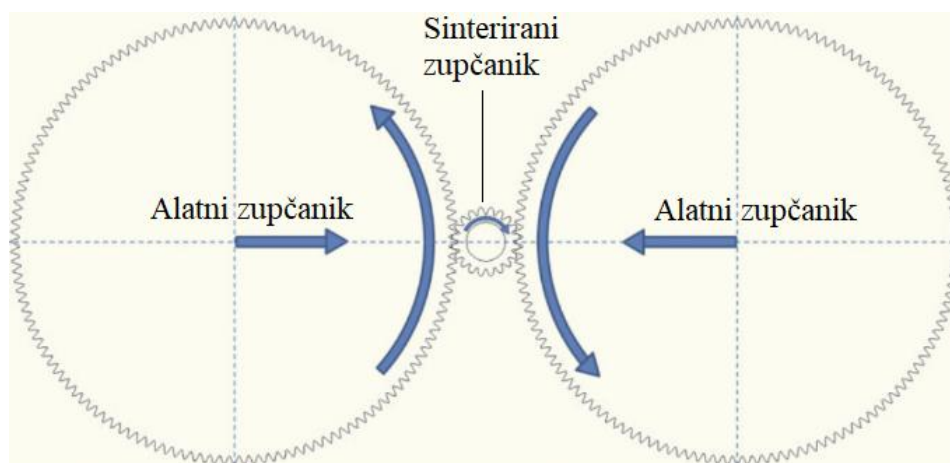
Sinterirani zupčanici se često upotrebljavaju u automobilskoj industriji koja od komponenti prijenosa snage zahtijeva visoku statičku i dinamičku čvrstoću te otpornost na trošenje. Mehanička svojstva zupčanika dobivenih konvencionalnim metodama metalurgije praha nisu dostatna za primjenu pri velikim opterećenjima [4]. Poroznost konvencionalnih čeličnih sinteriranih zupčanika se nalazi u rasponu od 5 % do 15 % što limitira statičku i dinamičku čvrstoću te otpornost na trošenje. Superiornost njihovih mehaničkih svojstava u odnosu na kovani čelik je moguća ukoliko se poroznost reducira blizu 0 % [6]. Iako spomenuti zupčanici mogu doseći gustoću do $7,1 \text{ g/cm}^3$, za visoka opterećenja su potrebne veće gustoće [4].

Razmatranjem raspodjele kontaktnih i savojnih napreznja je pokazano da je densifikacija potrebna samo na površini te malo ispod površine zuba iz razloga što su iznosi kontaktnog pritiska bokova i savojnog napreznja zuba tamo maksimalni [4]. Slika 11 prikazuje raspodjelu kontaktnog pritiska na bok zuba.



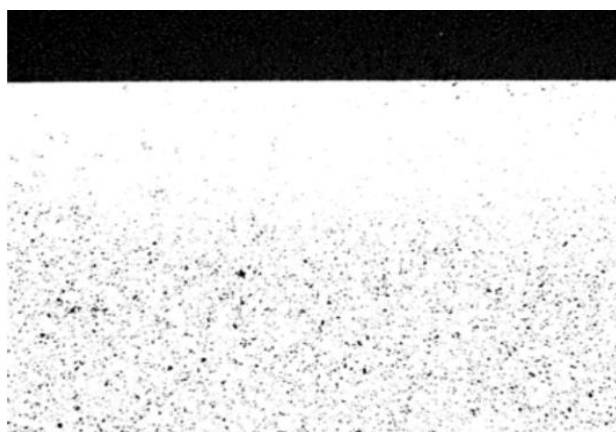
Slika 11. Kontaktni pritisak na bok zuba [7]

Iako postoji mnogo različitih načina na koji se densifikacija površinskog sloja može provesti, najčešće se koristi postupak densifikacije valjanjem. Spomenuti postupak omogućuje densifikaciju kritično opterećenih površina te je prikazan na slici 12 [4].

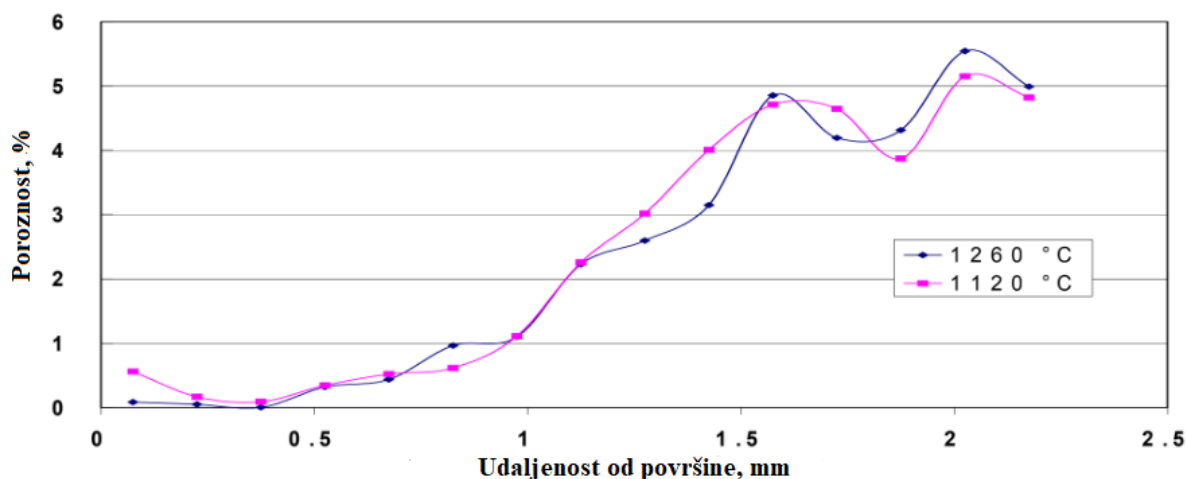


Slika 12. Postupak densifikacije valjanjem [5]

Sinterirani zupčanik se postavlja između dva veća, alatna zupčanika. Alatni zupčanici se počinju okretati u suprotnim smjerovima te malo pomicati prema sredini čime se smanjuje razmak između njih [4]. Uslijed rotacije i približavanja alatnih zupčanika dolazi do kontaktnog pritiska na bok zuba sinteriranog zupčanika. Kontaktni pritisak uzrokuje pojavu plastičnih deformacija te smanjenje poroznosti površinskog sloja. [6]. Densifikacija valjanjem dovodi do boljih mehaničkih i fizikalnih svojstava. Dolazi do očvršćenja materijala, povećanja tvrdoće te smanjenja poroznosti i površinske hrapavosti [6]. Postupak omogućava postizanje poroznosti manje od 1 % u površinskom sloju [4]. Dubina densificiranog sloja uglavnom ne prelazi 1 mm iz razloga što bi agresivnija hladna obrada potrebna za postizanje dubina većih od 1 mm dovela do veće šanse za pojavu pukotina ispod površine [3]. Slika 13 prikazuje mikrostrukturu zuba sinteriranog zupčanika čiji je površinski sloj densificiran do 0,75 mm dubine a slika 14 raspodjelu poroznosti po dubini istog dijela.



Slika 13. Mikrostruktura densificiranog zupčanika [3]



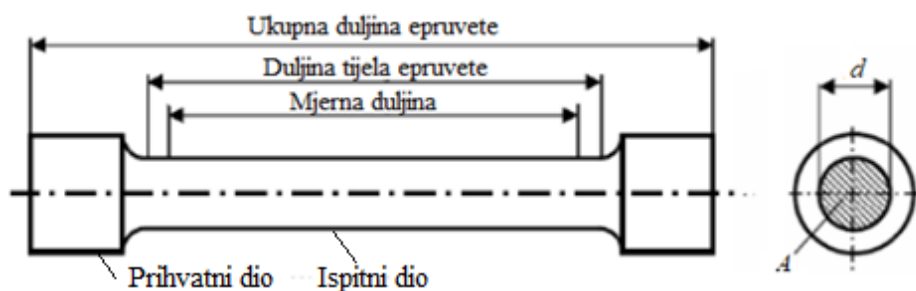
Slika 14. Raspodjela poroznosti po dubini [3]

Temperature vidljive na legendi prethodne slike se odnose na temperaturu pri kojoj je zupčanik sinteriran [3].

3. ELASTOPLASTIČNO PONAŠANJE MATERIJALA

3.1 Statički vlačni test

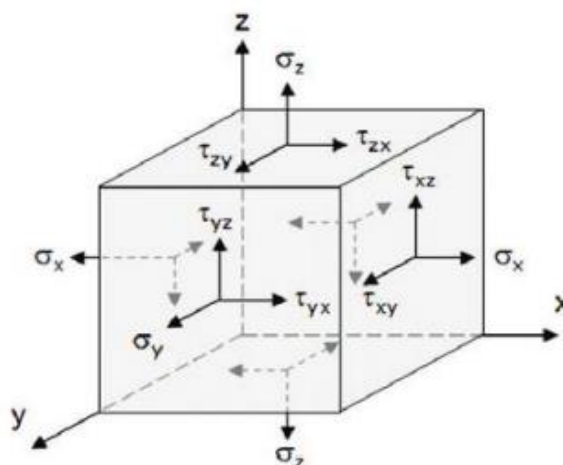
Statičkim vlačnim testom se ispituje konstitutivno ponašanje materijala pri djelovanju jednoosnog opterećenja. Testom se određuju osnovna mehanička svojstva materijala kao što su granica razvlačenja te vlačna čvrstoća. Statički vlačni test je najčešće korištena metoda ispitivanja mehaničkih svojstva materijala te se njime utvrđena svojstva mogu iskoristiti za predviđanje ponašanja materijala pri drugim oblicima opterećenja. Ispitivanje se provodi tako da se ispitni uzorak tj. epruveta kontinuirano razvlači uz spori prirast naprezanja sve do loma. Epruvete su najčešće kružnog ili pravokutnog poprečnog presjeka ali su mogući i drugi oblici. Slika 15 prikazuje epruvetu kružnog poprečnog presjeka [12].



Slika 15. Epruveta kružnog poprečnog presjeka [12]

3.2 Tenzor naprezanja

Tenzor naprezanja je tenzor drugog reda koji opisuje stanje naprezanja u određenoj točki unutar materijala. Normalna naprezanja su označena slovom σ te se nalaze na dijagonali tenzorske matrice dok se posmična naprezanja nalaze na preostalim mjestima matrice te su označena slovom τ . Matrica tenzora je simetrična što znači da su posmična naprezanja koja djeluju na međusobno okomitim presjecima jednaka. Tenzor naprezanja je prikazan na slici 16.



Slika 16. Tenzor naprezanja [13]

Pripadne komponente tenzora naprezanja napisane u matričnom obliku glase:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Glavna naprezanja predstavljaju ekstremne vrijednosti normalnih naprezanja pri čemu je iznos posmičnih naprezanja jednak nuli. Uobičajeno označavanje te poredak glavnih naprezanja glasi:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{\max} \\ \sigma_1 &> \sigma_2 > \sigma_3 \\ \sigma_3 &= \sigma_{\min}. \end{aligned} \quad (5)$$

Tenzor naprezanja se može izraziti kao suma tenzora sfernog naprezanja i tenzora devijatorskog naprezanja. Sferno tj. hidrostatsko naprezanje uzrokuje promjenu volumena dok devijatorsko naprezanje uzrokuje promjenu oblika. Tenzor naprezanja se razlaže prema izrazu:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}. \quad (6)$$

pri čemu δ_{ij} označava Kroneckerov delta simbol a S_{ij} tenzor devijatorskog naprezanja tzv. devijator naprezanja. Izraz (6) u matičnom zapisu glasi:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} + \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

pri čemu se hidrostatsko naprezanje σ_0 dobiva preko izraza:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}. \quad (8)$$

Za svaki tenzor postoje određene invarijante tj. vrijednosti koje su neovisne o orijentaciji koordinatnog sustava. Tenzor naprezanja posjeduje tri invarijante I_1, I_2, I_3 koje redom glase:

$$I_1 = \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (9)$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \quad (10)$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}). \quad (11)$$

Tenzor devijatorskog naprezanja također posjeduje tri invarijante J_1, J_2 i J_3 koje se definiraju izrazima:

$$J_1 = S_{kk} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0 \quad (12)$$

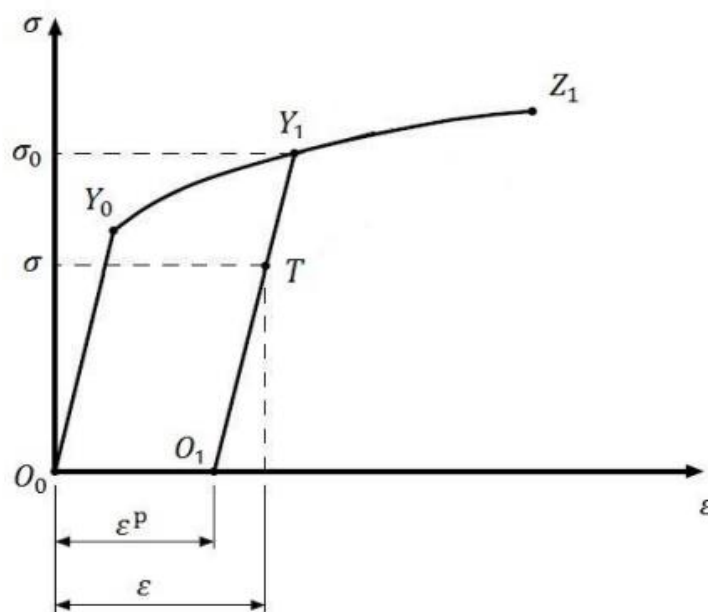
$$J_2 = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \quad (13)$$

$$J_3 = \det(\mathbf{S}) \quad (14)$$

pri čemu S_1, S_2 i S_3 označavaju glavne vrijednosti tenzora devijatorskog naprezanja.

3.3 Elastoplastično ponašanje

Teorija plastičnosti proučava materijale u kojima dolazi do plastičnog tečenja. Veza napreznja i deformacije vidljiva na slici 17 predstavlja tipičnu krivulju koju daju duktilni metali podvrgnuti jednoosnom vlačnom testu.



Slika 17. Tipična krivulja napreznja – deformacija [8]

Dio krivulje omeđen ishodištem i granicom tečenja Y_0 predstavlja područje linearne elastičnosti pri čemu je veza napreznja i deformacija linearna. Deformacije koje se javljaju u ovom području su elastične tj. povratne. Slijedi da se rasterećenjem u elastičnom području materijal vraća u početno neopterećeno stanje označeno točkom O_0 te u njemu ne ostaju trajne tj. plastične deformacije. Ponašanje materijala u tom području opisuje Hooke-ov zakon koji za jednoosno stanje napreznja glasi:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (15)$$

gdje E označava Youngov modul elastičnosti. Povećanjem napreznja iznad granice tečenja Y_0 materijal ulazi u plastično područje gdje veza napreznja i deformacija više nije linearna. Također se počinju javljati trajne tj. plastične deformacije. Ukoliko se materijal rastereti u plastičnom području, krivulja napreznja – deformacija će pratiti zakon linearne elastičnosti sve do potpunog rasterećenja označenog točkom O_1 . Ukupna deformacija u točki T se sastoji od nepovratne plastične deformacije i povratne elastične deformacije:

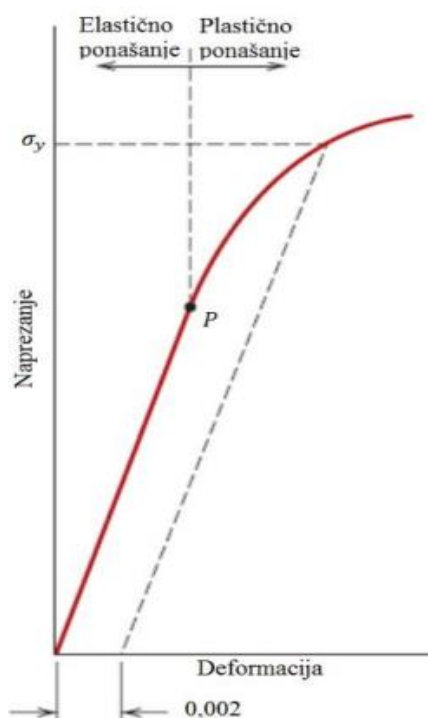
$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \quad (16)$$

Vidljivo je da ponovnim opterećivanjem iz točke O_1 materijal slijedi zakon linearne elastičnosti sve do točke Y_1 . Y_1 predstavlja novu granicu tečenja materijala koja je veća od inicijalne granice tečenja Y_0 . Pojava povećanja granice tečenja se naziva očvršćenje materijala te će biti detaljnije opisana u narednim poglavljima. Budući da u materijalu već postoje plastične deformacije, veza naprezanja i deformacije između točaka O_1 i Y_1 glasi:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p). \quad (17)$$

Opterećivanje materijala iznad nove granice tečenja Y_1 uzrokuje dodatne plastične deformacije sve do loma materijala u točki Z_1 .

Točka Y_0 predstavlja točku u kojoj završava elastično ponašanje materijala pri inicijalnom opterećivanju. Iako je ona jasno vidljiva na slici 15, to često nije slučaj. Za materijale koji nemaju jasno izraženu inicijalnu granicu tečenja, potrebno je definirati konvencionalnu granicu tečenja. Konvencionalna granica tečenja je ono naprezanje koje u materijalu uzrokuje određeni postotak plastičnih deformacija, najčešće 0,2 %. Određivanje konvencionalne granice tečenja je prikazano na slici 18. [8].



Slika 18. Određivanje konvencionalne granice tečenja [8]

3.4 Teorije čvrstoće i plohe tečenja

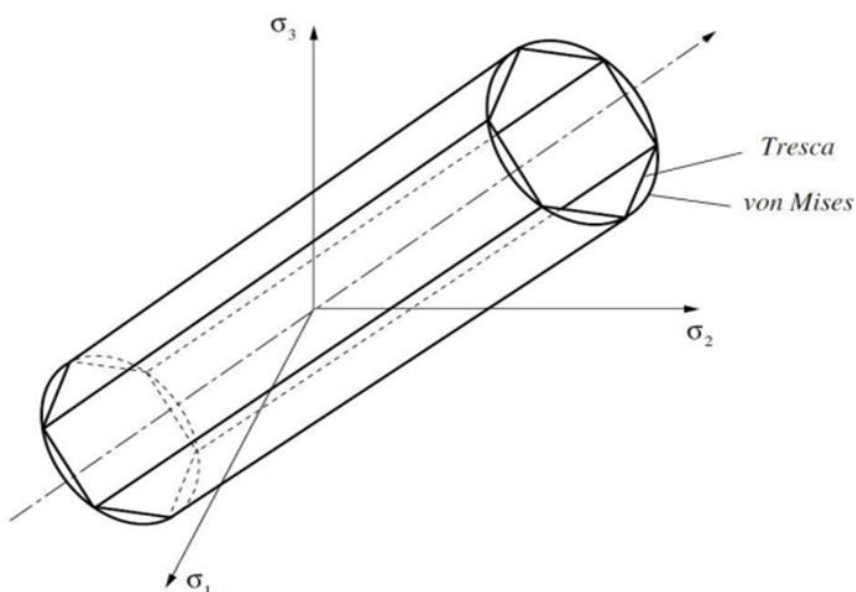
Teorije čvrstoće nastoje predviditi pojavu tečenja materijala ovisno o podacima dobivenim jednoosnim vlačnim testom. Najčešće se koriste Teorija najveće distorzijske energije (HMH, Von Mises) i teorija najvećih posmičnih naprezanja (Tresca). Prema HMH teoriji, tečenje materijala nastupa kada gustoća distorzijske energije tj. ekvivalentno naprezanje definirano izrazom (18) dosegne kritičnu vrijednost [9]:

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (18)$$

pri čemu σ_1, σ_2 i σ_3 predstavljaju glavna naprezanja. Prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja, tečenje materijala nastupa kada posmično naprezanje tj. ekvivalentno naprezanje definirano izrazom (19) dosegne kritičnu vrijednost [9]:

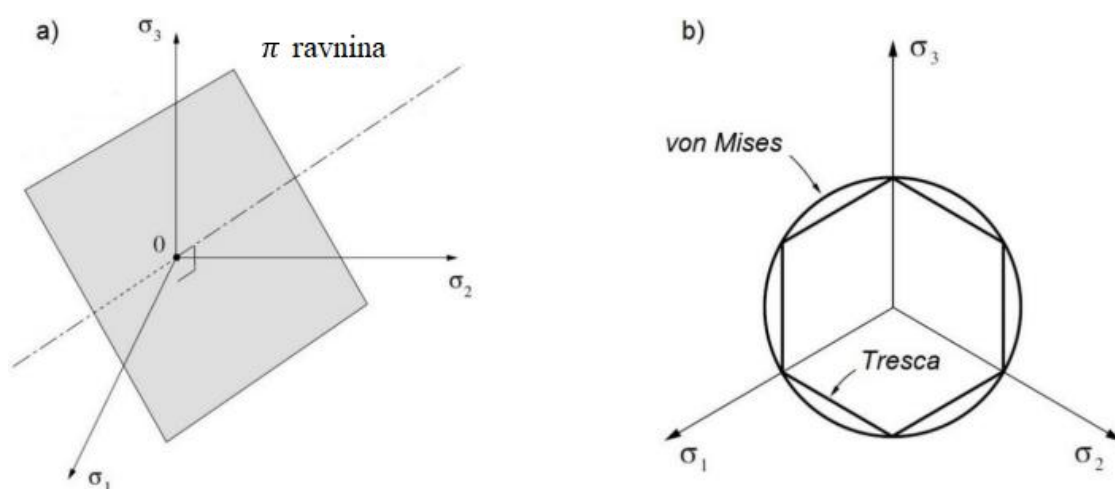
$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (19)$$

Ploha tečenja predstavlja granicu tečenja prikazanu u prostoru glavnih naprezanja tj. prostoru čije su koordinatne osi σ_1, σ_2 i σ_3 . Ploha tečenja prema HMH teoriji je u prostoru glavnih naprezanja grafički prikazana kao beskonačni valjak dok je ploha tečenja prema Trescinoj teoriji prikazana kao beskonačna šesterostrana prizma. Slika 19 prikazuje spomenute plohe tečenja u prostoru glavnih naprezanja.



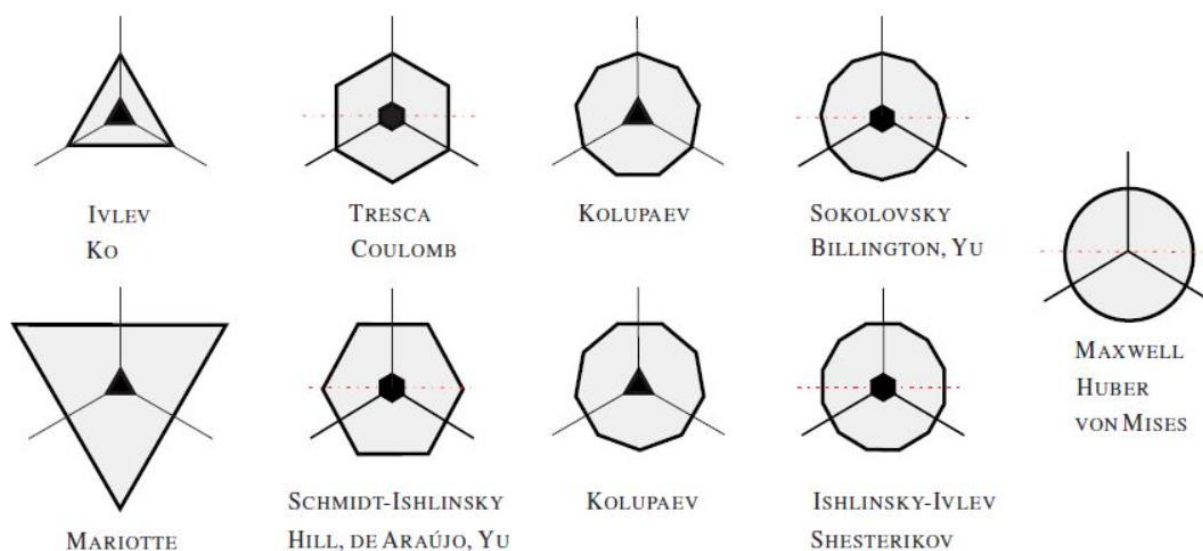
Slika 19. Plohe tečenja u prostoru glavnih naprezanja [11]

Središnja aksijalna os spomenutih ploha se poklapa s hidrostatskim pravcem $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Stanja naprezanja u unutrašnjosti valjka prema HMM teoriji predstavljaju područje linearne elastičnosti dok stanja naprezanja van valjka predstavljaju područje plastičnog tečenja materijala. Analogno vrijedi za Trescinu teoriju i prizmu. To znači da će materijal ostati u elastičnom području dok god su iznosi triju glavnih naprezanja otprilike jednaki. Trescina i HMM ploha tečenja se često prikazuju u devijatorskoj tj. π ravnini koja je okomita na hidrostatski pravac. Slika 20 prikazuje π ravninu i opisane plohe tečenja u π ravnini [11].



Slika 20. a) π ravnina b) Plohe tečenja u π ravnini [11]

Općenito postoji više teorija čvrstoće od kojih niti jedna nije primjenjiva za sve vrste materijala. Slika 21 prikazuje plohe tečenja rijeđe korištenih teorija čvrstoće u π ravnini.



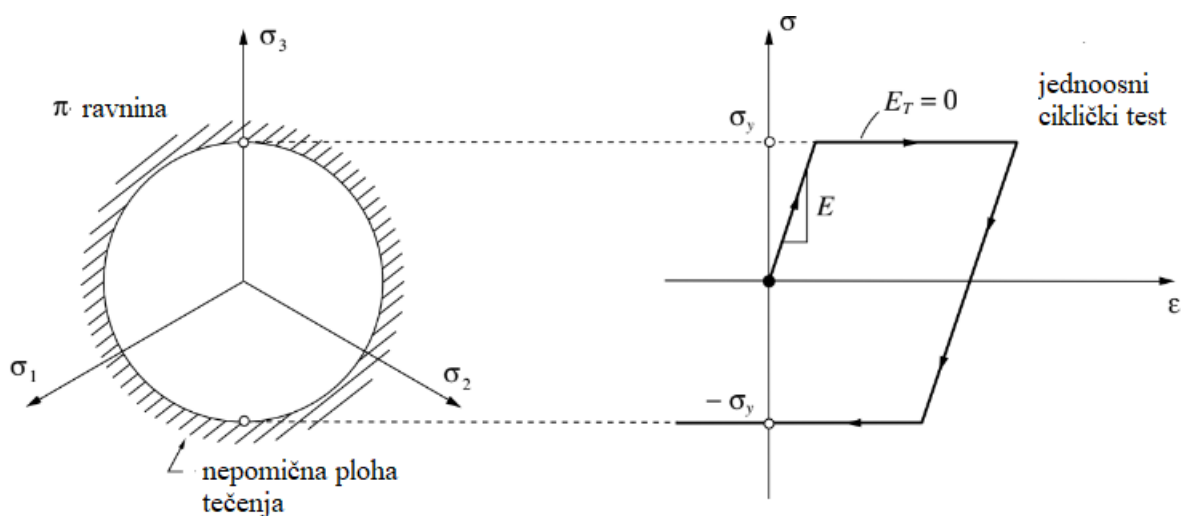
Slika 21. Plohe tečenja rijeđe korištenih teorija u π ravnini [10]

3.5 Zakoni očvršćenja

3.5.1 Idealna plastičnost

Očvršćenje je fenomen kojeg karakterizira ovisnost granice tečenja o prethodnim plastičnim deformacijama materijala. Očvršćenje stoga utječe na veličinu i položaj plohe tečenja u prostoru glavnih naprezanja.

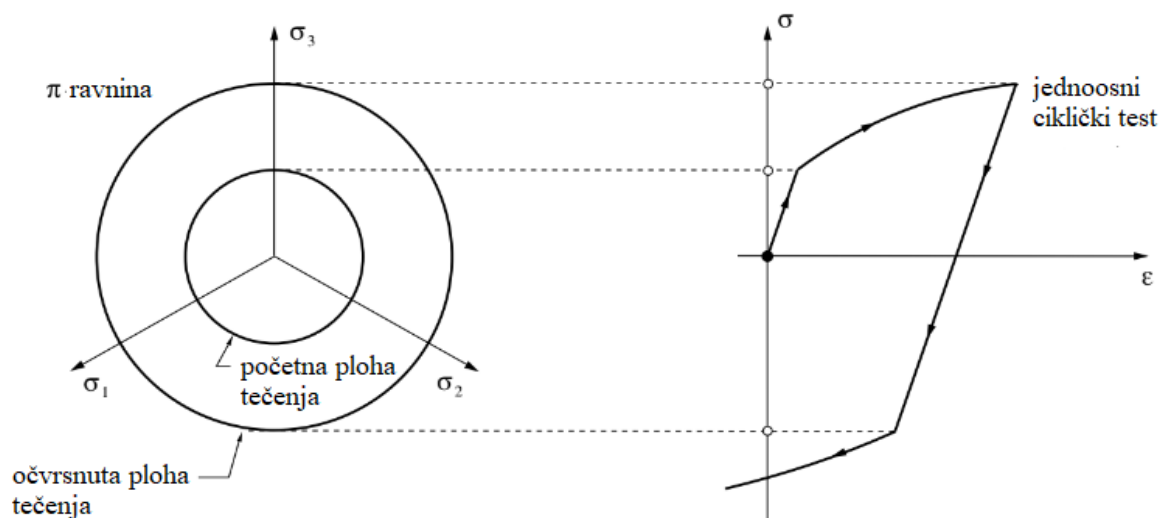
Idealna plastičnost predstavlja materijalni model gdje ne dolazi do očvršćenja tj. granica tečenja ne ovisi o prethodnim plastičnim deformacijama materijala. U ovom slučaju ploha tečenja također ostaje nepromijenjena i konstantna. Idealno plastični modeli se često koriste za analizu stabilnosti te određivanje kritičnog opterećenja i pripadnih faktora sigurnosti. Slika 22 prikazuje krivulju naprezanja i deformacije za jednoosni ciklički test materijala s pretpostavkom idealne plastičnosti te pripadnu plohu tečenja prema teoriji najveće distorzijske energije (HMH), prikazanu u π ravnini [11].



Slika 22. Idealna plastičnost [11]

3.5.2 Izotropno očvršćenje

Izotropno očvršćenje predstavlja model plastičnosti kod kojeg dolazi do jednolikog (izotropnog) povećanja granice (plohe) tečenja u odnosu na početno stanje bez njene translacije. Za općeniti slučaj elastoplastičnog modela čija je ploha tečenja definirana prema HMH teoriji, izotropno očvršćenje se definira kao povećanje polumjera cilindra u prostoru glavnih naprezanja. Izotropno očvršćenje HMH plohe tečenja u π ravnini i pripadna krivulja naprezanje – deformacija za jednoosni ciklički test su prikazani na slici 23 [11].



Slika 23. Izotropno očvršćenje [11]

Granica tečenja pri izotropnom očvršćenju uslijed jednoosnog opterećenja se definira kao funkcija plastične deformacije:

$$\sigma_y = f(\varepsilon^p). \quad (20)$$

Veza naprezanja i deformacije u plastičnom području pri izotropnom očvršćenju kod jednoosnog opterećenja glasi:

$$\sigma = E^{ep} \varepsilon, \quad (21)$$

gdje E^{ep} predstavlja elastoplastični tangentni modul definiran kao:

$$E^{ep} = \frac{EK}{E + K}, \quad (22)$$

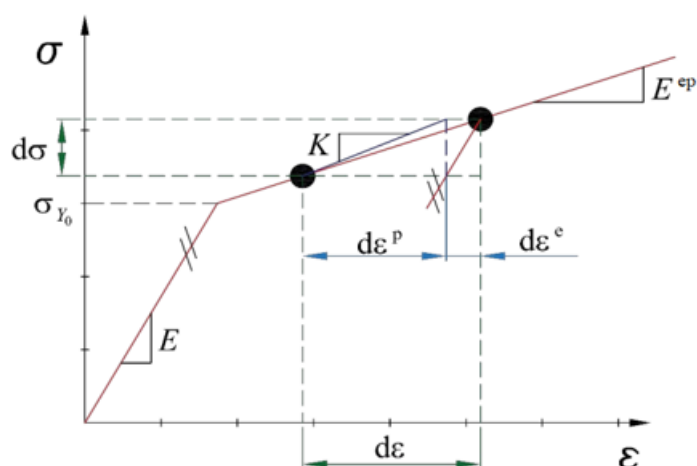
pri čemu K označava modul očvršćenja tj. nagib krivulje naprezanje – deformacija u plastičnom području:

$$K = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (23)$$

te je zajedno sa elastoplastičnim tangentnim modulom prikazan na slici 24 za slučaj jednoosnog opterećenja linearno očvršćujućeg materijala. Uvođenjem modula očvršćenja K moguće je definirati funkciju tečenja za općeniti slučaj izotropnog očvršćenja:

$$f(\sigma_{ij}, K_i) = f_0(\sigma_{ij}) - K = 0, \quad (24)$$

pri čemu $f_0(\sigma_{ij})$ definira inicijalnu plohu tečenja.



Slika 24. Moduli kod izotropnog očvršćenja [14]

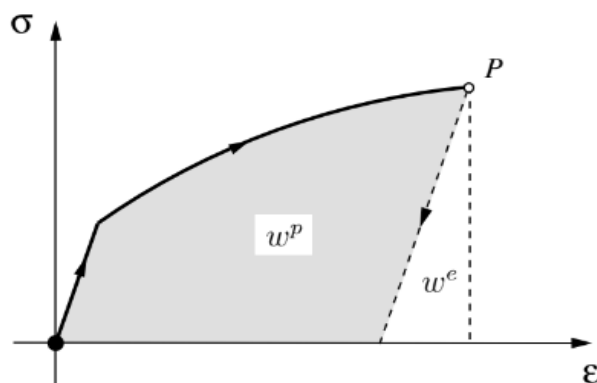
Izotropni model očvršćenja može biti baziran i na radu pri čemu je granica tečenja definirana kao funkcija plastičnog rada:

$$\sigma_y = f(w^p), \quad (25)$$

dok je ukupni rad jednak zbroju plastičnog i elastičnog rada:

$$w = w^p + w^e. \quad (26)$$

Ukupan rad, potreban da bi se materijal deformirao do određene točke pri jednoosnom testu odgovara površini ispod krivulje naprezanje – deformacija. Rad elastičnog deformiranja je sačuvan u obliku potencijalne energije deformiranja te je potpuno povrativ pri uklanjanju opterećenja dok je rad plastičnog deformiranja nepovrativ i odgovara energiji disipiranoj plastičnim mehanizmima [11]. Slika 25 prikazuje rad elastičnog i plastičnog deformiranja pri jednoosnom testu.

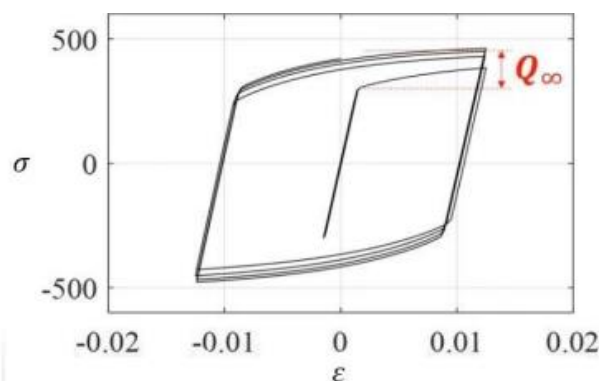


Slika 25. Rad elastičnog i plastičnog deformiranja [11]

U ovom radu je korišten model nelinearnog izotropnog očvršćenja, koji je dostupan u programskom paketu *Abaqus*, gdje je granica tečenja definirana kao funkcija ekvivalentne plastične deformacije:

$$\sigma_y(\varepsilon_{ekv}^p) = \sigma_y^0 + Q_\infty \left(1 - e^{-b\varepsilon_{ekv}^p}\right) \quad (27)$$

pri čemu ε_{ekv}^p označava ekvivalentnu plastičnu deformaciju, σ_y^0 inicijalnu granicu tečenja a Q_∞ i b materijalne parametre koji se moraju odrediti pomoću eksperimenta. Parametri Q_∞ i b se mogu odrediti pomoću simetričnog cikličkog testa, prikazanog na slici 26. Q_∞ predstavlja razliku konačne i početne granice tečenja dok b opisuje promjenu Q_∞ s promjenom ekvivalentne plastične deformacije [8].



Slika 26. Promjena granice tečenja pri simetričnom cikličkom testu [8]

3.5.3 Kinematičko očvršćenje

Ploha tečenja pri kinematičkom očvršćenju zadržava svoj oblik i veličinu ali translacija u prostoru glavnih napreznja. Kod mnogih materijala nakon opterećivanja i očvršćenja u jednom smjeru dolazi do smanjivanja granice tečenja u suprotnom smjeru. Takva pojava se naziva *Bauschingerov efekt* te se modelira pomoću kinematičkog očvršćenja [11]. Funkcija tečenja pri kinematičkom očvršćenju je dana izrazom:

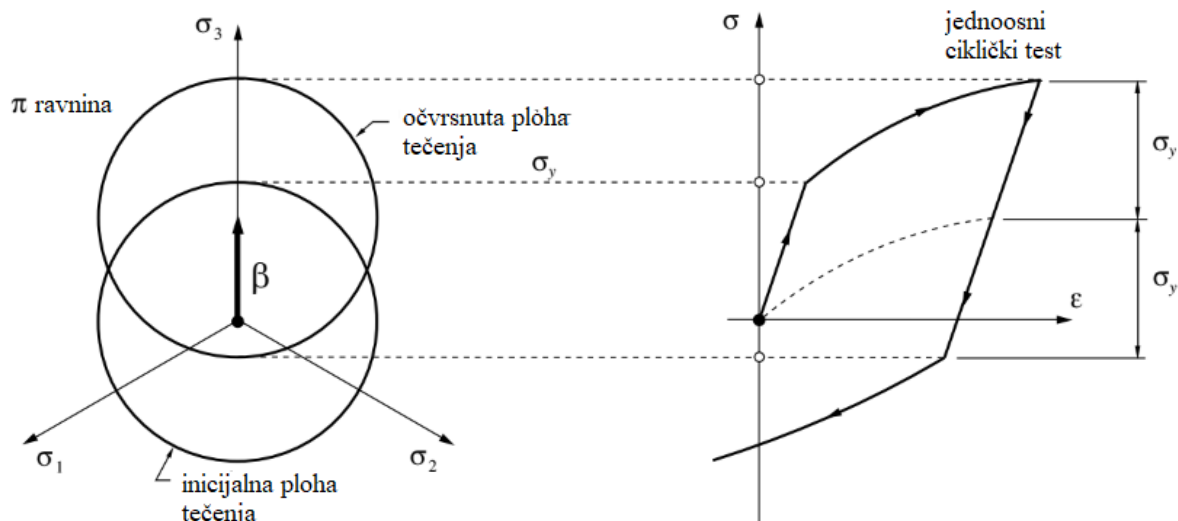
$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = \sqrt{3J_2[\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta})]} - \sigma_y \quad (28)$$

gdje

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) \equiv \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\beta} \quad (29)$$

predstavlja tenzor relativnog napreznja koji je definiran kao razlika tenzora devijatorskog napreznja \mathbf{S} i tenzora povratnog napreznja $\boldsymbol{\beta}$.

Tenzor povratnog naprezanja opisuje translaciju plohe tečenja u prostoru glavnih naprezanja. Uz pretpostavku von Misesove plohe tečenja, granica tečenja σ_y definira radijus plohe tečenja. Kinematičko očvršćenje, *Bauschingerov efekt* i tenzor povratnog naprezanja su prikazani na slici 27.



Slika 27. Kinematičko očvršćenje [11]

Ovisno o definiciji tenzora povratnog naprezanja, kinematičko očvršćenje može biti linearno i nelinearno. Pri linearnom kinematičkom očvršćenju se najčešće upotrebljava *Pragerovo pravilo linearnog kinematičkog očvršćenja*, koje tenzor povratnog naprezanja definira prema:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{2}{3} H \boldsymbol{\epsilon}^p, \quad (30)$$

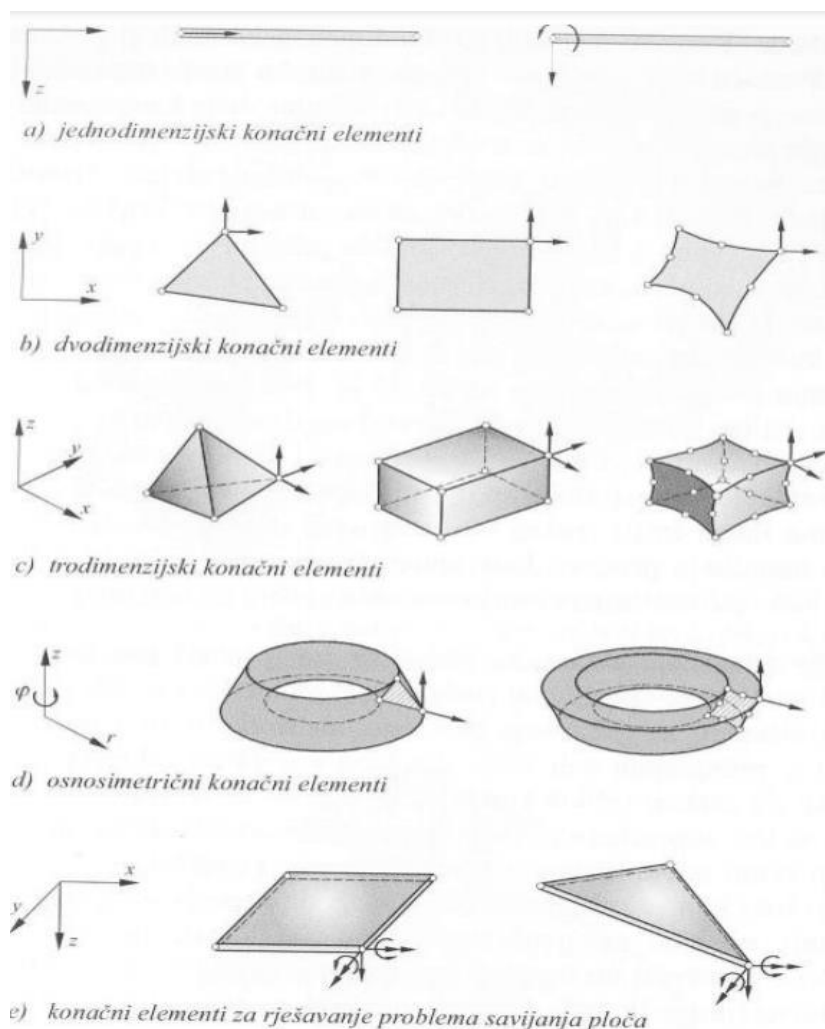
pri čemu H označava materijalnu konstantu tzv. modul linearnog kinematičkog očvršćenja. Moguće su razne modifikacije Pragerova pravila linearnog kinematičkog očvršćenja. Jedno od njih je uvođenje nelinearnosti na način da se modul linearnog kinematičkog očvršćenja H definira kao funkcija ekvivalentne plastične deformacije ϵ_{ekv}^p :

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{2}{3} H(\epsilon_{ekv}^p) \boldsymbol{\epsilon}^p. \quad (31)$$

4. NUMERIČKO MODELIRANJE ELASTOPLASTIČNOG PONAŠANJA MATERIJALA

4.1 Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda koja se koristi za rješavanje sustava parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Metodom konačnih elemenata je moguće postići približna rješenja koja su primjenjiva za praktične potrebe. Temelji se na diskretizaciji proračunskog modela pri čemu se sustav diferencijalnih jednačbi supstituira sustavom algebarskih jednačbi. Svaki pojedini diskretizirani dio prostora tj. proračunskog modela se naziva konačni element. Elementi su povezani u točkama koje se nazivaju čvorovi te zajedno tvore mrežu konačnih elemenata. Izbor i broj konačnih elemenata utječu na točnost numeričkog rješenja te sama metoda ima široku primjenu pri rješavanju linearnih i nelinearnih problema. Slika 28 prikazuje osnovne tipove konačnih elemenata.

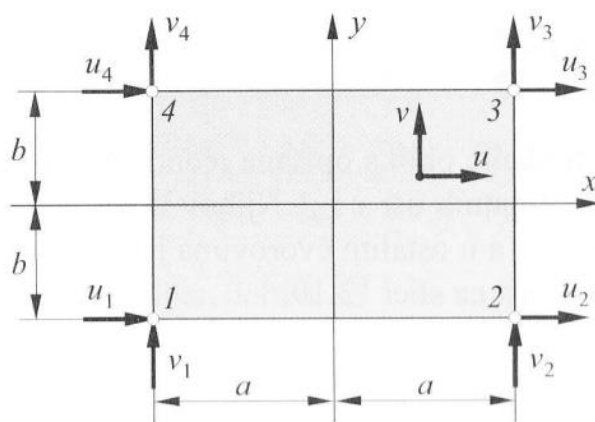


Slika 28. Osnovni tipovi konačnih elemenata [15]

4.2 Osnovni pravokutni element

U ovom radu je primijenjen osnovni pravokutni konačni element za ravninske probleme. Osnovni pravokutni konačni element je najjednostavniji pravokutni element te je prikazan na slici 29. Element sadrži četiri čvora, po jedan u svakom vrhu pravokutnika. Svaki čvor posjeduje dva stupnja slobode. Pomaci u smjeru kordinatnih osi x i y predstavljaju stupnjeve slobode [15]. Vektor stupnjeva slobode stoga glasi:

$$\mathbf{v}^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]. \quad (32)$$



Slika 29. Osnovni pravokutni konačni element [15]

Polje pomaka unutar elementa je opisano nepotpunim polinomima drugog stupnja te u matričnom zapisu glasi:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

ili kraće zapisano:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{a}, \quad (34)$$

pri čemu \mathbf{a} predstavlja matricu koeficijenata a $\boldsymbol{\alpha}$ matricu funkcija u interpolacijskim polinomima.

Uvrštavanjem rubnih uvjeta tj. koordinata čvorova prema slici 29. u izraz (33) slijedi:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

ili kraće zapisano:

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{a}, \quad (36)$$

gdje \mathbf{C} označava matricu međusobne ovisnosti stupnjeva slobode i koeficijenta interpolacijskih polinoma. Pomoću izraza:

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}, \quad (37)$$

slijedi matrica funkcija oblika:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

koja predstavlja vezu između između polja pomaka \mathbf{u} i vektora stupnjeva slobode:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{v}. \quad (39)$$

gdje su funkcije oblika:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ N_2 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ N_3 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ N_4 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right). \end{aligned} \quad (40)$$

N_1, N_2, N_3 i N_4 predstavljaju pojedine funkcije oblika za pripadne čvorove. Iz izraza (40) je vidljivo da su funkcije oblika osnovnog pravokutnog elementa opisane jednodimenzijskim linearnim polinomima u smjeru koordinatnih osi x i y . Iznos funkcija oblika je jednak jedinici u čvoru na koji se pojedina funkcija odnosi dok je za ostale čvorove jednak nuli. Općenito, iznos funkcija oblika ovisi o geometriji konačnog elementa te koordinatama promatrane točke.

Derivacijom funkcija oblika slijedi matrica \mathbf{B} tj. matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima. Deriviranje funkcija oblika se provodi pomoću kinematičkog diferencijalnog operatora \mathbf{D}_k koji za ravninsko stanje naprezanja i deformacija glasi [15]:

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Slijedi matrica \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Pomoću matrice \mathbf{B} je moguće izraziti deformacije u elementu preko pomaka u čvorovima:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (43)$$

pri čemu su komponente deformacije osnovnog pravokutnog elementa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}). \quad (44)$$

Matrica krutosti elementa se računa prema izrazu:

$$\mathbf{k} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy, \quad (45)$$

gdje \mathbf{D} označava matricu elastičnosti.

Članovi matrice elastičnosti ovise o elastičnim svojstvima materijala. Matrica elastičnosti konačnih elemenata za 2D analizu ovisi o tome radi li se o elementima za opisivanje ravninskog stanja napreznja ili ravninskog stanja deformacije. U ovome radu će se koristiti osnovni pravokutni element za opisivanje ravninskog stanja deformacije. Njegova oznaka u programskom paketu *Abaqus* glasi CPE4 dok je njegova matrica elastičnosti:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

pri čemu ν označava Poissonov koeficijent. Materijalne konstante E i ν se često zamjenjuju Laméovim parametrima μ i λ koji su definirani prema:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (47)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (48)$$

pri čemu G označava modul smicanja materijala. Veza između napreznja i deformacije u konačnom elementu glasi:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (49)$$

pri čemu su komponente napreznja osnovnog pravokutnog elementa:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}). \quad (50)$$

4.3 Linearna analiza

Linearna analiza se provodi ukoliko je zadovoljena pretpostavka malih deformacija, a materijal se ponaša linearno elastično i postoji linearna veza napreznja i deformacije prema konstitutivnoj jednadžbi:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (51)$$

U tom slučaju rješava se linearna jednadžba konačnih elemenata:

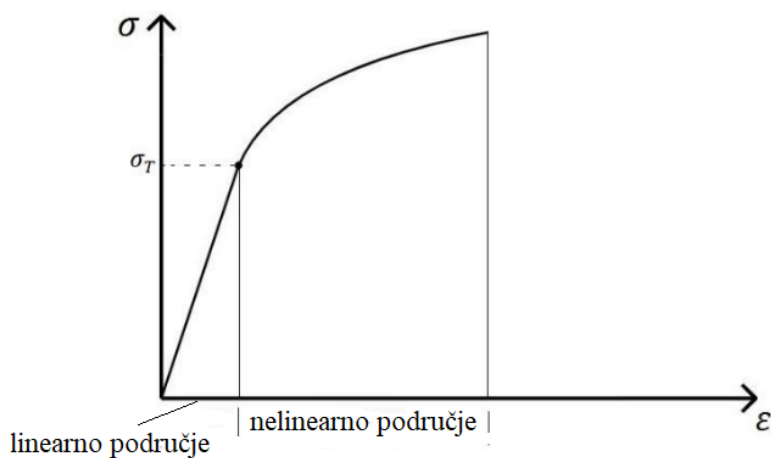
$$\mathbf{KV} = \mathbf{R}, \quad (52)$$

gdje \mathbf{K} označava globalnu matricu krutosti, \mathbf{V} globalni vektor stupnjeva slobode elementa a \mathbf{R} vektor čvornih sila uslijed vanjskog opterećenja. Poznavanjem krutosti i opterećenja moguće je izračunati pomake u čvorovima elementa opisane vektorom \mathbf{V} , te iz njih sve ostale relevantne veličine prema načinu prikazanom u poglavlju 4.2.

Rješenja linearnih problema karakterizira proporcionalnost pomaka i opterećenja te konstantna krutost strukture (neovisna o opterećenju). Opterećenje ne mijenja smjer te se ravnoteža razmatra na nedeformiranom obliku konstrukcije. Greška rješenja dobivenog linearnom analizom je zanemariva za veliki broj praktičnih problema ukoliko se promatrani materijal nalazi u elastičnom području. Velike greške su moguće ukoliko se zakonitosti i pretpostavke linearne analize primijene na materijal koji se nalazi u plastičnom području.

4.4 Materijalna nelinearnost

Materijalna nelinearnost predstavlja jedan od tri uzroka nelinearnosti u simulacijama. Ukoliko se materijalna svojstva mijenjaju s deformacijom, radi se o materijalnoj nelinearnosti. U tom slučaju, konstitutivna jednadžba linearne elastičnosti (51) više nije primjenjiva iz razloga što ne postoji linearna veza naprezanja i deformacija. Veza naprezanja i deformacije može ovisiti o iznosima naprezanja i deformacije, brzini deformacije, prethodnom opterećenju ili o nekoj kombinaciji spomenutih veličina. Područja linearne i nelinearne veze naprezanja i deformacije su razdvojena granicom tečenja te su prikazana na slici 30.



Slika 30. Područja linearnog i nelinearnog ponašanja materijala [8]

4.5 Pristup numeričkom rješavanju nelinearnih problema

Rješenja nelinearnih problema se ne mogu dobiti jednokratnim rješavanjem sustava jednadžbi, kao što je slučaj u linearnim problemima. Za rješavanje nelinearnih problema se koriste inkrementalno – iterativne metode gdje se rješenje dobiva na način da se nametnuto opterećenje nameće postepeno tj. inkrementalno. Numerička analiza se dijeli na određeni broj inkremenata pri čemu je opterećenje svakog inkrementa različito u odnosu na prethodni inkrement. Za svaki inkrement je potrebno izračunati statičku ravnotežu, za što je ponekad potrebno i nekoliko iteracija. Jedna iteracija predstavlja jedan pokušaj traženja rješenja unutar određenog inkrementa te se iduća iteracija provodi ukoliko nije zadovoljena jednadžba ravnoteže. Iteracije se provode sve do dobivanja ravnotežnog rješenja inkrementa, pri čemu je rješenje svakom idućom iteracijom bliže ravnotežnom stanju. Uvjet ravnoteže je iskazan jednakošću unutarnjih i vanjskih sila prema izrazu:

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}) = \mathbf{R} \quad (53)$$

gdje \mathbf{R} označava vektor čvornih sila uslijed vanjskog opterećenja a \mathbf{G} matricu nelinearnih vektorskih funkcija unutarnjih sila, koje su funkcija pomaka u čvorovima. Nelinearna formulacija se koristi da bi se opisao nelinearni odziv konstrukcije. Iz osnovnog ravnotežnog stanja se traži ravnoteža bliskog stanja koje je definirano prirastom opterećenja u idućem inkrementu [14]. Veza između osnovnog i bliskog stanja opterećenja i pomaka je stoga dana izrazom:

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \Delta\mathbf{V} \quad (54)$$

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} + \Delta\mathbf{R}, \quad (55)$$

pri čemu \mathbf{V} i \mathbf{R} označavaju vektor čvornih pomaka i vektor čvornih sila bliskog stanja, $\bar{\mathbf{V}}$ i $\bar{\mathbf{R}}$ vektor čvornih pomaka i vektor čvornih sila osnovnog stanja a $\Delta\mathbf{V}$ i $\Delta\mathbf{R}$ prirast pomaka i opterećenja. Jednadžba konačnih elemenata za nelinearnu analizu glasi:

$$\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{V}})\Delta\mathbf{V} = \mathbf{R} - \bar{\mathbf{R}}_i(\bar{\mathbf{V}}), \quad (56)$$

gdje $\bar{\mathbf{R}}_i(\bar{\mathbf{V}})$ označava vektor unutarnjih sila a \mathbf{K}_T tangencijalnu matricu krutosti koja je definirana prema:

$$\mathbf{K}_T = \left. \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}} \right|_{\bar{\mathbf{V}}} \quad (57)$$

Ravnoteža je postignuta kada vrijedi:

$$\mathbf{R} - \bar{\mathbf{R}}_i(\bar{\mathbf{V}}) = \mathbf{0} \quad (58)$$

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{0} . \quad (59)$$

4.6 Algoritam numeričkog modeliranja nelinearnog ponašanja materijala

U ovom poglavlju će se detaljno opisati algoritam koji će se koristiti za modeliranje elastoplastičnog ponašanja materijala u kasnijim poglavljima. Za početak je potrebno definirati dimenzije napreznja, deformacije te matrice elastičnosti. Matrica elastičnosti se popunjava pomoću Laméovih parametara koji su dani jednažbama (47) i (48). Dimenzije spomenutih veličina ovise o korištenom konačnom elementu i tipu problema. Slijedi definiranje broja materijalnih konstanti te dopuštene tolerancije rješenja. Kako je algoritam namijenjen za proračun izotropnog očvršćenja prema jednažbi (27), u kod algoritma se unose vrijednosti ili funkcije raspodjele inicijalne granice tečenja σ_y^0 te materijalnih parametara Q_∞ i b . Za početak se pretpostavlja da je materijal u elastičnom području, pa prirast napreznja i deformacije po inkrementima simulacije glasi:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^i + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (60)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1} = \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} ,$$

pri čemu i označava broj inkrementa. Slijedi definiranje ekvivalentnog napreznja prema jednažbi (18) te provjera da li dolazi do plastičnog tečenja tj. da li je ekvivalentno napreznje veće od granice tečenja koja je za slučaj izotropnog očvršćenja definirana prema:

$$\sigma_y(\varepsilon_{ekv}^p) = \sigma_y^0 + Q_\infty \left(1 - e^{-b \varepsilon_{ekv}^p} \right) . \quad (61)$$

Ukoliko je ekvivalentno napreznje veće od granice tečenja, ulazi se u algoritam elastični prediktor – plastični korektor, gdje se najprije definiraju hidrostatsko i devijatorsko napreznje. Normala na plohu tečenja definira smjer tečenja. Funkcija tečenja je definirana izrazom:

$$f = \sigma_{ekv} - 2\mu\Delta\lambda - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y \quad (62)$$

pri čemu μ označava Lameov parametar a $\Delta\lambda$ prirast opterećenja. Iznos prirasta opterećenja $\Delta\lambda$ slijedi izjednačavanjem funkcije tečenja sa nulom te je definiran izrazom:

$$\Delta\lambda^{i+1} = \Delta\lambda^i + \frac{f^i}{2\mu + \frac{2}{3}K} \quad (63)$$

pri čemu K označava modul očvršćenja definiran izrazom (23). Slijedi ažuriranje granice tečenja i modula očvršćenja. Jednadžbe (62) i (63) se zajedno uz ažuriranje granice tečenja i modula očvršćenja iterativno rješavaju sve do postizanja zadovoljavajuće točnosti. Kada je zadovoljavajuća točnost postignuta, slijedi ažuriranje naprezanja i ekvivalentne plastične deformacije. Ekvivalentna plastična deformacija će definirati granicu tečenja u idućem inkrementu. Također se sklapa tangencijalna matrica krutosti. Algoritam staje postizanjem ravnoteže koja je definirana izrazima (58) i (59).

5. OŠTEĆENJE I LOM MATERIJALA

5.1 Osnove oštećenja i loma materijala

Sve veći zahtjevi za smanjenjem potrošnje materijala i energije uvjetuju projektiranje konstrukcija sa manjim rezervama sigurnosti što posljedično dovodi do sve većeg naglaska na prevenciju pojave loma konstrukcijskih komponenti. Prisutnost pukotina u konstrukcijama nije moguće izbjeći pa je strah od loma uvijet prisutan. Lom uslijed neočekivanog opterećenja se događa rijetko. Najčešće je lom posljedica strukturnih mana ili pukotina unutar konstrukcije na način da pukotina, počevši kao mana ili koncentracija naprezanja, uslijed konstantnog monotonog ili cikličkog opterećenja napreduje u veličini te narušava čvrstoću konstrukcije koja u jednom trenutku više neće biti u stanju podnijeti opterećenje te će nastupiti lom. Tehnička disciplina koja proučava pojavu loma se naziva Mehanika loma.

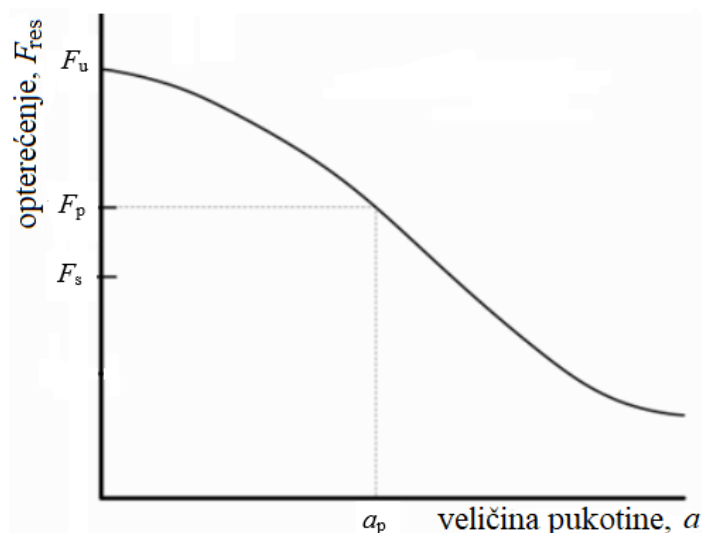
U cilju prevencije loma potrebno je zaustaviti napredovanje pukotine preko određene razine koja bi dovela do pada čvrstoće ispod prihvatljive vrijednosti. Za određivanje dopuštene veličine pukotine potrebno je poznavati ovisnost čvrstoće konstrukcije o veličini pukotine te vrijeme potrebno da pukotina napreduje do određene veličine radi procjene sigurnog radnog vijeka konstrukcije. Najprije je potrebno locirati mjesta potencijalnog nastanka pukotine te potom utvrditi utjecaj pukotine na čvrstoću i brzinu napredovanja pukotine. Takva vrsta analize se naziva analiza dopuštenog oštećenja.

Prilikom konstruiranja poželjno je odabrati materijal koji ima veću otpornost na nastajanje pukotina ili poboljšati konfiguraciju konstrukcije čime se osigurava da pukotina neće predstavljati opasnost tijekom očekivanog razdoblja eksploatacije. Alternativni način jest da se dijelovi konstrukcije prilikom pregleda u određenim vremenskim intervalima mogu zamijeniti ili popraviti u slučaju eventualnog postojanja pukotine.

Da bi konstrukcija mogla normalno funkcionirati bez pojave lomova potrebna je kontrola loma koja podrazumijeva zajednički rad konstruktora, inženjera i inspektora s ciljem sprečavanja pojave loma pri eksploataciji kao posljedice grešaka i pukotina unutar materijala. Skup prije navedenih mjera koje imaju za cilj spriječiti pojavu loma prilikom eksploatacije se naziva kontrola loma. Kontrola loma može obuhvaćati analizu dopuštenog oštećenja, odabir materijala, kontrolu procesa ispitivanja te oblikovanje konstrukcije. Izbor mjera ovisi o kritičnosti komponente te eventualnim posljedicama koje bi nastale uslijed loma [16].

5.2 Tolerancija oštećenja i kontrola loma

Dva su osnovna cilja analize dopuštenog oštećenja: određivanje utjecaja pukotine na čvrstoću i određivanje funkcije ovisnosti napredovanja pukotine o vremenu. Utjecaj veličine pukotine na čvrstoću je prikazan na slici 31.



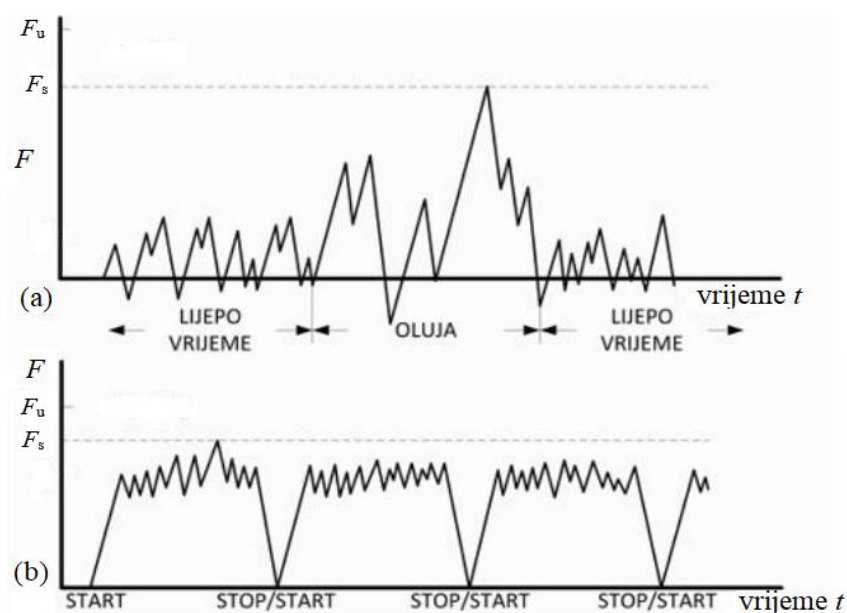
Slika 31. Dijagram preostale čvrstoće [16]

Ukoliko konstrukcija nema oštećenja, odnosno $a = 0$, onda čvrstoća konstrukcije iznosi F_u . Kada je konstrukcija bez oštećenja podvrgnuta opterećenju F_u mora nastupiti lom, inače je konstrukcija predimenzionirana.

Pri konstruiranju se redovno upotrebljava faktor sigurnosti S , vezan uz opterećenje. Ukoliko je maksimalno predviđeno opterećenje F_s , onda je konstrukcija projektirana tako da izdrži opterećenje jednako:

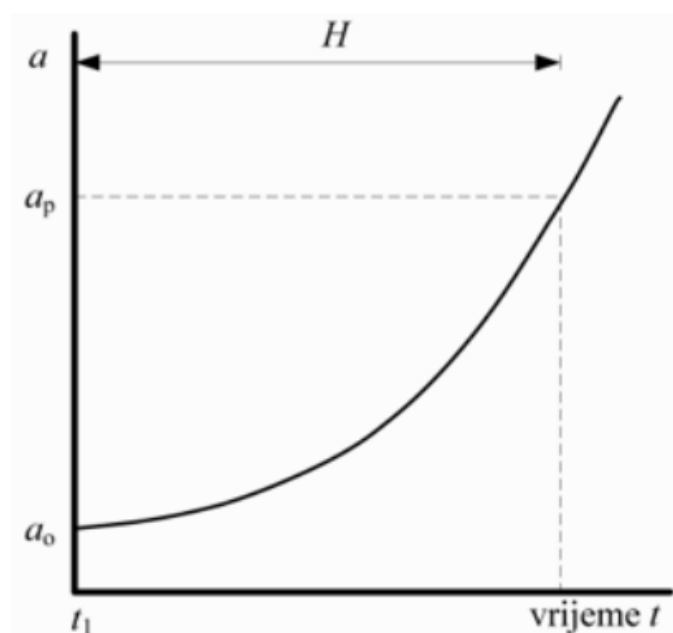
$$F_u = SF_s . \quad (64)$$

Sa slike 31 je vidljivo da čvrstoća konstrukcije pada s porastom pukotine. Čvrstoća u ovisnosti o veličini pukotine se naziva preostala čvrstoća te se označava s F_{res} . Povećanjem pukotine opada i faktor sigurnosti te se povećava mogućnost pojave loma. Do loma dolazi kada se opterećenje izjednači s iznosom preostale čvrstoće. Pri opterećenjima manjima od iznosa F_{res} , pod utjecajem zamora, puzanja ili napetosne korozije, pukotina sve više raste te uzrokuje pad preostale čvrstoće. Ukoliko je poznat dijagram preostale čvrstoće i minimalna dopuštena preostala čvrstoća F_p , moguće je očitati maksimalnu dopuštenu veličinu pukotine iz dijagrama preostale čvrstoće [16]. Ukoliko radno opterećenje varira, opterećenje može većinu vremena biti ispod vrijednosti F_s , te samo u posebnim uvjetima dosegnut iznos F_s . U tom slučaju je sigurnost od loma veća od faktora sigurnosti S . Na nekim konstrukcijama kao što su rotirajući strojni dijelovi i cjevovodi, opterećenja su uglavnom stalne vrijednosti i predvidljiva. S druge strane, opterećenja brodova, mostova i zrakoplova su vremenski promijenjiva i nepredvidiva. Slika 32 prikazuje oba slučaja.



Slika 32. Vremenski ovisno radno opterećenje za različite tipove konstrukcija: a) Promjenjivo opterećenje brodova, aviona i mostova, b) Stalne vrijednosti opterećenja za rotirajuće strojne elemente. [16]

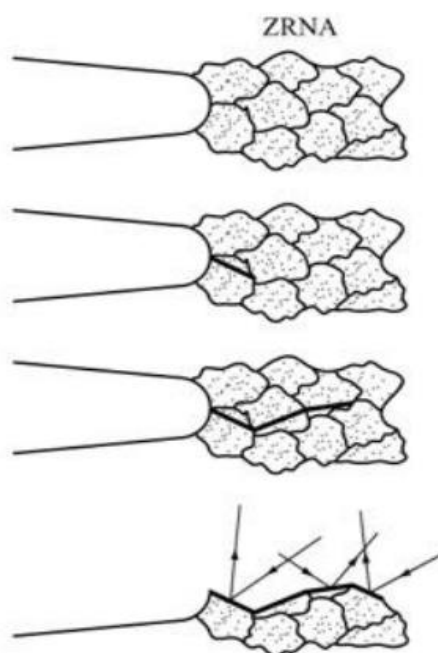
Drugi cilj analize dopuštenog oštećenja je određivanje krivulje rasta pukotine u vremenu. Vrijeme eksploatacije potrebno da pukotina naraste na kritičnu vrijednost a_p se određuje nakon utvrđivanja maksimalne dopuštene veličine pukotine iz dijagrama preostale čvrstoće. Kada pukotina naraste na kritičnu vrijednost potrebno je popraviti ili zamijeniti oštećeni dio, a interval kontrole konstrukcije mora nužno biti manji od vremena potrebnog da pukotina dosegne vrijednost a_p . Slika 33 prikazuje krivulju rasta pukotine u vremenu pri čemu a_0 označava inicijalnu veličinu pukotine [16].



Slika 33. Krivulja rasta pukotine u vremenu [16]

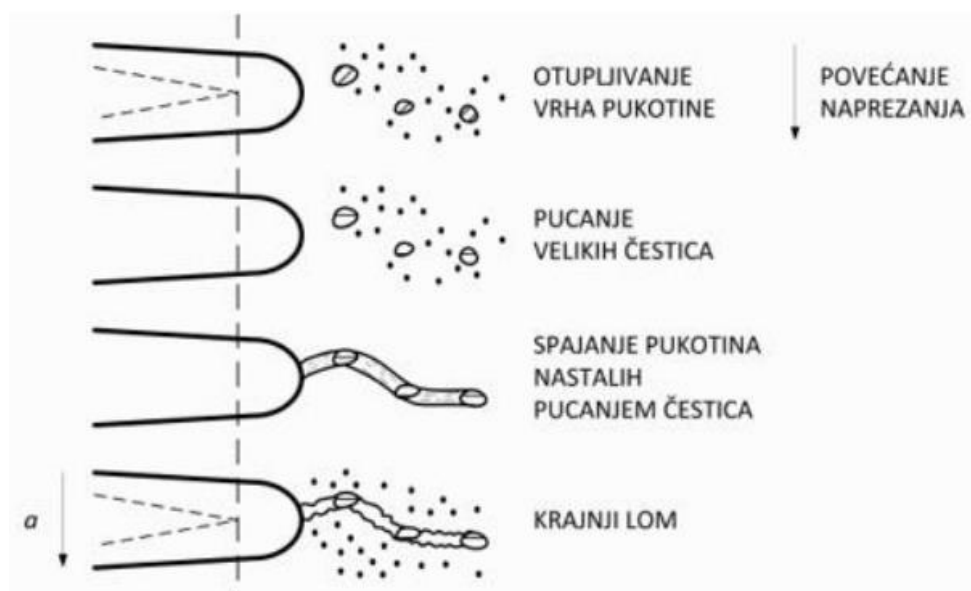
5.3 Rast pukotine i lom

Rast pukotine je najčešće posljedica zamora uslijed cikličkih opterećenja. Velika koncentracija naprezanja uzrokuje pojavu plastičnih deformacija oko vrha pukotine. Pojava loma je moguća uslijed jednog od dva mehanizma nastanka, a to su krhki i duktilni lom. Krhki lom nastaje kao posljedica razdvajanja atomskih ravnina. Karakterizira ga niska lomna žilavost materijala te stoga ne dolazi do plastične deformacije prilikom loma. Nastajanje krhkog loma je prikazano na slici 34.



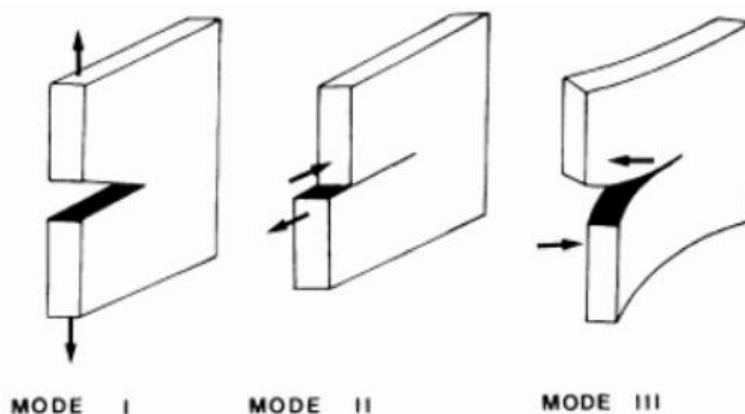
Slika 34. Nastajanje krhkog loma [16]

Duktilni lom nastaje zbog utjecaja čestica legirajućih elemenata i uključina unutar materijala. Prilikom popuštanja ili pucanja čestica dolazi do formiranja manjih praznina blizu vrha pukotine. Srastanjem više takvih manjih praznina u jednu dolazi do duktilnog loma. Proces nastanka duktilnog loma je prikazan na slici 35.



Slika 35. Nastajanje duktilnog loma [16]

Općenito postoje tri glavna načina otvaranja pukotine, kao što je vidljivo na slici 36.



Slika 36. Tri načina otvaranja pukotine [16]

Lijevi dio slike 36 prikazuje odcjepni način otvaranja pukotine, srednji smični, a desni vijčani. Kako se lokalna naprezanja pri vrhu pukotine računaju na vrlo sličan način, analiza rasta pukotine i loma je identična za sva tri slučaja otvaranja pukotine. Pukotine se najčešće otvaraju odcjepnim načinom dok se preostala dva načina ne pojavljuju izolirano već u kombinaciji sa odcjepnim načinom.

5.4 Metoda faznog polja

Metoda faznog polja (*phase – field modelling*) predstavlja matematički model koji služi za opisivanje međufaznih problema. Prijelaz između dva stanja je opisan kontinuiranom varijablom koja osigurava glatki prijelaz između faza unutar materijala. U mehanici loma, jedna faza se odnosi na osnovni materijal dok se druga faza odnosi na pukotinu. Također se uvodi skalarni parametar φ koji opisuje razinu oštećenja materijala. Spomenuti parametar poprima vrijednost 0 ukoliko se radi o osnovnom materijalu, a 1 za pukotinu. Metoda faznog polja se temelji na kontinuumskom modelu te je stoga oštećenje raspoređeno cjelokupnim volumenom promatranog tijela. Osnovna ideja metode je modeliranje loma temeljeno na varijacijskom pristupu. Rast pukotine je moguće pratiti od inicijacije pa sve do loma. Metoda faznog polja se temelji na principu minimuma energije, te je stoga smjer rasta pukotine onaj koji vodi prema konfiguraciji s najnižom ukupnom energijom [17]. Grananje i spajanje pukotina pri daljnjem opterećivanju je također moguće ukoliko vodi konfiguraciji s najnižom ukupnom energijom. Osnovna jednačba metode faznog polja glasi:

$$\Psi = \Psi^b + \Psi^s = \int_{\Omega/\Gamma} [\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi_p(\boldsymbol{\varepsilon}^p)] d\Omega + \int_{\Gamma} G_c d\Gamma \quad (65)$$

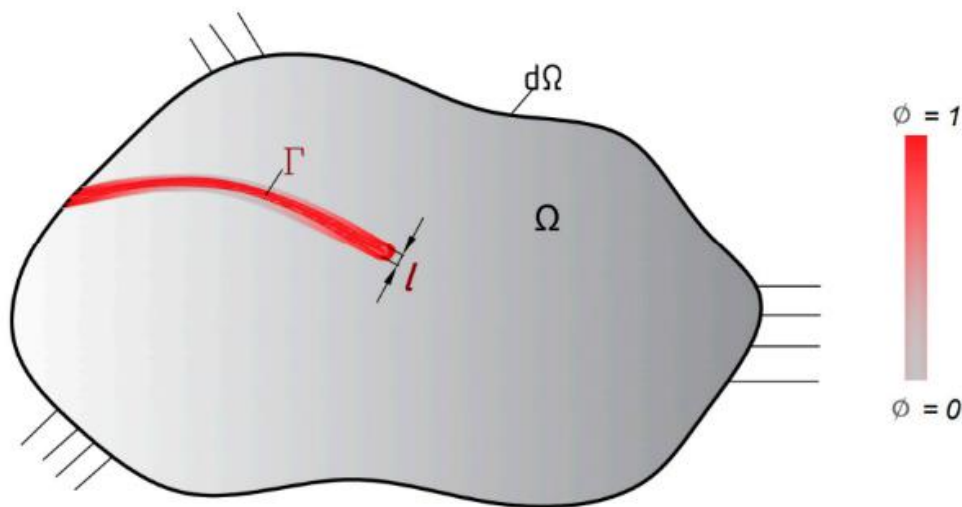
pri čemu Ψ^b označava akumuliranu energiju deformiranja unutar neoštećenog (kompaktnog) dijela tijela Ω u prisutnosti pukotine $\Gamma(t)$. Disipacijska energija loma se odnosi na pukotinu i označena je s Ψ^s dok G_c označava lomnu žilavost. Lomna žilavost predstavlja otpornost materijala na širenje pukotine tj. energiju potrebnu za pojavu novih pukotina. Što je veći iznos parametra G_c , to je materijal otporniji na inicijaciju i širenje pukotina. Iz izraza (65) je vidljivo da se ukupna energija deformacije sastoji od elastične (ψ_e) i plastične (ψ_p) komponente [17].

Lom materijala nastaje kada je postignuta kritična vrijednost lomne žilavost G_c . Metoda faznog polja uvodi funkciju gustoće pukotine $\gamma(\varphi, \nabla\varphi)$, pa nije potrebno pratiti diskretne površine pukotine $\Gamma(t)$. Funkcija gustoće pukotine je određena parametrom faznog polja φ i duljinskim parametrom l . Spomenutim načinom je moguće drugi član izraza (65) napisati prema izrazu (66), dok izrazi (67) i (68) opisuju standardne oblike funkcije gustoće pukotine. Površina pukotine Γ aproksimirana difuzivnim pristupom metode faznog polja je prikazana na slici 37.

$$\int_{\Gamma} G_c d\Gamma = G_c \int_{\Omega} \gamma(\varphi, \nabla\varphi) d\Omega, \quad (66)$$

$$\gamma_{AT-2}(\varphi, \nabla\varphi) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \varphi^2 + l |\nabla\varphi|^2 \right], \quad (67)$$

$$\gamma_{TH}(\varphi, \nabla\varphi) = \frac{3}{8\sqrt{2}} \left[\frac{1}{l} 2\varphi + l |\nabla\varphi|^2 \right]. \quad (68)$$



Slika 37. Površina pukotine modelirana difuzivnim pristupom [18]

Ovisno o korištenoj funkciji gustoće pukotine razlikujemo TH model i AT-2 model. TH model koristi izraz (68) za definiranje funkcije gustoće pukotine dok AT-2 model koristi izraz (67). Mana AT-2 modela je u tome što razvoj parametra faznog polja φ kreće od trenutka opterećivanja materijala dok TH model definira konstantnu specifičnu energiju loma koja sprečava nastanak oštećenja [17].

U izraz (65) se također uvodi degradacijska funkcija koja opisuje degradaciju krutosti materijala. Najčešći oblik degradacijske funkcije glasi:

$$g(\varphi) = (1 - \varphi)^2. \quad (69)$$

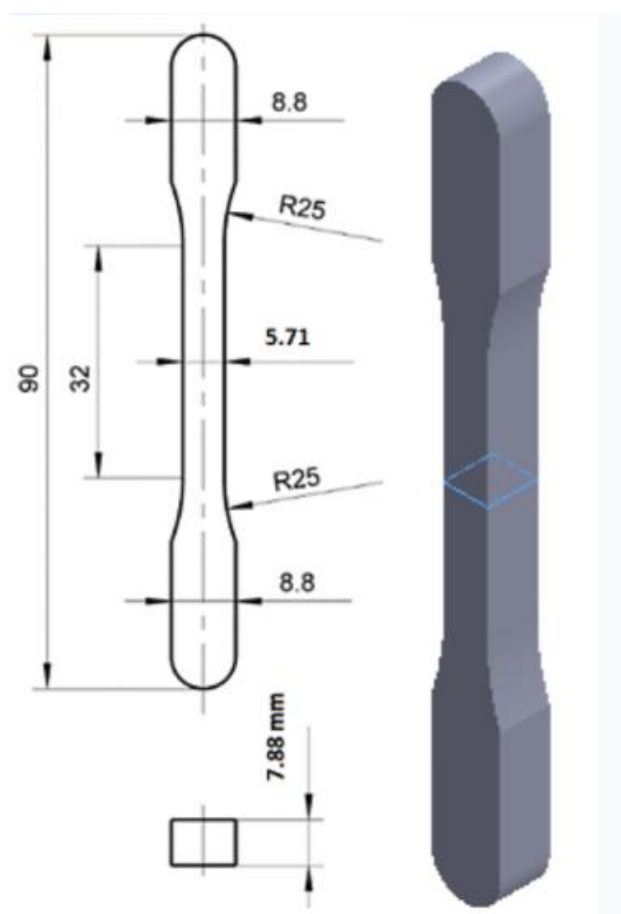
Numerička implementacija metode faznog polja u metodu konačnih elemenata se vrši pomoću principa virtualnih radova koji definira jednakost rada unutarnjih i vanjskih sila prema [18]:

$$\partial W^{\text{int}} = \partial W^{\text{ext}}. \quad (70)$$

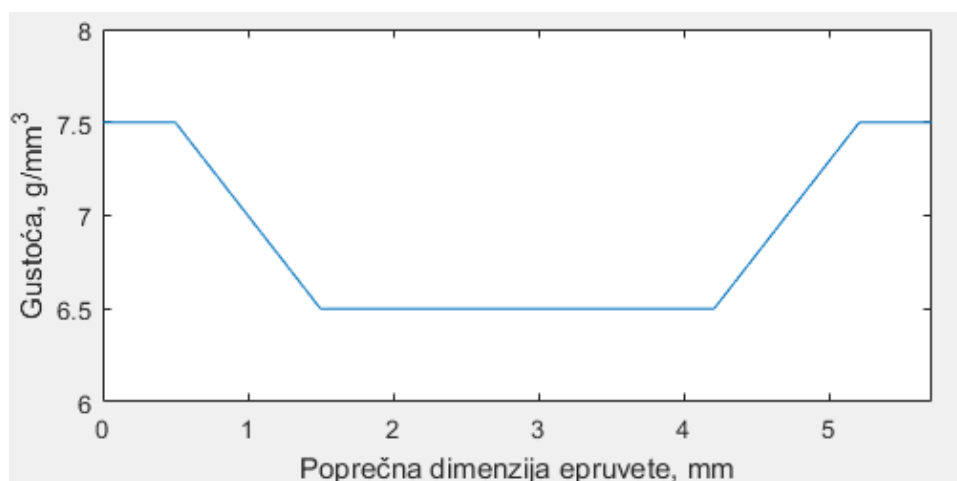
6. MODELIRANJE KONSTITUTIVNOG PONAŠANJA DENSIFICIRANOG SINTERIRANOG ČELIKA

6.1 Geometrija i materijal ispitnog uzorka

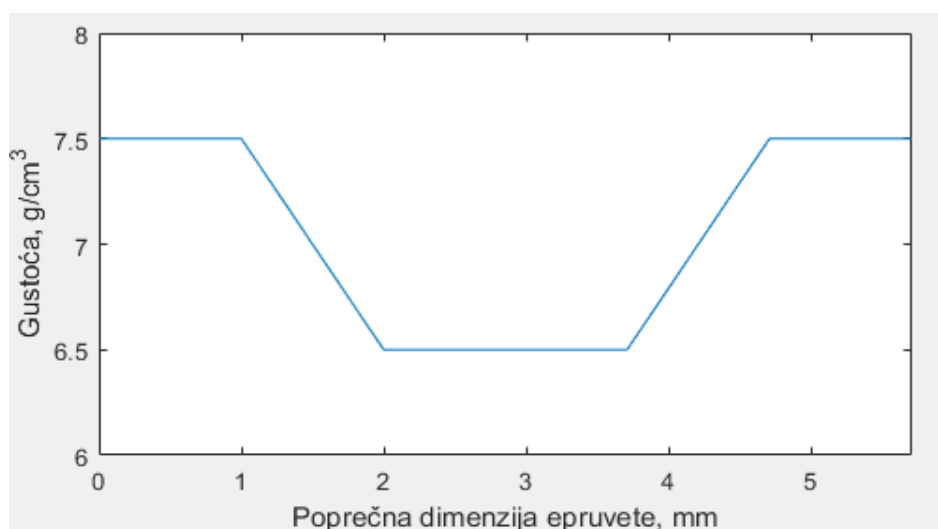
U ovome poglavlju će se opisati geometrija i materijal ispitnog uzorka tj. epruvete. Uzorak je pravokutnog poprečnog presjeka 7,88 x 5,71 mm. Materijal epruvete je sinterirani čelik Astaloy Mo+0.2C gustoće 6,5 g/cm³, kojem je površinski sloj progušćen do gustoće 7,5 g/cm³. U radu će se razmatrati dvije dubine densificiranog sloja: 0,5 mm i 1 mm. Pretpostavljena je konstantna gustoća materijala u densificiranom sloju i linearna raspodjela gustoće u prijelaznom sloju. Gustoća u središnjem sloju odgovara osnovnoj gustoći materijala te iznosi 6,5 g/cm³. Materijalna svojstva kao funkcija gustoće će biti detaljno objašnjena u idućem poglavlju. Slika 38 prikazuje dimenzije epruvete dok slike 39 i 40 prikazuju raspodjelu gustoće po poprečnom presjeku epruvete za različite dubine densificiranog sloja.



Slika 38. Dimenzije epruvete



Slika 39. Raspodjela gustoće po poprečnom presjeku pri dubini densifikacije 0,5 mm



Slika 40. Raspodjela gustoće po poprečnom presjeku pri dubini densifikacije 1 mm

6.2 Određivanje materijalnih parametara

Materijalni parametri sinteriranog čelika Astaloy Mo+0.2C u ovisnosti o tri različite gustoće su prikazani u tablici 1 dok tablica 2 prikazuje ovisnost parametara faznog polja o gustoći.

Tablica 1. Ovisnost materijalnih parametara o gustoći

ρ [g/cm^3]	E [MPa]	ν	σ_y [MPa]	Q_∞ [MPa]	b
6,5	98000	0,28	165	50,9	315,31
6,8	115000	0,28	175	75	478,94
7,1	131000	0,28	280	102,7	395,04

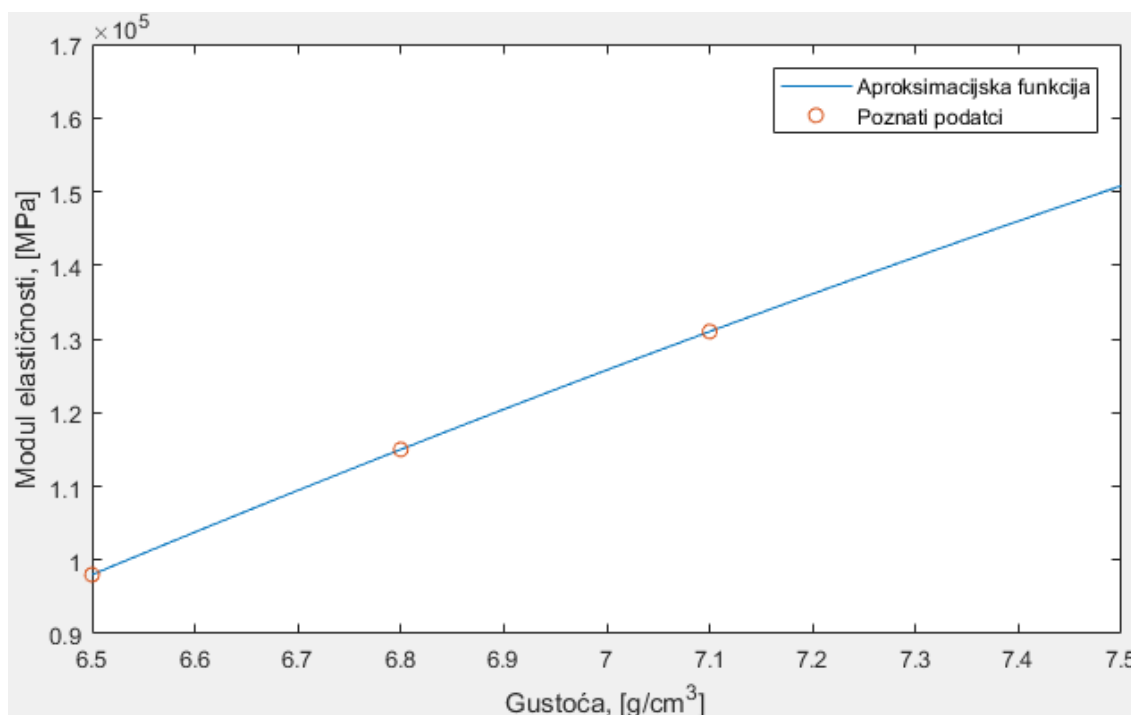
Tablica 2. Ovisnost parametara faznog polja o gustoći

ρ [g/cm^3]	G_c [N/mm]	l [mm/mm]	ψ_c [MPa]
6,5	0,75	0,1	2,41
6,8	0,75	0,1	3,85
7,1	0,75	0,1	5,868

Parametar faznog polja ψ_c predstavlja specifičnu energiju loma koja će se odrediti kasnije. Ovisnost modula elastičnosti E o gustoći će se aproksimirati polinomom drugog stupnja pomoću podataka iz tablice 1 te će se pretpostaviti da spomenuta zakonitost vrijedi sve do površine epruvete tj. sve do gustoće densificiranog sloja koja iznosi $7,5 g/cm^3$. Izraz koji opisuje ovisnost modula elastičnosti o gustoći glasi:

$$E(\rho) = -5555,6\rho^2 + 130556\rho - 515889, \quad (71)$$

te je grafički prikazan na slici 41.

**Slika 41. Ovisnost modula elastičnosti o gustoći**

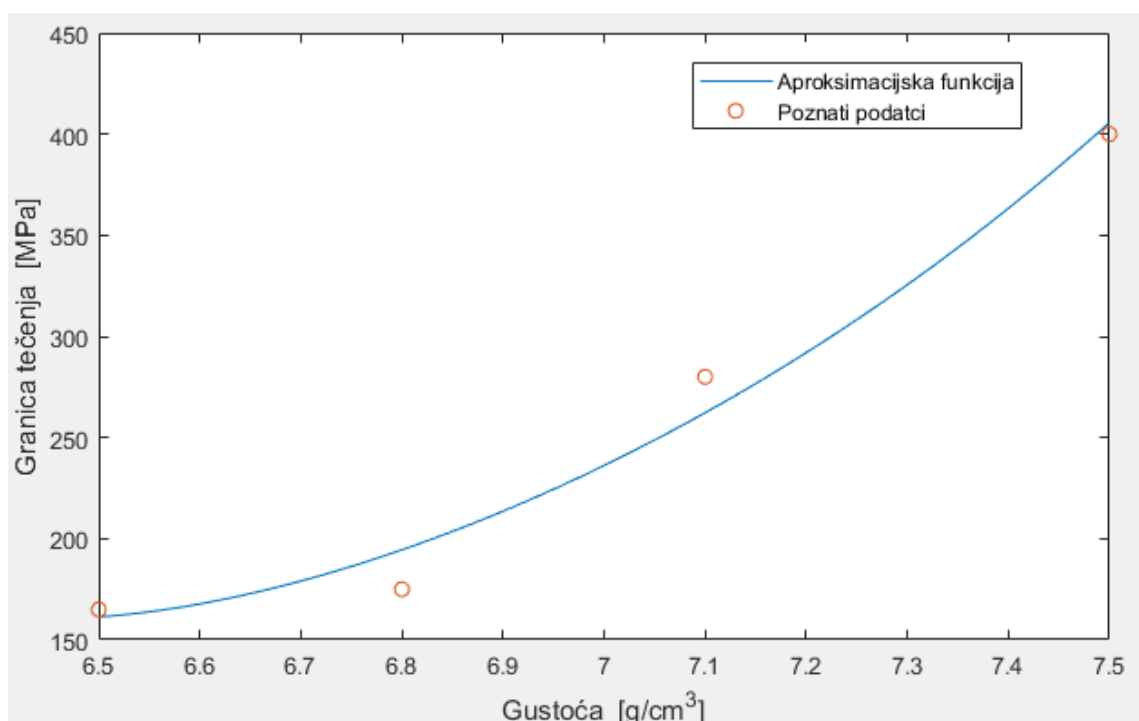
Obzirom na dostupne podatke, granica tečenja pri maksimalnoj gustoći od $7,5 g/cm^3$ je procijenjena na 400 MPa, stoga je ovisnost granice tečenja o gustoći opisana eksponencijalnom funkcijom. Pretpostavljena je eksponencijalna funkcija oblika:

$$\sigma_y(\rho) = a \cdot e^{b\rho} + c \cdot e^{d\rho}, \quad (72)$$

gdje su a , b , c i d konstante koje je potrebno odrediti. Konstante su određene pomoću programskog paketa *Matlab* korištenjem metode najmanjih kvadrata. Slijedi funkcija ovisnosti granice tečenja o gustoći:

$$\sigma_y(\rho) = 5,522 \cdot 10^{12} \cdot e^{-4,001\rho} + 0,09675 \cdot e^{1,112\rho}. \quad (73)$$

Aproksimacijska funkcija ovisnosti granice tečenja o gustoći je prikazana na slici 42 zajedno s poznatim iznosima granice tečenja za određene gustoće.

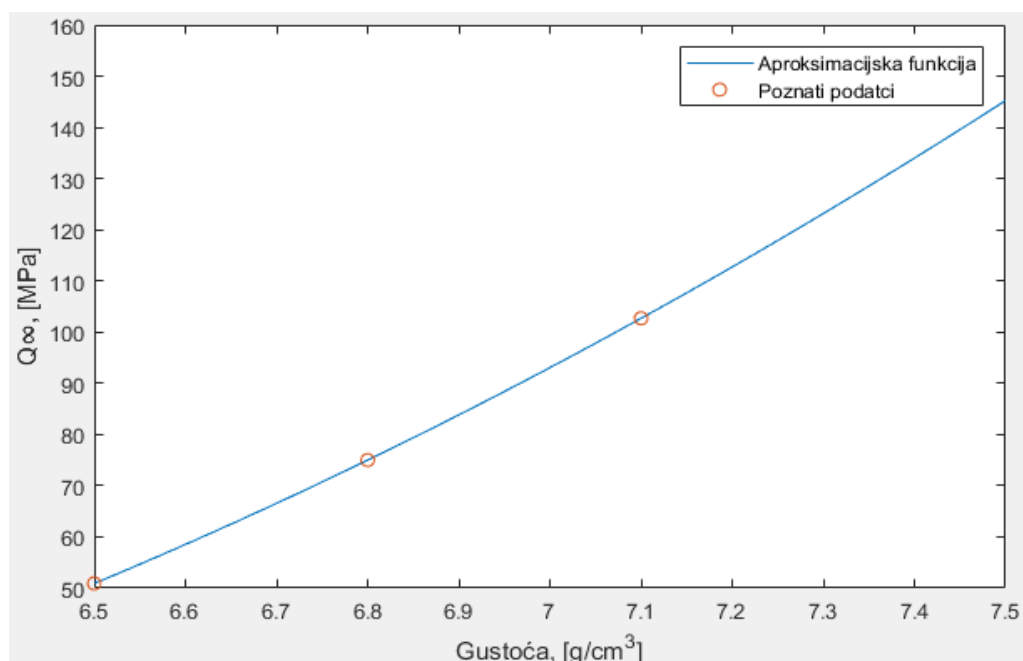


Slika 42. Ovisnost granice tečenja o gustoći

Ovisnost parametra očvršćenja Q_∞ o gustoći određena je na identičan način kao i ovisnost modula elastičnosti o gustoći. Funkcija ovisnosti Q_∞ o gustoći glasi:

$$Q_\infty(\rho) = 20\rho^2 - 185,667\rho + 412,733, \quad (74)$$

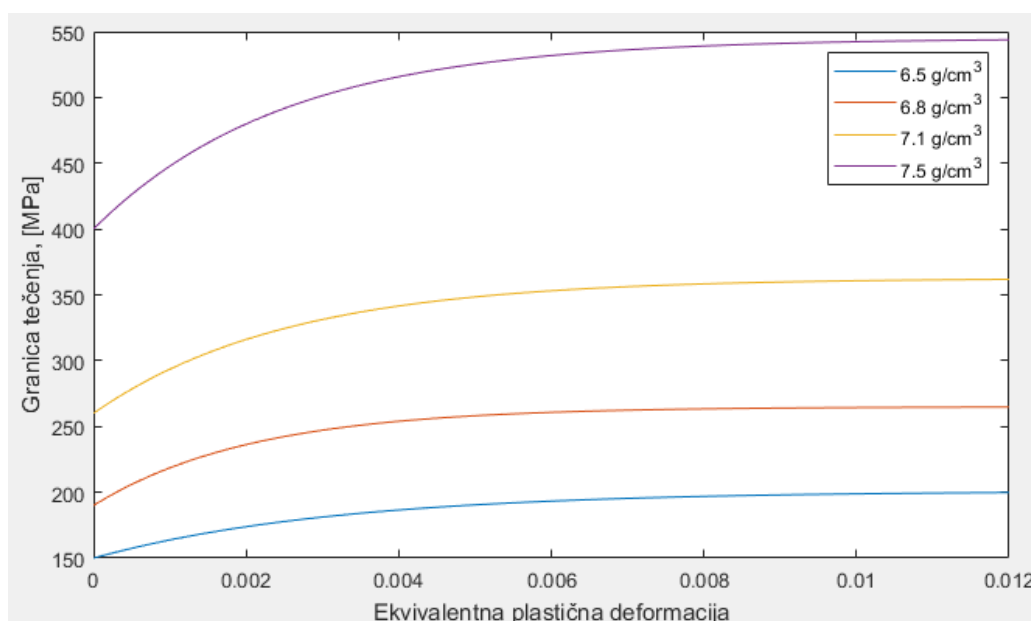
te je grafički prikazana na slici 43 zajedno sa poznatim iznosima parametra Q_∞ za određene gustoće.



Slika 43. Ovisnost parametra Q_{∞} o gustoći

Kako ne postoji jasno izražena ovisnost parametra očvršćenja b o gustoći, njegova pretpostavljena vrijednost je 400 za gustoću $7,5 \text{ g/cm}^3$. Za odabranu vrijednost napravljena je grafička provjera pretpostavke pomoću već spomenutog izraza koji definira ovisnost granice tečenja o ekvivalentnoj plastičnoj deformaciji za slučaj izotropnog očvršćenja:

$$\sigma_y(\varepsilon_{\text{ekv}}^p) = \sigma_y^0 + Q_{\infty} \left(1 - e^{-b\varepsilon_{\text{ekv}}^p}\right). \quad (75)$$

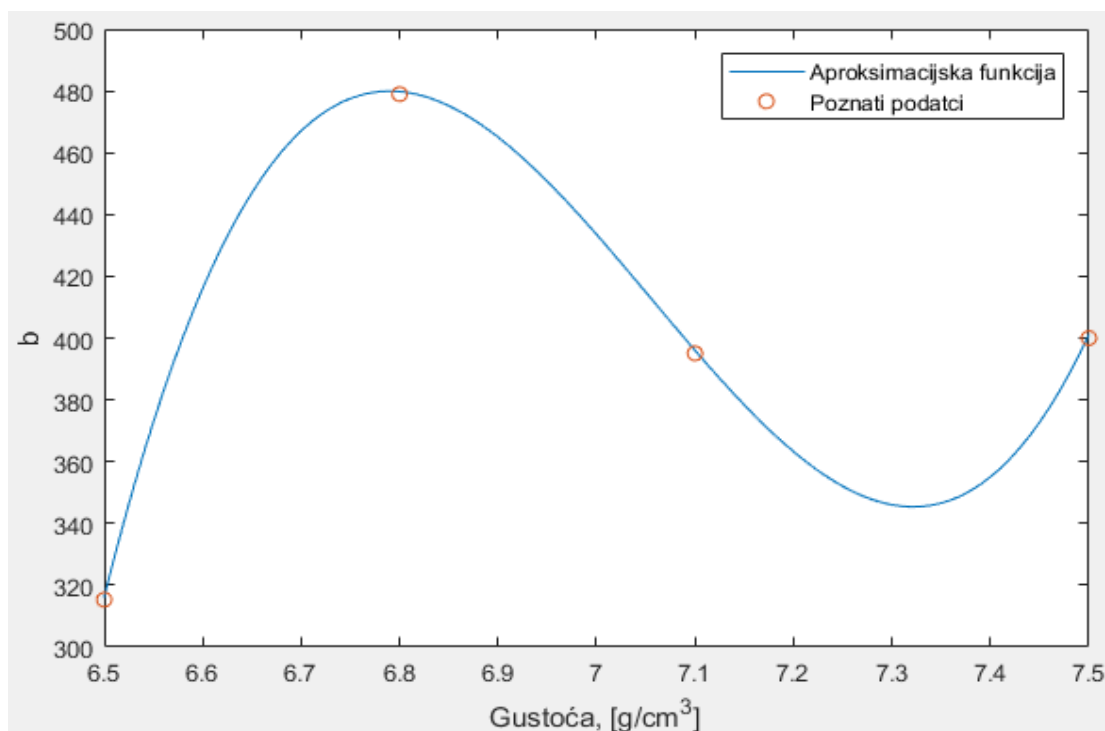


Slika 44. Ovisnost granice tečenja o plastičnoj deformaciji za različite gustoće

Ovisnost granice tečenja o ekvivalentnoj plastičnoj deformaciji za različite gustoće je prikazana na slici 44. Sa slike je također vidljivo da pretpostavljeni iznos parametra b dobro aproksimira izotropno očvršćenje sinteriranog čelika gustoće $7,5 \text{ g/cm}^3$. Za potrebe simulacije je potrebno definirati ovisnost parametra b o gustoći. Kako su trenutno poznate vrijednosti parametra b za četiri različite gustoće, njegova ovisnost o gustoći je aproksimirana polinomom trećeg stupnja prema izrazu:

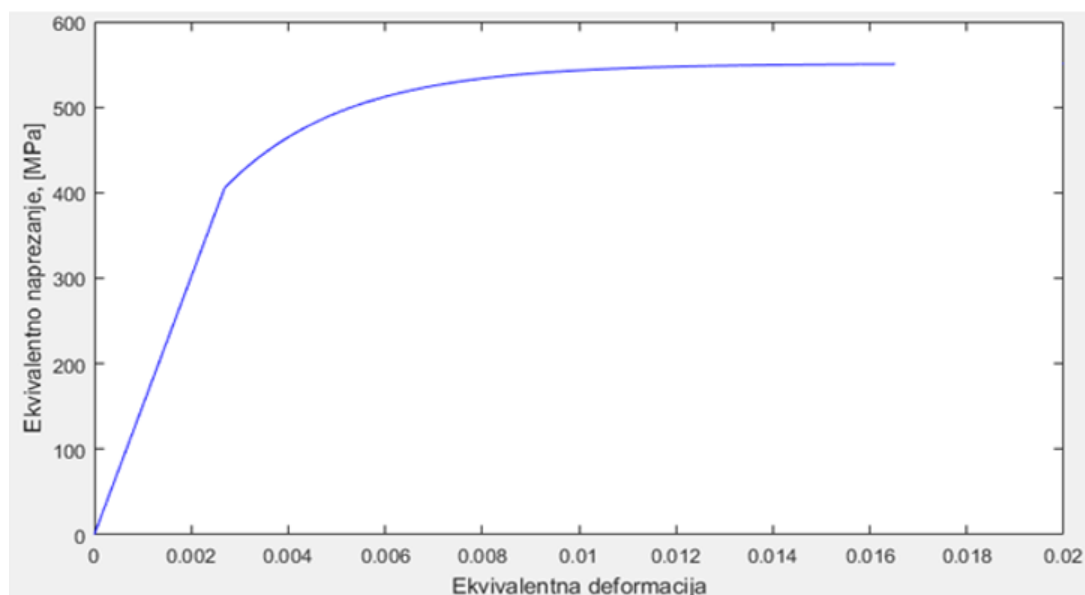
$$b(\rho) = 1792,405\rho^3 - 37940,2\rho^2 + 267316\rho - 626505. \quad (76)$$

Ovisnost parametra b o gustoći je prikazana na slici 45.



Slika 45. Ovisnost parametra b o gustoći

Parametar ψ_c predstavlja specifičnu energiju loma koja je određena površinom ispod krivulje naprezanje – deformacija. Kako su sada definirani svi materijalni parametri za sinterirani čelik gustoće $7,5 \text{ g/cm}^3$, moguće je konstruirati dijagram naprezanje - deformacija sinteriranog čelika spomenute gustoće i odrediti iznos parametra faznog polja ψ_c . Obzirom na dostupne podatke iz literature, procjena je da do pucanja epruvete dolazi pri 1,65 % ekvivalentne deformacije. Opisani dijagram je prikazan na slici 46.

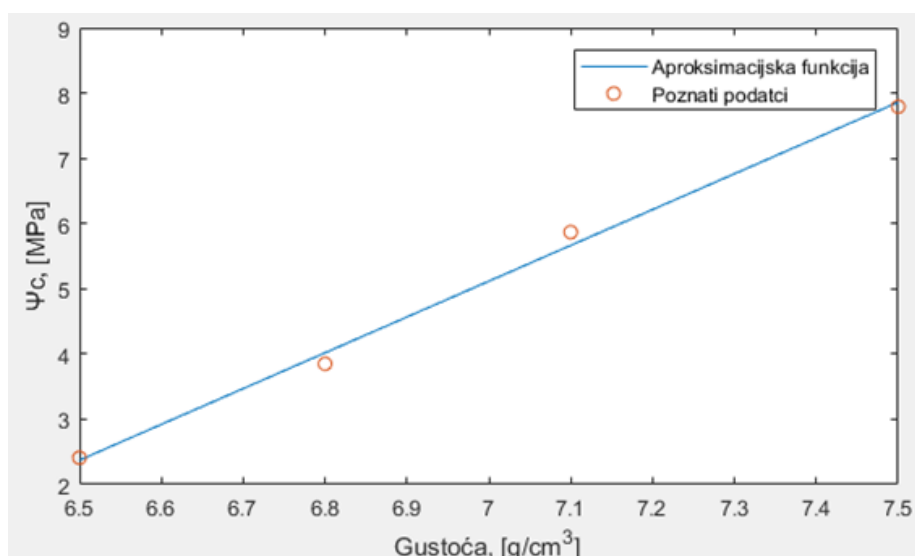


Slika 46. Dijagram naprežanje – deformacija za sinterirani čelik gustoće 7,5 g/cm³

Numeričkom integracijom funkcija prikazanih na prethodnoj slici slijedi da parametar ψ_c pri gustoći od 7,5 g/cm³ iznosi 7,79 MPa. Kako su sada poznati iznosi ψ_c za sve gustoće, moguće je napraviti funkciju ovisnosti ψ_c o gustoći. Obzirom na poznate iznose ψ_c , pretpostavljena je linearna ovisnost o gustoći. Pretpostavkom linearne ovisnosti te korištenjem programskog paketa *Matlab* i metode najmanjih kvadrata slijedi izraz:

$$\psi_c(\rho) = 5,4881\rho - 33,3. \quad (77)$$

Ovisnost parametra ψ_c o gustoći je prikazana na slici 47.



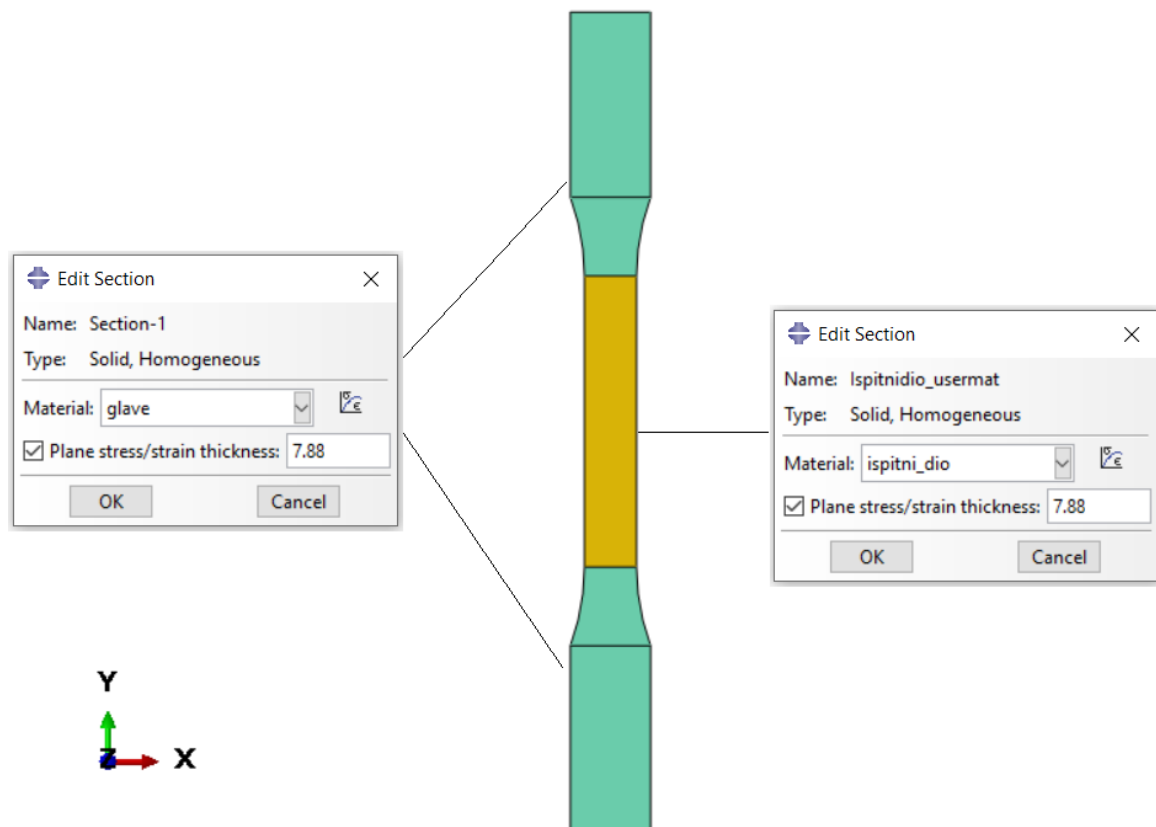
Slika 47. Ovisnost parametra ψ_c o gustoći

7. NUMERIČKO MODELIRANJE PONAŠANJA DENSIFICIRANOG SINTERIRANOG ČELIKA

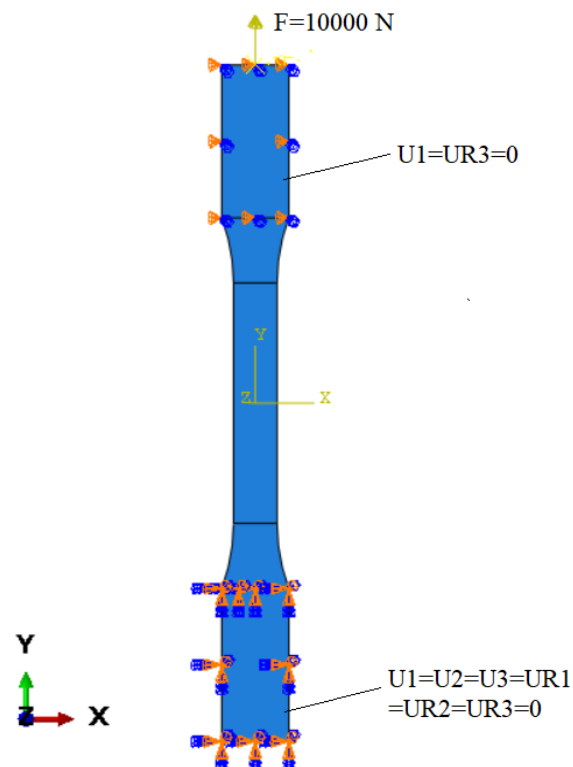
Numerička analiza je provedena u programskom paketu *Abaqus*, dok su promjenjiva materijalna svojstva, detaljno objašnjena u prethodnom poglavlju, opisana pomoću korisničke rutine UMAT i programskog jezika FORTRAN. Korisnička rutina UMAT omogućuje definiranje konstitutivnog ponašanja materijala od strane korisnika te unošenje niza naredbi koje definiraju postupak provođenja numeričke analize pomoću programskog jezika FORTRAN. Slijedi da je za potrebe provođenja numeričke analize potrebno napraviti model epruvete u programskom paketu *Abaqus*, zajedno sa pripadnim opterećenjem, rubnim uvjetima i mrežom konačnih elemenata te definirati promjenjiva materijalna svojstva sinteriranog čelika i niz naredbi koje definiraju provođenje numeričke analize pomoću korisničke rutine UMAT i programskog jezika FORTRAN. Programski kod koji definira korisničku rutinu UMAT će se razlikovati ovisno o tome radi li se o analizi s elastičnim ili elastoplastičnim ponašanjem materijala. Funkcije ovisnosti materijalnih parametara o gustoći, detaljno objašnjene u prošlom poglavlju, su iste u oba slučaja densifikacije te definiraju promjenjiva materijalna svojstva u prijelaznom sloju epruvete. Analiza se pokreće pomoću *Abaqus Command* prozora koji poziva .inp datoteku kreiranu u programskom paketu *Abaqus* te programski kod definiran korisničkom rutinom UMAT.

7.1 Kreiranje modela

U početku je pretpostavljeno da je prihvatni dio epruvete izrađen od sinteriranog čelika gustoće $6,5 \text{ g/cm}^3$ te su njegova svojstva definirana pomoću poznatih vrijednosti modula elastičnosti i Poissonova faktora. Ispitni dio epruvete je izrađen od densificiranog sinteriranog čelika promjenjive gustoće te je definiran pomoću funkcija ovisnosti materijalnih parametara o gustoći unutar korisničke rutine UMAT. Nakon definiranja materijala, modelu je potrebno dodijeliti opterećenje te postaviti rubne uvjete unutar modula *Load*. Rubni uvjeti zamjenjuju vezu prihvatnih dijelova epruvete sa čeljusti kidalice. Jedan prihvatni dio je nepomičan tj. uklješten dok je drugi pomičan. Epruveta je opterećena vlačno u smjeru osi y, silom iznosa 10000 N koja djeluje na pomični prihvatni dio. Kako bi se izbjegla koncentracija naprezanja, sila opterećenja nije koncentrirana već je jednoliko raspoređena po površini prihvatnog dijela na kojem djeluje. Slika 48 prikazuje dodjeljivanje sekcija numeričkom modelu ispitnog uzorka dok slika 49 prikazuje rubne uvjete i opterećenje ispitnog uzorka.



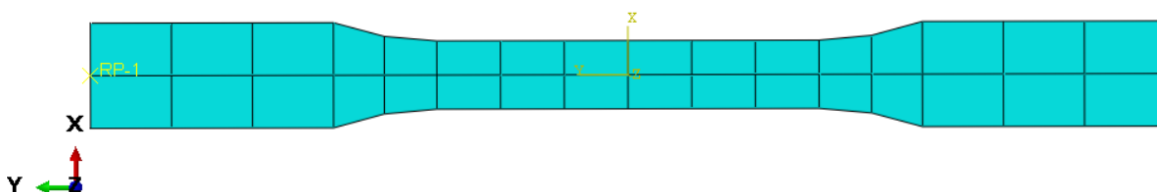
Slika 48. Dodjeljivanje sekcija numeričkom modelu ispitnog uzorka



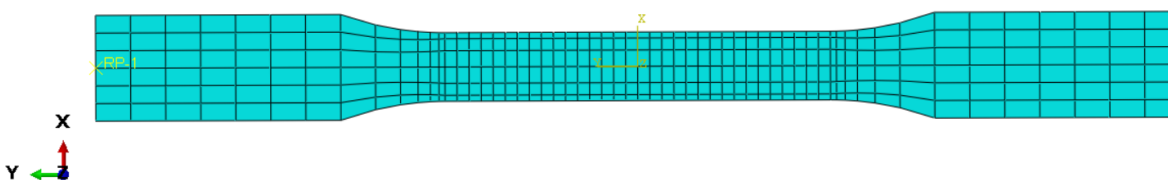
Slika 49. Rubni uvjeti i opterećenje ispitnog uzorka

7.2 Određivanje optimalne mreže konačnih elemenata

Nakon postavljanja opterećenja i rubnih uvjeta, potrebno je generirati mrežu konačnih elemenata. Model je diskretiziran osnovnim pravokutnim elementima, opisanima u poglavlju 4.2. Optimalna mreža podrazumijeva postizanje zadovoljavajuće točnosti rješenja unutar razumnog vremena trajanja analize. Optimalna mreža će se odrediti proučavanjem ovisnosti ekvivalentnog naprezanja na površini ispitnog dijela o broju elemenata po poprečnom presjeku ispitnog dijela epruvete pri analizi s elastičnim ponašanjem materijala i dubini densifikacije od 0,5 mm. Također je razmatran utjecaj različitih raspodjela elemenata po poprečnom presjeku ispitnog dijela. Ispitana je mreža s prilagođenom i neprilagođenom raspodjelom, pri čemu su elementi pri neprilagođenoj mreži nasumično postavljeni. Rubovi konačnih elemenata pri prilagođenoj raspodjeli se poklapaju sa mjestima gdje dolazi do promjene raspodjele gustoće (prijelaz iz densificiranog sloja u prijelazni te iz prijelaznog u središnji). Utvrđena optimalna mreža će se koristiti pri analizi s elastičnim i analizi s elastoplastičnim ponašanjem materijala, dok će se pri analizi oštećenja koristiti puno gušća mreža. Na slikama 50 i 51 su prikazane neke od korištenih mreža pri utvrđivanju optimalne mreže konačnih elemenata. Slika 50. prikazuje neprilagođenu mrežu koja sadrži 2 konačna elementa po poprečnom presjeku ispitnog dijela, dok slika 51 prikazuje prilagođenu mrežu sa 6 konačnih elemenata po poprečnom presjeku.

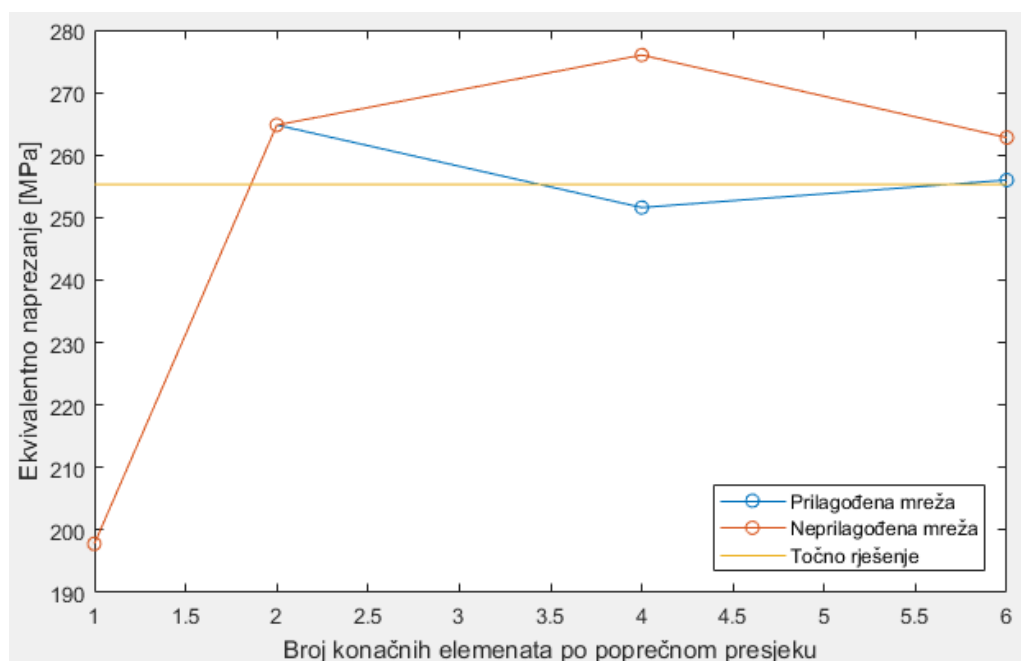


Slika 50. Neprilagođena mreža s 2 elementa po poprečnom presjeku



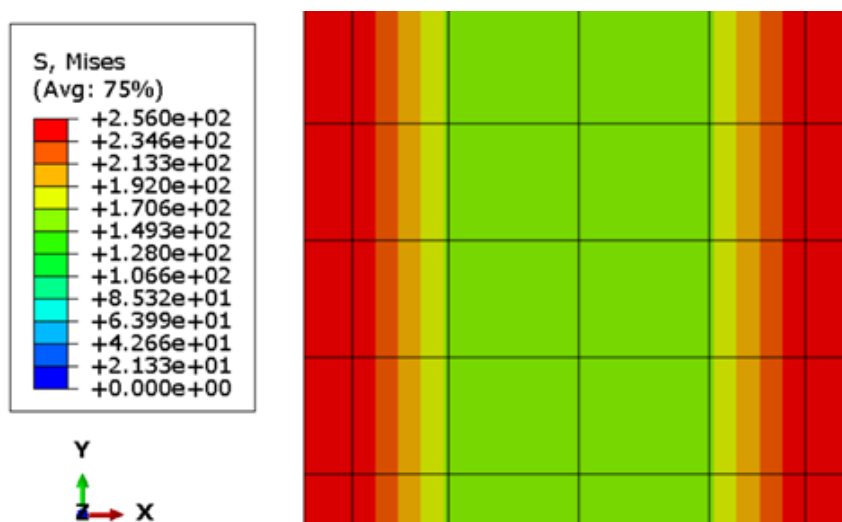
Slika 51. Prilagođena mreža sa 6 elemenata po poprečnom presjeku

Konvergencija naprezanja u ovisnosti o broju elemenata po poprečnom presjeku ispitnog dijela je prikazana na slici 52. Za slučaj 1 i 2 konačna elementa po poprečnom presjeku je ispitana samo neprilagođena mreža, dok su za slučaj 4 i 6 konačnih elemenata po poprečnom presjeku ispitane i prilagođena i neprilagođena mreža.



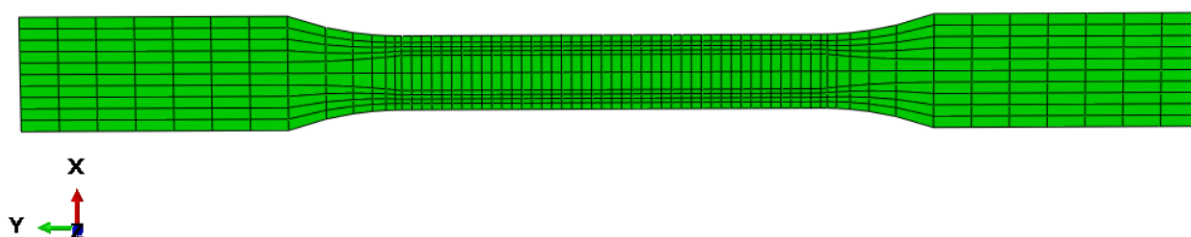
Slika 52. Konvergencija naprezanja

Kako ne postoje eksperimentalni podaci, točno rješenje sa slike 52 se odnosi na iznos naprezanja koji daje fina prilagođena mreža koja sadrži 20 elemenata po poprečnom presjeku. Sa slike je vidljivo da iznosi naprezanja za prilagođenu mrežu brže konvergiraju u usporedbi s neprilagođenom mrežom, te da prilagođena mreža koja sadrži 6 konačnih elemenata po poprečnom presjeku omogućava postizanje zadovoljavajuće točnosti pri razumnom vremenu trajanja analize. Ekvivalentna naprezanja ispitnog dijela epruvete, koja je diskretizirana optimalnom mrežom prema trenutnim razmatranjima, su prikazana na slici 53.

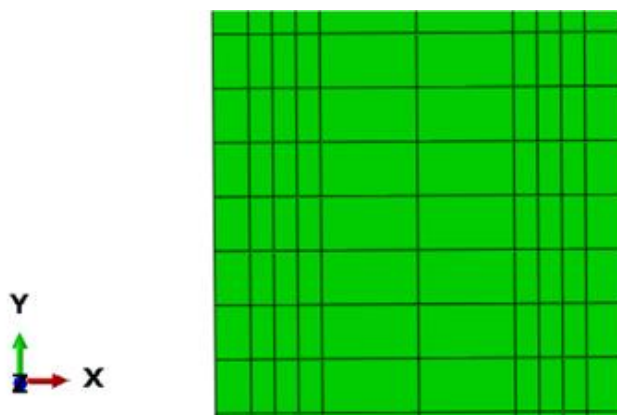


Slika 53. Ekvivalentna naprezanja pri određivanju optimalne mreže

S prethodne slike se vidi da je prijelazni sloj, kojeg definira promjenjiva gustoća a time i promjenjiva materijalna svojstva, u smjeru osi x diskretiziran samo jednim konačnim elementom. Prijelazni sloj se može prepoznati po promjenjivim iznosima naprezanja, dok su naprezanja unutar središnjeg dijela i densificiranog sloja konstantna. Kako je osnovni pravokutni konačni element u stanju opisati linearnu raspodjelu naprezanja i deformacija, a raspodjela modula elastičnosti u ovisnosti o gustoći je opisana polinomom drugog stupnja unutar prijelaznog sloja, korištenje mreže sa slike 53 može dovesti do netočne raspodjele naprezanja i deformacija unutar prijelaznog sloja. Iz spomenutog razloga, optimalna mreža koja će se koristiti za potrebe numeričke analize će sadržavati 10 konačnih elemenata po poprečnom presjeku ispitnog dijela, pri čemu će oba prijelazna sloja biti diskretizirana s 3 konačna elementa u smjeru osi x . Utvrđena optimalna mreža je prikazana na slikama 54 i 55.



Slika 54. Optimalna mreža



Slika 55. Ispitni dio epruvete diskretiziran optimalnom mrežom

Iako će sadržavati isti broj elemenata, raspodjela elemenata optimalne mreže se razlikuje ovisno o promatranoj dubini densifikacije, a samim time i dubini na kojoj se nalazi prijelazni sloj. Raspodjela optimalne mreže prikazane na slikama 54 i 55 je također prilagođena, tj. rubovi konačnih elemenata se poklapaju sa mjestima gdje se nalazi prijelaz iz densificiranog sloja u prijelazni te iz prijelaznog u središnji.

7.3 Programski kod za analizu s elastičnim ponašanjem materijala

U ovome poglavlju će se detaljno objasniti programski kod koji se koristi unutar korisničke rutine UMAT za provođenje analize s elastičnim ponašanjem materijala. Spomenuti kod je prikazan na slici 56. Dimenzije varijabli se definiraju od 10. do 14. reda programskog koda dok se između 16. i 31. reda definiraju vrijednosti i raspodjele gustoće i modula elastičnosti za densificirani, prijelazni te središnji sloj. 33. red definira iznos Poissonova faktora, a 35. i 36. Laméove parametre. Slijedi sklapanje matrice elastičnosti pomoću Laméovih parametara te programski kod završava iterativnim rješavanjem jednadžbe (49) i izlazom iz petlje.

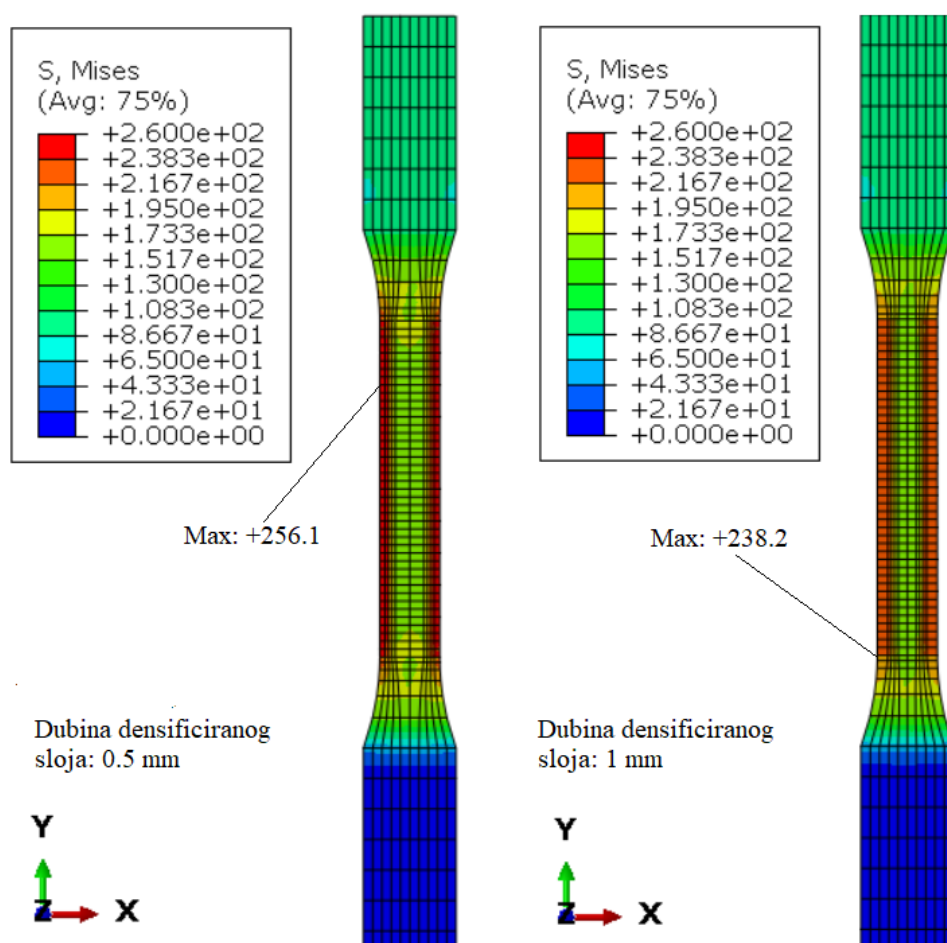
```
9 CHARACTER*80 CMNAME
10 DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
11 1 DDSdde(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
12 2 STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
13 3 PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3),
14 4 JSTEP(4)
15
16 if(abs(COORDS(1)).gt.2.355) then
17
18     ro=7.5
19     E=150778
20
21     elseif(abs(COORDS(1)).ge.1.355 .and. abs(COORDS(1)).le.2.355) then
22
23     ro=abs(COORDS(1))+5.145
24     E=-5555.6*ro*ro+130556*ro-515889
25
26     elseif(abs(COORDS(1)).lt.1.355) then
27
28     ro=6.5
29     E=98000
30
31 endif
32
33 xnu = 0.28
34
35 xlambda = (E*xnu)/((1+xnu)*(1-2*xnu))
36 xmi = E/(2 + 2*xnu)
37
38 ddsdde = zero
39
40 do i = 1, NDI
41     do j = 1, NDI
42         ddsdde(i,j) = xlambda
43     end do
44     ddsdde(i,i) = xlambda + 2*xmi
45 end do
46
47 do i = 1+NDI, NTENS
48     ddsdde(i,i) = xmi
49 end do
50
51 stress = stress + matmul(ddsdde, dstran)
52
53 RETURN
54 END
```

Slika 56. Programski kod za analizu s elastičnim ponašanjem materijala

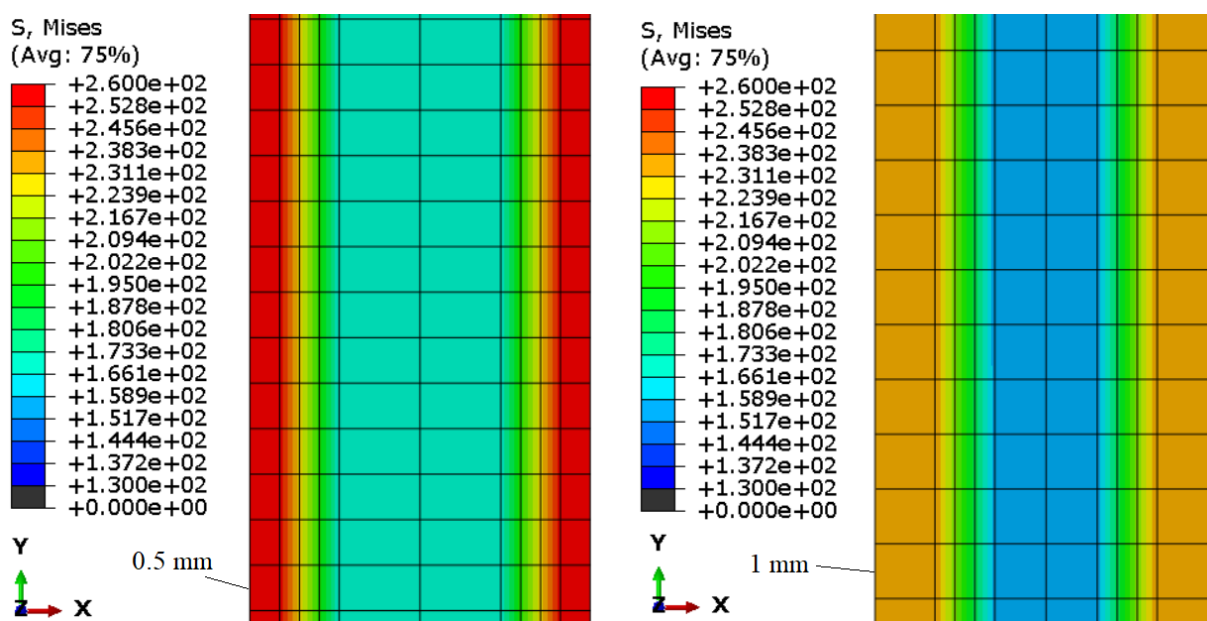
Korištenjem opisanog koda i kreiranog modela epruvete, kojeg diskretizira optimalna mreža pravokutnih konačnih elemenata, slijede rezultati analize s elastičnim ponašanjem materijala.

7.4 Rezultati analize s elastičnim ponašanjem materijala

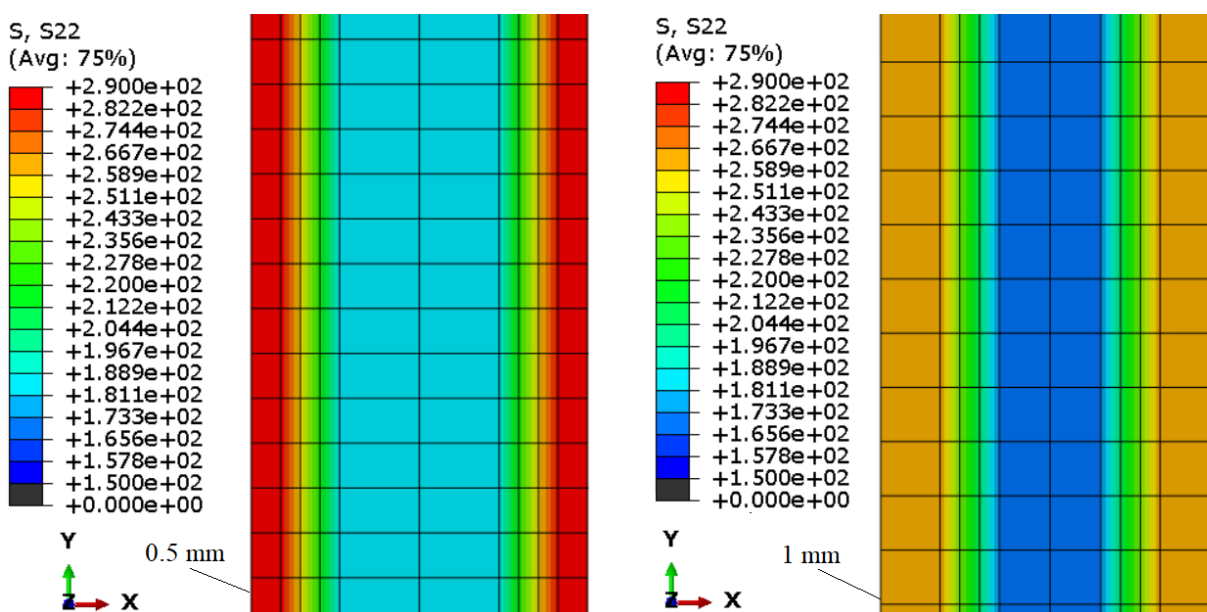
Slika 57 prikazuje usporedbu ekvivalentnih napreznja epruvete ovisno o dubini densificiranog sloja te pripadni maksimalni iznos ekvivalentnog napreznja. Slike 58 i 59 prikazuju usporedbu ekvivalentnih napreznja i napreznja u smjeru osi y na sredini ispitnog dijela epruvete ovisno o dubini densificiranog sloja. Napreznja unutar središnjeg i densificiranog sloja su konstantna iz razloga što su materijalna svojstva tih slojeva konstantna. Materijalna svojstva prijelaznog sloja su definirana aproksimacijskim funkcijama što dovodi do promjenjivih napreznja unutar tog sloja. Maksimalni iznos napreznja je veći za slučaj dubine densifikacije od 0,5 mm. Sa slika se također vidi da su iznosi napreznja u smjeru osi y veći od iznosa ekvivalentnih napreznja. Sva napreznja su izražena u MPa.



Slika 57. Usporedba ekvivalentnih napreznja epruvete za različite dubine densifikacije

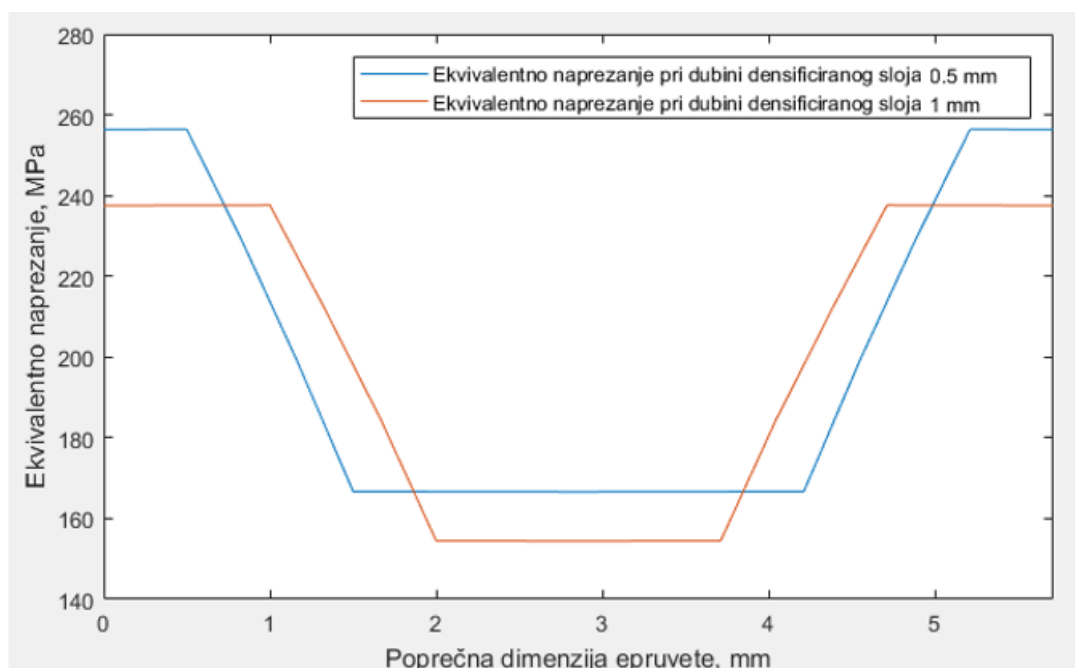


Slika 58. Usporedba ekvivalentnih naprezanja na sredini ispitnog dijela epruvete za različite dubine densifikacije

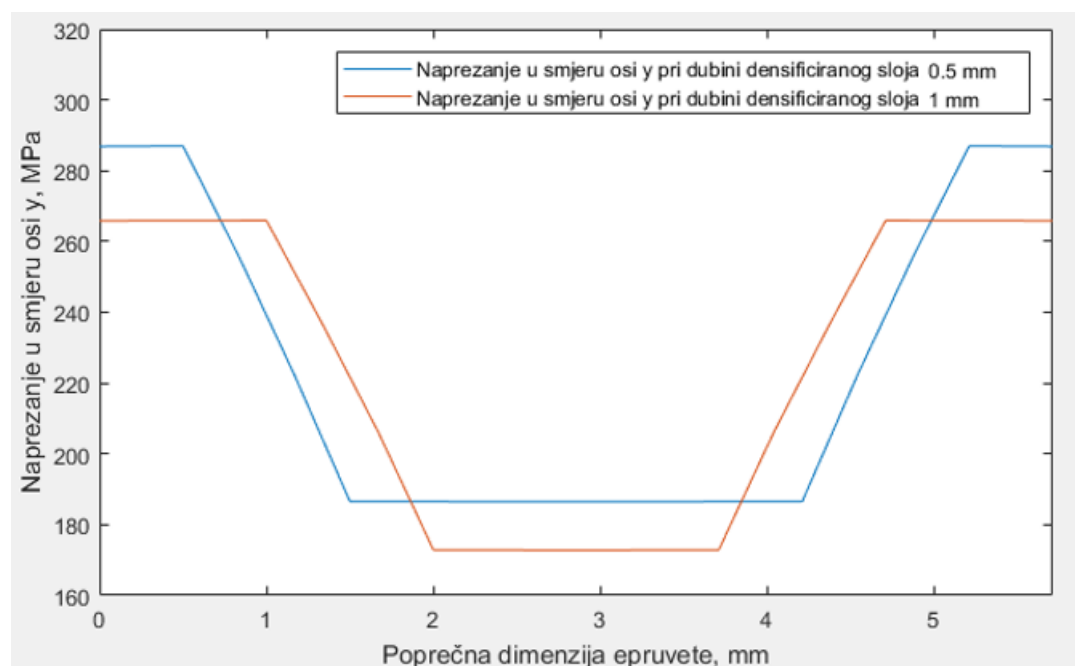


Slika 59. Usporedba naprezanja u smjeru osi y na sredini ispitnog dijela epruvete za različite dubine densifikacije

Slike 60 i 61 prikazuju usporedbu dijagrama raspodjele ekvivalentnih naprezanja i naprezanja u smjeru osi y po poprečnom presjeku epruvete.



Slika 60. Usporedba ekvivalentnih naprezanja po poprečnom presjeku epruvete za različite dubine densifikacije

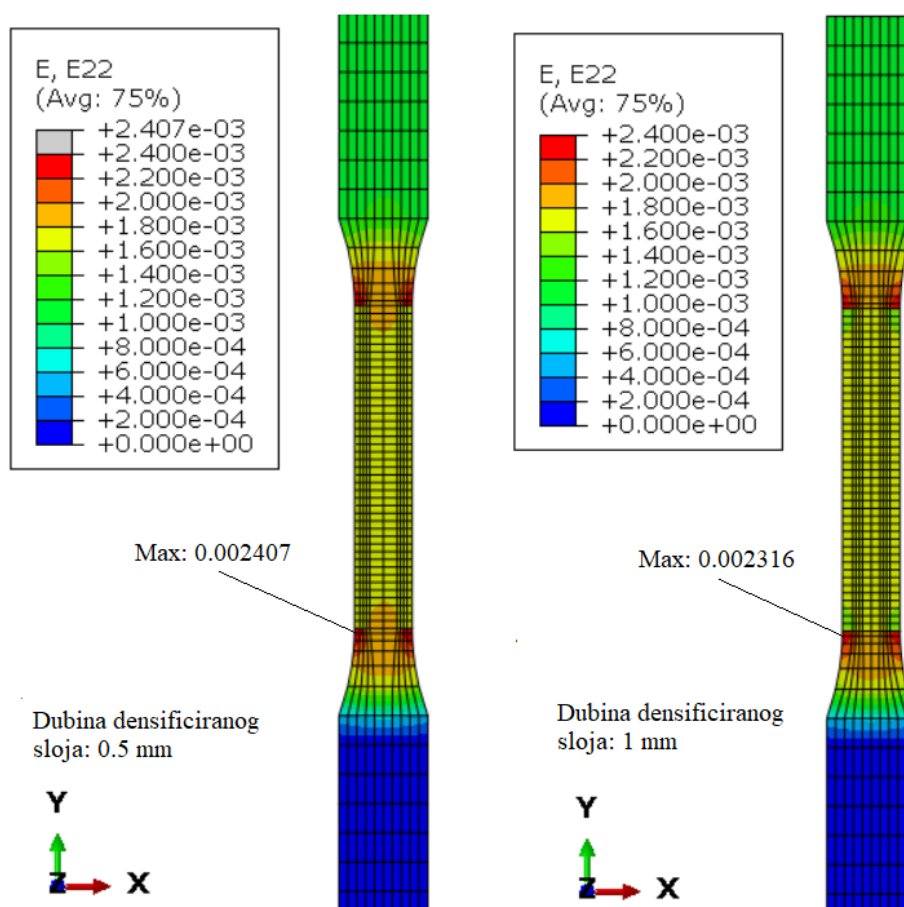


Slika 61. Usporedba naprezanja u smjeru osi y po poprečnom presjeku epruvete za različite dubine densifikacije

S prethodnih slika je vidljivo da se maksimalni iznosi naprezanja javljaju unutar densificiranog sloja te da su naprezanja veća pri dubini densifikacije 0,5 mm. Naprezanja u smjeru osi y su veća od ekvivalentnih po cijeloj širini poprečnog presjeka epruvete.

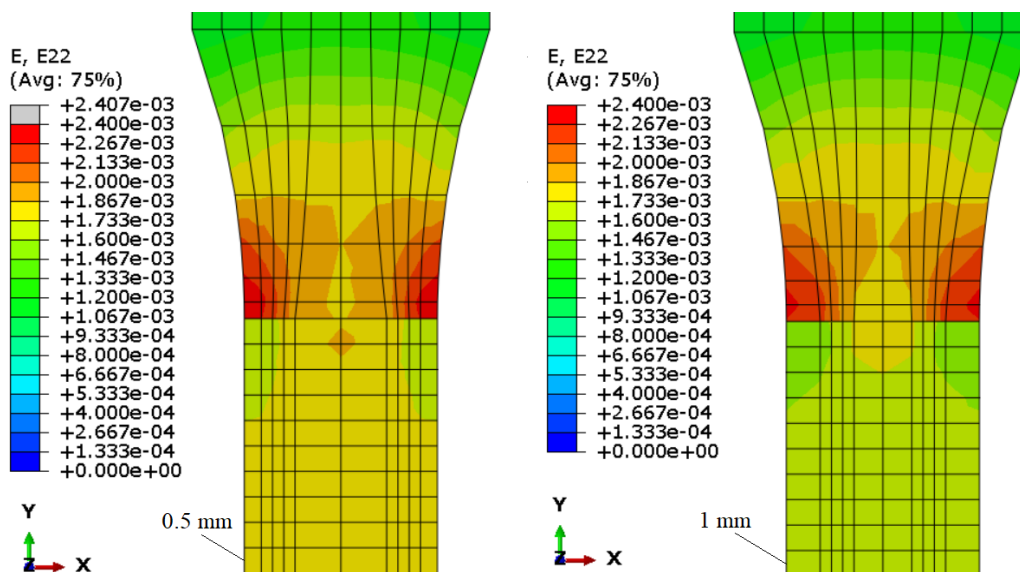
Raspodjela naprezanja unutar prijelaznog sloja je parabolična iako se prividno doima linearnom. Razlog tomu je praktički linearna ovisnost modula elastičnosti o gustoći za gustoće između 6,5 i 7,5 g/cm³ (slika 41.).

Slika 62 prikazuje usporedbu deformacije u smjeru osi y ovisno o dubini densificiranog sloja te pripadni maksimalni iznos deformacije u smjeru osi y. Sa slike se također vidi da je deformacija ispitnog dijela epruvete uglavnom konstantna.



Slika 62. Usporedba deformacije u smjeru osi y epruvete za različite dubine densifikacije

Deformacija u smjeru osi y ispitnog dijela epruvete je veća za dubinu densifikacije 0,5 mm i iznosi 0,001765 dok za dubinu densifikacije 1 mm iznosi 0,00165. Slika 63 prikazuje usporedbu deformacije u smjeru osi y na mjestu gdje dolazi do koncentracije deformacije uslijed nagle promjene materijalnih svojstava (prijelaz iz densificiranog sloja ispitnog dijela epruvete u osnovni materijal prihvatnog dijela). Vidljivo je da dubina densifikacije nema utjecaja na iznos deformacije u ovome području.



Slika 63. Usporedba deformacije u smjeru osi y na mjestu nagle promjene materijalnih svojstava za različite dubine densifikacije

7.5 Analiza s elastoplastičnim ponašanjem materijala

Elastoplastična analiza se vrši pomoću kreiranog modela i korisničke rutine UMAT, koja je za slučaj elastoplastičnosti bazirana na algoritmu iz poglavlja 4.7 te u sebi sadrži funkcije promjene materijalnih parametara u ovisnosti o gustoći materijala. Spomenute funkcije unutar korisničke rutine UMAT su prikazane na slici 64.

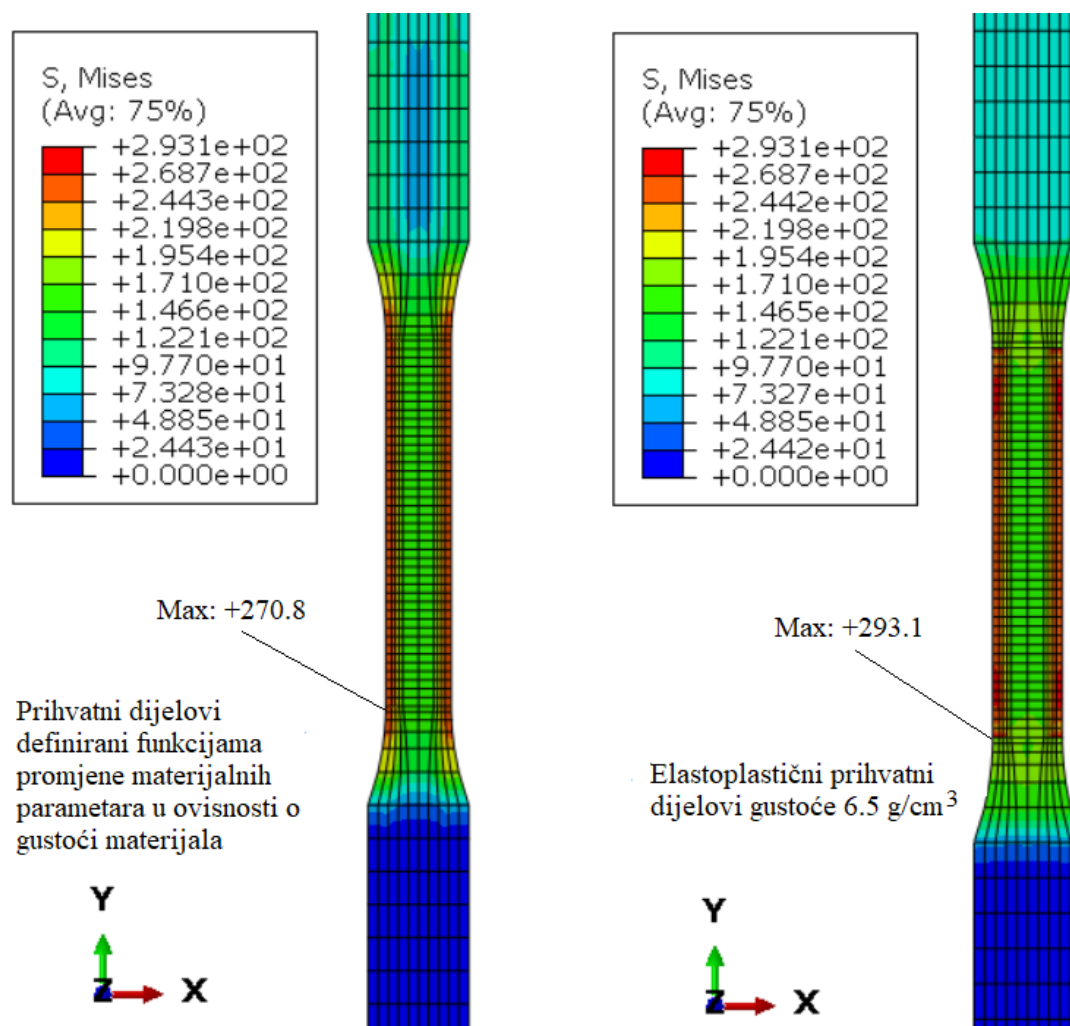
```

59      if(abs(COORDS(1)).gt.2.355) then
60
61          ro=7.5
62          EMOD=150778
63          syiel0=405.71
64          Qinfn=145.2327
65          b=400
66
67          elseif(abs(COORDS(1)).ge.1.355 .and. abs(COORDS(1)).le.2.355) then
68
69              ro=abs(COORDS(1))+5.145
70              EMOD=-5555.6*ro*ro+130556*ro-515889
71              syiel0=552200000000*exp(-4.001*ro)+0.09675*exp(1.112*ro)
72              Qinfn=20*ro*ro-185.6667*ro+412.733
73              b=1792.405*ro*ro*ro-37940.2*ro*ro+267316*ro-626505
74
75              elseif(abs(COORDS(1)).lt.1.355) then
76
77                  ro=6.5
78                  EMOD=98000
79                  syiel0=161.3
80                  Qinfn=50.9
81                  b=315.31
82
83      endif

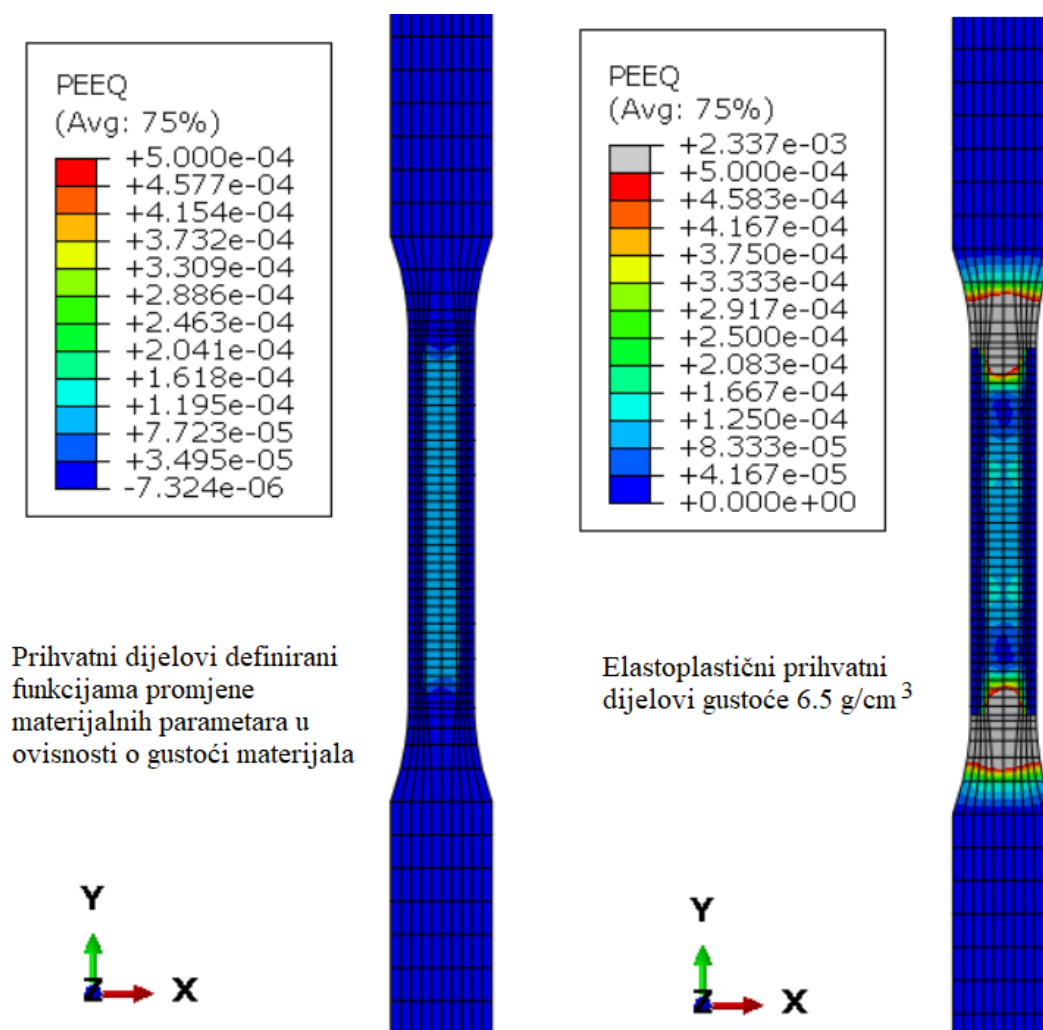
```

Slika 64. Funkcije promjene materijalnih parametara u ovisnosti o gustoći materijala unutar rutine UMAT

U rezultatima analize s elastičnim ponašanjem materijala je uočeno da na mjestima nagle promjene materijalnih svojstava dolazi do koncentracije naprezanja i deformacija. Prije provođenja simulacije s elastoplastičnim ponašanjem materijala, u ovome poglavlju će se utvrditi utjecaj definicije materijalnih svojstava prihvatnog dijela epruvete na koncentraciju deformacija i konstitutivno ponašanje modela. U prvom slučaju prihvatni dijelovi epruvete će biti definirani elastoplastičnim svojstvima sinteriranog čelika gustoće $6,5 \text{ g/cm}^3$, a u drugom pomoću funkcija promjene materijalnih parametara u ovisnosti o gustoći, opisanih u poglavlju 6.2. Ispitni dio epruvete je u oba slučaja definiran funkcijama promjene materijalnih parametara u ovisnosti o gustoći. Usporedba ekvivalentnog naprezanja i ekvivalentne plastične deformacije za elastoplastično ponašanje materijala, ovisno o različitim definicijama konstitutivnog ponašanja prihvatnih dijelova epruvete, je prikazana na slikama 65 i 66.



Slika 65. Usporedba ekvivalentnih naprezanja ovisno o konstitutivnom ponašanju prihvatnog dijela epruvete

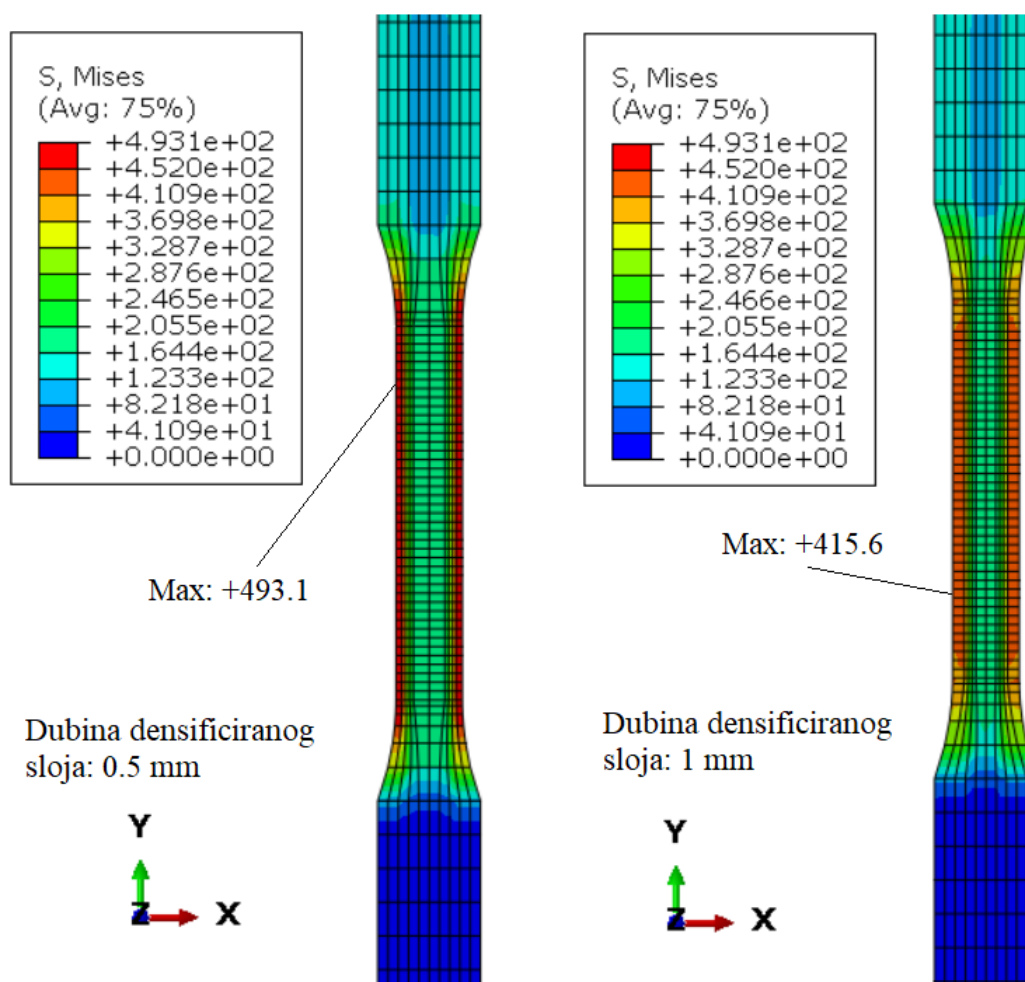


Slika 66. Usporedba ekvivalentne plastične deformacije ovisno o konstitutivnom ponašanju prihvatnog dijela epruvete

Sa slike 65 se vidi da prihvatni dijelovi definirani funkcijama promjene materijalnih parametara u ovisnosti o gustoći materijala eliminiraju skok naprezanja na mjestu nagle promjene materijalnih svojstava. Maksimalni iznos naprezanja, koji je posljedica koncentracije naprezanja na tom mjestu, je također manji. Iz prethodnih slika je također vidljivo da opisivanje konstitutivnog ponašanja prihvatnog dijela ispitnog uzorka promjenjivim materijalnim svojstvima eliminira koncentraciju plastične deformacije na mjestima nagle promjene materijalnih svojstava te doprinosi ravnomjernijoj raspodjeli plastične deformacije ispitnog dijela epruvete. Iznosi plastične deformacije unutar središnjeg sloja ispitnog dijela epruvete su otprilike jednaki. Stoga će prihvatni dijelovi epruvete pri elastoplastičnoj analizi biti definirani na isti način kao i ispitni dio epruvete.

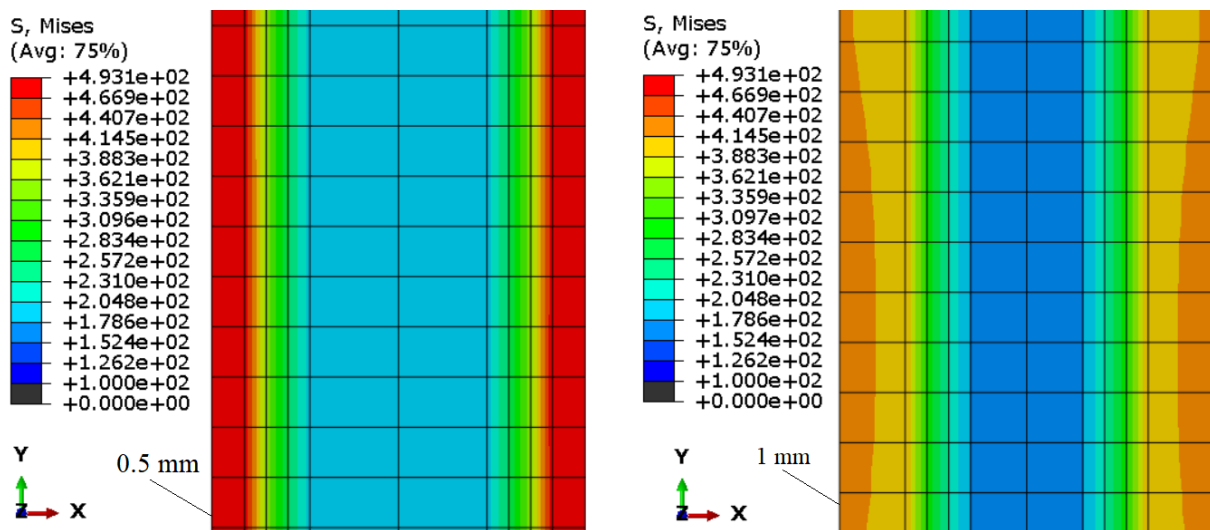
7.6 Rezultati analize s elastoplastičnim ponašanjem materijala

Slika 67 prikazuje usporedbu ekvivalentnih napreznja epruvete ovisno o dubini densificiranog sloja te pripadni maksimalni iznos ekvivalentnog napreznja. Napreznja su izražena u MPa.

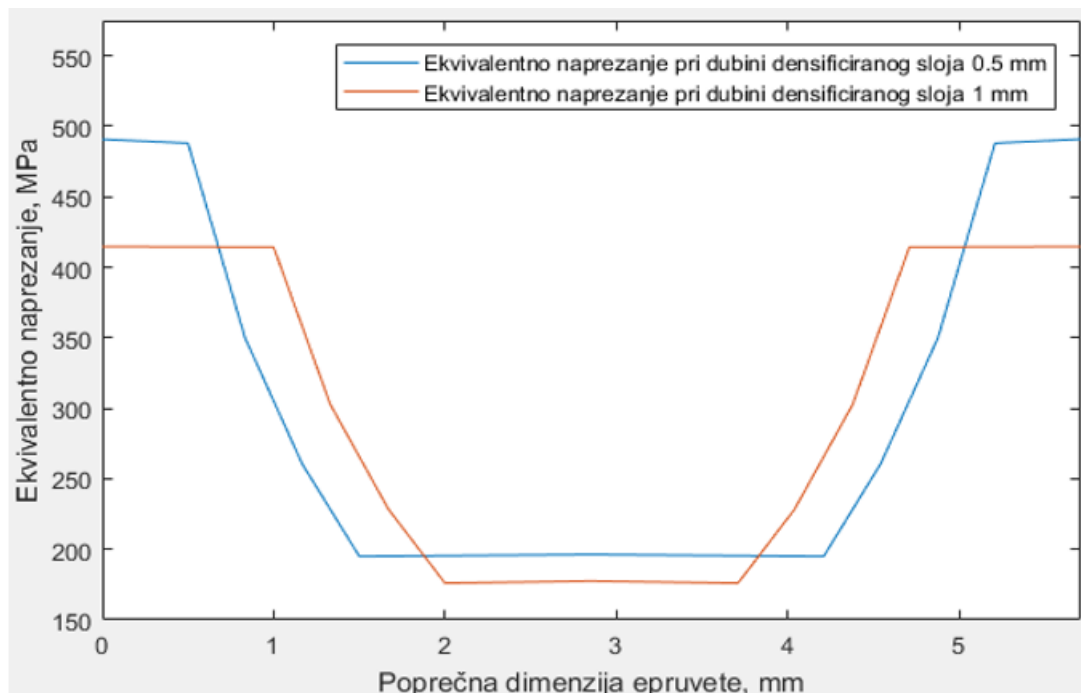


Slika 67. Usporedba ekvivalentnih napreznja kod elastoplastičnog ponašanja materijala epruvete za različite dubine densifikacije

Iznosi napreznja su veći u odnosu na rezultate elastičnog ponašanja materijala. Kao i kod elastičnog ponašanja, napreznja su konstantna unutar središnjeg sloja dok su unutar prijelaznog sloja promjenjiva. Maksimalni iznos napreznja je veći za slučaj dubine densifikacije od 0,5 mm. Raspodjela ekvivalentnog napreznja po poprečnom presjeku ispitnog dijela epruvete je detaljnije prikazana na slikama 68 i 69. Sa spomenutih slika je vidljivo da su ekvivalentna napreznja unutar densificiranog sloja minimalno promjenjiva te da je raspodjela napreznja unutar prijelaznog sloja parabolična, dok je pri analizi s elastičnim ponašanjem materijala bila linearna.

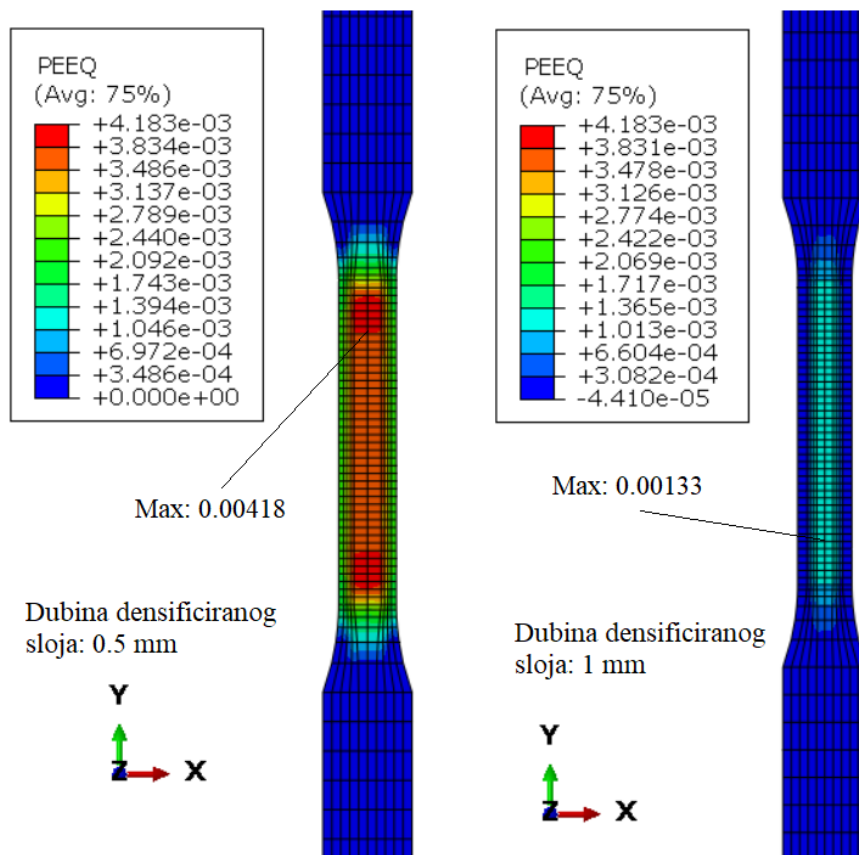


Slika 68. Usporedba ekvivalentnih napreznja na sredini ispitnog dijela epruvete

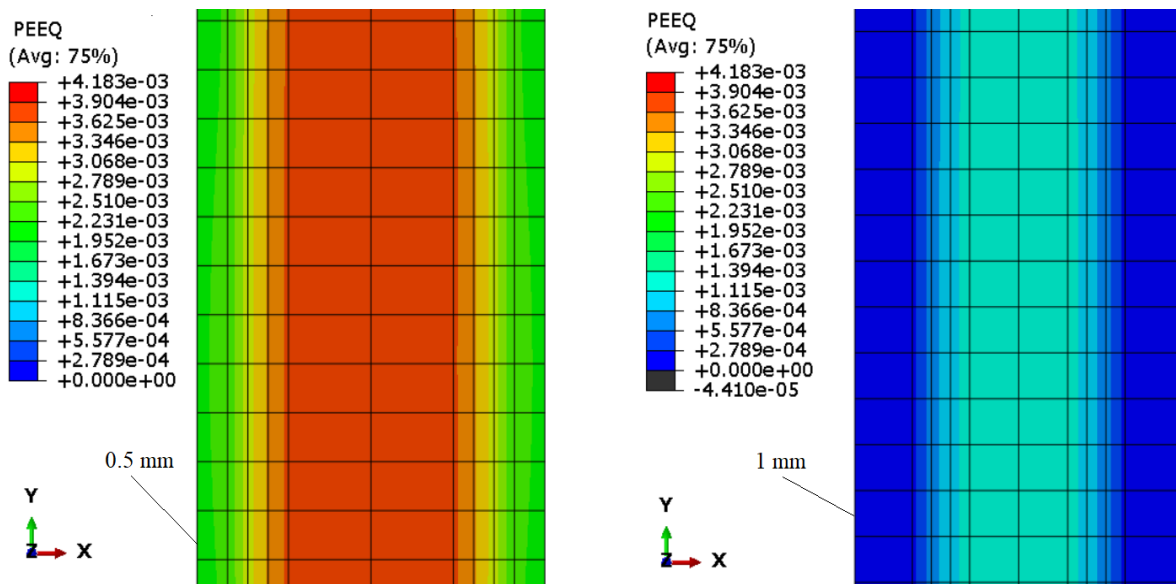


Slika 69. Usporedba ekvivalentnih napreznja po poprečnom presjeku kod elastoplastičnog ponašanja materijala epruvete za različite dubine densifikacije

Slika 70 prikazuje usporedbu ekvivalentne plastične deformacije epruvete i pripadni maksimalni iznos deformacije dok slika 71 prikazuje raspodjelu ekvivalentne plastične deformacije na sredini ispitnog dijela epruvete. Vidi se da je ekvivalentna plastična deformacija najveća unutar središnjeg sloja epruvete te da su njeni iznosi značajno veći za slučaj dubine densificiranog sloja od 0,5 mm.

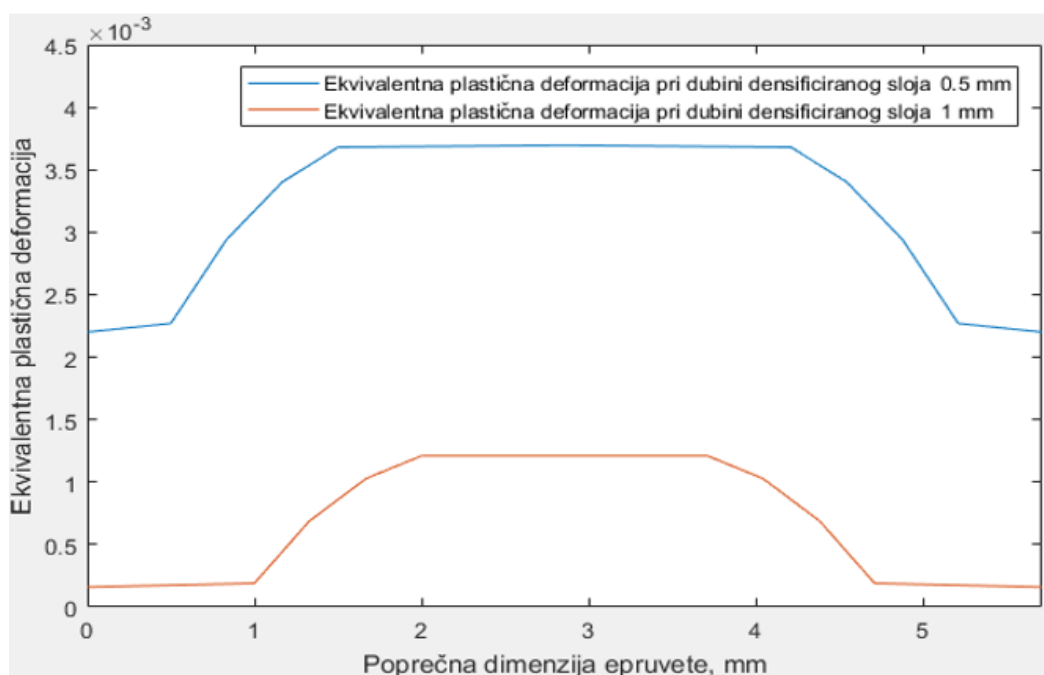


Slika 70. Usporedba maksimalne vrijednosti ekvivalentne plastične deformacije za različite dubine densifikacije



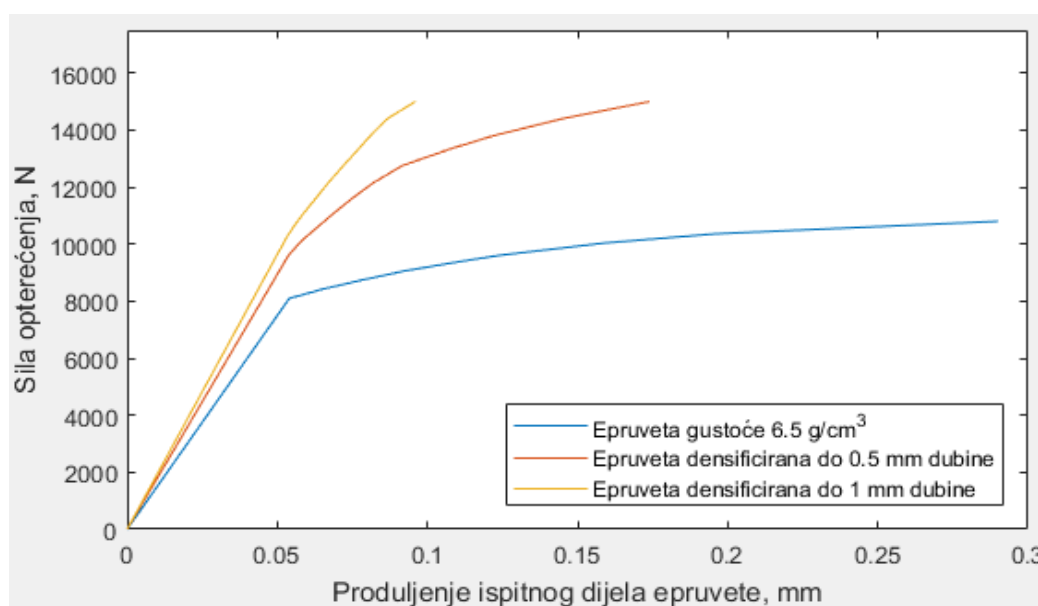
Slika 71. Usporedba ekvivalentne plastične deformacije na sredini ispitnog dijela epruvete za različite dubine densifikacije

Slika 72 prikazuje usporedbu ekvivalentne plastične deformacije po poprečnom presjeku.



Slika 72. Usporedba ekvivalentne plastične deformacije po poprečnom presjeku epruvete

Sa slike 72 je vidljivo da je raspodjela ekvivalentne plastične deformacije konstantna unutar središnjeg sloja, linearna unutar densificiranog sloja te parabolična unutar prijelaznog sloja. Slika 73 prikazuje usporedbu krivulja sila – pomak densificiranih epruveta i epruvete izrađene od sinteriranog čelika gustoće $6,5 \text{ g/cm}^3$.



Slika 73. Usporedba krivulja sila – pomak

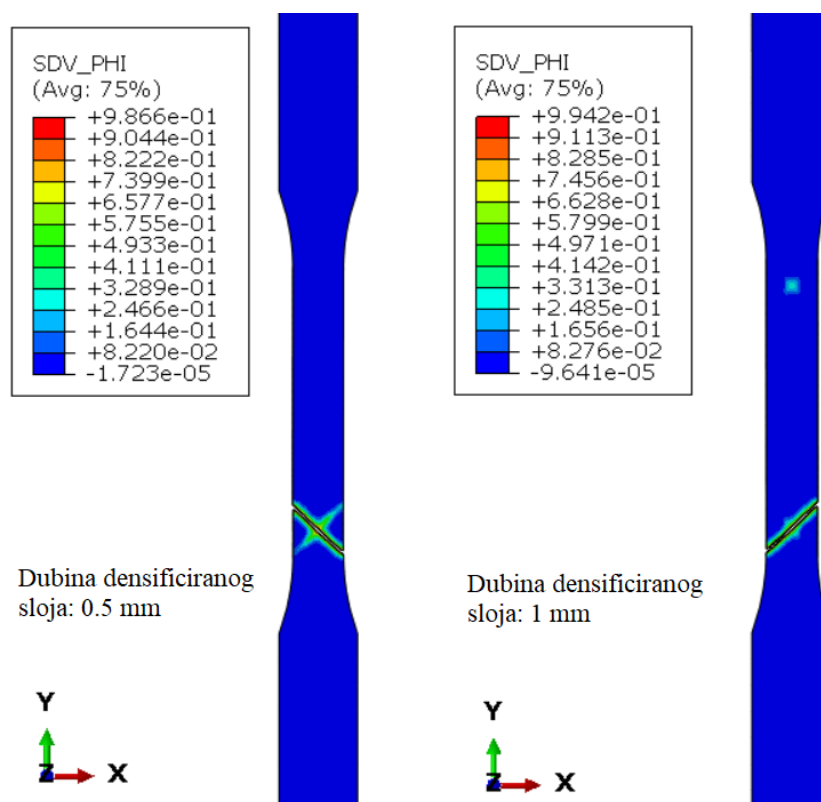
S prethodne slike se vidi da dubina densificiranog sloja značajno utječe na konstitutivno ponašanje materijala i da densificirani sloj znatno poboljšava mehanička svojstva epruvete. U slijedećim poglavljima će biti ispitan utjecan densifikacije na lomno ponašanje sinteriranog čelika.

7.7 Analiza oštećenja densificiranog sinteriranog čelika primjenom metode faznog polja

Analiza oštećenja je provedena u programskom paketu *Abaqus* pomoću korisničke rutine UMAT, uz koju dolazi još i rutina UEL za korisnički konačni element koji rješava problem rubnih vrijednosti metode faznog polja uz promjenjivu vrijednost kritične gustoće energije deformiranja ψ_c . Zbog primjene metode faznog polja nužna je puno gušća mreža konačnih elemenata kako bi se adekvatno opisao razvoj oštećenja. Zbog stabilnosti numeričke simulacije, opterećenje ispitnog uzorka je zadano preko narinutog pomaka gornjeg prihvatnog dijela epruvete u iznosu 0,75 mm. Slijede rezultati analize oštećenja.

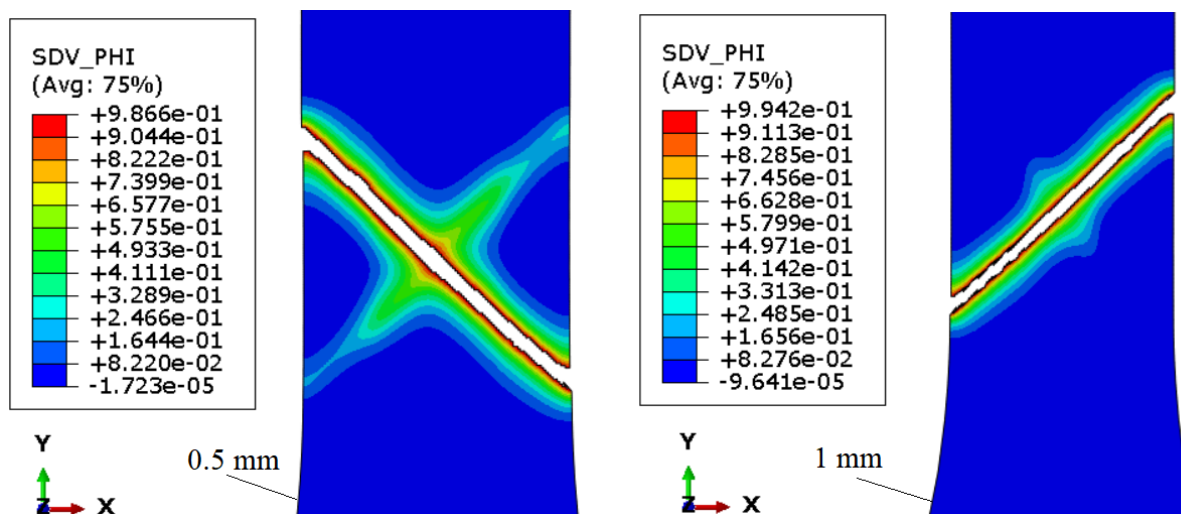
7.8 Rezultati analize oštećenja

Slika 74. prikazuje lokaciju pojave loma epruvete ovisno o dubini densificiranog sloja.

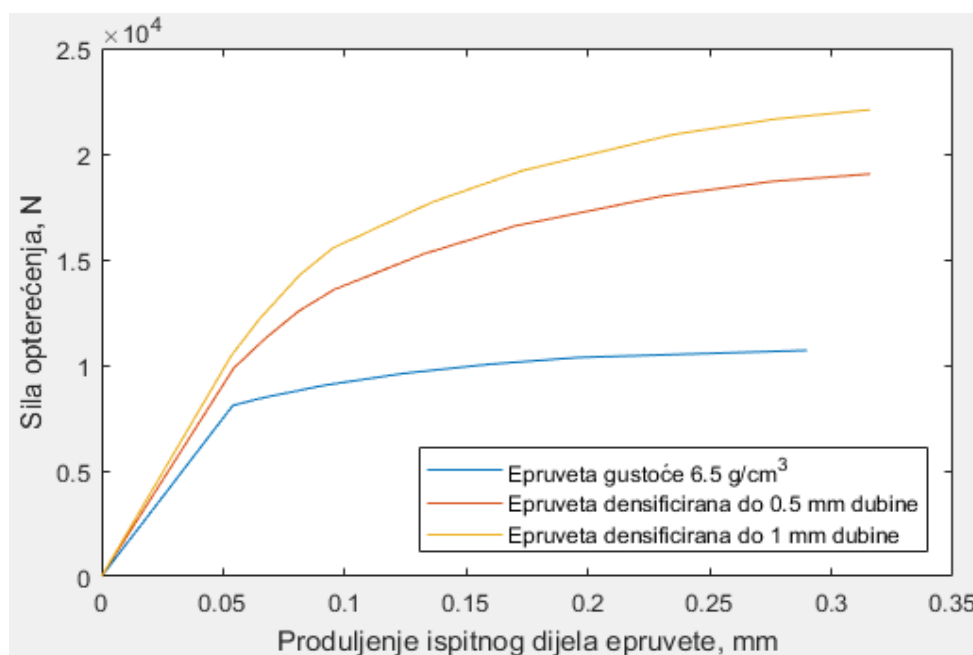


Slika 74. Lokacija pojave loma ovisno o dubini densificiranog sloja

Vidljivo je da do loma dolazi na ispitnom dijelu epruvete i da lokacija pojave loma ne ovisi o dubini densificiranog sloja. Oštećenje materijala je opisano skalarnim parametrom faznog polja φ . Oštećenje se inicira u središnjem sloju ispitnog dijela epruvete te nastala pukotina postepeno raste prema površini. Slika 75. detaljnije prikazuje izgled loma ovisno o dubini densificiranog sloja, dok slika 76. prikazuje usporedbu krivulja sila-pomak densificiranih epruveta i epruvete izrađene od sinteriranog čelika gustoće $6,5 \text{ g/cm}^3$ od početka opterećivanja pa sve do pojave loma.



Slika 75. Detaljan prikaz loma



Slika 76. Usporedba krivulja sila – pomak za različita materijalna svojstva

S prethodne slike je vidljivo da densificirani sloj povećava čvrstoću materijala, te da najveće opterećenje može podnijeti epruveta densificirana do 1 mm dubine. Do loma densificiranih epruveta dolazi pri istom iznosu pomaka (deformacije), dok je za epruvetu od sinteriranog čelika gustoće 6.5 g/cm^3 taj iznos manji. Slika 77. prikazuje lokaciju pojave loma epruvete od sinteriranog čelika u statičkom vlačnom testu. Vidi se da do loma dolazi na istom mjestu kao i u numeričkoj simulaciji.



Slika 77. Lokacija pojave loma epruvete od sinteriranog čelika u statičkom vlačnom testu

8. ZAKLJUČAK

U radu je provedena numerička analiza konstitutivnog ponašanja epruvete izrađene od densificiranog sinteriranog čelika. Ispitane su dvije dubine densificiranog sloja: 0,5 mm i 1 mm. Za potrebe numeričke analize je kreiran numerički model epruvete u programskom paketu *Abaqus* te programski kod unutar korisničke rutine UMAT koja sadrži funkcije ovisnosti materijalnih parametara o gustoći. Funkcije ovisnosti materijalnih parametara o gustoći opisuju promjenjiva svojstva sinteriranog čelika te su određene pomoću eksperimentalnih podataka za tri gustoće osnovnog materijala u programskom paketu *Matlab*, korištenjem metode najmanjih kvadrata. Tri tipa numeričke analize su provedena: s elastičnim ponašanjem materijala, s elastoplastičnim ponašanjem materijala i analiza oštećenja primjenom metode faznog polja. Optimalna mreža konačnih elemenata simulacije s elastičnim i elastoplastičnim ponašanjem materijala je određena razmatranjem konvergencije naprezanja i utjecaja različitih raspodjela elemenata po poprečnom presjeku ispitnog dijela epruvete.

U rezultatima simulacija s elastičnim ponašanjem materijala je pokazano da promjenjivost materijalnih svojstava po poprečnom presjeku ispitnog dijela epruvete uzrokuje promjenjivu raspodjelu naprezanja ispitnog dijela. Utvrđeno je da dubina densificiranog sloja utječe na iznose naprezanja i deformacija, koji su veći za slučaj dubine densifikacije 0,5 mm. Također je uočeno da na mjestu nagle promjene materijalnih svojstava dolazi do koncentracije naprezanja i deformacija radi različite definicije materijala prihvatnog i ispitnog dijela epruvete.

Analiza s elastoplastičnim ponašanjem materijala je pokazala da se najveće plastične deformacije pojavljuju u središnjem sloju ispitnog dijela epruvete. Također je uočeno da dubina densificiranog sloja značajno utječe na konstitutivno ponašanje materijala i da densificirani sloj znatno poboljšava mehanička svojstva epruvete, odnosno, densificirani sloj povećava čvrstoću materijala.

Analiza oštećenja metodom faznog polja je pokazala da lokacija pojave loma ne ovisi o dubini densificiranog sloja te da se lom javlja na istom mjestu kao i pri eksperimentalnim ispitivanjima. Oštećenje se inicira u središnjem sloju ispitnog dijela epruvete, odakle nastalo oštećenje naglo raste prema površini.

LITERATURA

- [1] Slokar Lj.: *Metalurgija praha i sinter materijali*, Sveučilište u Zagrebu, Metalurški fakultet, Sisak, 2015.
- [2] Begović N.: *Numeričko modeliranje oštećenja u mikrostrukturi sinteriranog čelika*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2021.
- [3] Francis Hanejko, Arthur Rawlings, Richard Slattery: *Surface densification approach to high density gears*, Hoeganaes Corporation, USA
- [4] B. A. Yazici, T. Kraft & H. Riedel: *Finite element modelling of PM surface densification process*, Powder Metallurgy, 2008.
- [5] H. Cho, Y. Shin, S. W. Hwang, J. H. Gu, J. H. Baek, J. H. Kim, S. T. Chung, S. H. Chung & S. J. Park: *Finite element simulation of PM gear rolling process*, Powder Metallurgy, 2016.
- [6] Jinguang Peng, Yan Zhao, Di Chen, Kiade Li, Wei Lu, Biao Yan: *Effect of Surface Densification on the Microstructure and Mechanical Properties of Powder Metallurgical Gears by Using a Surface Rolling Process*, School of Materials Engineering, Shanghai, 2016.
- [7] Houyi Bai, Caichao Zhu, Ye Zhou, Xiaojin Chen, Houbin Feng, Wei Ye: *Study on Tooth Interior Fatigue Fracture Failure of Wind Turbine Gears*, State Key Laboratory of Mechanical Transmissions, China, 2020.
- [8] Begić A.: *Modeliranje konstitutivnog ponašanja sinteriranog čelika pri monotonom i cikličkom opterećenju*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2022.
- [9] Alfirević I.: *Nauka o čvrstoći*, Tehnička knjiga d.d., Zagreb, 1995.
- [10] Kolupaev, V.A. (2018). *Equivalent Stress Concept for Limit State Analysis*, Springer, Cham.
- [11] EA de Souza Neto, Prof. D Perić, Prof. DRJ Owen, *Computational Methods for Plasticity Theory and Applications*, Wiley, 2009
- [12] Matić M.: *Utjecaj frekvencije uzorkovanja podataka na rezultate statičkog vlačnog Ispitivanja*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2022.
- [13] Rafaj V.: *Proračun čvrstoće prednjeg podvozja zrakoplova Piper Arrow IV*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2021.

-
- [14] Materijali s predavanja iz kolegija: Nelinearna numerička analiza konstrukcija, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje
- [15] Sorić J.: *Metoda konačnih elemenata*, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [16] Rafaj V.: *Seminarski zadatak iz kolegija Mehanika oštećenja i mehanika loma*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2023.
- [17] Rako J.: *Određivanje parametara loma sinteriranog čelika metodom faznog polja*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2023.
- [18] Lesičar T., Polančec T., Tonković Z.: *Convergence Check Phase-Field Scheme for Modelling of Brittle and Ductile Fractures*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb