

# Aerodinamičke karakteristike tankog deformabilnog aeroprofila u oscilatornom gibanju

---

Vojković, Tea

Undergraduate thesis / Završni rad

2018

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:662014>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-15**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

Tea Vojković

ZAGREB, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

AERODINAMIČKE KARAKTERISTIKE TANKOG DEFORMABILNOG  
AEROPROFILA U OSCILATORNOM GIBANJU

Mentor:  
doc. dr. sc. Dubravko Matijašević

Student:  
Tea Vojković

ZAGREB, 2018.

*Zahvaljujem se svom mentoru doc. dr. sc. Dubravku Matijaševiću na stručnoj pomoći i strpljenju pri izradi ovog rada, kao i potpori za daljnje usavršavanje u području aerodinamike. Također se zahvaljujem svojoj obitelji, dečku i prijateljima na moralnoj podršci tokom studiranja.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, lipanj 2018.

Tea Vojković



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**  
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija zrakoplovstva



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Tea Vojković**

Mat. br.: **0035199596**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Aerodinamičke karakteristike tankog deformabilnog aeroprofila u oscilatornom gibanju**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Oscillating thin deformable airfoil aerodynamic characteristics**

Opis zadatka:

U prethodnih nekoliko godina, proučavanje i razumijevanje leta ptica i kukaca doživljava svoju renesansu. Naime, tehnološki razvoj omogućava dublji uvid u problematiku pomoću numeričkih i eksperimentalnih metoda, no za razumijevanje takvog gibanja esencijalno je proučavanje teorije nestacionarne aerodinamike. Dublje razumijevanje nestacionarne aerodinamike ubrzava razvoj letjelica koje imitiraju let ptica.

U ovom radu potrebno je promatrati gibanje tankog deformabilnog aeroprofila u potencijalnom toku. U tu svrhu, potrebno je koristiti proširenu Theodorsenovu teoriju nestacionarnog strujanja oko tankog aeroprofila, koja je u originalu korištena za aeroprofil sa zakrilcem u okviru složenijeg problema aeroelastičnosti. U ovom radu potrebno se ograničiti na aerodinamički problem. Za ortogonalne funkcije, koje opisuju različite modove gibanje deformabilnog aeroprofila, koristiti Čebiševljeve polinome. U navedenom okruženju, potrebno je izračunati izraze za uzgon i moment propinjanja u frekvencijskoj domeni, za aeroprofil koji se oscilatorno giba i deformira. Izraze i rezultate je potrebno usporediti s dostupnom literaturom.

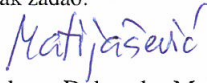
U okviru rada potrebno je prezentirati problem, korištene metode, i komentirati dobivene rezultate, te navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
26. travnja 2018.

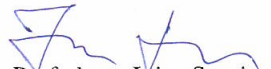
Datum predaje rada:  
**2. rok (izvanredni):** 28. lipnja 2018.  
**3. rok:** 21. rujna 2018.

Predviđeni datumi obrane:  
**2. rok (izvanredni):** 2.7. 2018.  
**3. rok:** 24.9. - 28.9. 2018.

Zadatak zadao:

  
Doc. dr.sc. Dubravko Matijašević

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr.sc. Ivica Smojver

# Sadržaj

Sadržaj	v
Popis slika	vii
Popis tablica	ix
Popis oznaka	x
Sažetak	xii
Summary	xiii
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Pregled literature . . . . .	1
1.2. Osnovne jednačbe tankog aeroprofila u potencijalnom strujanju . . . . .	2
1.2.1. Osnovne jednačbe nestlačivog potencijalnog strujanja . . . . .	2
1.2.2. Čebiševljevi polinomi prve vrste . . . . .	8
<b>2. Tanki aeroprofil u harmonijskom gibanju</b>	<b>11</b>
2.1. Necirkulacijski tok . . . . .	11
2.2. Cirkulacijski tok . . . . .	19
2.3. Harmonijsko gibanje deformabilnog aeroprofila . . . . .	25
2.4. Ukupni uzgon i moment propinjanja . . . . .	27
2.5. Veza sa stacionarnim strujanjem . . . . .	29
<b>3. Rezultati</b>	<b>30</b>
3.1. Prikaz i interpretacija rezultata . . . . .	30
<b>4. Zaključak</b>	<b>35</b>
<b>A. Theodorsenova funkcija</b>	<b>36</b>

B. Strujanje pojedinih modova

39

Literatura

44



# Popis slika

1.1	Tanki aeroprofil . . . . .	5
1.2	Praslika i slika djelovanja konformne funkcije Žukovskog na osnovni aeroprofil	7
1.3	Čebiševljevi polinomi prve vrste . . . . .	9
2.1	Par izvora i ponora . . . . .	12
2.2	Mjera skoka koeficijenta tlaka uslijed akceleracije moda $h_4$ . . . . .	18
2.3	Koordinate vrtloga . . . . .	20
2.4	Theodorsenova funkcija u polarnom obliku . . . . .	27
3.1	Apsolutna vrijednost uzgona . . . . .	32
3.2	Apsolutna vrijednost momenta propinjanja . . . . .	32
3.3	Apsolutna vrijednost normiranog uzgona . . . . .	33
3.4	Apsolutna vrijednost normiranog momenta propinjanja . . . . .	33
3.5	Relativni fazni kut uzgona u odnosu na gibanje . . . . .	34
3.6	Relativni fazni kut momenta propinjanja u odnosu na gibanje . . . . .	34
A.1	Besselove funkcije prve i druge vrste . . . . .	37
A.2	Theodorsenova funkcija . . . . .	38
B.1	Necirkulacijski tok uslijed pomaka drugog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno) . . . . .	40
B.2	Ukupni tok uslijed pomaka drugog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno) . . . . .	40
B.3	Necirkulacijski tok uslijed pomaka trećeg moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno) . . . . .	41
B.4	Ukupni tok uslijed pomaka trećeg moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno) . . . . .	41
B.5	Necirkulacijski tok uslijed pomaka četvrtog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno) . . . . .	42

B.6	Ukupni tok uslijed pomaka četvrtog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno) . . . . .	42
B.7	Necirkulacijski tok uslijed pomaka petog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno) . . . . .	43
B.8	Ukupni tok uslijed pomaka petog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno) . . . . .	43

# Popis tablica

2.1	Necirkulacijski potencijali brzine pojedinih modova gibanja . . . . .	16
2.2	Komponente ukupnog uzgona . . . . .	28
2.3	Komponente ukupnog momenta propinjanja . . . . .	29
3.1	Amplituda i relativna faza uzgona i momenta propinjanja . . . . .	30

# Popis oznaka

$\bar{L}$	kompleksni uzgon . . . . .	27
$\bar{M}$	kompleksni moment propinjanja . . . . .	27
$\gamma_w$	gustoća cirkulacije . . . . .	23
$\Phi$	ukupni potencijal brzine . . . . .	3
$\phi$	perturbacijski potencijal . . . . .	4
$\phi_0$	potencijal necirkulacijskog toka . . . . .	13
$\phi_{\Gamma_1}$	potencijal jednog vrtloga . . . . .	19
$\phi_{\Gamma}$	potencijal cirkulacijskog toka . . . . .	22
$\Phi_{\infty}$	potencijal strujanja konstantnog u beskonačnosti . . . . .	3
$\rho$	gustoća fluida . . . . .	2
$\mathbf{u}$	komponenta ukupne brzine u smjeru osi $x$ . . . . .	2
$\mathbf{v}$	ukupna brzina . . . . .	2
$\mathbf{w}$	komponenta ukupne brzine u smjeru osi $z$ . . . . .	2
$\varepsilon$	polovina jakosti dvodimenzinalnog izvora . . . . .	12
$\Phi_i$	kompleksni potencijal dvodimenzinalnog izvora . . . . .	12
$\Phi_p$	kompleksni potencijal dvodimenzinalnog ponora . . . . .	12
$\Phi_{\Gamma_1}$	kompleksni potencijal jednog vrtloga . . . . .	19
$\xi_1$	Lagrangeova koordinata otkinutog vrtloga . . . . .	22
$\zeta$	koordinata aeroprofila u smjeru osi $z$ . . . . .	5
$b$	polovina duljine aerodinamičke tetive . . . . .	5
$B(t)$	Bernoullijeva funkcija . . . . .	3
$C(k)$	Theodorsenova funkcija . . . . .	26
$F(k)$	realna komponenta Theodorsenovove funkcije . . . . .	26
$G(k)$	imaginarna komponenta Theodorsenovove funkcije . . . . .	26
$h_n$	koeficijenti mjere deformacije $n$ -tog moda . . . . .	10
$L_0$	necirkulacijski uzgon . . . . .	17
$L_{\Gamma}$	cirkulacijski uzgon . . . . .	23

$M_0$	necirkulacijski moment propinjanja . . . . .	18
$M_\Gamma$	cirkulacijski moment propinjanja . . . . .	23
$p$	tlak . . . . .	2
$q$	jakost dvodimenzinalnog izvora . . . . .	12
$q_x$	perturbacijska brzina u smjeru osi $x$ . . . . .	4
$q_z$	perturbacijska brzina u smjeru osi $z$ . . . . .	4
$R_0$	radijus cilindra u praslici . . . . .	7
$t$	vrijeme . . . . .	2
$T_n(x)$	$n$ -ti Čebiševljev polinom prve vrste . . . . .	8
$U_\infty$	neporemećena brzina . . . . .	2
$X, Z$	koordinate u praravnini . . . . .	7
$x, z$	koordinate u preslikanoj ravnini . . . . .	7
$X_0, Z_0$	koordinate izvora . . . . .	11
$X_1$	koordinata otkinutog vrtloga u praravnini . . . . .	20
$x_1$	koordinata otkinutog vrtloga u preslikanoj ravnini . . . . .	21

# Sažetak

U radu se promatraju nestacionarne aerodinamičke pojave pri opstrujavanju tankog deformabilnog aeroprofila u potencijalnom strujanju. Pojedini modovi deformabilnog aeroprofila opisani su Čebiševljevim polinomima prve vrste. Prva dva moda predstavljaju kruta gibanja poniranja i propinjanja, dok viši modovi predstavljaju elastične deformacije aeroprofila. Pri računanju aerodinamičkih karakteristika, prati se Theodorsenov pristup koji je izvorno upotrebljen u širem okruženju za računanje aeroelastičnih svojstava krutog aeroprofila sa zakrilcem. U duhu Theodorsenove metode, za dobivanje ravne ploče koja služi kao referentni aeroprofil, korišteno je preslikavanje Žukovskog. Necirkulacijski tok opisan je plahtom izvora i ponora distribuiranih po stijeki cilindra čije su snage određene uvjetom nepropusnosti. Kuttin uvjet je zadovoljen kada se tome doda cirkulacijski tok, izračunat pomoću vrtložne plahte na aeroprofilu i njegovom tragu, bez narušavanju rubnog uvjeta. Izrazi za aerodinamički uzgon i moment propinjanja dani su u frekvencijskoj domeni.

**Ključne riječi:** Teorija tankih aeroprofila, oscilatorno gibanje, necirkulacijski tok, cirkulacijski tok, Theodorsenova funkcija

# Summary

In this thesis unsteady aerodynamic loads on thin deformable airfoil in potential flow are considered. The deformation of the airfoil is described by the Chebychev polynomials of the first kind. First two polynomials represent rigid body motion, pitching and plunging, while higher order polynomials represent elastic deformation of the airfoil. Method proposed by Theodorsen, originally used in broader context of fluttering airfoil with flap, is applied for aerodynamic load calculation. The Joukowski conformal mapping was used to transform the flow about a circle into a flow about a flat plate, which serves as reference airfoil. Noncirculatory flow consists of source sheet on the upper surface of circle and sink sheet on the lower surface. The strength of the sheet is derived from the boundary condition. To satisfy Kutta condition, circulatory flow, which is derived by using a vortex sheet on the airfoil and in the wake, is superimposed.

**Keywords:** Thin airfoil theory, oscillatory motion, noncirculatory flow, circulatory flow, Theodorsen function

# Poglavlje 1.

## Uvod

### 1.1. Pregled literature

Linearna nestacionarna aerodinamika aeroprofila razvijena je tokom više desetljeća.

Prvi je Wagner [1] proučavao kašnjenje u fazi uzgona koji djeluje na aeroprofil iznenada pokrenut iz stanja mirovanja. Wagnerova funkcija prikazuje utjecaj otkinutih vrtloga na uzgon takvog aeroprofila. Wagner je taj utjecaj dao numerički a Küssner [2], u radu u kojem je promatrao problem aeroprofila koji prolazi kroz zapuh, je izračunao njen izraz.

Ključni rad u području napravio je Theodorsen [3]. U tom radu, Theodorsen proučava potencijalno strujanje i daje izraze za uzgon i moment propinjanja aeroprofila s zakrilcem koji ponire i zakreće se oko proizvoljne točke. Teoriju je izveo pretpostavljajući male poremećaje i harmonijsko gibanje, te prepoznao da se strujanje može odvojiti na cirkulatorni i necirkulatorni dio. Nadalje, pokazao je da je reducirana frekvencija mjera nestacionarnosti potencijalnog strujanja. Relacija između Wagnerove i Theodorsenove funkcije proučavao je Garrick [4].

Garrick [5] je također proširio Theodorsenovu teoriju dobivši izraze za potisak uslijed osciliranja tankog aeroprofila. On je pristupio tom problemu na dva različita načina, pomoću zakona očuvanja mase i direktnim računanjem sila. Propulzija je također bila izračunata preko vrtložnosti na prednjem bridu od strane von Karmana i Burgersa [6].

Također su razvijene i teorije nestacionarne aerodinamike za deformabilna krila. Peters [7] je promatrao aerodinamičke sile na deformabilni aeroprofil proizvoljnog oblika, za čije je modove gibanja koristio Čebiševljeve polinome.



## 1.2. Osnovne jednadžbe tankog aeroprofila u potencijalnom strujanju

U ovom radu promatra se oscilatorno gibanje tankog aeroprofila u potencijalnom toku fluida, kao i aerodinamička opterećenja koje takvo gibanje stvara na aeroprofil. Prvi je takav problem promatrao Theodorsen [3] proučavajući gibanje aeroprofila s zakrilcem u širem kontekstu aeroelastičnosti.

U ovom radu se konkretno promatra potencijalno stujanje oko tankog aeroprofila koji se giba u negativnom smjeru osi  $x$  konstantnom brzinom  $U_\infty$ . Gledajući iz inercijskog koordinatnog sustava koji se giba s aeroprofilom, aeroprofil je opstujavan fluidom koji se iz beskonačnosti giba istom tom brzinom u pozitivnom smjeru osi  $x$ . Aeroprofil također pounire, zakreće i elastično se deformira stvarajući perturbacijske brzine  $q_x$  i  $q_z$ , u smjerovima osi  $x$  i  $z$ , koje s brzinom u beskonačnosti daju ukupnu brzinu  $\mathbf{v}$ , tj.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_\infty \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_x \\ q_z \end{pmatrix} = \mathbf{V} + \mathbf{q}$$

### 1.2.1. Osnovne jednadžbe nestlačivog potencijalnog strujanja

Strujanje oko aeroprofila opisano je jednadžbom kontinuiteta i jednažbom količine gibanja (II. Newtonovim zakonom).

Jednadžba kontinuiteta za nestlačivi tok je:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

gdje je  $\mathbf{v}$  ukupna brzina. Za neviskoznan limit ( $Re \rightarrow \infty$ ) i fluid male gustoće i/ili male promjene visine u relevantnom strujnom polju u jednadžbi količine gibanja se mogu zanemariti viskozne i volumne sile, pa ona glasi:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p, \quad (1.2)$$

gdje je  $t$  vrijeme,  $p$  tlak, a  $\rho$  gustoća fluida.

Gornje dvije jednadžbe čine sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda te opisuju neviskozno strujanje fluida (koje može biti i vrtložno). Ovaj sustav se u općem slučaju može riješiti samo numerički, zbog nelinearnosti konvektivnog člana u jednadžbi količine gibanja, pa se za dobivanje analitičkih rješenja uvodi pretpostavka o bezvrtložnom strujanju ( $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ,  $rot\mathbf{v} = 0$ ).

Iz mehanike fluida je poznato da su pojmovi bezvrtložnosti i potencijalnosti vektorskog polja ekvivalentni. Po definiciji, potencijalno vektorsko polje je ono koje se da prikazati

kao gradijent skalarnog polja, tj.:

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi,$$

gdje je  $\Phi$  ukupni potencijal brzine. Uz ovu pretpostavku o potencijalnom strujanju jednačba kontinuiteta (1.1) prelazi u Laplaceovu jednačbu:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla\Phi) &= 0, \\ \Delta\Phi &= 0\end{aligned}$$

a nelinearni član u jednačbi količine gibanja može se za fluid konstantne gustoće ( $\rho = \textit{konst.}$ ) zapisati kao:

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \rho \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\rho}{2} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} \right) = \nabla \left( \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} \right), \quad (1.3)$$

gdje je  $\mathbf{v}^2$  oznaka za  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ . Uvrštavajući izraz za konvektivni član bezvrtložnog toka (1.3) u jednačbu količine gibanja (1.2) slijedi:

$$\nabla \left( \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} + p \right) = 0.$$

Obzirom da je gradijent izraza u zagradama jednak nuli, taj izraz može biti samo funkcija vremena

$$\rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} + p = B(t), \quad (1.4)$$

gdje je  $B(t)$  Bernoullijeva funkcija. Ako se odabere sustav referencije u beskonačnosti vrijedi:

$$\begin{aligned}\Phi_\infty &= U_\infty x, \\ \frac{\partial\Phi_\infty}{\partial t} &= 0,\end{aligned}$$

gdje je  $\Phi_\infty$  potencijal strujanja konstantnog u beskonačnosti, koji zadovoljava Laplaceovu jednačbu ( $\Delta\Phi_\infty = 0$ ) slijedi izraz:

$$\frac{\rho U_\infty^2}{2} + p_\infty = B(t). \quad (1.5)$$

Ako se izraz za Bernoullijevu funkciju (1.5) uvrsti u (1.4) dobije se nestacionarna Bernoullijeva jednačba:

$$\rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} + p = \frac{\rho U_\infty^2}{2} + p_\infty.$$

Ukupni potencijal u nekoj točki prostora  $\Phi$  može se zapisati kao zbroj potencijala u beskonačnosti i perturbacijskog potencijala:

$$\Phi = U_\infty x + \phi. \quad (1.6)$$

Perturbacijske brzine dobiju se deriviranjem perturbacijskog potencijala.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= q_x = u - U_\infty \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= q_z\end{aligned}$$

Ukupna brzina  $\mathbf{v}$  može zapisati kao zbroj brzine u beskonačnosti  $U_\infty$  i perturbacijskih brzina, pa slijedi:

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \begin{pmatrix} U_\infty + q_x & q_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_\infty + q_x \\ q_z \end{pmatrix} = U_\infty^2 + 2U_\infty \cdot q_x + q_x^2 + q_z^2.$$

U slučaju tankog aeroprofila usvaja se pretpostavka o malim poremećajima ( $q_x, q_z \ll U_\infty$ ) pa se iz prethodnog izraza određeni članovi mogu izostaviti. Ako se zanemare male veličine višeg reda i iskoristi izraz za ukupni potencijal (1.6) dobiva se linearizirana nestacionarna Bernoullijeva jednadžba koja glasi

$$\begin{aligned}p &= p_\infty - \rho U_\infty q_x - \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \\ p &= p_\infty - \rho U_\infty \frac{\partial\phi}{\partial x} - \rho \frac{\partial\phi}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Linearizirana Bernoullijeva jednadžba omogućuje osim zbranjavanja brzina pojedinih strujanja i zbrajanje tlakova. Zato je moguće promatrati posebno sile u različitim strujanjima te ih naknadno zbrojiti.

## Rubni uvjet

Za dobivanje raspodjele tlaka po površini aeroprofila potrebno je uz jednadžbu kontinuiteta i jednadžbu količine gibanja postaviti i uvjet nepromočivosti tijela. Uvjet nepromočivosti nekog tijela kaže da je normalna komponenta brzine fluida na površini tijela  $\partial\Phi/\partial\mathbf{n}$  određena gibanjem tijela. Čestice fluida koje su u doticaju s površinom tijela moraju imati istu normalnu brzinu kao i samo tijelo [8].

Neka je dana implicitna površina preko skalarne funkcije:

$$F(x, z, t) = \text{konst.}$$

tako da je

$$F(x, z, t) = 0\tag{1.8}$$

upravo površina aeroprofila (vidi sliku 1.1). Za čestice fluida koje su u doticaju s površinom u svakom trenutku vrijedi jednadžba površine (1.8). Zato, ako se promatrač giba s tim česticama ne primjećuje promjenu u  $F(x, z, t)$  sve dok se one ne odvoje

od tijela, tj. vrijedi:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{za } -b \leq x \leq b, \quad (1.9)$$

gdje je duljina aerodinamičke tetive  $2b$ . U teoriji tankih aeroprofila uobičajeno je da se oblik aeroprofila opiše sa:

$$\begin{aligned} z = \zeta(x, t) &= \zeta_g(x, t) && \text{za gornjaku,} \\ &= \zeta_d(x, t) && \text{za donjaku} \end{aligned}$$

pa se skalarna funkcija površine aeroprofila (1.8) može zapisati kao [?]:

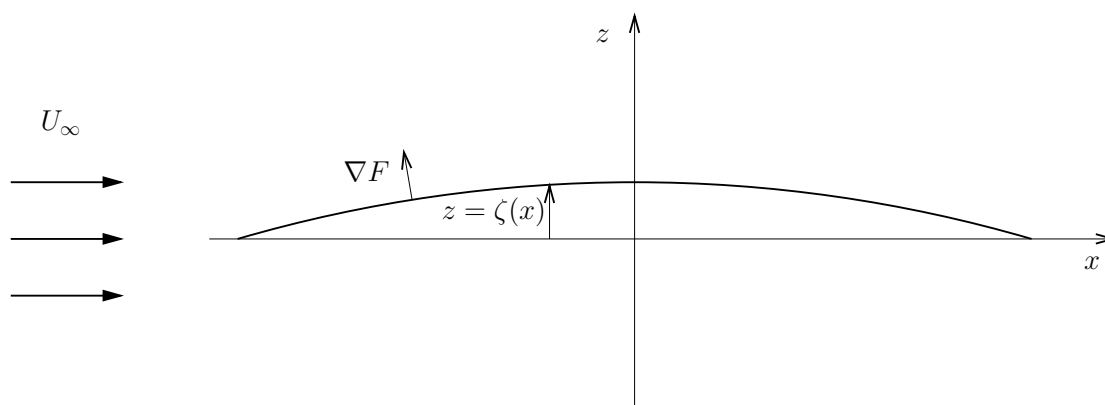
$$F(x, z, t) = \zeta(x, t) - z = 0.$$

Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= -1, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem gornjih izraza u jednadžbu materijalne derivacije funkcije površine (1.9) dobije se:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - w = 0.$$



Slika 1.1: Tanki aeroprofil

Ako se umjesto ukupne brzine uvrste njene komponente, uz uzimanje u obzir da je ukupna brzina u  $z$  smjeru jednaka perturbacijskoj brzini ( $w = q_z$ ) gornji izraz prelazi u:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (U_\infty + q_x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = w \quad \text{na } z = \zeta(x, t), -b \leq x \leq b.$$

Ova jednadžba je nelinearna jednadžba rubnog uvjeta zato što  $q_x$  ovisi o  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ . Ona se u teoriji tankih aeroprofila koja pretpostavlja malu zakrivljenost aeroprofila ( $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ ) uz pomoć već prije spomenute pretpostavke o malim poremećajima ( $q_x, q_z \ll U_\infty$ ) može pojednostaviti i preći u linearizirani oblik koji glasi:

$$\begin{aligned} w(x, \zeta_g, t) &= \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} & -b \leq x \leq b, \text{ za gornjaku,} \\ w(x, \zeta_d, t) &= \frac{\partial \zeta_d}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \zeta_d}{\partial x} & -b \leq x \leq b, \text{ za donjaku.} \end{aligned}$$

Brzina  $w$  se može razviti u Taylorov red oko točaka na aerodinamičkoj tetivi aeroprofila:

$$\begin{aligned} w(x, \zeta_g, t) &= w(x, 0^+, t) + \zeta_g \frac{\partial w(x, 0^+, t)}{\partial z} + \frac{\zeta_g^2}{2!} \frac{\partial^2 w(x, 0^+, t)}{\partial z^2} + \dots, \\ w(x, \zeta_d, t) &= w(x, 0^-, t) + \zeta_d \frac{\partial w(x, 0^-, t)}{\partial z} + \frac{\zeta_d^2}{2!} \frac{\partial^2 w(x, 0^-, t)}{\partial z^2} + \dots. \end{aligned}$$

U skladu s prethodnim pretpostavkama o malim deformacijama mogu se zanemariti svi osim prvog člana na desnoj strani jednadžbe, tj. vrijedi:

$$\begin{aligned} w(x, \zeta_g, t) &= w(x, 0^+, t), \\ w(x, \zeta_d, t) &= w(x, 0^-, t). \end{aligned}$$

Linearizirani rubni uvjeti su konačno:

$$\begin{aligned} w(x, 0^+, t) &= \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \zeta_g}{\partial x}; & -b \leq x \leq b, \text{ za gornjaku,} \\ w(x, 0^-, t) &= \frac{\partial \zeta_d}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \zeta_d}{\partial x} & -b \leq x \leq b, \text{ za donjaku.} \end{aligned}$$

Linearizirani rubni uvjeti se mogu prikazati i u bezdimenzijskom obliku pomoću bezdimenzijskih koordinata ( $\bar{x} = \frac{x}{b}$ ,  $\bar{z} = \frac{z}{b}$ ,  $\bar{\zeta} = \frac{\zeta}{b}$ ):

$$\begin{aligned} w(\bar{x}, 0^+, t) &= b \frac{\partial \bar{\zeta}_g}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \bar{\zeta}_g}{\partial \bar{x}}; & -1 \leq \bar{x} \leq 1, \text{ za gornjaku,} \\ w(\bar{x}, 0^-, t) &= b \frac{\partial \bar{\zeta}_d}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \bar{\zeta}_d}{\partial \bar{x}} & -1 \leq \bar{x} \leq 1, \text{ za donjaku.} \end{aligned} \tag{1.10}$$

## Konformno preslikavanje

Konformno preslikavanje je ono preslikavanje kod kojeg se beskonačno mali oblici iz jedne ravnine preslikavaju u drugu ravninu bez promjene oblika uz moguću promjenu

veliĉine i orijentacije [9]. Theodorsen u svojoj teoriji tankih aeroprofila u oscilatornom gibanju koristi konformno preslikavanje Źukovskog koje je najprikladnije za opisivanje ovog strujanja [3]. Njime se preslikava kruŹnica iz praslike u ploĉu, koja predstavlja tanki aeroprofil.

KruŹnica radijusa:

$$R_0 = \frac{b}{2}$$

se iz ravnine XZ preslikava pomoću formule za preslikavanje Źukovskog u xz-ravninu:

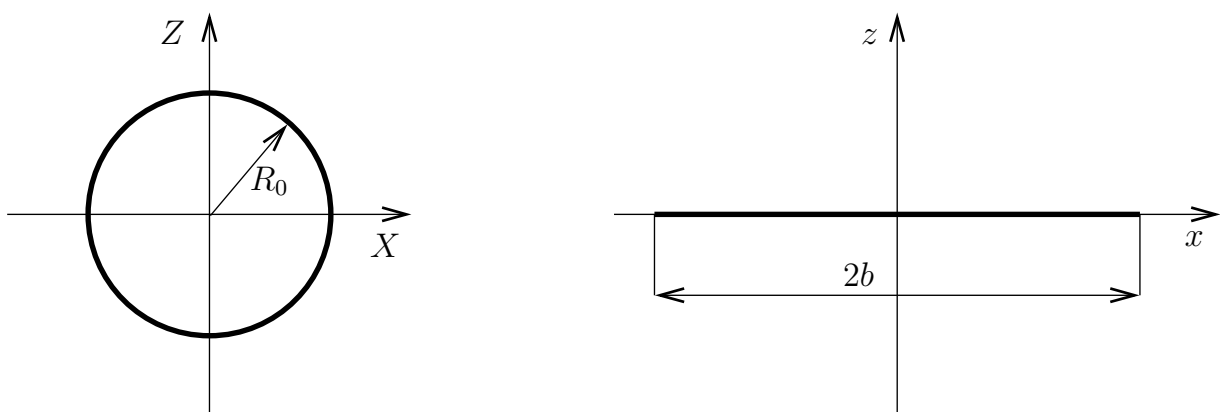
$$x + iz = (X + iZ) + \frac{b^2}{4(X + iZ)}. \quad (1.11)$$

Odnos izmeĉu polarnih koordinata kruŹnice  $R_0$  i  $\theta$  i kartezijevih koordinata  $X$  i  $Z$  je:

$$\begin{aligned} X &= R_0 \cos \theta, \\ Z &= R_0 \sin \theta, \\ X + iZ &= R_0 e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Onos izmeĉu toĉaka na kruŹnici XZ-ravnini i toĉaka na ploĉi u xz-ravnini se dobije tako da se gornje formule uvrste u jednaŹbu za preslikavanje Źukovskog (1.11):

$$\begin{aligned} x + iz &= \frac{b}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = b \cos \theta, \\ x &= 2X. \end{aligned} \quad (1.12)$$



Slika 1.2: Praslika i slika djelovanja konformne funkcije Źukovskog na osnovni aeroprofil

Iz posljednje jednačbe se vidi da se točke na kružnici radijusa  $b/2$  preslikavaju u ploču duljine  $2b$  kao što je prikazano na slici 1.2. Preslikanje Žukovskog preslikava sve točke izvan kružnice u vanjštinu ploče. Točke unutar ploče se također preslikavaju u vanjštinu ploče, samo u drugu Reimannovu ravninu [8]. Umjesto dimenzijski koordinata  $x$  i  $X$  uvode se bezdimenzijske koordinate  $\bar{x} = \frac{x}{b}$  i  $\bar{X} = \frac{X}{R}$ . Njihovim uvštavanjem u formulu za koordinate u preslikanoj ravnini (1.12) dobiva se izraz:

$$\begin{aligned} b\bar{x} &= 2R_0 \cdot \bar{X}, \\ \bar{x} &= \bar{X}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Iz gornjeg izraza se vidi da preslikavanjem kružnice iz praravnine  $XZ$  u ravninu  $xz$  pomoću funkcije preslikavanja Žukovskog (1.11) bezdimenzijske koordinate ostaju iste.

U ovom radu će se koristiti bezdimenzijske koordinate u izvođenju izraza za aerodinamičke sile pa se zbog jednostavnosti izostavlja crtica u izrazima za bezdimenzijske koordinate.

### 1.2.2. Čebiševljevi polinomi prve vrste

Gibanje i deformiranje aeroprofila prikazano je u obliku poniranja, zakretanja i modova elastičnih deformacija aeroprofila. Ovi oblici gibanja i deformacija su definirani pomoću skupa ortogonalnih Čebiševljevih polinoma prve vrste koji se definiraju tako da se zadaju prva dva polinoma:

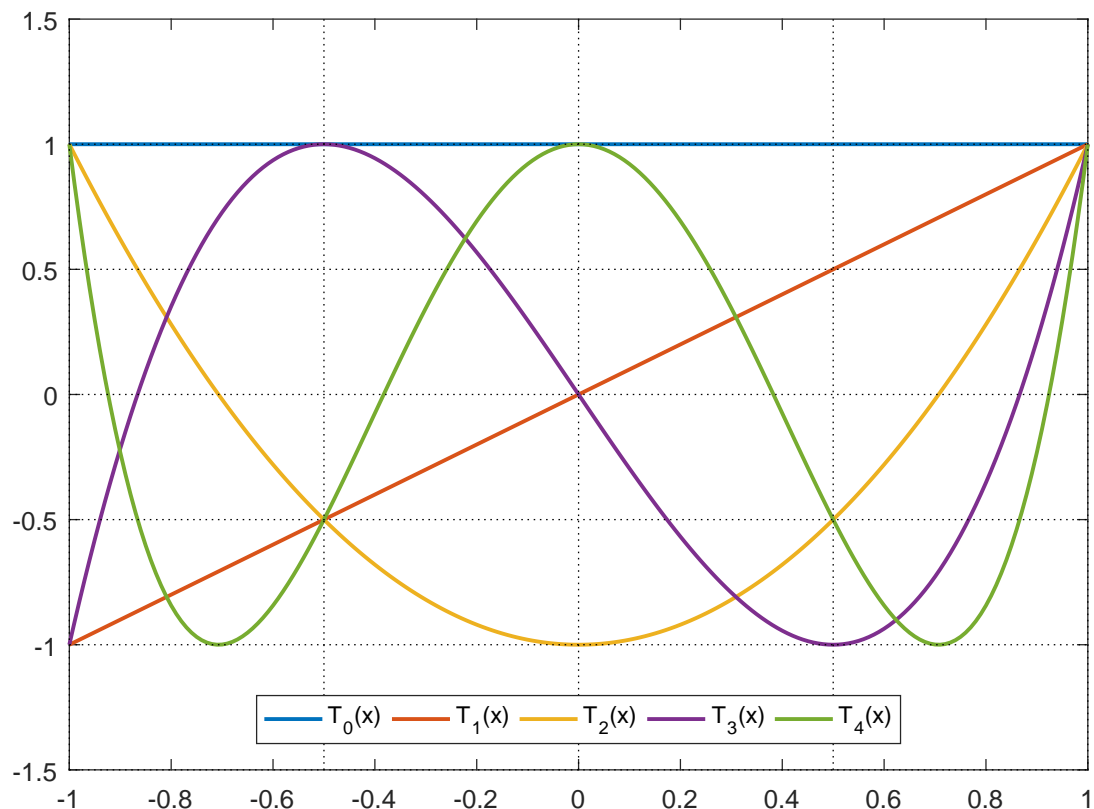
$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \end{aligned}$$

te ostali slijede iz rekurzivne formule:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

gdje je  $x$  bezdimenzionalna varijabla čija se vrijednost povećava od -1 na napadnom bridu do 1 na izlaznom bridu. Prvih pet polinoma, danih jednačbom (1.14) i prikazani na slici 1.3, iskorišteni su u izvođenju formula u ovom radu.

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned} \tag{1.14}$$



Slika 1.3: Čebiševljevi polinomi prve vrste

Jedan od najvažnijih svojstava Čebiševljevih polinoma je trigonometrijski identitet [10]:

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \quad (1.15)$$

gdje je  $x$  zapisana kao  $\cos \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ). Raspisujući prva četiri polinoma može se lako uočiti prehodno navedena rekurzivna formula.

$$T_0(\cos \theta) = \cos(0\theta) = 1$$

$$T_1(\cos \theta) = \cos(\theta)$$

$$T_2(\cos \theta) = \cos(2\theta) = 2 \cos \theta \cos \theta - 1 = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$T_3(\cos \theta) = \cos(3\theta) = 2 \cos \theta \cos^2 \theta - \cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$T_4(\cos \theta) = \cos(4\theta) = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

Ortogonalnost Čebiševljevh polinoma prve vrste na intervalu  $-1 \leq x \leq 1$  se svodi na ortogonalnost kosinus funkcije:

$$\int_0^\pi \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & n = m \neq 0 \end{cases}$$



Naime, uvrštavajući (1.15) u prethodni izraz dobiva se izvorni izraz za ortogonalnost Čebiševljevih polinoma prve vrste:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{(1-x^2)}} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & n = m \neq 0 \end{cases}$$

gdje je  $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$  težinska fukcija  $w(x)$ .

Prvi Čebiševljev polinom je konstantan što u ovom okruženju predstavlja vertikalno gibanje aeroprofila (pozitivno prema gore). Drugi polinom je linearna funkcija te predstavlja napadni kut ili zakretanje oko središta aeroprofila. Nadalje, treći Čebiševljev polinom je kvadratna funkcija koja predstavlja prvi mod zakrivljenosti aeroprofila.

Opći oblik deformiranog aeroprofila  $\zeta(x, t)$  promjenjiv je u vremenu te se može izraziti kao linearna kombinacija međusobno ortogonalnih Čebiševljevih polinoma:

$$\zeta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t)T_n(x) \quad (1.16)$$

gdje su koeficijenti  $h_n$  funkcije vremena [11].

## Poglavlje 2.

# Tanki aeroprofil u harmonijskom gibanju

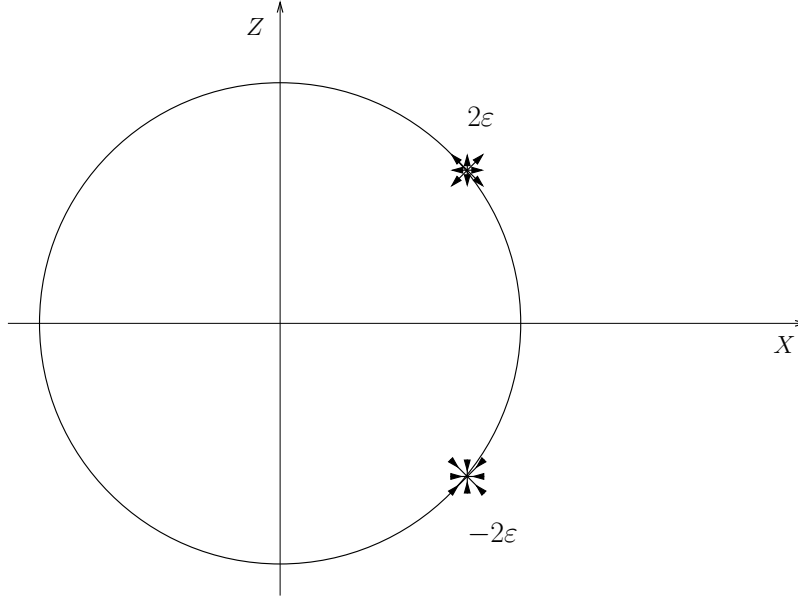
U Theodorsenovoj metodi za tanke aeroprofile u oscilatornom gibanju, izrazi za aerodinamičke sile su rastavljeni na dvije komponente, necirkulacijsku i cirkulacijsku. Obzirom da oba toka zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu te se koriste linearizirane Bernoullijeve jednadžbe moguće je superponirati posebno promatrane aerodinamičke sile necirkulacijskog i cirkulacijskog toka. Necirkulacijski tok predstavlja poremećaje nastale zbog oscilatornog gibanja i deformiranja aeroprofila te kao takav zadovoljava uvjet nepropusnosti ali ne i Kuttin uvjet. Dodavanjem cirkulacijskog toka zadovoljava se Kuttin uvjet bez ometanja uvjeta nepropusnosti aeroprofila [11].

### 2.1. Necirkulacijski tok

Necirkulacijski tok se sastoji od lista izvora i ponora. Izvori su smješteni na gornjoj polovici kružnice u izvornoj ravnini pa se koordinate ishodišta pojedinačnog izvora označavaju s  $X_0 + iZ_0$  a njegova jakost  $2\varepsilon$ . Ponori su smješteni na donjoj strani kružnice pa je koordinata pojedinačnog ponora konjugirano kompleksni broj,  $X_0 - iZ_0$ , a jakost  $-2\varepsilon$ . Sve koordinate normirane su s radijusom kružnice  $R_0$ , tj. bezdimenzijske su. Zbrajanjem potencijala svih izvora i ponora dobiva se potencijal necirkulacijskog toka oko cilindra u izvornoj ravnini.

Kompleksni potencijal dvodimenzionalnog izvora jakosti  $q$  dan je u Eulerovom zapisu:

$$\Phi_i = \frac{q}{2\pi} \ln(Re^{i\theta}),$$



Slika 2.1: Par izvora i ponora

te se može rastaviti na realni i imaginarni dio:

$$\Phi_i = \frac{q}{2\pi} \ln R + i \frac{q}{2\pi} \theta.$$

Realni dio kompleksnog potencijala predstavlja potencijal izvora, pa je:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \Re(\Phi_i), \\ \phi_i &= \frac{q}{4\pi} \ln[(X - X_0)^2 + (Z - Z_0)^2]. \end{aligned}$$

Uvrštavajući iznos jakosti jednog izvora ( $q = 2\varepsilon$ ) s ishodištem u  $X_0 + iZ_0$  gornji izraz dobiva se konačna formula za potencijal izvora:

$$\phi_i = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln[(X - X_0)^2 + (Z - Z_0)^2].$$

Analogno se dobije izraz za potencijal ponora koji je simetričan s obzirom na os X, tj. ima ishodište u  $X_0 - iZ_0$  i jakosti je  $q = -2\varepsilon$ :

$$\phi_p = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \ln[(X - X_0)^2 + (Z + Z_0)^2].$$

Potencijal jednog para izvora i ponora suprotnih jakosti koji su smješteni simetrično s obzirom na X os (prikazanog na slici 2.1) je zbroj njihovih potencijala:

$$\phi_{i/p}(X, Z, t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln \frac{(X - X_0)^2 + (Z - Z_0)^2}{(X - X_0)^2 + (Z + Z_0)^2}. \quad (2.1)$$

Da bi se jednadžba potencijala para izvora i ponora (2.1) izrazila kao funkcija samo koordinate X i vremena t ograničava se na gornji ili donji dio kružnice. Za dobivanje

potencijala uslijed djelovanja para izvora i ponora na gornjem dijelu kružnice uvrštava se  $Z = \sqrt{1 - X^2}$  a koordinate izvora i ponora se zapisuju kao  $\sqrt{1 - X_0^2}$ . Slijedi:

$$\phi_{i/p}(X, t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln \frac{(X - X_0)^2 + (\sqrt{1 - X^2} - \sqrt{1 - X_0^2})^2}{(X - X_0)^2 + (\sqrt{1 - X^2} + \sqrt{1 - X_0^2})^2}.$$

Potencijal para izvor/ponor u slici preslikavanja Žukovskog na gornjem dijelu ploče se dobije uvrštavanjem bezdimenzijskih koordinata u slici  $x$  za koje je dokazano da su jednake bezdimenzijskim koordinatama u praslici (vidi jednadžbu (1.13)):

$$\phi_{i/p}(x, t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x_0^2})^2}{(x - x_0)^2 + (\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x_0^2})^2}.$$

Ovi parovi izvora i ponora se ne ponište jer gornji i donji dio ploče u preslikanoj ravnini nisu u kontaktu već ih dijeli druga Reimannova ravnina [8].

Ukupni potencijal u preslikanoj ravnini na gornjem dijelu ploče se dobije integriranjem svih parova izvora i ponora na ploči:

$$\phi_{0g}(x, t) = \frac{b}{2\pi} \int_{-1}^1 \varepsilon(x_0, t) \ln \frac{(x - x_0)^2 + (\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x_0^2})^2}{(x - x_0)^2 + (\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x_0^2})^2} dx_0. \quad (2.2)$$

Uvrštavanjem  $Z = -\sqrt{1 - X^2}$  u izraz za potencijal para izvora i ponora (2.1) uz primjenu svojstava logaritamske funkcije te kasnijim integriranjem vidi se da je ukupni potencijal na donjoj strani ploče jednak:

$$\phi_{0d}(x, t) = -\phi_{0g}(x, t), \quad (2.3)$$

tj. da je antisimetričan s obzirom na os  $x$ .

Ako se u jednadžbu za ukupni potencijal u preslikanoj ravnini na gornjaci (2.2) uvrsti koordinata prednjeg ili stražnjeg brida ( $x = 1, x = -1$ ) dobije se da je potencijal u tim točkama nula, što mora vrijediti ako su potencijali na gornjaci i donjaci antisimetrični s obzirom na os  $x$  (vidi jednadžbu (2.3)). Ako je potencijal necirkulacijskog toka s gornje i donje strane ploče u napadnom i izlaznom bridu nula onda nema promjene potencijala kada se kružnica u praslici okruži za puni krug, što je karakteristično za necirkulacijski tok [8].

Iznosi jakosti izvora i ponora koji su potrebni za izračunavanje ukupnog potencijala dobiju se iz uvjeta nepropusnosti. Da bi se očuvao uvjet nepropusnosti, inducirana vertikalna brzina mora biti jednaka zbroju lokalne brzine uslijed gibanja i deformiranja aeroprofila te normalne komponente slobodne stuje na površinu aeroprofila, što je pokazano

formulom (1.10). Uvrštavanjem općeg izraza za oblik deformiranog aeroprofila (1.16) u izraz za linearizirane rubne uvjete (1.10) dobiva se:

$$\begin{aligned}
w(x, 0^+, t) &= U_\infty \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + b \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \\
&= U_\infty \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t) \frac{dT_n(x)}{dx} + b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dh_n(t)}{dt} T_n(x) \\
&= U_\infty \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t) T_n'(x) + b \sum_{n=0}^{\infty} \dot{h}_n(t) T_n(x)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Obzirom da se je ovom radu aerprofil opisan tankom pločom zanemarive debljine nema razlike u koordinatama gornjake i donjake  $\zeta_g = \zeta_d = \zeta$ .

Može se pokazati je da ovakva raspodjela izvora i ponora po kružnici u praslici inducira samo tangencijalne brzine, tj. da kružnica ostaje strujnica. Kada se ona preslika u ploču ostaje strujnica pa je zato ploča nepropusna, što znači da ponori nemaju utjecaj na vertikalnu brzinu induciranu izvorom i obratno [8]. Zato, za računanje iznosa inducirane vertikalne brzine na samo gornjaci promatra potencijal svih izvora koji iznosi:

$$\phi_i = \frac{b}{2\pi} \int_{-1}^1 \varepsilon(x_0, t) \ln[(x - x_0)^2 + z^2] dx_0.$$

Vertikalna perturbacijska brzina je gradijent perturbacijskog potencijala izvora u smjeru  $z$ , pa je na gornjaci ( $0^+$ ):

$$\begin{aligned}
w(x, 0^+, t) &= \frac{\partial \phi_i}{\partial z}(x, 0^+, t), \\
w(x, 0^+, t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^1 \varepsilon(x_0, t) \ln[(x - x_0)^2 + z^2] dx_0, \\
w(x, 0^+, t) &= \frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} z \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon(x_0, t)}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0.
\end{aligned}$$

Kada  $z \rightarrow 0$  integral postaje 0, osim ako se koordinata izvora  $x_0$  nalazi u blizini točke  $x$  kada izraz poprima neodređen oblik ( $\frac{0}{0}$ ). Stoga je dovoljno uzeti integral u okolini točke  $x$ , na intervalu dužine  $2\epsilon$  s središtem u  $x$  da bi se izračunala inducirana vertikalna brzina:

$$w(x, 0^+, t) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{\varepsilon(x_0, t)}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0.$$

Na tako maloj duljini ploče gustoća jakosti izvora se može smatrati konstantnom i zvući

iz integrala. Radi pojednostavljenja uvodi se varijabla  $x' = (x - x_0)$ , te slijedi:

$$\begin{aligned} w(x, 0^+, t) &= \frac{\varepsilon(x, t)}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} \left[ z \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{x'^2 + z^2} dx' \right] \\ &= \frac{\varepsilon(x, t)}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0^+} \left[ \operatorname{atg} \left( \frac{\epsilon}{z} \right) - \operatorname{atg} \left( \frac{-\epsilon}{z} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ako  $z$  teži nuli, izrazi u zagradama teže u beskonačnost pa se dobiva:

$$w(x, 0^+, t) = \varepsilon(x, t).$$

Analogno, derivacijom ukupnog potencijala ponora dobije se da je inducirana vertikalna brzina ispod ploče istog iznosa i smjera kao i poviše ploče:

$$\begin{aligned} w(x, 0^-, t) &= -\varepsilon(x, t), \\ w(x, 0^+, t) &= w(x, 0^-, t) = w(x, t). \end{aligned}$$

Inducirana vertikalna brzina  $w(x, t)$  jednaka je polovini jakosti izvora/ponora te je rezultat djelovanja lokalnih izvora/ponora. Izvori s polovicom svoje jakosti stvaraju vertikalnu brzinu prema gore, dok druga polovica jakosti inducira vertikalnu brzinu prema dolje u drugoj Reimannovoj ravnini. Isto tako ponori s donje strane ploče induciraju jednaku brzinu prema gore u prvoj Reimannovoj ravnini, ne utječući na induciranu brzinu poviše ploče, te induciraju vertikalnu brzinu prema dole u drugoj Reimannovoj ravnini. Gledajući strujanje oko ploče ograničava se na stujanje u prvoj Reimannovu ravnini, tj. obzirom da ploča ostaje strujnica ne prelazi se barijera postavljena uzduž nje kako bi se izbjegao ulazak u drugu Reimannovu ravninu [8].

Ako se u jednadžbi lineariziranog rubnog uvjeta inducirana vertikalna brzina izrazi preko jakosti izvora (2.4) dobije se konačan izraz za jakost izvora:

$$\varepsilon(x, t) = U_\infty \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t) T_n'(x) + b \sum_{n=0}^{\infty} \dot{h}_n(t) T_n(x).$$

Sada se izraz za potencijal necirkulacijskog toka (2.2) može zapisati kao:

$$\phi_{0g} = \sum_{n=0}^{\infty} (h_n \phi_{h_n} + \dot{h}_n \phi_{\dot{h}_n}). \quad (2.5)$$

Nakon složene integracije dobiju se izrazi za  $\phi_{h_n}$  i  $\phi_{\dot{h}_n}$  dani u tablici 2.1.

Za dobivanje raspodjele tlaka koristi se linearizirana Bernoullijeva jednadžba. Ako se umjesto dimenzijskih koordinata u jednadžbu (1.7) uvedu bezdimenzijske koordinate dobije se linearizirana nestacionarna Bernoullijeva jednadžba u terminima bezdimenzijskih koordinata:

$$p = p_\infty - \rho \frac{U_\infty}{b} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Tablica 2.1: Necirkulacijski potencijali brzine pojedinih modova gibanja

$\phi_{h_0} = 0$	$\phi_{\dot{h}_0} = -b^2\sqrt{1-x^2}$
$\phi_{h_1} = -U_\infty b\sqrt{1-x^2}$	$\phi_{\dot{h}_1} = -\frac{b^2}{2}x\sqrt{1-x^2}$
$\phi_{h_2} = -2U_\infty bx\sqrt{1-x^2}$	$\phi_{\dot{h}_2} = \frac{2b^2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$
$\phi_{h_3} = -U_\infty b(4x^2-1)\sqrt{1-x^2}$	$\phi_{\dot{h}_3} = b^2x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$
$\phi_{h_4} = -4U_\infty bx(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}$	$\phi_{\dot{h}_4} = \frac{4b^2}{15}(6x^2-1)(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$

Oduzimanjem izraza za tlak na gornjaci i donjaci se dobije razlika tlakova na aeroprofilu:

$$p_g - p_d = -[p] = -\rho \left[ \frac{U_\infty}{b} \left( \frac{\partial \phi_g}{\partial x} - \frac{\partial \phi_d}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \frac{\partial \phi_d}{\partial t} \right) \right]. \quad (2.6)$$

Obzirom da u necirkulatornom toku vrijedi antisimetrija potencijala brzine, obzirom na os  $x$ , konačna formula za razliku tlakova donjake i gornjake u necirkulatornom strujanju je:

$$[p]_0 = 2\rho \left( \frac{U_\infty}{b} \frac{\partial \phi_{0g}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{0g}}{\partial t} \right).$$

Uvrštavajući potencijal brzine (2.5) u gornji izraz slijedi izraz za razliku tlakova u slijedećem obliku:

$$[p]_0 = 2\rho \left[ \frac{U_\infty}{b} \sum_{n=0}^N \left( h_n \frac{\partial \phi_{h_n}}{\partial x} + \dot{h}_n \frac{\partial \phi_{\dot{h}_n}}{\partial x} \right) + \sum_{n=0}^N \left( \dot{h}_n \phi_{h_n} + \ddot{h}_n \phi_{\dot{h}_n} \right) \right].$$

Prva suma u gornjoj jednadžbi je označena kao  $S_1$  a druga kao  $S_2$ .

$$\begin{aligned}
 S_1 &= h_1 U_\infty b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 2h_2 U_\infty b \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} - h_3 U_\infty b \frac{9x-12x^3}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad - 4h_4 U_\infty b \frac{-8x^4+8x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} + \dot{h}_0 b^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \dot{h}_1 \frac{b}{2} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad - 2\dot{h}_2 b^2 x \sqrt{1-x^2} + \dot{h}_3 b^2 (1-4x^2) \sqrt{1-x^2} + 4\dot{h}_4 b^2 x (1-2x^2) \sqrt{1-x^2} \\
 S_2 &= \dot{h}_1 U_\infty b \sqrt{1-x^2} - 2\dot{h}_2 U_\infty b x \sqrt{1-x^2} - \dot{h}_3 U_\infty b (4x^2-1) \sqrt{1-x^2} \\
 &\quad - 4\dot{h}_4 U_\infty b x (2x^2-1) \sqrt{1-x^2} - \ddot{h}_0 b^2 \sqrt{1-x^2} - \ddot{h}_1 \frac{b^2}{2} x \sqrt{1-x^2} \\
 &\quad + \ddot{h}_2 \frac{2b^2}{3} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} + \ddot{h}_3 b^2 x (1-x^2) \sqrt{1-x^2} \\
 &\quad + \ddot{h}_4 \frac{4b^2}{15} (6x^2-1)(1-x^2) \sqrt{1-x^2}
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Izraz za necirkulacijski uzgon se dobije integrirajući razliku tlakova po duljini aero-

profila.

$$L_0 = b \int_{-1}^1 [p]_0 dx = 2\rho b \int_{-1}^1 \left( \frac{U_\infty}{b} \frac{\partial \phi_{0g}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{0g}}{\partial t} \right) dx = 2\rho \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_{0g}}{\partial x} dx + 2\rho b \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_{0g}}{\partial t} dx \quad (2.8)$$

Prvi integral u (2.8) jednak je ukupnoj promjeni potencijala i on nestaje jer je ta promjena, kao što je prije objašnjeno, jednaka nuli u necirkulacijskom stujanju. Obzirom da ostaje samo drugi integral jasno je da je necirkulacijski uzgon isključivo posljedica nestacionarnog stujanja [8]. Drugi integral se može izraziti preko prethodno definirane sume  $S_2$  (jednadžba (2.7)) pa se konačno dobiva izraz za necirkulacijski uzgon:

$$L_0 = \int_{-1}^1 S_2 dx = 2\rho b \left( -\dot{h}_1 U_\infty b \frac{\pi}{2} - \ddot{h}_0 b^2 \frac{\pi}{2} + \ddot{h}_2 b^2 \frac{\pi}{4} \right), \quad (2.9)$$

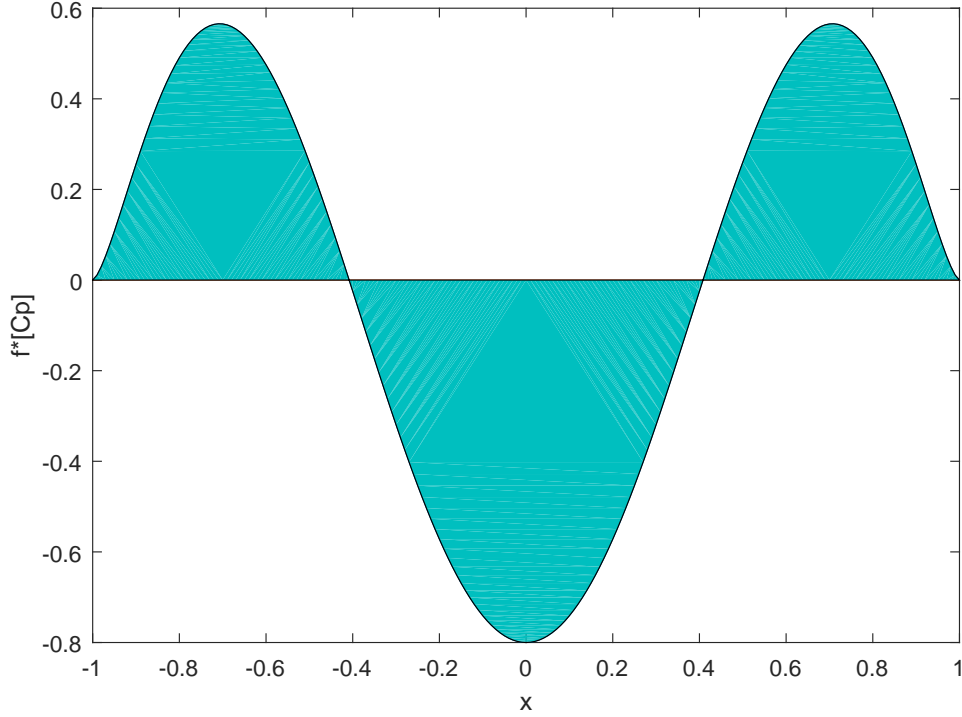
$$L_0 = -\pi \rho b^2 \left( U_\infty \dot{h}_1 + b \ddot{h}_0 - \frac{b}{2} \ddot{h}_2 \right).$$

Uzroci sila u necirkulacijskom toku su akceleracije fluida. One mogu doći od drugih derivacija modova po vremenu i od prvih derivacija pomnoženih s brzinom iz beskonačnosti,  $U_\infty$ . Iz formule (2.9) se vidi da utjecaj na uzgon imaju samo  $\dot{h}_1 U_\infty$ ,  $\ddot{h}_0$  i  $\ddot{h}_2$ . Pozitivni  $\ddot{h}_0$  predstavlja akceleraciju moda  $h_0$  u pozitivnom smjeru osi  $z$ , a pozitivan  $h_0$  u negativnom smjeru. Akceleracije neparnih modova uzrokuju antisimetričnu raspodjelu tlakova obzirom na os  $z$  pa stoga neće stvarati silu ali će moment. Akceleracije viših parnih modova, unatoč simetričnosti obzirom na os  $z$ , neće stvarati uzgon. Razlog tomu je što je površina ispod krivulje tlaka na intervalu od  $-1 \leq x \leq 1$  nula (vidi sliku 2.2). Brzina moda  $h_1$  predstavlja promjenu napadanog kuta pa je član  $U_\infty \dot{h}_1$  jednak promjeni vertikalne komponente brzine gibanja aeroprofila. Brzine parnih modova stvaraju antisimetričnu raspodjelu tlakova obzirom na os  $z$  pa ne stvaraju uzgon. Brzine neparnih modova viših od  $h_1$  također ne utječu na uzgon iz istog razloga kao i akceleracije viših parnih modova. Tijelo koje ubrzava u fluidu djeluje na fluid silom u smjeru pozitivne akceleracije koja je jednaka:

$$F = km \cdot a,$$

gdje je  $km$  prividna masa fluida, a  $a$  akceleracija tijela. Po zakonu akcije i reakcije fluid djeluje na tijelo silom istog iznosa u suprotnom smjeru tj. u smjeru negativne akceleracije tijela. Iz jednadžbe za necirkulacijski uzgon se vidi da je prividna masa za prva dva člana jednaka masi cilindra promjera duljine aerodinamičke tetive  $\pi \rho b^2$ , a za treći član je polovina te mase. Obzirom da je prividna masa funkcija oblika tijela, ovi rezultati su intuitivni kada se promotri izgled Čebiševljevih polinoma (slika 1.3) koji predstavljaju oblik aeroprofila.





Slika 2.2: Mjera skoka koeficijenta tlaka uslijed akceleracije moda  $h_4$

Necirkulacijski moment propinjanja (pozitivan koji spušta nos) se dobije po formuli:

$$M_0 = b^2 \int_{-1}^1 [p]_0 x \, dx = -2\rho U_\infty \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_{0g}}{\partial x} x \, dx - 2\rho b \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_{0g}}{\partial t} x \, dx.$$

Ako se podintegralni izrazi opet zamjene sumama, jednažba za moment (2.1.) poprima oblik:

$$M_0 = -2\rho b^2 \left( \int_{-1}^1 \frac{U_\infty}{b} S_1 x \, dx + \int_{-1}^1 S_2 x \, dx \right).$$

Integracijom slijedi:

$$I_1 = \int_{-1}^1 S_1 x \, dx = h_1 U_\infty b \frac{\pi}{2} + \dot{h}_0 b^2 \frac{\pi}{2} + \dot{h}_2 b^2 \frac{\pi}{4},$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 S_2 x \, dx = -\dot{h}_2 U_\infty b \frac{\pi}{4} - \ddot{h}_1 b^2 \frac{\pi}{16} + \ddot{h}_3 b^2 \frac{\pi}{16},$$

pa je necirkulacijski moment propinjanja je konačno:

$$M_0 = -\pi \rho b^2 \left( -U_\infty^2 h_1 + \frac{b^2}{8} \ddot{h}_1 - U_\infty b \dot{h}_0 + U_\infty b \dot{h}_2 - \frac{b^2}{8} \ddot{h}_3 \right). \quad (2.10)$$

Moment necirkulacijskog toka nastaje zbog nesimetrične raspodjele tlaka, obzirom na os  $z$ , u necirkulacijskom toku kada se lokalne sile na krakovima ne ponište. Stacionarni neparni modovi stvaraju asimetričnu raspodjelu tlaka dok parni stvaraju simetričnu. Stoga stacionarni parni modovi uopće ne stvaraju moment isto kao i neparni viši od  $h_1$  kojima se lokalne sile na krakovima ponište. Brzine modova se ponašaju suprotno. Akceleracije modova stvaraju sličnu raspodjelu tlaka kao i stacionarni modovi, samo što se kod viših neparnih modova lokalne sile na krakovima ne ponište. Prividna masa uslijed kutne akceleracije je jednaka osmini mase cilindra promjera  $2b$ .

Da bi se zadovoljio Kuttin uvjet tangencijalna brzina na zadnjem bridu mora biti konačna:

$$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial x}\right)_{x=1} = (S_1)_{x=1},$$

Kada je  $x = 1$ ,  $(S_1)_{x=1}$  teži u beskonačnost osim za poseban slučaj gibanja kada je [8]:

$$U_\infty b h_1 + 2U_\infty b h_2 + 3U_\infty b h_3 + 4U_\infty b h_4 + b^2 \dot{h}_0 + \frac{1}{2} b^2 \dot{h}_1 = 0$$

Da bi se postigla konačna brzina na izlaznom bridu za bilo kakvo gibanje potrebno je dodati cirkulacijski tok.

## 2.2. Cirkulacijski tok

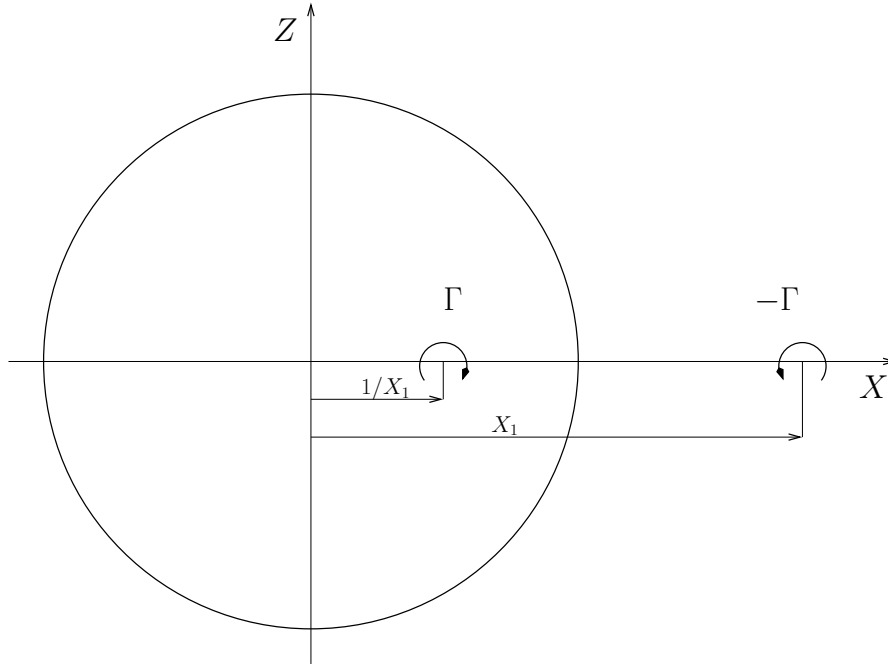
Obzirom da u praslici necirkulacijskom toku postoji konačna brzina na izlaznom bridu treba dodati strujanje koje će je poništiti i time zadovoljiti Kuttin uvjet. Theodorsen ovo postiže pomoću kontinuirane raspodjele vezanih i otkinutih vrtloga. Otkinuti vrtlozi nastaju na izlaznom bridu kao posljedica svake promjene u cirkulaciji zbog nestacionarnog strujanja oko aeroprofila. Oni se udaljavaju od izlaznog brida aeroprofila nošeni slobodnom strujom. Obzirom da se otkidaju s izlaznog brida, ishodišta otkinutih vrtloga u preslikanoj ravnini nalaze se na osi  $x$  iza  $x = b$ . Da se u praslici ne bi poremetila nepropusnost kružnice, koordinate vezanih vrtloga su definirane preko Milne-Thomsonovog teorema. Tako je sačuvan rubni uvjet kao i zadovoljen Kelvinov teorem o nultoj cirkulaciji [8].

Kompleksni potencijal jednog vrtloga dan je u Eulerovom obliku:

$$\Phi_{\Gamma 1} = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(Re^{i\theta}) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln R - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

Realni dio tog potencijala predstavlja brzine potencijal cirkulacijskog polja:

$$\begin{aligned} \phi_{\Gamma 1} &= \Re(\Phi_{\Gamma}) \\ \phi_{\Gamma 1} &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \end{aligned} \tag{2.11}$$



Slika 2.3: Koordinate vrtloga

Prvo se promatraju dva koncentrirana vrtloga, vezani i otkinuti. Ako se otkinuti vrtlog nalazi na  $X_w = X_1$  u praslici vezani se mora nalaziti na  $X_i = 1/X_1$  da bi zadovoljili Milne-Thomsonov teorem. Te koordinate su bezdimenzijske kao i u necirkulacijskom toku i prikazane su na slici 2.3. Ako se uvrste koordinate vezanog i otkinutog vrtloga u izraz za općeniti potencijal vrtloga (2.11) dobiju se izrazi za njihove potencijale:

$$\phi_{\Gamma_i} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{atg} \frac{Z}{X - \frac{1}{X_1}}$$

$$\phi_{\Gamma_w} = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{atg} \frac{Z}{X - X_1}$$

Ukupni potencijal tog cirkulacijskog polja je zbroj potencijala vezanog i otkinutog vrtloga:

$$\phi_{\Gamma} = \phi_{\Gamma_i} + \phi_{\Gamma_w},$$

$$\phi_{\Gamma} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \operatorname{atg} \frac{Z}{X - X_1} - \operatorname{atg} \frac{Z}{X - \frac{1}{X_1}} \right]. \quad (2.12)$$

Izraz za ukupni potencijal cirkulacijskog polja (2.12) se uz pomoć korištenja matematičkog

svojstva razlike arkus tangens funkcija može izraziti kao:

$$\begin{aligned}
\phi_{\Gamma} &= \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{atg} \left[ \frac{\frac{Z}{X-X_1} - \frac{Z}{X-\frac{1}{X_1}}}{1 + \frac{Z}{X-X_1} \frac{Z}{X-\frac{1}{X_1}}} \right] \\
&= \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{atg} \frac{Z(X - \frac{1}{X_1}) - Z(X - X_1)}{(X - X_1)(X - \frac{1}{X_1}) + Z^2} \\
&= \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{atg} \frac{Z(X_1 - \frac{1}{X_1})}{X^2 + 1 + Y^2 - X(X_1 + \frac{1}{X_1})}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Da bi se dobio izraz za ukupni potencijal u preslikanoj ravnini potrebno je dobiti bezdimenzijske koordinate vezanog i slobodnog vrtloga u njoj pomoću formule za preslikavanje Žukovskog (1.11). Bezdimenzijska koordinata otkinutog vrtloga je:

$$\begin{aligned}
bx_{1w} &= \frac{b}{2}X_1 + \frac{\frac{b^2}{4}}{\frac{b}{2}X_1}, \\
&= \frac{b}{2}X_1 + \frac{b}{2} \frac{1}{X_1},
\end{aligned}$$

a bezdimenzijska koordinata vezanog vrtloga:

$$\begin{aligned}
bx_{1i} &= \frac{b}{2}X_1 \frac{1}{X_1} + \frac{\frac{b^2}{4}}{\frac{b}{2} \frac{1}{X_1}}, \\
&= \frac{b}{2} \frac{1}{X_1} + \frac{b}{2}X_1.
\end{aligned}$$

Slijedi zaključak da su te koordinate iste, tj. da se otkinuti i vezani vrtlog preslikavaju u istu točku ali u različite Reimmanove ravnine[12].

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{X_1} + \frac{1}{2}X_1 \tag{2.14}$$

Kada se u krajnji izraz jednadžbe (2.13) uvrsti (2.14), te se potencijal promatra samo za točke na gornjoj strani kružnice za koje vrijedi  $Y = \sqrt{(1 - X^2)}$ , dobiva se konačan oblik ukupni za potencijal na gornjoj strani ploče :

$$\phi_{\Gamma_g} = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{atg} \frac{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(x_1^2-1)}}{1-xx_1}. \tag{2.15}$$

Iz gornje jednadžbe se vidi da kada bi se promatrao potencijal s donje strane ploče zbog svojstava arkus tangens funkcije se dobije suprotna vrijednost. To znači da cirkulacijskom toku također vrijedi antisimetrija potencijala brzine:

$$\phi_{\Gamma_g} = -\phi_{\Gamma_d}.$$

Kada se u izraz za ukupni potencijal brzine cirkulacijskog toka (2.15) uvrsti koordinata izlaznog brida ( $x = 1$ ) dobije se da je potencijal na gornjaci u toj točki  $\Gamma/2$ . Obzirom da vrijedi antisimetrija potencijala, u zadnjem bridu na donjoj strani ploče potencijal brzine je  $-\Gamma/2$ . Iz toga slijedi zaključak da kod cirkulacijskog strujanja postoji prirast potencijala u iznosu jačine vrtloga u smjeru kazaljke na satu za razliku od necirkulatornog gdje je on nula [8].

Prije izračunavanja raspodjele tlaka pomoću linearizirane Bernoullijeve jednadžbe potrebno je odrediti promjenu cirkulacijskog potencijala po vremenu. Uzima se pojednostavljeni model u kojem se otkinuti vrtlog giba brzinom  $U_\infty$  u smjeru slobodne struje. Materijalna derivacija cirkulacijskog potencijala zapisanog Lagrangeovim koordinatama je nula:

$$\left. \frac{D\phi_\Gamma(\xi_1, t)}{Dt} \right|_{\xi_1=\text{konst.}} = 0,$$

gdje je  $\xi_1$  koordinata vrtloga u trenutku  $t = 0$ , jer promatrač koji bi se gibao s česticom ne bi osjetio promjenu tog potencijala u vremenu. Trajektorija materijalne točke u Eulerovom zapisu je:

$$x_1(\xi_1, t) = \xi_1 + U_\infty t.$$

Obzirom da se strujanje promatra u Eulerovim koordinatama, materijalna derivacija cirkulacijskog potencijala zapisanom u Eulerovim koordinatama glasi:

$$\left. \frac{\partial \phi_\Gamma(x_1, t)}{\partial t} \right|_{x_1=\text{konst.}} - U_\infty \left. \frac{\partial \phi_\Gamma(x_1, t)}{\partial x_1} \right|_{t=\text{konst.}} = 0,$$

pa slijedi da je promjena cirkulacijskog potencijala po vremenu:

$$\frac{\partial \phi_\Gamma}{\partial t} = \frac{\partial \phi_\Gamma}{\partial x_1} \frac{U_\infty}{b}. \quad (2.16)$$

Može se iskoristiti ista formula za razliku tlakova na aeroprofilu kao i u necirkulacijskom toku (2.6), obzirom da su potencijali na gornjaci i donjaci antisimetrični. Ako se u nju uvrsti izraz za derivaciju cirkulacijskog potencijala po vremenu (2.16) dobije se razlika tlaka na donjaci i gornjaci u cirkulacijskom toku:

$$\begin{aligned} (p_D - p_G)_\Gamma &= [p]_\Gamma = \frac{2\rho U_\infty}{b} \left( \frac{\partial \phi_g}{\partial x} + \frac{\partial \phi_g}{\partial x_1} \right) \\ &= \frac{\rho U_\infty \Gamma}{\pi b} \left( \frac{(\sqrt{1-x^2})^2 + (\sqrt{x_1^2-1})^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x_1^2-1}(x_1-x)} \right) \\ &= \frac{\rho U_\infty \Gamma}{\pi b} \left( \frac{x_1^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x_1^2-1}(x_1-x)} \right) \\ &= \frac{\rho U_\infty \Gamma}{\pi b} \left( \frac{x_1 + x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x_1^2-1}} \right). \end{aligned}$$

Za dobivanje cirkulatornog uzgona potrebno je integrirati razliku tlakova po duljini ploče:

$$L_\Gamma = b \int_{-1}^1 [p]_\Gamma dx,$$

$$L_\Gamma = \frac{\rho U_\infty \Gamma}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x_1 + x}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{x_1^2 - 1}} dx.$$

Nakon integracije slijedi konačan izraz za cirkulatorni uzgon:

$$L_\Gamma = \rho U_\infty \Gamma \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}}. \quad (2.17)$$

Iz konačnog izraza za uzgon se vidi da je njegov iznos manji nego u stacionarnom strujanju ( $\rho U_\infty \Gamma$ ) te da se ta razlika smanjuje kako se otkinuti vrtlog udaljava od aeroprofila. Kada je otkinuti vrtlog dovoljno daleko, tj. ako  $x_1 \rightarrow \infty$  izraz postaje jednak izrazu za uzgon u stacionarnom strujanju[8].

Cirkulatorni moment propinjanja se dobije integracijom diferencijalnih sila na krakovima:

$$M_\Gamma = b^2 \int_{-1}^1 [p]_\Gamma x dx$$

$$M_\Gamma = \frac{\rho U_\infty \Gamma b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x_1 + x}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{x_1^2 - 1}} x dx.$$

Nakon integriranja cirkulatorni moment propinjanja je konačno:

$$M_\Gamma = \frac{\rho U_\infty b \Gamma}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - 1}}. \quad (2.18)$$

Za točniji opis nestacionarnog toka umjesto koncentriranih otkinutih vrtloga promatra se kontinuirana raspodjela infinitezimalno malih otkinutih vrtloga:

$$\Gamma = -\gamma_w(x_1, t) b dx_1, \quad (2.19)$$

gdje je  $\gamma_w$  gustoća cirkulacije. Prethodni izrazi za potencijal brzine, uzgon i moment propinjanja (2.15), (2.17) i (2.18) u cirkulacijskom toku tada poprimaju slijedeće oblike:

$$\phi_\Gamma = -\frac{b}{2\pi} \int_1^\infty \operatorname{atg} \frac{\sqrt{(1-x^2)} \sqrt{(x_0^2-1)}}{1-xx_0} \gamma_w(x_1, t) dx_1, \quad (2.20)$$

$$L_\Gamma = -\rho U_\infty \int_1^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}} \gamma_w(x_1, t) dx_1, \quad (2.21)$$

$$M_\Gamma = -\frac{\rho U_\infty b^2}{2} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - 1}} \gamma_w(x_1, t) dx_1. \quad (2.22)$$

Jačina gustoće vrtloga  $\gamma_w(x_1, t)$  je određena Kuttinim uvjetom koji zahtjeva da ukupna brzina od oba potencijala bude konačna na zadnjem bridu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\phi_0 + \phi_\Gamma)_{x=1} &= \text{konacno}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{n=0}^N (h_n \phi_{h_n} + \dot{h}_n \phi_{\dot{h}_n}) + \Phi_\Gamma \right)_{x=1} &= \text{konacno}, \\ \left( \sum_{n=0}^N \left( h_n \frac{\phi_{h_n}}{\partial x} + \dot{h}_n \frac{\phi_{\dot{h}_n}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi_\Gamma}{\partial x} \right)_{x=1} &= \text{konacno}. \end{aligned}$$

Prvi izraz u gornjoj jednadžbi je jednak  $S_1$  iz jednadžbe (2.7), a drugi je:

$$\frac{\partial \phi_\Gamma}{\partial x} = -\frac{b}{2\pi} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x_1^2 - 1}}{\sqrt{1 - x^2}(x_1 - 1)} \gamma_w(x_1, t) dx_1. \quad (2.23)$$

Da bi zbroj  $S_1$  i (2.23) postao konačan, treba vrijediti:

$$\begin{aligned} U_\infty b h_1 + 2U_\infty b h_2 + 3U_\infty b h_3 + 4U_\infty b h_4 + b^2 \dot{h}_0 + \frac{1}{2} b^2 \dot{h}_1 - \frac{b}{2\pi} \int_1^\infty \sqrt{\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}} \gamma_w(x_1, t) dx_1 &= 0, \\ U_\infty h_1 + 2U_\infty h_2 + 3U_\infty h_3 + 4U_\infty h_4 + b \dot{h}_0 + \frac{1}{2} b \dot{h}_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \sqrt{\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}} \gamma_w(x_1, t) dx_1. \end{aligned}$$

Lijeva strana posljednje jednadžbe je funkcija oblika i gibanja aeroprofila koju Theodorsen [3] označava slovom  $Q$ , pa se ta jednadžba može napisati na sljedeći način:

$$\frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \sqrt{\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}} \gamma_w(x_1, t) dx_1 = Q. \quad (2.24)$$

Koristeći gornji izraz cirkulacijski uzgon se može zapisati u ovisnosti o  $Q$ :

$$L_\Gamma = -2\pi \rho U_\infty b Q \frac{\int_1^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}} \gamma_w(x_1, t) dx_1}{\int_1^\infty \sqrt{\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}} \gamma_w(x_1, t) dx_1}. \quad (2.25)$$

Prikladnije je izraz za cirkulatorni moment propinjanja (2.22) prije uvrštavanja izraza za  $Q$  (2.24) zapisati u obliku:

$$M_\Gamma = -\frac{\rho U_\infty b^2}{2} \int_1^\infty \left[ \sqrt{\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}} \right] \gamma_w(x_1, t) dx_1.$$

Nakon uvrštavanja (2.24) dobije se izraza za cirkulatorni moment propinjanja u ovisnosti o  $Q$ .

$$M_\Gamma = \pi\rho U_\infty b^2 Q \left[ \frac{\int_1^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}} \gamma_w(x_1, t) dx_1}{\int_1^\infty \sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}} \gamma_w(x_1, t) dx_1} - 1 \right]. \quad (2.26)$$

Iz ovih izraza za uzgon i moment propinjanja se vidi da utjecaj otkinutih vrtloga ulazi kao omjer dvaju integrala.

### 2.3. Harmonijsko gibanje deformabilnog aeroprofila

U izvođenju izraza za aerodinamičke sile do sada se nije uvelo nijedno ograničenje za gibanje i deformiranje aeroprofila, osim da pomaci moraju biti mali. Da bi se riješio omjer dvaju integrala iz formula za cirkulatorni uzgon i moment propinjanja (2.25) i (2.26) uvodi se pretpostavka o jednostavnim harmonijskim oscilacijama aeroprofila. U skladu s tim koeficijenti  $h_n(t)$  se zadaju u sljedećem obliku:

$$h_n(t) = \bar{h}_n e^{i\omega t}, \quad (2.27)$$

gdje je  $\bar{h}_n$  kompleksni broj čime se dopušta pomak u fazi između različitih deformacija a  $\omega$  frekvencija oscilacija. Obzirom da se sastoji od koeficijenata  $h_n$ ,  $Q$  se također može zapisati kao:

$$Q = \bar{Q} e^{i\omega t},$$

Za dobivanje kompleksnog broja  $\bar{Q}$  potrebno je derivirati koeficijente deformacije uz pomoć sljedećih formula:

$$\begin{aligned} \dot{h}_n &= \bar{h}_n e^{i\omega t} \cdot \omega i = \bar{h}_n e^{i\omega t} \cdot k \frac{U_\infty}{b} i, \\ \ddot{h}_n &= -\bar{h}_n e^{i\omega t} \cdot \omega^2 = -\bar{h}_n e^{i\omega t} \cdot k^2 \frac{U_\infty^2}{b^2}, \end{aligned}$$

pa slijedi:

$$\bar{Q} = ikU_\infty \bar{h}_0 + \frac{1}{2} ikU_\infty \bar{h}_1 + U_\infty \bar{h}_1 + 2U_\infty \bar{h}_2 + 3U_\infty \bar{h}_3 + 4U_\infty \bar{h}_4.$$

Novi vrtlog otkida se sa zadnjeg brida u svakom trenutku u kojem dođe do promjene cirkulacije, tj. do nove deformacije aeroprofila te se udaljava od aeroprofila brzinom  $U_\infty$ . Iz formule (2.24) se vidi da ako se gibanje odvija dulje vrijeme gustoća vrtloga  $\gamma_w$  također mora biti funkcija od  $e^{i\omega t}$  [8]. U ovom modelu harmonijskog gibanja  $\gamma_w$  je



konstantna u svakoj točki koja se giba nistrujno brzinom  $U_\infty$ . To znači da je gustoća cirkulacije zapisana u Lagrangeovim koordinatama konstantna:

$$\gamma_w(\xi_1, t) = \text{konst.},$$

Obzirom da se strujanje promatra u Eulerovim koordinatama, gustoća vrtloga se zapisuje u ovisnosti o koordinati  $x_1$ :

$$\gamma_w(x_1, t) \neq \text{konst.}.$$

U skladu s tim, gustoća vrtloga  $\gamma_w$  u ovisnosti o  $x_1$  i  $t$  zapisuje se u obliku:

$$\gamma_w(x_1, t) = \bar{\gamma}_w e^{i\omega\left(t - \frac{bx_1}{U_\infty}\right)} = \bar{\gamma}_w e^{i\omega(\omega t - kx_1)},$$

gdje je:

$$k = \frac{\omega b}{U_\infty},$$

poznata kao reducirana frekvencija oscilacija.

Kvocijent integrala iz izraza za cirkulatorni uzgon i moment propinjanja se sada može pojednostaviti. Takav oblik se naziva Theodorsenova funkcija koja se označava kao  $C$  i jednaka je:

$$C = \frac{\int_1^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}} \gamma_w(x_1, t) dx_1}{\int_1^\infty \sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}} \gamma_w(x_1, t) dx_1} = \frac{\bar{\gamma}_w e^{i\omega t} \int_1^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}} e^{-ikx_1} dx_1}{\bar{\gamma}_w e^{i\omega t} \int_1^\infty \sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}} e^{-ikx_1} dx_1} = \frac{\int_1^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}} e^{-ikx_1} dx_1}{\int_1^\infty \sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}} e^{-ikx_1} dx_1} = C(k).$$

Theodorsen je dokazao da je  $C$  kompleksna funkcija reducirane frekvencije  $k$  i ima formu Henkelovih funkcija druge vrste:

$$C(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}, \quad (2.28)$$

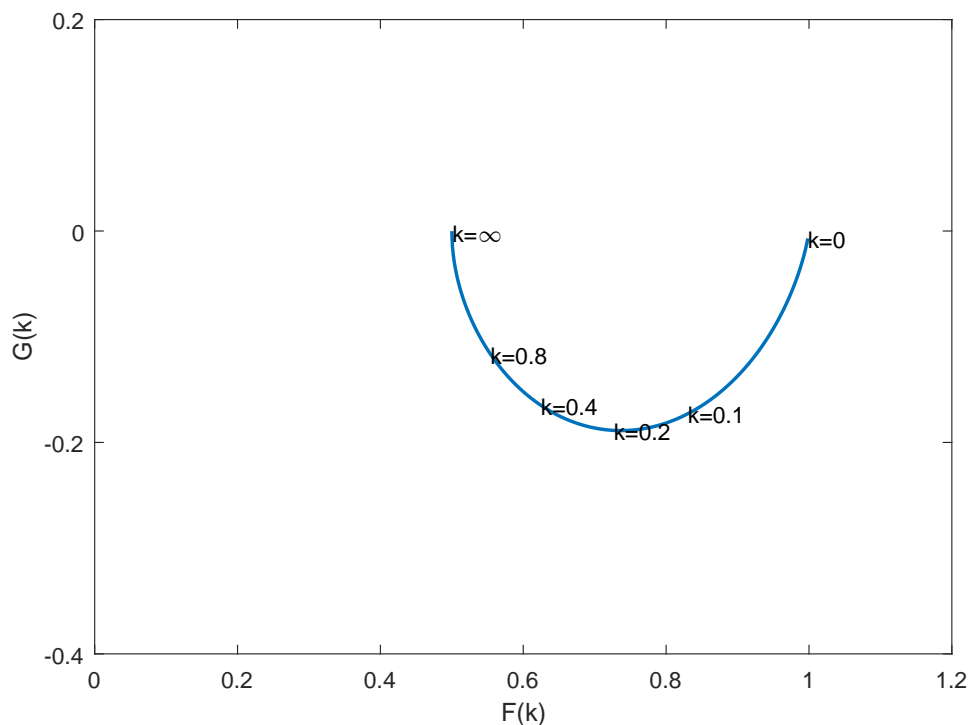
gdje je  $H_n^{(2)}$  kombinacija Besselovih funkcija prve i druge vrste.

$$H_n^{(2)} = J_n - iY_n. \quad (2.29)$$

Izvod jednadžbe (2.28) dan je u dodatku A..

Theodorsenova funkcija u kompleksnom obliku prikazana je na slici 2.4. Iz grafa se vidi da je  $C(k) = 1$  kada je reducirana frekvencija 1, a kada  $k \rightarrow \infty$  onda  $C(k) \rightarrow 0.5$ . To znači da ova funkcija smanjuje amplitudu cirkulacijskom uzgonu s povećanjem reducirane frekvencije (što se vidi iz slike A.2 dane u Dodatku A.). Theodorsenova funkcija također mijenja fazu uzgonu i momentu propinjanja u odnosu na oscilacije aeroprofila. Slika 2.4 daje uvid u razumijevanje važnosti Theodorsenove funkcije kao funkcije samo reducirane

frekvencije. Sa slike se mogu vidjeti vrijednosti reducirane frekvencije unutar kojih se može pretpostaviti kvazistacionarno strujanje, tj. zanemariti utjecaj otkinutih vrtloga. To su vrijednosti  $0 \leq k < 0.025$ . To znači da je reducirana frekvencija glavna mjera nestacionarnosti pa se različitim kombinacijama frekvencije  $\omega$ , duljine tetive  $b$  i brzine slobodne struje  $U_\infty$  može postići tok slične nestacionarnosti.



Slika 2.4: Theodorsenova funkcija u polarnom obliku

Sada se amplituda i relativna faza cirkulatornog uzgona i momenta propinjanja mogu izraziti u ovisnosti o  $\bar{Q}$  i Theodorsenove funkcije:

$$\begin{aligned}\bar{L}_\Gamma &= -2\pi\rho U_\infty b \bar{Q} C(k), \\ \bar{M}_\Gamma &= \pi\rho U_\infty b^2 \bar{Q} [C(k) - 1].\end{aligned}$$

## 2.4. Ukupni uzgon i moment propinjanja

Ukupni uzgon je zbroj necirkulacijskih i cirkulacijskih komponenti:

$$\bar{L} = \bar{L}_0 + \bar{L}_\Gamma,$$

gdje je  $\bar{L}$  kompleksni broj koji dozvoljava pomak u fazi u odnosu na gibanje. Ako se promatra harmonijsko gibanje opisano jednadžbom (2.27) različiti modovi gibanja mogu imati različite fazne pomake.

Ukupni izraz za uzgon je dan u tablici 2.2.

Tablica 2.2: Komponente ukupnog uzgona

$\bar{h}_n$	$1 \cdot ()$	$ik \cdot ()$	$k^2 \cdot ()$
$\bar{h}_0$	0	$-2\pi\rho U_\infty^2 bC(k)$	$\pi\rho U_\infty^2 b$
$\bar{h}_1$	$-2\pi\rho U_\infty^2 bC(k)$	$-\pi\rho U_\infty^2 b(C(k) + 1)$	0
$\bar{h}_2$	$-4\pi\rho U_\infty^2 bC(k)$	0	$-\frac{1}{2}\pi\rho U_\infty^2 b$
$\bar{h}_3$	$-6\pi\rho U_\infty^2 bC(k)$	0	0
$\bar{h}_4$	$-8\pi\rho U_\infty^2 bC(k)$	0	0

Tablica prikazuje komponente uzgona uslijed svakog moda deformacije (prvi stupac), njegove brzine (drugi stupac) i akceleracije (treći stupac). Za dobivanje ukupnog uzgona potrebno je članove svakog reda tablice pomnožiti s odgovarajućim koeficijentom  $h_n$ , te sve izraze zbrojiti. Cirkulacijske komponente su samo one koje sadrže  $C(k)$ . Može se uočiti da su sile uslijed pomaka modova deformacije (prvi stupac) isključivo cirkulacijske, što je razumljivo jer ne postoje akceleracije da bi nastale necirkulacijske sile. Osim pomaka modova, brzina poniranja i zakretanja također stvara cirkulacijski uzgon. Brzina poniranja  $\dot{h}_0$  ima sličan utjecaj kao statički napadni kut  $h_1$  (slično kao i akceleracija poniranja i brzina promjene napadnog kuta što je objašnjeno u poglavlju 2.1.). Brzina zakretanja stvara obe komponente uzgona.

Analogno je dobiven izraz za amplitudu i relativnu fazu momenta propinjanja s obzirom na gibanje:

$$\bar{M} = \bar{M}_0 + \bar{M}_\Gamma.$$

Konačni izraz za ukupni moment propinjanja dan je u tablici 2.3.

Tablica 2.3: Komponente ukupnog momenta propinjanja

$\bar{h}_n$	$1 \cdot ()$	$ik \cdot ()$	$k^2 \cdot ()$
$\bar{h}_0$	0	$\pi\rho U_\infty^2 b^2 C(k)$	0
$\bar{h}_1$	$\pi\rho U_\infty^2 b^2 C(k)$	$\frac{1}{2}\pi\rho U_\infty^2 b^2 (C(k) - 1)$	$\frac{1}{8}\pi\rho U_\infty^2 b^2$
$\bar{h}_2$	$2\pi\rho U_\infty^2 b^2 (C(k) - 1)$	$-\pi\rho U_\infty^2 b^2$	0
$\bar{h}_3$	$3\pi\rho U_\infty^2 b^2 (C(k) - 1)$	0	$-\frac{1}{8}\pi\rho U_\infty^2 b^2$
$\bar{h}_4$	$4\pi\rho U_\infty^2 b^2 (C(k) - 1)$	0	0

Komponente koje u sebi sadrže  $C(k) - 1$  su isključivo cirkulatorne, one s  $C(k)$  su zbroj cirkulatornih i necirkulatornih a ostale su isključivo necirkulatorne. Svi pomaci modova, osim vertikalnog pomaka aeroprofila  $\bar{h}_0$ , stvaraju cirkulacijski moment (kao i uzgon). Cirkulacijski moment je također posljedica brzine poniranja, koja ima sličan utjecaj kao stacionarni napadni kut što je već prije spomenuto, te brzine zakretanja.

## 2.5. Veza sa stacionarnim strujanjem

Ova teorija je bazirana na pretpostavci o malim pomacima kao i klasična teorija tankih aeroprofila u stacionarnom strujanju. Stoga bi se izrazi za uzgon i moment propinjanja lako mogli svesti na one u stacionarnom strujanju kada je reducirana frekvencija nula [12]. Kada je  $k = 0$ ,  $C(k) = 1$  i kašnjenje faza je nula pa izrazi iz tablica 2.2 i 2.3 reduciraju na sljedeće izraze:

$$L = -2\pi\rho b U_\infty^2 h_1 - 4\pi\rho b U_\infty^2 h_2 - 6\pi\rho b U_\infty^2 h_3 - 8\pi\rho b U_\infty^2 h_4,$$

$$M = \pi\rho b^2 U_\infty^2 h_1.$$

Ove jednadžbe se normiraju s  $\rho U_\infty^2 b$  i  $2\rho U_\infty^2 b^2$  da bi se dobili koeficijent uzgona i momenta propinjanja:

$$C_L = -2\pi h_1 - 4\pi h_2 - 6\pi h_3 - 8\pi h_4,$$

$$C_M = \frac{1}{2}h_1. \tag{2.30}$$

Uočljivo je da izrazi uz  $h_1$  koji predstavlja napadni kut aeroprofila odgovaraju rješenjima dobivenima za tanki aeroprofil danima u literaturi [12]. Ovi izrazi mogu poslužiti kao brza aproksimacija uzgona i momenta propinjanja uslijed različitih modova deformacija. Zbog korištenja Čebiševljevih polinoma za opis oblika aeroprofila pozitivni  $h_1$  opisuje negativni napadni kut pa se iz jednadžbe (2.30) vidi da je uzgon u tom slučaju negativan a moment propinjanja pozitivan (spušta nos).

# Poglavlje 3.

## Rezultati

Kada se promatra jednostavno harmonijsko gibanje opisano jednađbom (2.27) ukupni uzgon i moment propinjanja se mogu zapisati kao kompleksni brojevi u obliku:

$$L = \bar{L}e^{i\omega t}, \quad M = \bar{M}e^{i\omega t},$$

gdje su  $\bar{L}$  i  $\bar{M}$  kompleksni brojevi koji dozvoljavaju pomake u fazi,  $\delta_L$  i  $\delta_M$ , u odnosu na deformaciju aeroprofila. Izrazi za  $\bar{L}$  i  $\bar{M}$  za svaki mod pojedinačno su dani u tablici 3.1.

Tablica 3.1: Amplituda i relativna faza uzgona i momenta propinjanja

$\bar{h}_n$	$\bar{L}$	$\bar{M}$
$\bar{h}_0$	$\pi\rho bU_\infty^2(k^2 - 2ikC(k))$	$i\pi\rho U_\infty^2 b^2 kC(k)$
$\bar{h}_1$	$-\pi\rho bU_\infty^2(C(k) + ik + ikC(k))$	$\pi\rho U_\infty^2 b^2(C(k) - \frac{1}{2}ik + i\frac{k}{2}C(k) + \frac{k^2}{8})$
$\bar{h}_2$	$-4\pi\rho bU_\infty^2 C(k) - \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 bk^2$	$2\pi\rho U_\infty^2 b^2(C(k) - 1 - i\frac{k}{2})$
$\bar{h}_3$	$-6\pi\rho bU_\infty^2 C(k)$	$3\pi\rho U_\infty^2 b^2(C(k) - 1 - i\frac{k^2}{24})$
$\bar{h}_4$	$-8\pi\rho bU_\infty^2 C(k)$	$4\pi\rho U_\infty^2 b^2(C(k) - 1)$

### 3.1. Prikaz i interpretacija rezultata

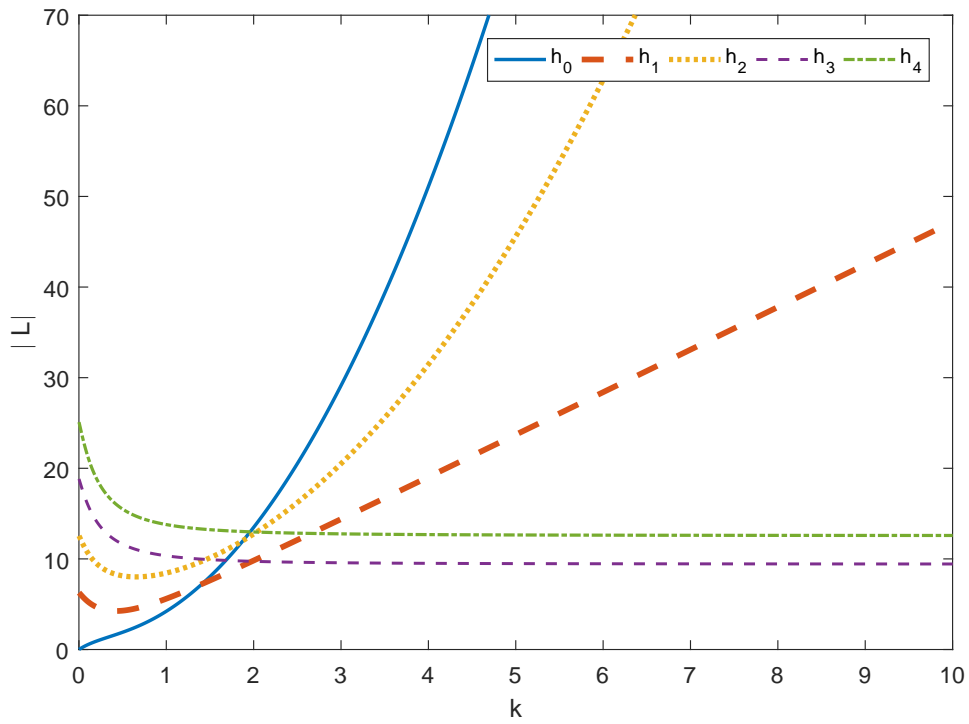
Rezultati iz tablice 3.1 nacrtani su za svaki mod deformacije posebno na slikama 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 i 3.6. Uzgon i moment propinjanja prikazani su u bezdimenzijskom obliku, tj. normirani su s  $\rho bU_\infty^2$  i  $\rho b^2U_\infty^2$ .

Prvo su promatrane komponente na malom dijelu vrijednosti reducirane frekvencije da bi se razumjelo ponašanje komponenata uzgona i momenta propinjanja s njenim povećanjem. Iz slike 3.1 se vidi da uzgon koji nastaje uslijed prva tri moda deformacija

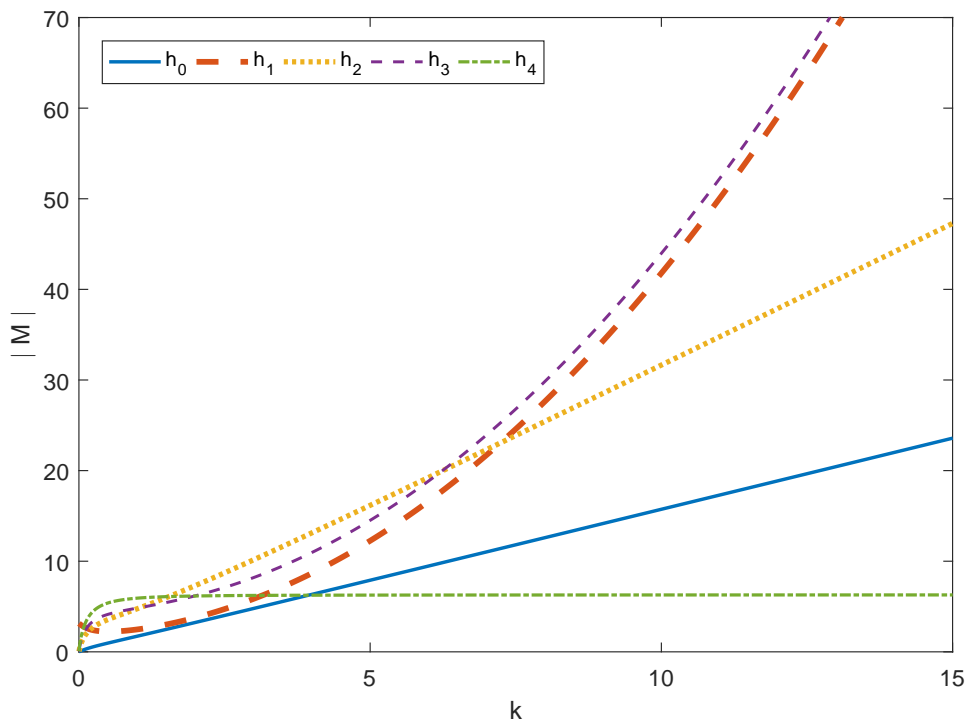
raste s povećanjem reducirane frekvencije, dok viši modovi deformacija gube utjecaj na uzgon s povećanjem  $k$ . Razlog tomu je što prve tri komponente uzgona sadrže necirkulacijske komponente čiji se utjecaj znatno povećava s povećanjem reducirane frekvencije. Viši modovi se sastoje samo od cirkulacijskih komponenti kojima amplituda drastično opada s povećanjem  $k$  zbog utjecaja Theodorsenove funkcije. Komponente momenta propinjanja se ponašaju na sličan način kao i komponente uzgona što se vidi na slici 3.2.

Da se obuhvati raspon reduciranih frekvencija  $0 \leq k < \infty$ , na aspcisu preostalih slika je stavljena vrijednost  $k/(k+1)$ . Zato kada je ta vrijednost nula,  $k$  je nula; kada je 0.5,  $k$  je 1; i kada je 1,  $k$  je beskonačno. Na slikama 3.3 i 3.4 amplitude uzgona i momenta propinjanja su normirane s  $k^2 + 1$  zato jer u tom rasponu reduciranih frekvencija oni rastu u beskonačnost proporcionalno s  $k^2$ . Faze uzgona i momenta su izračunate kao relativne faze u odnosu na pomak pojedinačnog moda deformacije (slike 3.5 i 3.6). Na njih utječe Theodorsenova funkcija  $C(k)$  i brzine modova koji stvaraju uzgon i/ili moment. Iz izgleda Theodorsenove funkcije (slika 2.4) se vidi da ona uzrokuje najveći pomak u fazi kada je  $k \approx 0.2$ . S povećanjem  $k$  taj pomak opada te kad  $k \rightarrow \infty$  on je nula, isto kao i kada je  $k = 0$ . Drugi uzrok pomaka faze su brzine određenih modova koje pomiču fazu za  $90^\circ$ . Kao što je već objašnjeno, s povećanjem reducirane frekvencije utjecaj cirkulatornih komponenti će se značajno smanjivati te će na amplitude i faze isključivo utjecati necirkulatorne komponente. Na slici 3.5 krivulje  $h_3$  i  $h_4$  koincidiraju.

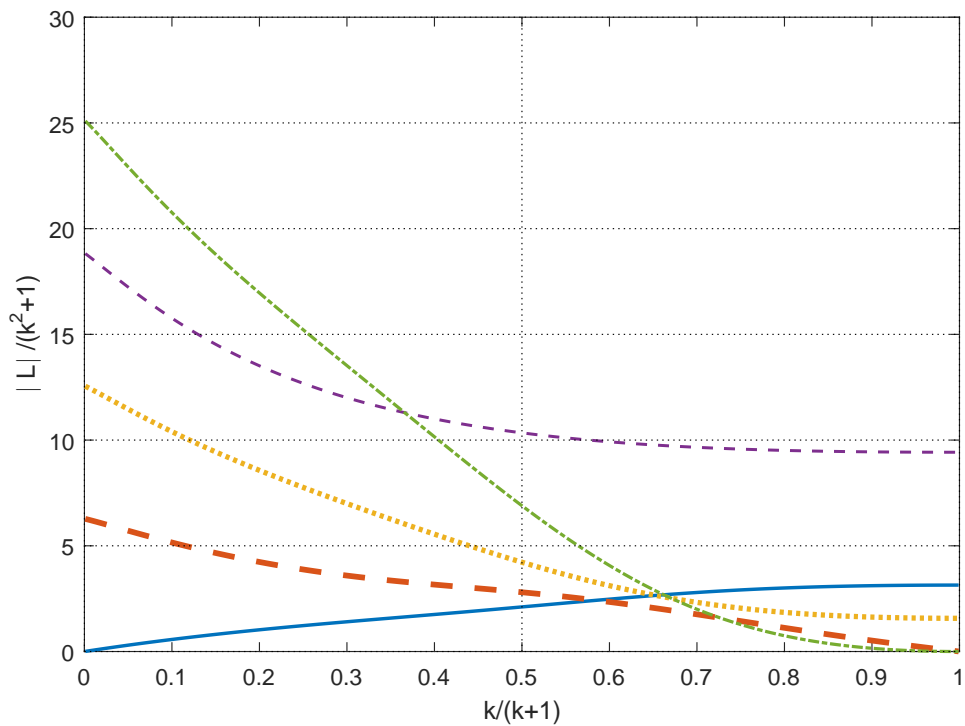
Poniranje i zakretanje najbolje pokazuju utjecaj Theodorsenove funkcije na kašnjenje u fazama uzgona i momenta propinjanja. Na slici 3.5 se vidi da kada je  $k = 0$  kašnjenje uzgona uslijed poniranja je  $-90^\circ$  te Theodorsenova funkcija nema utjecaj na relativnu fazu. S povećanjem  $k$  utjecaj Theodorsenove funkcije se prvo povećava do  $k \approx 0.2$  (kašnjenje u fazi se povećava) a zatim smanjuje. Kada  $k \rightarrow \infty$  utjecaj cirkulatornog uzgona nestaje, te s njim nestaje i fazni pomak (imaginarni dio uzgona nema više utjecaj), te je uzgon u fazi s poniranjem.



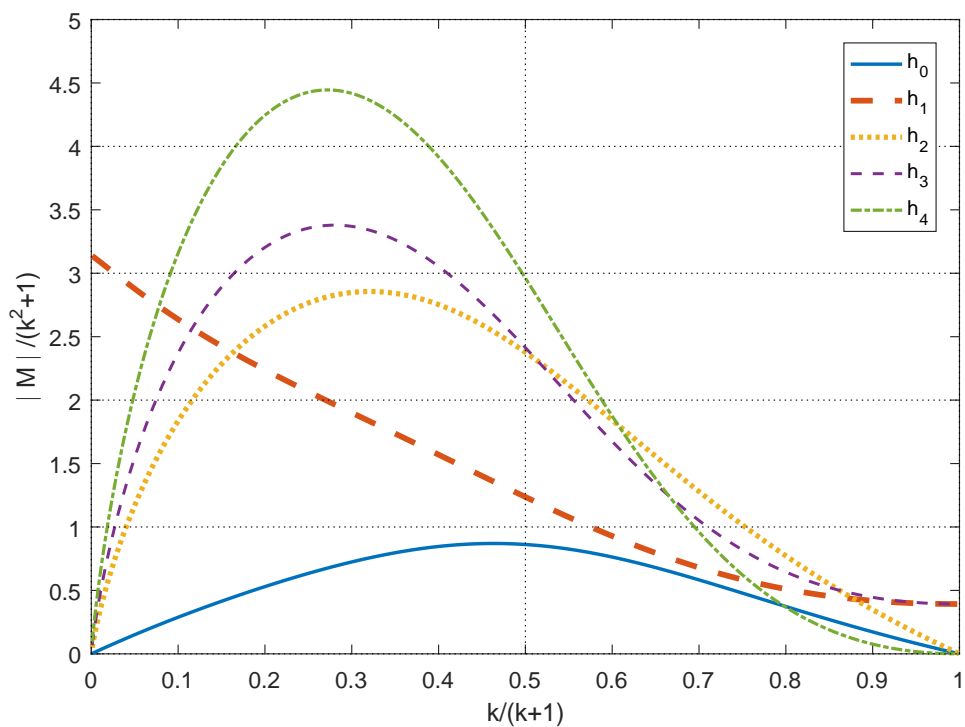
Slika 3.1: Apsolutna vrijednost uzgona



Slika 3.2: Apsolutna vrijednost momenta propinjanja

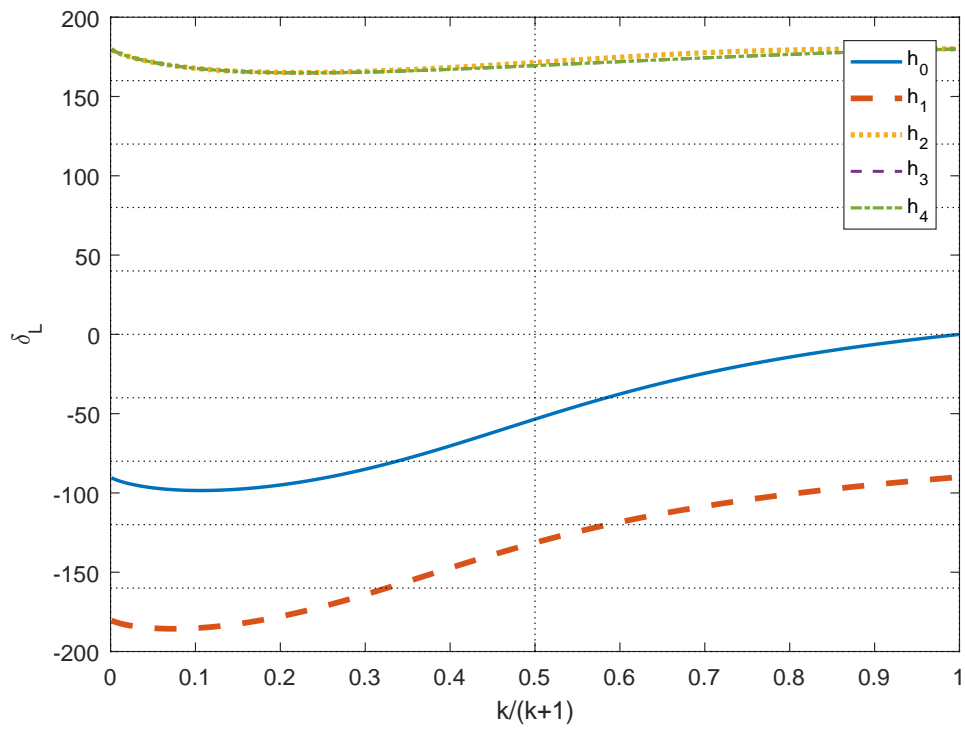


Slika 3.3: Apsolutna vrijednost normiranog uzgona

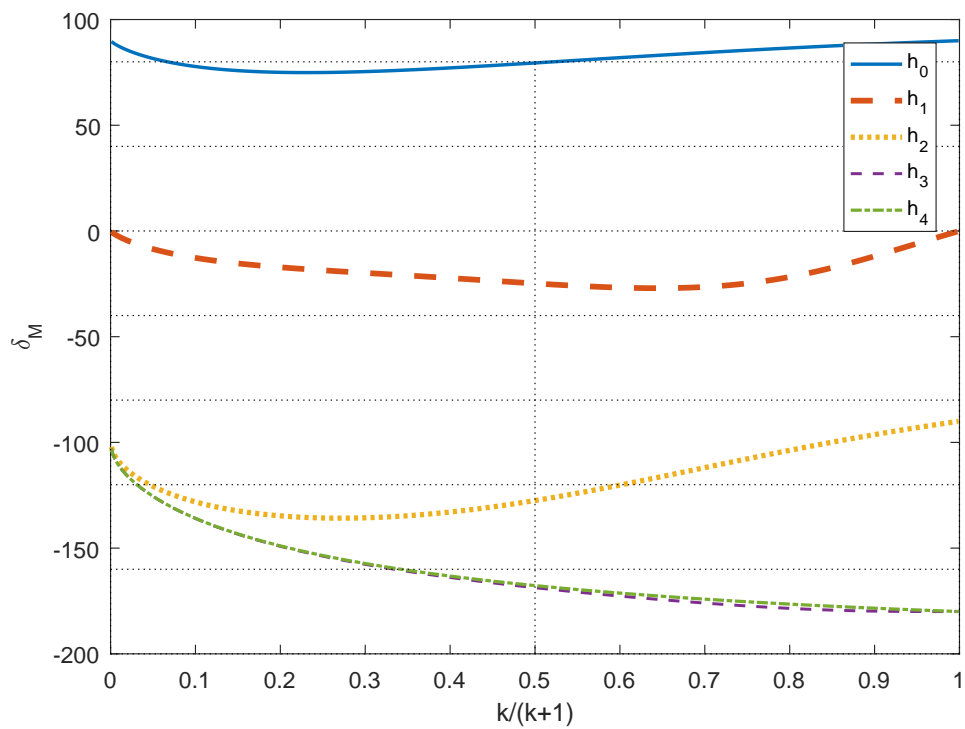


Slika 3.4: Apsolutna vrijednost normiranog momenta propinjanja





Slika 3.5: Relativni fazni kut uzgona u odnosu na gibanje



Slika 3.6: Relativni fazni kut momenta propinjanja u odnosu na gibanje

## Poglavlje 4.

### Zaključak

U ovom radu izračunata su aerodinamička opterećenja na deformabilni aeroprofil u potencijalnoj struji fluida. U tu svrhu, korišten je pristup Theodorsena, modificiran za opis deformabilnih aeroprofila na način kako je to prezentirano u članku [11]. Za opis pojedinih modova aeroprofila korištena je linearna kombinacija Čebiševljevih polinoma prve vrste. Načelno, mogao se koristiti neki drugi skup ortogonalnih funkcija no izbor Čebiševljevih polinoma dozvoljava da se dobiveni izrazi usporede s dostupnom literaturom [7]. Iz rezultata se vidi da povećanjem reducirane frekvencije  $k$  utjecaj necirkulacijskih aerodinamičkih opterećenja, koje su većinom posljedica nestacionarnosti, se povećava. Kod malih reduciranih frekvencija prevladava utjecaj cirkulacijskih aerodinamičkih opterećenja koje većinom nastaju uslijed pomaka pojedinih modova deformacija. Glavni zaključak donešen iz jednadžbi prezentiranih u ovom radu je da Theodorsenova funkcija smanjuje iznos aerodinamičkih opterećenja povećavanjem reducirane frekvencije te mijenja fazni pomak u ovisnosti o reduciranoj frekvenciji. Odvajanje toka na cirkulacijski i necirkulacijski, kako je to Theodorsen uveo, uvelike olakšava ovog relativno složenog problema.

# Dodatak A.

## Theodorsenova funkcija

Ovdje je pokazan dio izvoda Theodorsenove funkcije koji je dan u literaturi [12], dok je cijeli izvod funkcije je dan u literaturi [3]. Integralne forme Besselovih funkcija  $J_0$ ,  $J_1$ ,  $Y_0$  i  $Y_1$  koje je Theodorsen izveo dane su ispod jednažbom (A.1) i prikazane su na slici A.1.

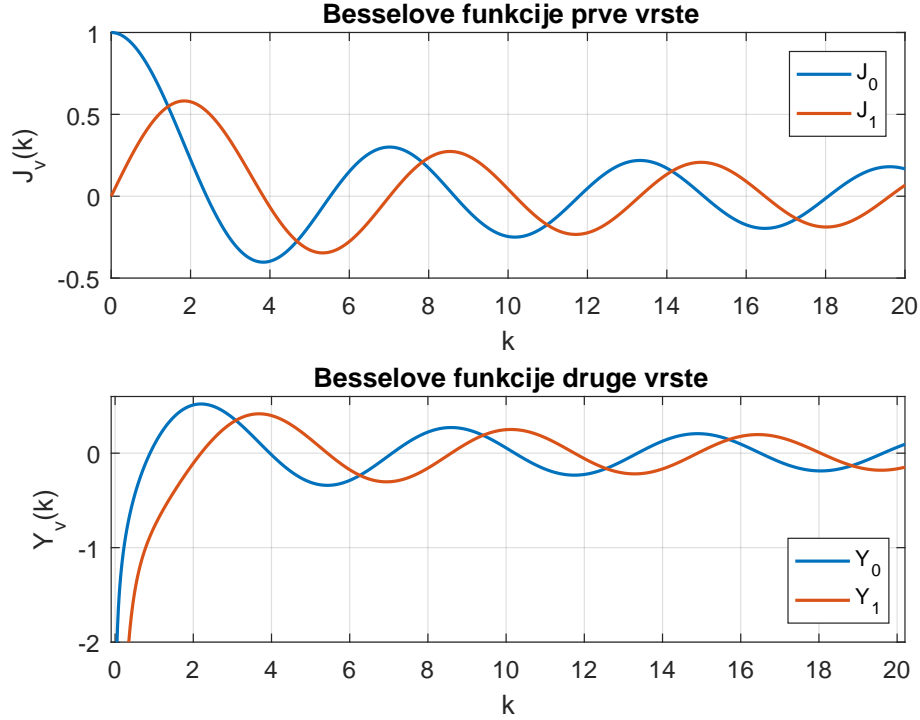
$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2}Y_0(k) &= \int_1^{\infty} \frac{\cos(kx_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} dx_1 \\ \frac{\pi}{2}J_0(k) &= \int_1^{\infty} \frac{\sin(kx_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} dx_1 \\ -\frac{\pi}{2}Y_1(k) &= \int_1^{\infty} \frac{x_1 \sin(kx_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} dx_1 \\ -\frac{\pi}{2}J_1(k) &= \int_1^{\infty} \frac{x_1 \cos(kx_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} dx_1 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Iz slike A.1 se vidi da su Besselove funkcije prvog i drugog reda prigušne funkcije u ovisnosti o reduciranoj frekvenciji. Theodorsenova funkcija se može zapisati u malo drugačijem obliku:

$$C(k) = \frac{\int_1^{\infty} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}} e^{-ikx_1} dx_1}{\int_1^{\infty} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}} e^{-ikx_1} dx_1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x_1^2-1}} e^{-ikx_1} dx_1}.$$

Ako se gornji izraz zapiše u Eulerovom obliku, dobije se:

$$C(k) = \frac{\int_1^{\infty} \frac{x_1 \cos(kx_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} dx_1 - i \int_1^{\infty} \frac{x_1 \sin(kx_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} dx_1}{\int_1^{\infty} \frac{x_1 \cos(kx_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} dx_1 - i \int_1^{\infty} \frac{x_1 \sin(kx_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} dx_1 + \int_1^{\infty} \frac{\cos(kx_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} dx_1 - i \int_1^{\infty} \frac{\sin(kx_1)}{\sqrt{x_1^2-1}} dx_1}. \tag{A.2}$$



Slika A.1: Besselove funkcije prve i druge vrste

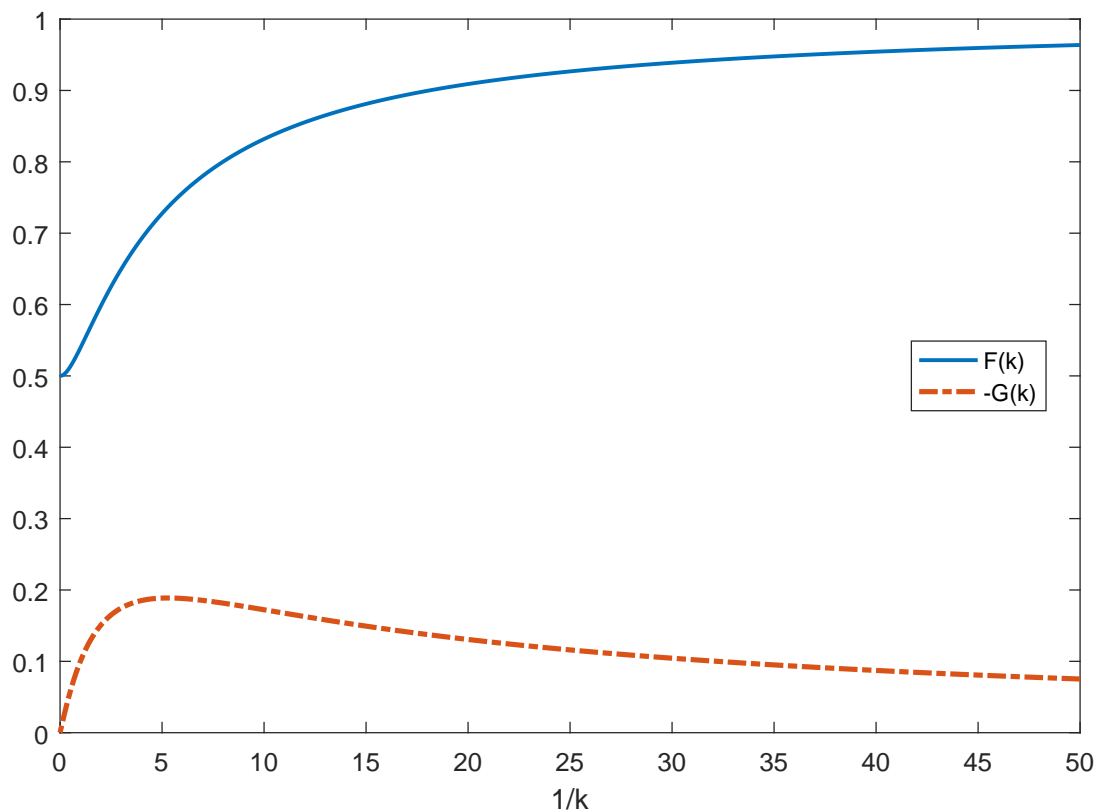
Kombinirajući jednadžbe (A.1) i (A.2) Theodorsenova funkcija se može zapisati preko Besselovih funkcija:

$$C(k) = \frac{-\frac{\pi}{2}J_1(k) + i\frac{\pi}{2}Y_1(k)}{-\frac{\pi}{2}J_1(k) + i\frac{\pi}{2}Y_1(k) - \frac{\pi}{2}Y_0(k) - i\frac{\pi}{2}J_0(k)}. \quad (\text{A.3})$$

Ako se gornja jednadžba rastavi na realni  $F(k)$  i imaginarni dio  $G(k)$  dobije se:

$$\begin{aligned} C(k) &= F(k) + iG(k), \\ F(k) &= \frac{J_1(k)(J_1(k) + Y_0(k)) + Y_1(k)(Y_1(k) + J_0(k))}{(J_1(k) + Y_0(k))^2 + (Y_1(k) - J_0(k))^2}, \\ G(k) &= -\frac{Y_1(k)Y_0(k) + J_1(k)J_0(k)}{(J_1(k) + Y_0(k))^2 + (Y_1(k) - J_0(k))^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Slika A.2 prikazuje realnu i imaginarnu komponentu Theodorsenove funkcije. Ovakav zapis puno bolje pokazuje utjecaj Theodorsenove funkcije na amplitudu i relativnu fazu cirkulatornog uzgona i momenta propinjanja.



Slika A.2: Theodorsenova funkcija

Ako se Besselove funkcije napišu preko Henkelovih funkcija drugog reda (vidi jednadžbu (2.29)) onda je brojnik jednadžbe (A.3) jednak  $-H_1^{(2)}(k)$  a nazivnik  $-H_1^{(2)}(k) - iH_0^{(2)}(k)$  pa se Theodorsenova funkcija može također izraziti preko Henkelovih funkcija:

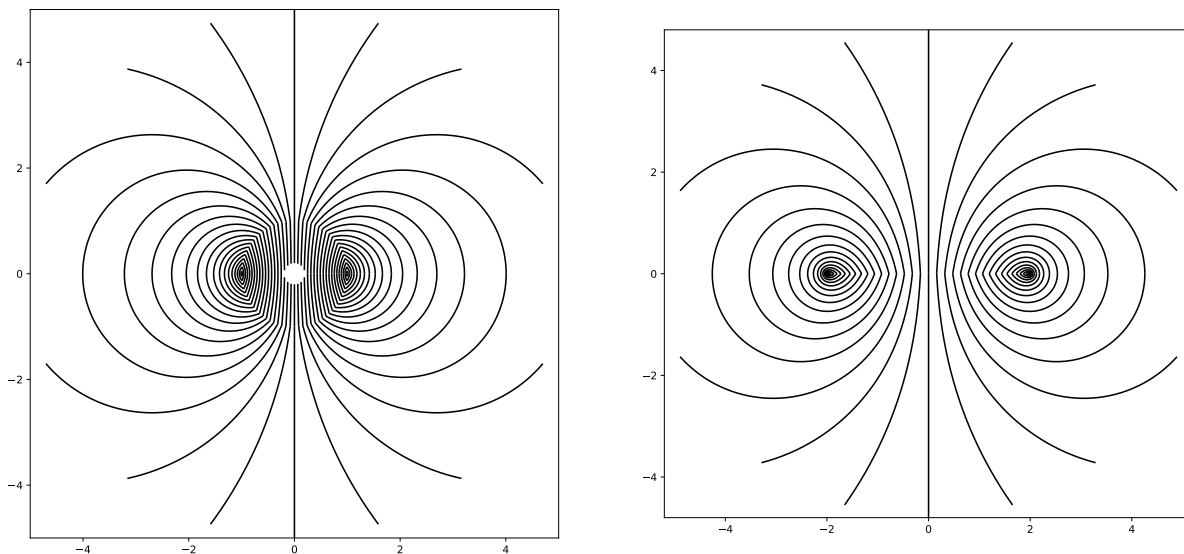
$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}.$$

## Dodatak B.

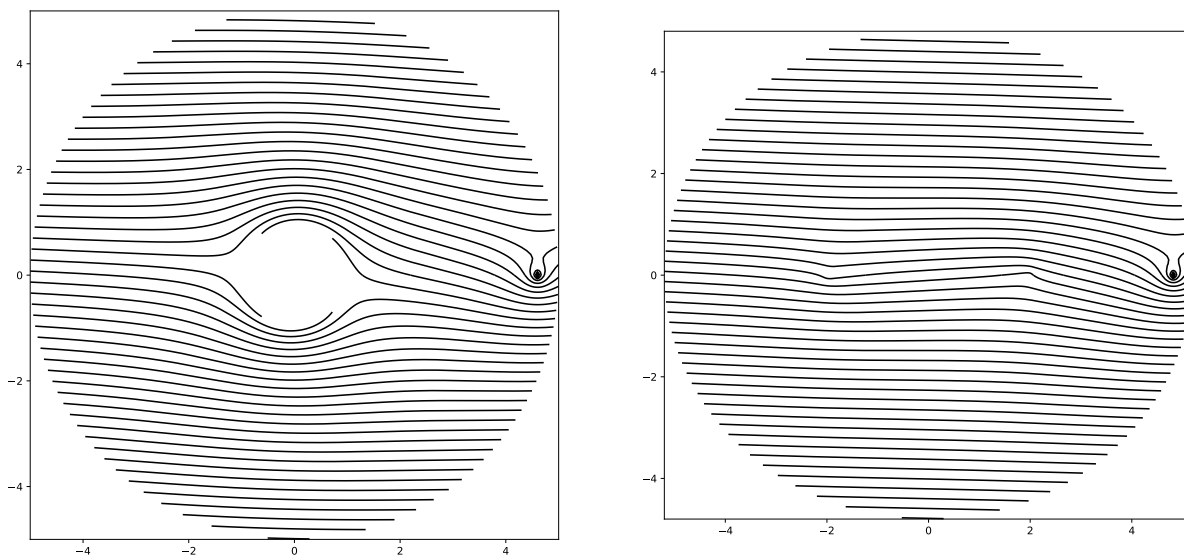
### Strujanje pojedinih modova

Za ilustraciju strujanja oko tankog deformabilnog aeroprofila u oscilatornom gibanju dane su slike necirkulacijskog i ukupnog strujanja uslijed pomaka drugog, trećeg, četvrtog i petog moda. Pomak drugog moda, predstavlja rotaciju dok ostali predstavljaju elastične deformacije aeroprofila.

## Strujanje drugog moda s diskretnim vrtlogom

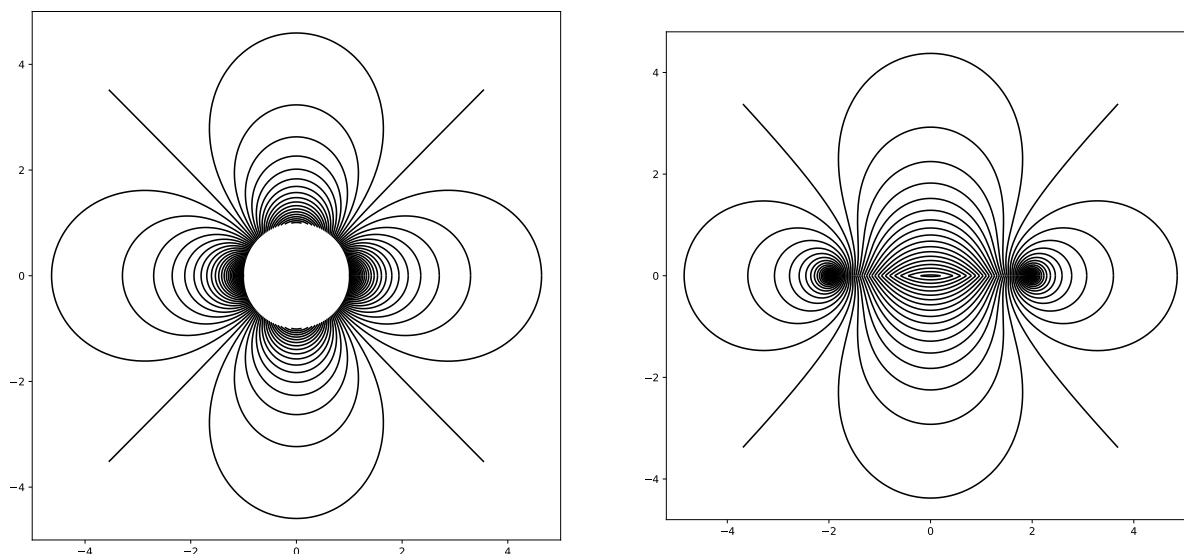


Slika B.1: Necirkulacijski tok uslijed pomaka drugog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno)

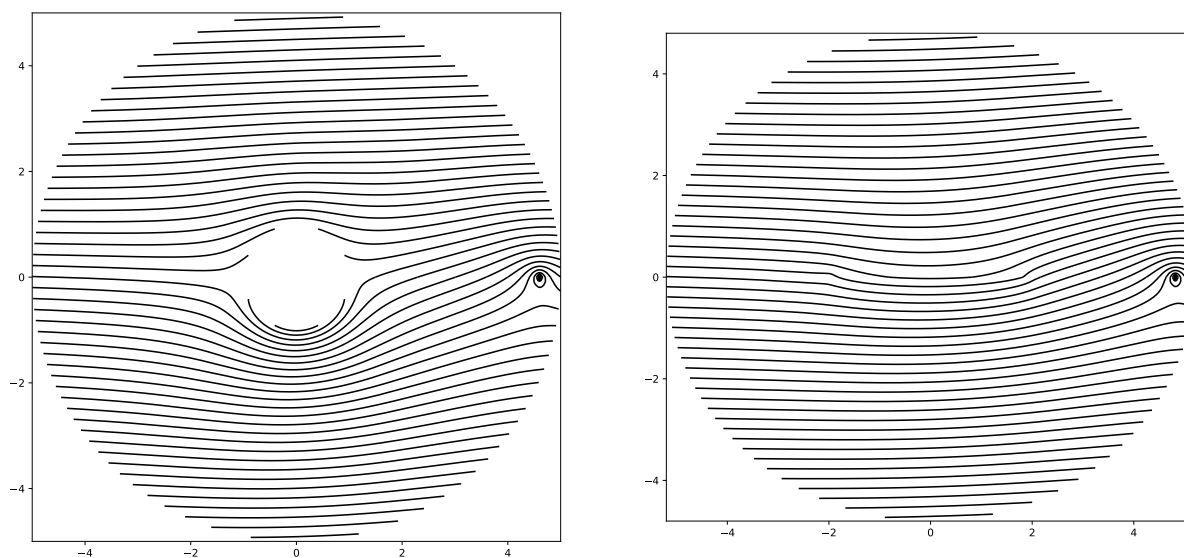


Slika B.2: Ukupni tok uslijed pomaka drugog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno)

## Strujanje trećeg moda s diskretnim vrtlogom



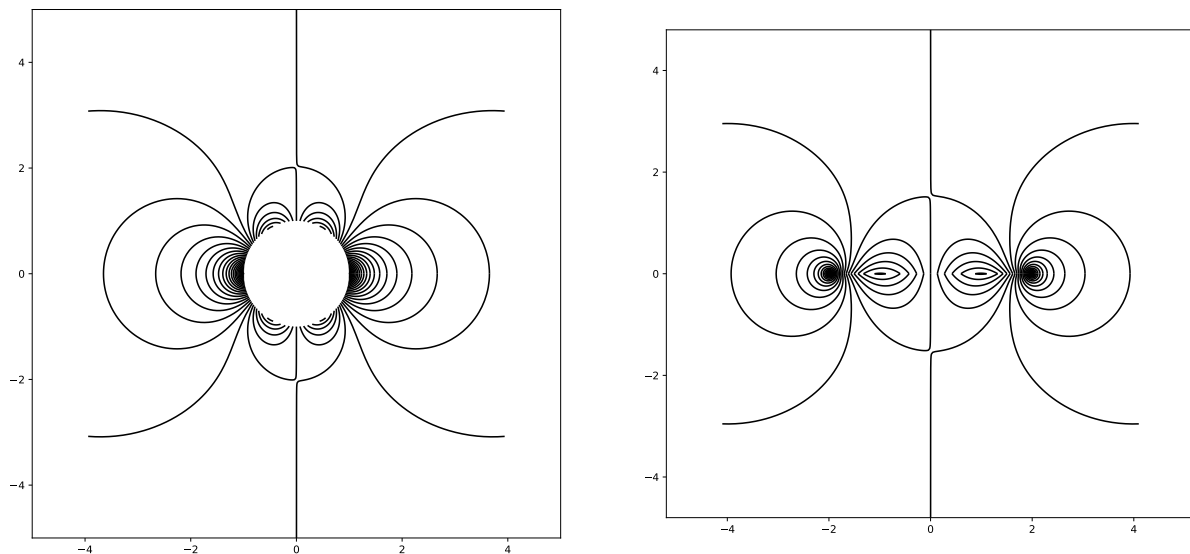
Slika B.3: Necirkulacijski tok uslijed pomaka trećeg moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno)



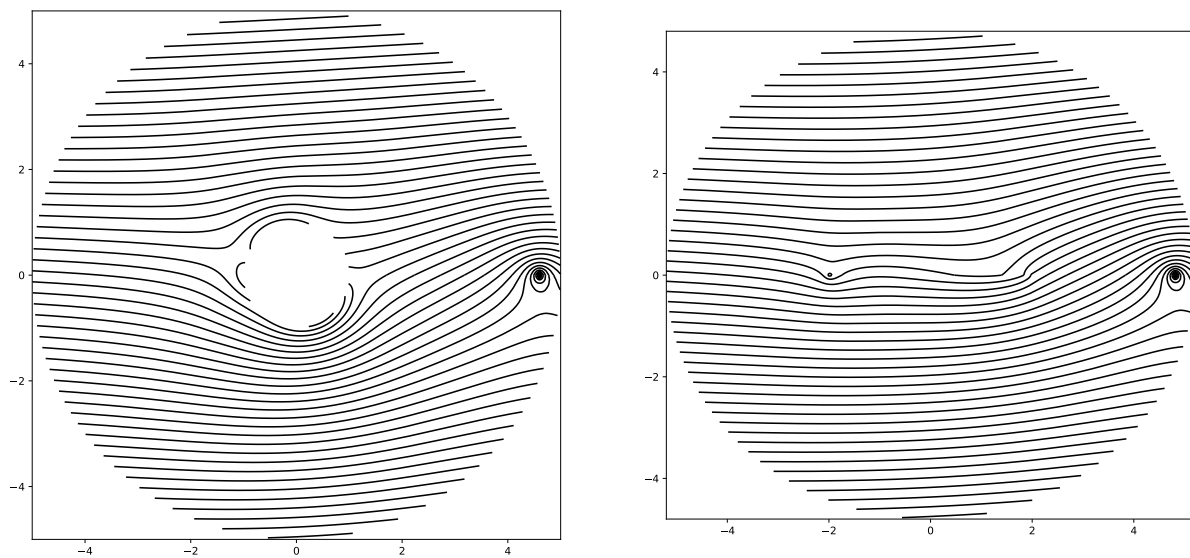
Slika B.4: Ukupni tok uslijed pomaka trećeg moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno)



## Strujanje četvrtog moda s diskretnim vrtlogom

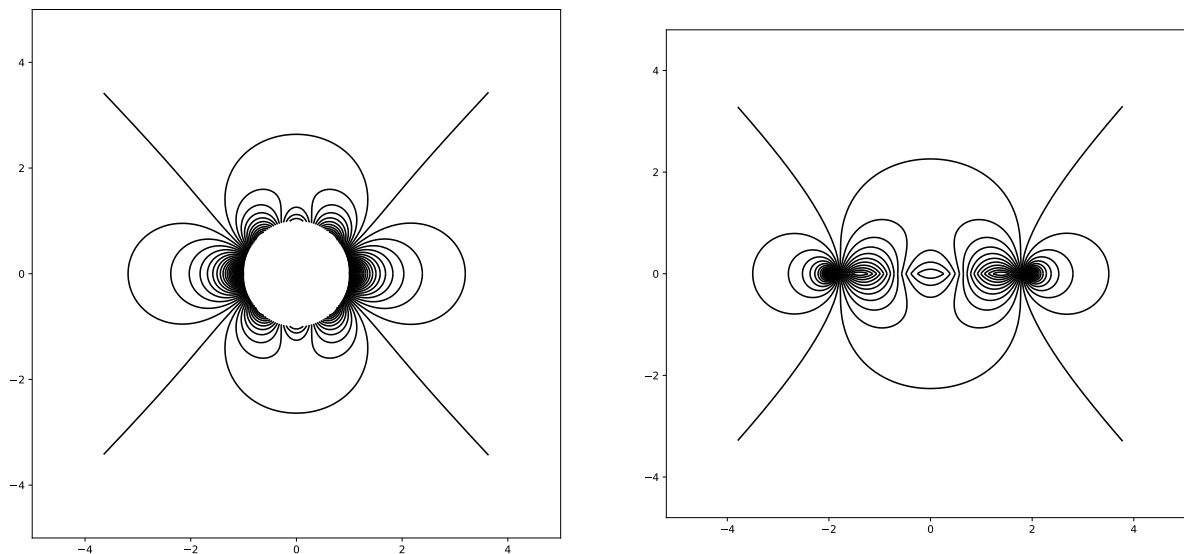


Slika B.5: Necirkulacijski tok uslijed pomaka četvrtog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno)

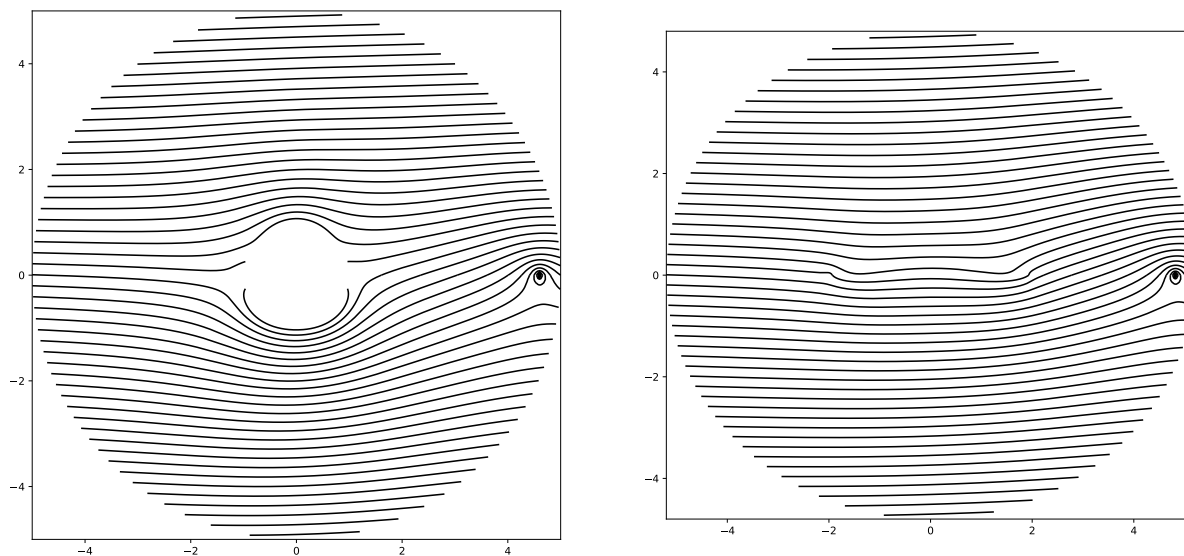


Slika B.6: Ukupni tok uslijed pomaka četvrtog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravnini (desno)

## Strujanje petog moda s diskretnim vrtlogom



Slika B.7: Necirkulacijski tok uslijed pomaka petog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravlini (desno)



Slika B.8: Ukupni tok uslijed pomaka petog moda u praravnini (lijevo) i preslikanoj ravlini (desno)

# Literatura

- [1] Herbert Wagner. Über die entstehung des dynamischen auftriebes von tragflügeln. *ASH International*, 1925.
- [2] H. G. Küssner. Zusammenfassender bericht über den instationaren auftrieb von flügeln. *Luftfahrtforschung*, 1936.
- [3] Theodore Theodorsen. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. Technical Report 496, NACA, 1934.
- [4] Isadore E.Garrick. On some reciprocal relations in the theory of nonstationary flows. Technical Report 629, NACA, 1938.
- [5] Isadore E.Garrick. Propulsion of a flapping and oscillating airfoil. Technical Report 567, NACA, 1936.
- [6] Theodore von Karman and J. M. Burges. *General Aerodynamic Theory-Perfect Fluids*. Julius Springer, 1935.
- [7] D. Peters, McDonnell Douglas, and M.-C.A. Hsieh. A state-space airloads theory for flexible airfoils. *ASH International*, 2006.
- [8] Raymond L. Bisplinghoff, Holt Ashley, and Robert L. Halfman. *Aeroelasticity*. Dover Publications, 1983.
- [9] Petar Kesić. *Osnove Aerodinamike*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2003.
- [10] Arthur T. Benjamin, Larry Ericksen, Pallavi Jayawant, and Mark Shattuck. Combinatorial trigonometry with chebyshev polynomials. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2010.
- [11] Wiliam P. Walker and Mayuresh J. Patil. Unsteady aerodynamics of deformable thin airfoils. *Journal of Aircraft*, 2014.
- [12] Wiliam Paul Walker. Unsteady aerodynamics of deformable thin airfoils, 2009.