

# Povratna krutost u hidroelastičnoj analizi brodskih konstrukcija

---

**Hadžić, Neven**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2012**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:393647>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-15**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**POVRATNA KRUTOST U HIDROELASTIČNOJ ANALIZI  
BRODSKIH KONSTRUKCIJA  
DOKTORSKI RAD**

Mentor: akademik Ivo Senjanović

Neven Hadžić

ZAGREB, 2012.

## PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

<b>UDK:</b>	629.543:629.5.015.4:629.5.015.5
<b>Ključne riječi:</b>	hidroelastičnost, brodske konstrukcije, kontejnerski brodovi, metoda konačnih elemenata, modalna metoda, valno opterećenje, hidrostatički model, konvencionalna krutost, povratna krutost, geometrijska krutost, hidroelastični odziv
<b>Znanstveno područje:</b>	TEHNIČKE ZNANOSTI
<b>Znanstveno polje:</b>	Brodogradnja
<b>Institucija na kojoj je rad izrađen:</b>	Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilište u Zagrebu
<b>Mentor rada:</b>	Akademik Ivo Senjanović
<b>Broj stranica:</b>	177
<b>Broj slika:</b>	111
<b>Broj tablica:</b>	18
<b>Broj korištenih bibliografskih jedinica:</b>	57
<b>Datum obrane:</b>	09.07.2012.
<b>Povjerenstvo:</b>	Dr. sc. Većeslav Čorić, red. profesor Akademik Ivo Senjanović Dr. sc. Šime Malenica, Bureau Veritas, Pariz Dr. sc. Jurica Sorić, red. profesor Dr. sc. Željko Lozina, red. profesor, FESB, Split
<b>Institucija na kojoj je rad pohranjen:</b>	Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb Nacionalna i sveučilišna knjižnica, Zagreb

## ZAHVALA

*Prvenstveno se zahvaljujem svom metnoru, akademiku Ivi Senjanoviću, na izboru teme doktorskog rada, te na njegovoj potpori, poticajima i korisnim savjetima kojima me pratio tijekom izrade ovog rada.*

*Zahvaljujem se i drugim članovima povjerenstva za ocjenu i obranu disertacije, dr.sc. Šimi Malenici, prof.dr.sc. Većeslavu Čoriću, prof.dr.sc. Jurici Soriću i prof.dr.sc. Željenu Lozini na strpljenju pri pregledu rada kao i na korisnim primjedbama i savjetima koje su ga učinile boljim.*

*Osobitu pomoć korisnim sugestijama, diskusijama i provođenjem hidrodinamičkih proračuna pružio mi je Fabien Bigot iz klasifikacijskog društva Bureau Veritas, Pariz, te mu želim ovim putem izraziti svoju zahvalnost na strpljenju i stručnom iskustvu kojim me podržavao za vrijeme izrade ovog rada.*

*Također, zahvaljujem se i mojim kolegama Stipi Tomaševiću, Nikoli Vladimiru, Marku Tomiću i Jadranki Radanović, koji su mi uvijek rado pomogli pri rješavanju mnogih problema na koje sam naišao tijekom izrade rada.*

*Posebno se zahvaljujem mojoj supruzi Jeleni koja me svojom potporom, razumijevanjem i ljubavlju pratila tijekom studija i izrade ovog rada.*

*Zagreb, lipanj 2012.*

*Neven Hadžić*

## SADRŽAJ

Predgovor .....	i
Sažetak .....	iii
Summary .....	v
Ključne riječi .....	vii
Key words .....	viii
Popis oznaka .....	ix
Popis slika .....	xii
Popis tablica .....	xvii
1 Uvod .....	1
1.1 Razvoj kontejnerskih brodova .....	1
1.2 Opis problema .....	7
1.3 Pregled osnovne literature .....	10
1.4 Hipoteza rada .....	11
2 Hidroelastični matematički model .....	13
3 Povratna krutost .....	19
3.1 Hidrostatička povratna krutost .....	19
3.1.1 Rad infinitezimalne sile uslijed hidrostatičkog tlaka .....	21
3.1.2 Koeficijenti hidrostatičke povratne krutosti .....	28
3.2 Gravitacijska povratna krutost .....	29
3.2.1 Rad infinitezimalne gravitacijske sile .....	29
3.2.2 Koeficijent gravitacijske povratne krutosti .....	32
3.3 Ukupna povratna krutost .....	33
3.4 Strukturna krutost .....	34
3.4.1 Konvencionalna krutost .....	36
3.4.2 Geometrijska krutost .....	37
3.5 Objedinjena povratna i geometrijska krutost .....	38
4 Usporedba nove povratne krutosti s postojećim formulacijama .....	43
4.1 Usporedba konzistentne povratne krutosti s formulacijom Malenica i Molin ..	43
4.2 Usporedba objedinjene povratne krutosti s cjelokupnom formulacijom .....	45

5	Formulacija povratne krutosti metodom konačnih elemenata .....	48
5.1	Osnovne pretpostavke i relacije metode konačnih elemenata .....	48
5.1.1	Transformacija koordinata iz globalnog u lokalni koordinatni sustav.....	49
5.1.2	Transformacija pomaka iz globalnog u lokalni koordinatni sustav .....	53
5.2	Formulacija koeficijenta tlaka metodom konačnih elemenata.....	54
5.3	Formulacija koeficijenta normale i moda metodom konačnih elemenata .....	56
5.4	Formulacija koeficijenta mase metodom konačnih elemenata .....	58
5.5	Formulacija koeficijenta rubnog naprezanja (Huang i Riggs) metodom konačnih elemenata.....	61
5.6	Formulacija geometrijske krutosti metodom konačnih elemenata .....	65
5.7	Koeficijenti povratne i geometrijske krutosti za trokut .....	70
5.8	Koeficijenti povratne i geometrijske krutosti za pravilan četverokut.....	77
5.9	Koeficijenti mase i geometrijske krutosti za linijske elemente .....	84
5.10	Koeficijent mase za slučaj koncentrirane mase .....	85
6	Opis programa RESTAN .....	88
7	ILUSTRATIVNI PRIMJERI .....	97
7.1	Pravilna barža.....	97
7.1.1	Analiza čvrstoće barže na mirnoj vodi.....	98
7.1.2	Analiza slobodnih vibracija u zraku .....	101
7.1.3	Analiza povratne krutosti .....	103
7.1.4	Analiza odziva barže.....	106
7.2	Brod za prijevoz kontejnera .....	120
7.2.1	Analiza čvrstoće broda na mirnoj vodi .....	122
7.2.2	Analiza slobodnih vibracija u zraku .....	125
7.2.3	Analiza povratne krutosti.....	126
7.2.4	Odziv broda.....	131
8	Zaključak doktorskog rada.....	143
8.1	Smjernice za daljnja istraživanja .....	145
	Literatura.....	146
	Kratki životopis.....	151
	Short biography.....	152

PRILOG A – Razvoj funkcije više varijabli u Taylorov red .....	153
PRILOG B – Analitički izrazi koeficijenata povratne krutosti za slučaj homogenog pontona i tankonstijene konstrukcije .....	155
PRILOG C – Utjecaj pojednostavljene geometrijske krutosti na točnost rezultata .....	162
PRILOG D – Ispitivanje koda programa RESTAN.....	172
PRILOG E – Korekcija rezultata proračuna hidrodinamičkih karakteristika barže .....	176

## PREDGOVOR

Početak procesa kontejnerizacije transporta 1956. godine međunarodnim transportnim lancima priključilo se novo, neizostavno i genijalno sredstvo transporta - kontejnerski brod - koji je postao njihov neizostavni dio. Porastom izmjene dobara na međunarodnom tržištu pokazala se potreba za izgradnjom sve većih i bržih brodova za prijevoz kontejneriziranog tereta. Razvoj takvih brodova se i dalje nastavlja.

Osnovni smjer razvoja može se okarakterizirati kao stalni porast kapaciteta i veličine kontejnerskih brodova koji je u vrlo velikoj mjeri vezan uz stalni međunarodni porast izmjene dobara i kompleksno tržište robe i dobara. S porastom glavnih dimenzija broda brodski trup postaje sve fleksibilniji, a veća brzina napredovanja uzrokuje više susretne frekvencije što može dovesti do pruženja broda. Budući da za vrlo velike (preko 10000 TEU) brodove postoji vrlo malo stručnog iskustva, klasifikacijska društva zahtijevaju provođenje direktnih proračuna koji se temelje na hidrodinamici i čvrstoći broda te na njihovoj međusobnoj interakciji.

Analiza hidroelastičnosti nameće se kao pouzdan matematički model sposoban opisati i obuhvatiti sve prirodne fenomene koji se javljaju u interakciji uzbude valova i vrlo fleksibilnog broskog trupa.

Jedan od ključnih elemenata hidroelastičnog modela je hidrostatički model u okviru kojeg se određuje povratna krutost. Premda su problemi hidroelastičnosti poznati već dulji niz godina, još uvijek postoje dvojbe i razilaženja oko uspješne i točne formulacije koeficijenata povratne krutosti, tako da danas još uvijek ne postoji jedinstveno rješenje problema.

U okviru ove disertacije istražena je formulacija konzistentne povratne krutosti i njeno objedinjavanje s geometrijskom krutošću te je ispitan njihov utjecaj na hidroelastični odziv. Također, izvedena je formulacija povratne i objedinjene krutosti za 3D model primjenom metode konačnih elemenata, što predstavlja stanovit napredak u razvoju metodologije analize hidroelastičnosti.

Znanstveni doprinos ovog rada predstavlja nastavak kontinuiranog istraživačkog rada na području hidroelastičnosti brodskih i pomorskih konstrukcija na Zavodu za



brodogradnju i pomorsku tehniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu u sklopu projekta Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske *Opterećenje i odziv brodskih konstrukcija* te u sklopu EU FP7 projekta *Tools for Ultra Large Container Ships* (TULCS).

## SAŽETAK

Utjecaj niza društvenih, ekonomskih i geostrateških čimbenika na pojavu, razvoj i porast veličine kontejnerskih brodova prikazan je zajedno s povijesnim pregledom kontejnerskog transporta u prvom poglavlju. Isto poglavlje donosi i opis problema hidroelastičnosti s istaknutim nedoumicama oko definicije hidrostatičkog modela i točne formulacije koeficijenata povratne krutosti. Nakon pregleda literature, kao ciljevi doktorskog rada postavljeni su: formulacija konzistentne povratne krutosti, njeno objedinjavanje s geometrijskom krutošću te formulacija problema metodom konačnih elemenata predstavljani.

Drugo poglavlje donosi pregled hidroelastičnog matematičkog modela koji se sastoji od strukturnog modela, modela oplakane površine te hidrodinamičkog i hidrostatičkog modela.

Detaljan prikaz izvoda konzistentne povratne krutosti temeljen na razmatranju trenutačne i referentne geometrije oplakane površine te na primjeni usmjerene derivacije i metode superpozicije modova (prirodnih oblika vibriranja) dan je u prvom dijelu trećeg poglavlja. U drugom dijelu istog poglavlja uvodi se definicija modalne geometrijske krutosti, nakon čega je izvršeno njeno objedinjavanje s prethodo spomenutom povratnom krutošću.

U četvrtom poglavlju uspoređene su konzistentna i objedinjena povratna krutost s postojećim formulacijama, u okviru čega su istaknute i pojašnjene razlike nove krutosti u odnosu na već poznate.

Peto poglavlje rada sastoji se od prikaza formulacije konzistentne i objedinjene povratne krutosti metodom konačnih elemenata. Nakon prikaza osnovnih pretpostavki i relacija metode konačnih elemenata, izvedeni su izrazi za proračun koeficijenata povratne krutosti koji se temelje na matričnom računu i interpolaciji translacijskih stupnjeva slobode gibanja elemenata primjenom funkcija oblika. Izvedeni konačni elementi mogu se definirati za plošne elemente kao ljuskasti elementi povratne krutosti bez rotacijskih stupnjeva slobode, odnosno za linijske elemente kao elementi povratne krutosti s jednim (translacijskim) stupnjem slobode u svakom čvoru.

U šestom poglavlju dan je prikaz programa RESTAN koji je razvijen u programskom jeziku FORTRAN. On se koristi za proračun povratne krutosti na temelju 3D mreže konačnih elemenata koja se primjenjuje u uobičajenim analizama čvrstoće broda.

Valjanost razvijene metode potvrđena je numeričkim primjerima u sedmom poglavlju. Analiziran je odziv barže na pravilnim valovima kao testni primjer, te odziv kontejnerskog broda kao ilustrativni primjer. Određene su prijenosne funkcije za unutarnje sile broskog trupa, tj. momente savijanja i uvijanja, te poprečnih sila.

U posljednjem poglavlju istaknut je znanstveni doprinos i navedeni su zaključci istraživanja, nakon čega su dane smjernice za daljnje istraživanje predmetnog područja.

## SUMMARY

The impact of various social, economic and geostrategic factors on the development and continuous growth of the container ship size is given together with a historical overview of the container transport in the first chapter. Description of the hydroelasticity problems, dilemma related to the hydrostatic model definition and to the correct definition of the restoring stiffness coefficients are given in the same chapter. After a literature survey the formulation of the consistent and unified restoring stiffness as well as the definition of the hydrostatic model via finite element method are defined as the aim of this PhD.

General overview of the hydroelastic mathematical model including structural model, model of wetted surface and hydrodynamic and hydrostatic model is given in the second chapter.

Detailed description of the consistent restoring stiffness derivation based on the consideration of instantaneous and referent wetted surface geometry and on the application of directional derivative and the mode superposition method is given in the first part of the third chapter. In the second part of the same chapter the definition of the modal geometry stiffness is introduced and its unification with the previously mentioned restoring stiffness is performed.

The comparison of the newly derived consistent and unified restoring stiffness with the existing formulations is given in the fourth chapter. Also, some differences are pointed out and explained.

Formulation of the consistent and unified stiffness via finite element method is given in the fifth chapter. After pointing out some basic assumptions and implications of the finite element method, expressions for the calculation of the restoring stiffness coefficients are derived based on the matrix algebra and the interpolation of the element translatory degrees of freedom by means of shape functions. The derived finite elements, in the case of plate elements, can be defined as restoring stiffness elements without rotational degrees of freedom. Also, in case of line elements, they can be defined as restoring stiffness elements with one (translatory) degree of freedom in each node.

In the sixth chapter an overview of the program RESTAN is given. It is coded in the FORTRAN programming language and used for the calculation of the restoring stiffness based on a 3D finite element mesh, usually used in the common ship strength analysis.

The validity of the developed method is confirmed via numerical examples in the seventh chapter. A barge response on regular waves was analyzed as a benchmark example, as well as a container ship response as an illustrative example. As a final result of the analysis, the ship hull internal forces (bending moment, torque and transverse forces) transfer functions were determined.

Scientific contribution and conclusions of the research are given in the last chapter along with the objectives of further investigations.

## KLJUČNE RIJEČI

- hidroelastičnost
- brodske konstrukcije
- kontejnerski brodovi
- metoda konačnih elemenata
- modalna metoda
- valno opterećenje
- hidrostatički model
- konvencionalna krutost
- povratna krutost
- geometrijska krutost
- hidroelastični odziv

## KEY WORDS

- hydroelasticity
- ship structure
- container ship
- finite elements method
- mode superposition method
- wave load
- hydrostatic model
- conventional stiffness
- restoring stiffness
- geometric stiffness
- hydroelastic response

## POPIS OZNAKA

$A$	Ukupna duljina krivulje, površina poprečnog presjeka
$A_{ij}$	Elementi matrice dodane mase
$a$	Duljina luka krivulje
$B$	Širina
$B_{ij}$	Elementi matrice hidrodinamičkog prigušenja
$[c]$	Matrica transformacije
$C_{ij}$	Elementi matrice ukupne povratne krutosti
$C_{ij}^p$	Elementi matrice povratne krutosti uslijed promjene tlaka
$C_{ij}^{nh}$	Elementi matrice povratne krutosti uslijed promjene vektora normale i moda
$C_{ij}^m$	Elementi matrice gravitacijske povratne krutosti
$\mathbf{c}(a)$	Proizvoljna krivulja
$D$	Visina broda
$\mathbf{D}$	Matrica elastičnosti
$\mathbf{d}$	Vektor pomaka duž pravca
$E$	Young-ov modul
$\mathbf{F}$	Vektor sile, Lagrangeov gradijent deformiranja
$F_i^a$	Modalna inercijska sila
$F^h$	Ukupna hidrodinamička sila
$F^{DI}$	Difrakcijska sila
$F_i^p$	Vektor opterećenja uslijed hidrostatskog tlaka
$F_i^m$	Vektor gravitacijskog opterećenja
$F^R$	Radijacijska sila
$F_i^v$	Modalna prigušna sila
$g$	Ubrzanje sile teže
$\{H(x, y, z)\}$	Vektor deformacije oplakne površine
$\mathbf{H}$	Pravocrtni vektor pomaka
$\{h(x, y, z)\}_i$	i-ti vektor modalnog pomaka strukturnog modela
$I$	Moment tromosti poprečnog presjeka
$\mathbf{I}$	Jedinična matrica
$i$	Imaginarna jedinica
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Jedinični vektori
$[K], \mathbf{K}$	Matrica konvencionalne krutosti
$[k], \mathbf{k}, \mathbf{k}_0$	Modalna matrica konvencionalne krutosti



$k$	Valni broj
$k_{ij}^G$	Modalna matrica geometrijske krutosti
$k_{ij}^U$	Modalna matrica objedinjene povratne krutosti
$k_{ij}^{SZ}$	Modalna matrica povratne krutosti uslijed rubnog naprezanja
$k_{ij}^{VZ}$	Modalna matrica povratne krutosti uslijed gravitacijskog naprezanja
$L$	Duljina broda
$L_{oa}$	Duljina preko svega
$L_{pp}$	Duljina između perpendikulara
$m$	Masa
$[M], \mathbf{M}$	Matrica mase
$[m], \mathbf{m}$	Modalna matrica mase
$\{n\}, \mathbf{n}, \mathbf{N}$	Jedinični vektor normale
$p$	Tlak
$\mathbf{Q}$	Vektor gravitacijske sile
$\mathbf{q}$	Vektor volumenskih sila
$\mathbf{q}_s$	Vektor površinskih sila
$S$	Površina
$T$	Gaz
$t$	Debljina oplata
$\mathbf{t}(a)$	Vektor tangente
$\mathbf{u}, \mathbf{u}_s$	Vektor pomaka
$V$	Volumen
$v$	Brzina
$X, Y, Z$	Globalne koordinate
$x, y, z$	Lokalne koordinate
$W$	Rad
$W_e$	Rad vanjske sile
$W_i$	Rad unutarnje sile
$\delta_{kl}$	Kronecker-ov delta
$\{\delta\}$	Vektor suhog prirodnog oblika vibriranja
$\mathbf{E}, E_{kl}$	Tenzor deformacije u globalnom koordinatnom sustavu
$E_{kl}^0$	Tenzor linearne deformacije u globalnom koordinatnom sustavu
$E_{kl}^*$	Tenzor nelinearne deformacije u globalnom koordinatnom sustavu
$\zeta_a$	Valna amplituda
$\{\Lambda\}, \mathbf{\Lambda}$	Diferencijalni operator
$\lambda$	Lamé-ova konstanta
$\mu$	Lamé-ova konstanta

$\phi_k$	Funkcija oblika čvora $k$
$\varphi$	Ukupni potencijal brzine strujanja
$\varphi_I$	Potencijal susretnog vala
$\varphi_{Rj}$	Radijacijski potencijal
$\varphi_D$	Difrakcijski potencijal
$\chi$	Nailazni kut valova
$\xi_i$	Amplituda $i$ -tog moda
$\xi, \eta$	Trokutne koordinate, bezdimenzionalne koordinate
$\rho$	Gustoća morske vode
$\rho_S$	Gustoća materijala
$[\Sigma_{kl}], \Sigma$	Matrica naprezanja u globalnom koordinatnom sustavu
$[\sigma_{kl}], \sigma$	Matrica naprezanja u lokalnom koordinatnom sustavu
$\Omega$	Svojtvena vrijednost
$\omega$	Prirodna frekvencija
$\omega_e$	Susretna frekvencija
$\nabla$	Hamiltonov operator, volumen istisnine
$\Delta$	Laplaceov operator, masa istisnine
COG	Centre of Gravity
FEM	Finite Element Method
TEU	Twenty-foot Equivalent Unit
$\langle \dots \rangle = \{ \cdot \}^T$	

## POPIS SLIKA

Slika 1-1 Udio pomorskog transporta po masi (lijevo) i vrijednosti transportiranog tereta (desno) u ukupnom svjetskom transportu, [2] .....	2
Slika 1-2 Rast ukupne svjetske trgovine za period između 1995. i 2025 godine, [3].....	3
Slika 1-3 Rast pomorskog transporta za period između 1995. i 2025. godine, [3].....	4
Slika 1-4 Rast kontejneriziranog transporta za period između 1995. i 2025. godine, [3] ..	4
Slika 1-5 Intenzitet uvoza / izvoza kontejneriziranog tereta, broj TEU na 1000 stanovnika, [4].....	5
Slika 1-6 Porast i projekcija veličine kontejnerskih brodova, [4].....	6
Slika 2-1 Metodologija hidroelastične analize, [11] .....	13
Slika 2-2 Racionalna mreža oplakane površine, [11] .....	15
Slika 3-1 Definicija koordinatnog sustava.....	19
Slika 3-2 Fizikalna interpretacija promjene vertikalne koordinate i smjera normale na diferencijalnu površinu .....	20
Slika 3-3 Rad infinitezimalne sile.....	22
Slika 3-4 Vektor tangente u proizvoljnoj toči $P_C$ .....	23
Slika 3-5 Rubni uvjet na oplakanoj površini.....	41
Slika 3-6 Ravnotežni uvjet unutar volumena strukture.....	41
Slika 5-1 Globalni i lokalni koordinatni sustav .....	50
Slika 5-2 Lokalni i globalni koordinatni sustav sa zajedničkim ishodištem.....	50
Slika 5-3 Trokutni element u lokalnom koordinatnom sustavu.....	71
Slika 5-4 Trokutni element u trokutnim koordinatama.....	74
Slika 5-5 Četverokutni element u lokalnom koordinatnom sustavu.....	78
Slika 5-6 Dijeljenje nepravilnog četverokuta na dva trokuta.....	83
Slika 5-7 Kutovi rotacije oko osi $x$ i $y$ .....	87
Slika 6-1 RESTAN - programsko okruženje .....	88
Slika 6-2 Elementi oplakane površine .....	90
Slika 6-3 Linearna interpolacija čvorova na vodnoj liniji .....	91
Slika 6-4 Linearna interpolacija modalnih čvornih pomaka.....	92

Slika 6-5 Shematski prikaz proračuna povratne krutosti u programu RESTAN .....	93
Slika 6-6 Trokutni element s vektorom normale .....	94
Slika 7-1 Struktura pravilne barže .....	97
Slika 7-2 3D FEM model barže izrađen u programu NASTRAN .....	98
Slika 7-3 Sprega hidrodinamičkog modela i modela oplakane površine barže .....	99
Slika 7-4 Distribucija mase po duljini barže.....	100
Slika 7-5 Raspodjela hidrostatičkog tlaka po oplakanoj površini, [Pa] .....	100
Slika 7-6 Vertikalni moment savijanja i poprečna sila barže na mirnoj vodi.....	101
Slika 7-7 Distribucija $\sigma_x$ naprezanja.....	101
Slika 7-8 Prvi vertikalni prirodni oblik vibriranja .....	102
Slika 7-9 Prvi horizontalni prirodni oblik vibriranja .....	102
Slika 7-10 Prvi torzijski prirodni oblik vibriranja.....	103
Slika 7-11 Matrica povratne krutosti barže, cjelokupna formulacija, (4.1).....	104
Slika 7-12 Matrica povratne krutosti barže, konzistentna formulacija, (4.3) .....	104
Slika 7-13 Matrica povratne krutosti barže, konzistentna formulacija – koncentrirana masa, (4.3).....	105
Slika 7-14 Prijenosna funkcija koeficijenta poniranja, $\chi = 150^\circ$ .....	108
Slika 7-15 Prijenosna funkcija koeficijenta valjanja, $\chi = 150^\circ$ .....	108
Slika 7-16 Prijenosna funkcija koeficijenta posrtanja, $\chi = 150^\circ$ .....	109
Slika 7-17 Prijenosna funkcija koeficijenta moda V1, $\chi = 150^\circ$ .....	109
Slika 7-18 Prijenosna funkcija koeficijenta moda H1, $\chi = 150^\circ$ .....	110
Slika 7-19 Prijenosna funkcija koeficijenta moda T1, $\chi = 150^\circ$ .....	110
Slika 7-20 Prijenosna funkcija koeficijenta poniranja, $\chi = 180^\circ$ .....	111
Slika 7-21 Prijenosna funkcija koeficijenta posrtanja, $\chi = 180^\circ$ .....	111
Slika 7-22 Prijenosna funkcija koeficijenta moda V1, $\chi = 180^\circ$ .....	112
Slika 7-23 Prijenosna funkcija horizontalne smične sile, $\chi = 150^\circ$ , $x = 35.0$ m .....	113
Slika 7-24 Prijenosna funkcija vertikalne smične sile, $\chi = 150^\circ$ , $x = 35.0$ m .....	113
Slika 7-25 Prijenosna funkcija momenta uvijanja, $\chi = 150^\circ$ , $x = 75.0$ m .....	114

Slika 7-26 Prijenosna funkcija horizontalnog momenta savijanja, $\chi = 150^\circ$ , $x = 75.0$ m .....	114
Slika 7-27 Prijenosna funkcija vertikalnog momenta savijanja, $\chi = 150^\circ$ , $x = 75.0$ m..	115
Slika 7-28 Prijenosna funkcija vertikalne smične sile, $\chi = 180^\circ$ , $x = 35.0$ m .....	115
Slika 7-29 Prijenosna funkcija vertikalnog momenta savijanja, $\chi = 180^\circ$ , $x = 75.0$ m..	116
Slika 7-30 RAO vertikalnog momenta savijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 180^\circ$ , $x = 75.0$ m.....	116
Slika 7-31 RAO vertikalne smične sile, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 180^\circ$ , $x = 35.0$ m .....	117
Slika 7-32 RAO vertikalniog momenta savijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 150^\circ$ , $x = 75.0$ m.....	117
Slika 7-33 RAO vertikalne smične sile, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 150^\circ$ , $x = 35.0$ m .....	118
Slika 7-34 RAO horizontalnog momenta savijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 150^\circ$ , $x = 75.0$ m.....	118
Slika 7-35 RAO horizontalne smične sile, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 150^\circ$ , $x = 35.0$ m .....	119
Slika 7-36 RAO momenta uvijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 150^\circ$ , $x = 35.0$ m .....	119
Slika 7-37 <i>Rigoletto</i> – brod za prijevoz kontejnera .....	120
Slika 7-38 Opći plan broda .....	121
Slika 7-39 3D FEM model broda izrađen u programu NASTRAN.....	121
Slika 7-40 Modeliranje mase kontejnera s teretom u skladištu i na palubi .....	122
Slika 7-41 Sprega hidrodinamičkog modela i modela oplakane površine broda.....	123
Slika 7-42 Distribucija mase po duljini broda .....	124
Slika 7-43 Raspodjela hidrostatičkog tlaka po oplakanoj površini, [Pa] .....	124
Slika 7-44 Vertikalni moment savijanja i poprečna sila broda na mirnoj vodi .....	124
Slika 7-45 Von Mises naprezanje .....	125

Slika 7-46 Prvi i drugi spregnuti prirodni oblici torzijskih i horizontalnih vibracija (lateralni i ptičji pogled).....	126
Slika 7-47 Prvi i drugi prirodni oblik vertikalnih vibracija .....	126
Slika 7-48 Matrica povratne krutosti broda, cjelokupna formulacija, (4.1).....	127
Slika 7-49 Matrica povratne krutosti broda, konzistentna formulacija, (4.3).....	128
Slika 7-50 Matrica povratne krutosti broda, konzistentna formulacija – koncentrirana masa, (4.3).....	128
Slika 7-51 Prijenosna funkcija koeficijenta poniranja, $\chi = 150^\circ$ .....	132
Slika 7-52 Prijenosna funkcija koeficijenta valjanja, $\chi = 150^\circ$ .....	133
Slika 7-53 Prijenosna funkcija koeficijenta posrtanja, $\chi = 150^\circ$ .....	133
Slika 7-54 Prijenosna funkcija koeficijenta moda H1+T1, $\chi = 150^\circ$ .....	134
Slika 7-55 Prijenosna funkcija koeficijenta moda V1, $\chi = 150^\circ$ .....	134
Slika 7-56 Prijenosna funkcija koeficijenta moda H1+T2, $\chi = 150^\circ$ .....	135
Slika 7-57 Prijenosna funkcija koeficijenta poniranja, $\chi = 180^\circ$ .....	135
Slika 7-58 Prijenosna funkcija koeficijenta posrtanja, $\chi = 180^\circ$ .....	136
Slika 7-59 Prijenosna funkcija koeficijenta moda V1, $\chi = 180^\circ$ .....	136
Slika 7-60 Prijenosna funkcija horizontalne smične sile, $\chi = 150^\circ$ , $x = 87.5$ m .....	137
Slika 7-61 Prijenosna funkcija vertikalne smične sile, $\chi = 150^\circ$ , $x = 87.5$ m .....	137
Slika 7-62 Prijenosna funkcija momenta uvijanja, $\chi = 150^\circ$ , $x = 175.0$ m .....	138
Slika 7-63 Prijenosna funkcija horizontalnog momenta savijanja, $\chi = 150^\circ$ , $x = 175.0$ m .....	138
Slika 7-64 Prijenosna funkcija vertikalnog momenta savijanja, $\chi = 150^\circ$ , $x = 175.0$ m .....	139
Slika 7-65 Prijenosna funkcija vertikalne smične sile, $\chi = 180^\circ$ , $x = 87.5$ m .....	139
Slika 7-66 Prijenosna funkcija vertikalnog momenta savijanja, $\chi = 180^\circ$ , $x = 175.0$ m .....	140
Slika 7-67 RAO vertikalnog momenta savijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 150^\circ$ , $x = 175.0$ m.....	140

Slika 7-68 RAO vertikalne smične sile, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 150^\circ$ , $x = 87.5$ m .....	141
Slika 7-69 RAO horizontalnog momenta savijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 150^\circ$ , $x = 175.0$ m.....	141
Slika 7-70 RAO horizontalne smične sile, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 150^\circ$ , $x = 87.5$ m .....	142
Slika 7-71 RAO momenta uvijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost, $\chi = 150^\circ$ , $x = 175.0$ m .....	142
Slika B-1 Valjanje homogenog pontona .....	155
Slika B-2 Posrtanje homogenog pontona .....	156
Slika B-3 Homogeni ponton – naprezanje u vertikalnom i poprečnom smjeru .....	157
Slika B-4 Derivacija modalnih pomaka u slučaju tankostijene konstrukcije .....	158
Slika C-1 Prvi i drugi prirodni oblik vertikalnih vibracija grede, SESAM .....	167
Slika C-2 Prvi i drugi prirodni oblik vertikalnih vibracija grede, NASTRAN .....	167
Slika C-3 Izvijanje grede .....	169
Slika D-1 Segmentirana elastična barža .....	172
Slika D-2 Opći plan velikog kontejnerskog broda, TEU 11400 .....	172
Slika D-3 Utjecaj gustoće mreže elemenata na svojstvenu vrijednost i relativnu grešku .....	175
Slika E1 – Imaginarna komponenta modalnog momenta uvijanja prvog torzijskog moda .....	176

## POPIS TABLICA

Tablica 1-1 Cijena transporta jednog kamiona lijekova iz Chicaga u Nancy, Francuska, godine 1960., [1].....	2
Tablica 4-1 Usporedba postojećih formulacija povratne krutosti.....	44
Tablica 6-1 Numeracija čvorova elemenata oplakane površine .....	90
Tablica 1-1 Frekvencije prirodnih oblika vibriranja barže u zraku, $f$ , [Hz] .....	102
Tablica 1-2 Usporedba koeficijenata povratne krutosti barže .....	105
Tablica 1-3 Prirodne frekvencije prvih 6 suhih vibracija broda u zraku .....	125
Tablica 1-4 Usporedba koeficijenata povratne krutosti broda .....	129
Tablica B-1 Analitičke vrijednosti koeficijenata povratne krutosti za homogeni ponton .....	159
Tablica B-2 Analitičke vrijednosti koeficijenata povratne krutosti za pravilnu baržu ....	161
Tablica C-1 Značajke grede .....	164
Tablica C-2 Prirodne frekvencije savojnih vibracija grede s 8 konačnih elemenata, $\omega_i$ , [Hz] .....	165
Tablica C-3 Prirodne frekvencije savojnih vibracija grede s 8 konačnih elemenata, $\omega_i$ , [Hz], određene u SESAM-u i NASTRAN-u .....	166
Tablica C-4 Prirodne frekvencije savojnih vibracija grede sa 16 konačnih elemenata, $\omega_i$ , [Hz], određene u SESAM-u i NASTRAN-u .....	168
Tablica C-5 Faktor izvijanja grede, $\eta$ , sa 8 konačnih elemenata .....	170
Tablica C-6 Faktor izvijanja grede, $\eta$ , sa 16 konačnih elemenata .....	170
Tablica D-1 Usporedba svojstvenih vrijednosti za slučaj barže, $\Omega$ [rad/s] .....	173
Tablica D-2 Usporedba svojstvenih vrijednosti za slučaj TEU 11400, $\Omega$ [rad/s] .....	174
Tablica D-3 Usporedba koeficijenta povratne krutosti DYANA – RESTAN .....	175



# 1 UVOD

## 1.1 Razvoj kontejnerskih brodova

Intermodalnost, brzina, sigurnost i niska cijena kontejnerskog načina transporta robe i dobara prepoznati su još davne 1956. godine, koja se smatra godinom početka kontejnerizacije transporta zbog koje su se kontejnerski brodovi našli u samom središtu globalnih transportnih lanaca koji čine neizostavni dio današnje međunarodne trgovine.

Kontejnerizacija transporta drastično je smanjila cijenu brodskog prijevoza robe i dobara te je time značajno utjecala na razvoj svjetske ekonomije. Nekoliko teretnih dizalica s lakoćom je zamjenila vojsku lučkih radnika, niski troškovi transporta više nisu omogućavali dominaciju skupe proizvodnje u lokalnim obrtima i tvornicama već su otvorili vrata međunarodnoj konkurenciji, smanjene cijene podigle su standard života, kapital je postao mobilniji, a intermodalnost transporta stvorila je mreže trgovačkih putova kojima se kreću nepregledne količine robe. Lokalne kompanije iznenada su postale međunarodne te su ubrzo uvidjele mogućnost *just-in-time* proizvodnje na globalnoj razini, tj. postupkom racionalizacije proizvodni pogoni preseljeni su u područja jeftinije radne snage.

Općenito, vrlo je teško kvantificirati koliko je točno kontejnerizacija doprinijela općem razvoju, no sigurno je da je današnji transport višestruko povoljniji, [1]. Da je tome tako dokazuje i tablica 1-1 koja prikazuje cijenu nekontejneriziranog transporta 1960. godine raščlanjenu na pet komponenata. Lako je primijetiti da je udio troškova u luci činio gotovo polovicu svih troškova prijevoza.

Stalni (preko 50 godina) rast flote kontejnerskih brodova kao i stalni porast veličine kontejnerskih brodova usko je vezan uz rast međunarodne trgovine. Kako bi se shvatila pojava stalno rastuće potrebe za transportom robe i dobara trgovačkim brodovima (što je osobito izraženo u posljednja dva desetljeća), potrebno je razumjeti kontekst u kojem su se zbile dane promjene.

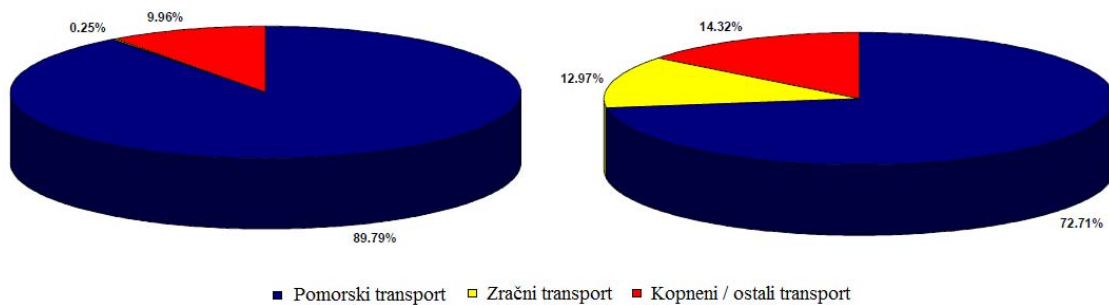
Središnji pokretač navedenih promjena je (uz porast populacije i prosječnog životnog vijeka) opće prihvaćanje međunarodne trgovine kao glavnog pokretača ekonomskog rasta i razvoja koji se javio kao ideološka orijentacija dotadašnje razvojne

strategije koja se uglavnom temeljila na ekonomskoj samodostatnosti. Najzorniji primjer su svakako Kina i Indija, u kojima se nastavlja proces rasta političkog konsenzusa da se uspjeh temelji na globalnoj ekonomskoj integraciji [1].

Tablica 1-1 Cijena transporta jednog kamiona lijekova iz Chicaga u Nancy, Francuska, godine 1960., [1]

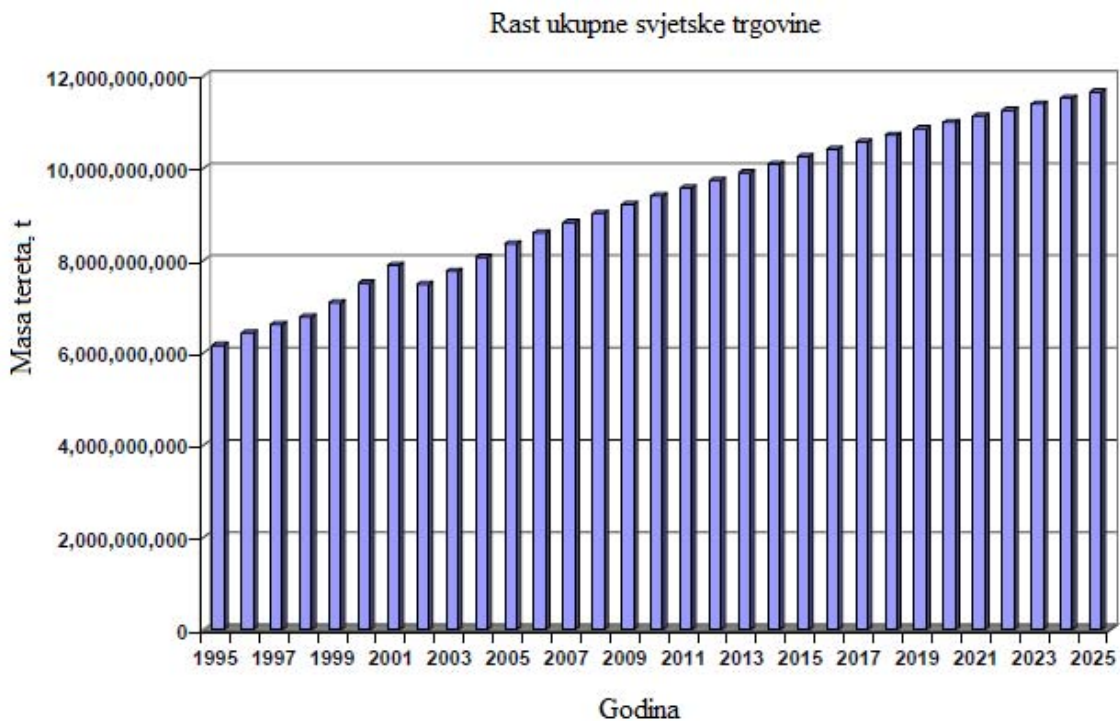
	<i>Cijena, \$</i>	<i>Udio u ukupnoj cijeni, %</i>
Prijevoz tereta do lučkog grada	341	14.3
Prijevoz tereta do luke	95	4.0
Ukupni lučki troškovi	1163	48.7
Transport brodom	581	24.4
Kopneni transport Europom	206	8.6
Ukupno	2386	

Osim izvozne gospodarske strategije mnoge se zemlje, radi povećanja konkurentnosti na tržištu, natječu u sklapanju međunarodnih sporazuma o slobodnoj trgovini, pri čemu su SAD glavni promotori takve politike. Tako svjedočimo nastajanju više međunarodnih asocijacija, odnosno bilateralnih i multilateralnih sporazuma o slobodnoj trgovini, primjerice NAFTA (*North American Free Trade Agreement*), CEFTA (*Central European Free Trade Agreement*), EU (*European Union*), SADC (*South African Development Community*) i dr. Zemlje članice neke asocijacije uživaju različite propisane i ugovorene pogodnosti koje utječu na konkurentnost na tržištu.



Slika 1-1 Udio pomorskog transporta po masi (lijevo) i vrijednosti transportiranog tereta (desno) u ukupnom svjetskom transportu, [2]

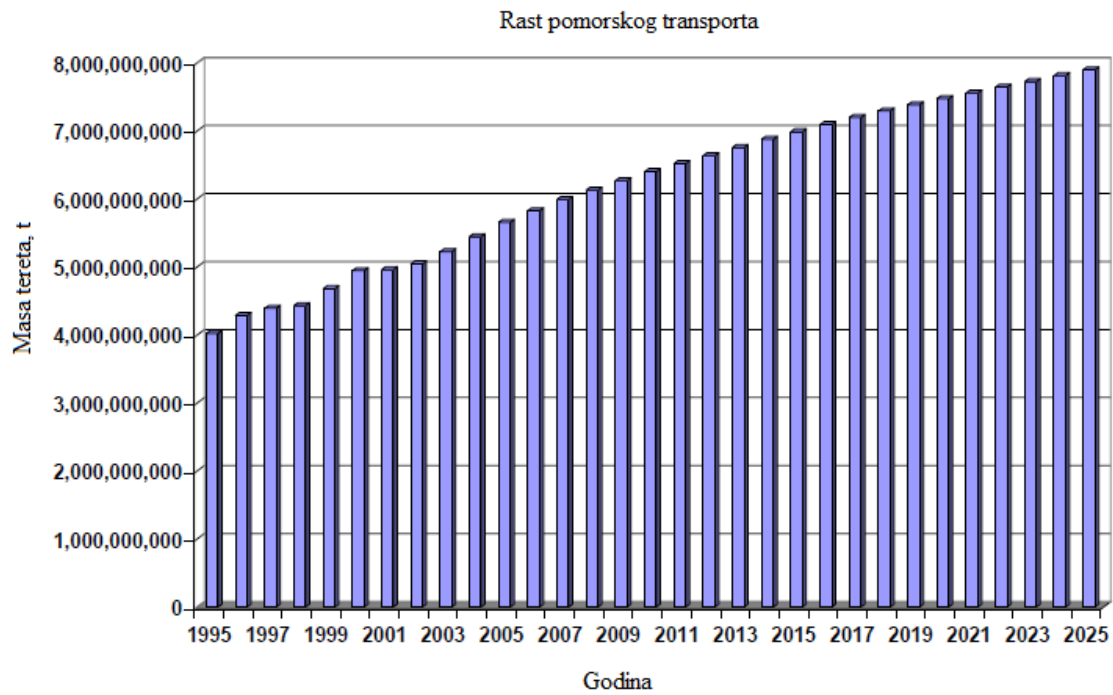
Proces kontejnerizacije utemeljen je i na ulozi i važnosti pomorskog transporta koji se može okarakterizirati kao neizostavan. Opravdanje za takav izraz je činjenica da se danas gotovo 90% tereta prevozi upravo morima. Pritom je udio pomorskog transporta u ukupnoj vrijednosti transportiranog tereta oko 72%, slika 1-1, [2]. Značaj pomorskog transporta još više dolazi do izražaja ako se u obzir uzme i činjenica da godišnji rast svjetske trgovine za 2010. godinu iznosi oko 2.4%, kojeg skladno prati porast pomorskog transporta od oko 2.5%, [3]. Slika 1-2 prikazuje (predviđeni) rast svjetske trgovine za razdoblje između 1995. i 2025. godine, a Slikom 1-3 prikazan je godišnji rast pomorskog transporta za isti period.



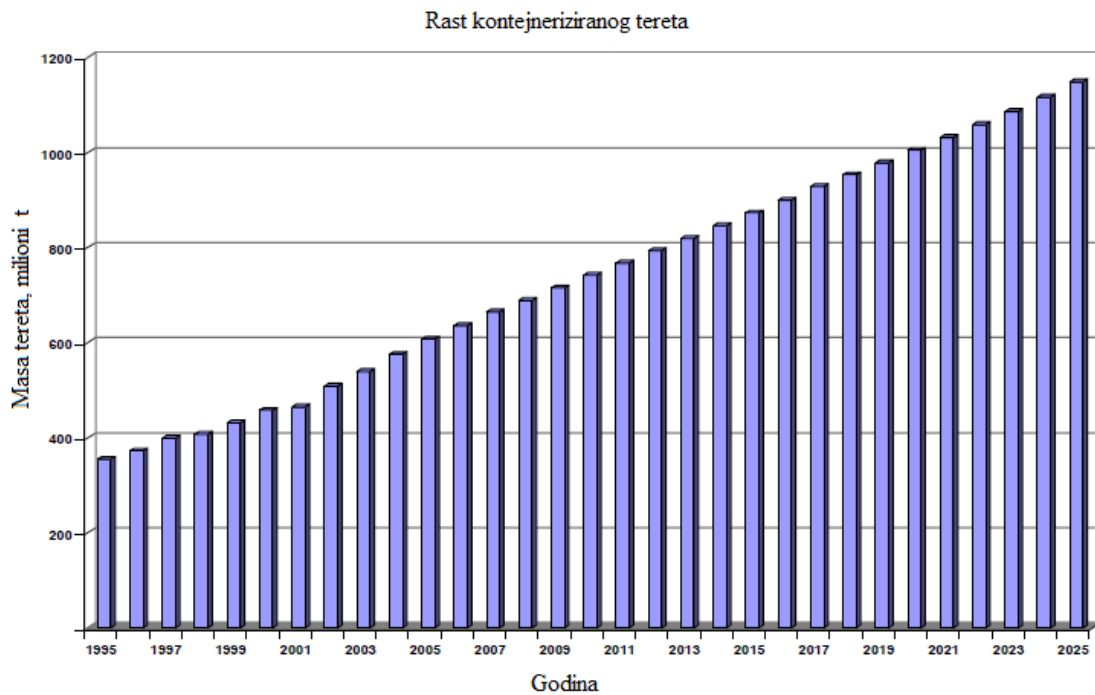
Slika 1-2 Rast ukupne svjetske trgovine za period između 1995. i 2025 godine, [3]

Transport kontejneriziranog tereta, kao dio pomorskog transporta, predstavlja najbrže rastući oblik transporta s trenutačno najboljim projekcijama budućeg razvoja, slika 1-3. Godine 1995. kontejnerizirani teret činio je oko 8.6% ukupnog transporta, a prikazana projekcija, [3], predviđa udvostručenje tog udjela do 2025. godine. Značajna je

i činjenica da je danas ukupan kontejnerizirani teret približno jednak ukupnom tekućem i rasutom teretu.

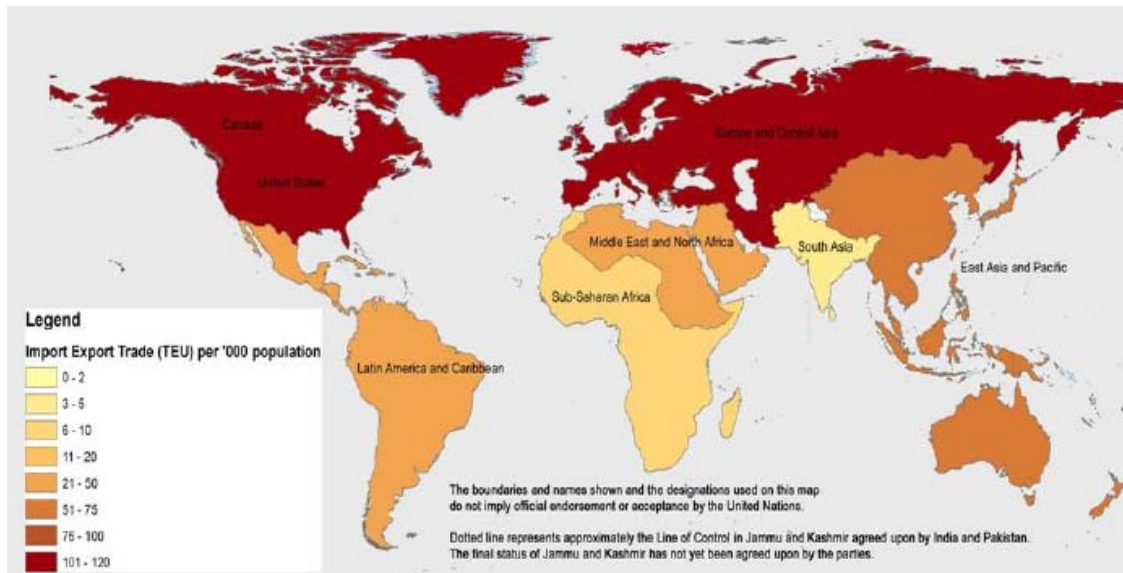


Slika 1-3 Rast pomorskog transporta za period između 1995. i 2025. Godine, [3]



Slika 1-4 Rast kontejneriziranog transporta za period između 1995. i 2025. godine, [3]

Još jedan značajan čimbenik koji je utjecao na proces kontejnerizacije i razvoj kontejnerskih brodova je i geografska diversifikacija kontejnerskog transporta, [4]. Tijekom 1970-ih Japan je imao dominantnu ulogu na Azijskom tržištu kontejneriziranog tereta te je uz razvijene Europske zemlje i SAD bio žarište svjetske trgovine. Njegovu ulogu preuzeli su 1985. godine Hong Kong, Tajvan i Koreja. Nakon približno jednog desetljeća, Kina postaje središte Azijske i svjetske trgovine s godišnjim rastom uvezenog i izvezenog kontejneriziranog tereta od nevjerojatnih 31%. Premda je i danas Kina najagresivniji konkurent na spomenutom tržištu, postoje realna očekivanja pojave Indije kao novog divovskog konkurenta u skorijoj budućnosti. Dobar pokazatelj geografske diversifikacije je intenzitet uvoza / izvoza kontejneriziranog tereta izražen brojem TEU (engl. *twenty feet equivalent unit* –standardna mjera kapaciteta jednog kontejnera dimenzija 20 x 8 x 8.5 stopa ili približno 39 m<sup>3</sup>) na tisuću stanovnika, slika 1-5.

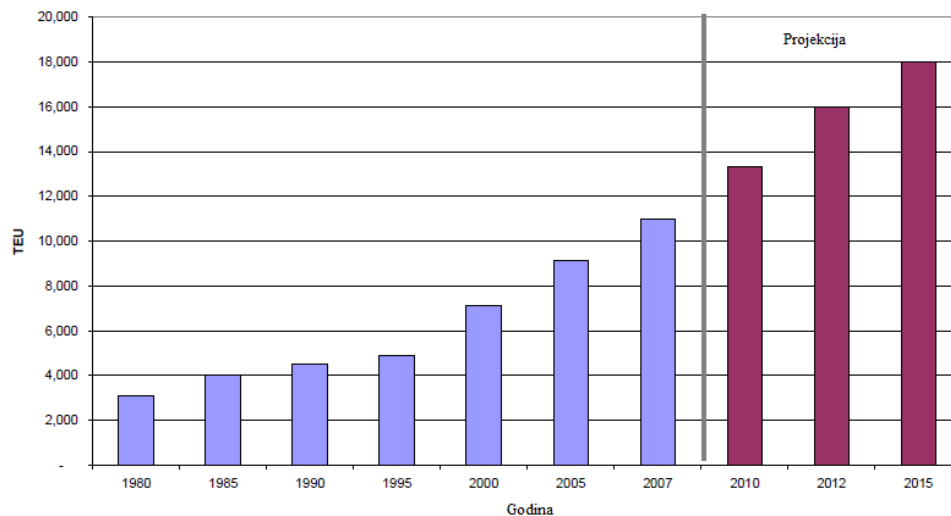


Slika 1-5 Intenzitet uvoza / izvoza kontejneriziranog tereta, broj TEU na 1000 stanovnika, [4]

U okviru opisane političko-društvene atmosfere razvoj kontejnerskog transporta općenito i kontejnerskih brodova prošao je trnovit put koji su obilježila mnoga protivljenja prijevozničkih društava starog kova. Veliki tehnološki i znanstveni izazovi vezani uz projektiranje i gradnju takvih brodova te uz povećanje kapaciteta luka i

osmišljanje novih koncepata pretovara tereta, okupirali su misli mnogih znanstvenika i inženjera.

Koncept kontejnerskog transporta osmislio je 1937. godine Amerikanac Malcolm McLean, no tek uvođenjem kontejnera standardnih dimenzija omogućen je početak šire primjene. Prvi transport kontejneriziranog tereta zbio se 1956. godine na relaciji Newark – Huston kada je trošan tanker na svojoj palubi preveo 58 kontejnera. Plovidba je započela 26. travnja 1956. i trajala je ukupno pet dana, [1]. Prva i druga generacija kontejnerskih brodova kapaciteta 1000 i 1500 TEU zamijenjena je novom generacijom brodova od 2000 i više TEU 1970-ih, najavljujući tako porast koji je doveo do 4000 i više TEU Panamax brodova koji su većinom izgrađeni u ranim 1990-im. Sredinom istog desetljeća većina kompanija započinje s trans-Pacifičkim transportom, što je neizbježno vodilo ka pojavi post-Panamax brodova kapaciteta oko 6000 TEU (1996. godine), nakon čega je, temeljem filozofije ekonomičnosti veličinom (*engl. Economies of scale*), rast nastavljen do kapaciteta preko 11000 TEU. Slika 1-6 prikazuje porast i projekciju veličine kontejnerskih brodova za razdoblje od 35 godina.



Slika 1-6 Porast i projekcija veličine kontejnerskih brodova, [4]

Danas postoje podijeljena mišljenja o budućem rastu kapaciteta kontejnerskih brodova, no osnovni tehnički preduvjeti su uglavnom zadovoljeni, te danas već postoje i

narudžbe za gradnju brodova kapaciteta 18000 TEU. Općenito je stajalište da će veličina kontejnerskih brodova biti određena zahtjevima tržišta, [4].

Osim tehničkih, tehnoloških i ekonomskih uvjeta, nastavak rasta kapaciteta brodova ovisi i o razvoju cjelokupne intermodalne transportne mreže i njene prateće infrastrukture koja obuhvaća sve vidove transporta, počevši od pretovara u luci, pa sve do željeznica i prometnica. No jedan je infrastrukturni element osobito uočljiv, luka i lučni transport. Veličina i kapaciteti luka, te brzina koju određeni brod ima u luci u vrlo velikoj će mjeri utjecati na razvoj i povećanje kapaciteta kontejnerskih brodova, [4].

Iz prethodnih razmatranja lako je zaključiti kako je današnje tržište robe i dobara veoma kompleksno i zahtjevno. Spomenuti su tek neki osnovni utjecajni faktori koji ga oblikuju. Tolika kompleksnost uzrokuje pojavu strateških partnerstava između brodarskih kompanija u čijem su vlasništvu kontejnerski brodovi. Uspostavljanjem partnerstava kompanije pokušavaju racionalizirati troškove poslovanja kako bi opstale na tržištu, omogućuju očuvanje svoje tržišne niše od konkurentnih kompanija te okupljanjem veće količine kapitala omogućuju lakše investiranje u razvoj i izgradnju novih ultra velikih kontejnerskih brodova. Neizbježna posljedica strateškog partnerstva je uzlet nekolicine mega kompanija na štetu manjih, čime se smanjuje konkurentnost, što pak ima za posljedicu moguću pojavu monopolističke politike i diktiranja cijena usluga. Pojava, procesi i posljedice strateškog partnerstva detaljno su izloženi u [5 – 8].

## **1.2 Opis problema**

Utjecaj rasta ekonomije i trgovine imao je dalekosežne posljedice na razvoj općeg plana i konstrukcije kontejnerskih brodova. Već slika 1-6 daje naslutiti neizbježnu potrebu snažnog tehničkog i tehnološkog razvoja sposobnog obuhvatiti sve probleme vezane uz projektiranje, konstrukciju i izgradnju tako velikih brodova. Prema [9], isplativije je graditi brodove većeg kapaciteta, nego više brodova manjeg kapaciteta, jer je trošak poslovanja većih brodova niži u usporedbi s više manjih.

Porast veličine kontejnerskih brodova (iznad 10000 TEU) i zahtjevi koji se postavljaju u službi broda predstavljaju izazove za projektante konstrukcije, jer su se moderni kontejnerski brodovi našli na rubnom području u kojem postoji vrlo malo stručnog iskustva, osobito u pravilima klasifikacijskih društava. Zbog toga je prilikom

konstruiranja takvih brodova potrebno koristiti direktni pristup koji se temelji na općoj hidrodinamici i čvrstoći broda te na njihovoj međusobnoj interakciji zbog čega je neizbježno razviti programske alate sposobne za rukovanje tako složenim problemima.

Uslijed velikih grotlenih otvora, povećanja omjera duljine i gaza broda, omjera duljine i širine broda te strukturne optimizacije trup kontejnerskih brodova postaje vrlo fleksibilna konstrukcija sa sve nižim prirodnim frekvencijama, [10, 11]. Osim toga, zbog povećanja brzine transporta dolazi do povećanja susretnih frekvencija uslijed čega se one mogu preklopiti s prirodnim frekvencijama broda, što neizbježno dovodi do rezonantnog gibanja koje je nepoželjno, kako sa strukturnog stajališta, tako i sa stajališta sigurnosti posade i tereta. Rezonantno gibanje broda manifestira se kao periodički odziv na valnu uzbuđu koji se naziva pruženjem broda (engl. *springing*), [11]. Navedeni prirodni fenomen nije moguće obuhvatiti uobičajenim postupkom proračuna. Odziv broda na valovima obično se određuje hidrodinamičkom analizom na temelju linearne potencijalne teorije uzimajući u obzir samo pomake broda kao krutog tijela, a potom se kvazistatičkom analizom određuju naprezanja pojedinih strukturnih elemenata. Takav je pristup primjeren za relativno krute brodove koji nemaju velike deformacije, no u slučaju fleksibilnih brodova potrebno je primijeniti hidroelastični model pomoću kojeg se sprežanjem strukture i fluida dolazi do pouzdanijeg opisa gibanja i vibriranja broda na valovima.

Osim u slučaju pruženja broda, potrebno je hidroelastični model primijeniti i prilikom određivanja prolaznog odziva strukture, što se naziva podrhtavanjem broda (engl. *whipping*), [11], a koji nastaje zbog djelovanja impulsnog opterećenja, kao što je udaranje pramca o valove (engl. *slamming*). Potreba za istim matematičkim modelom pokazuje se i kod niza drugih problema kao što su analiza velikih plutajućih konstrukcija (VLFS – *Very Large Floating Structures*) [12-14], analiza plutajućih dokova i aerodroma [15], analiza odziva broda za prijevoz rasutog tereta [16-18], analiza odziva SWATH (*Small Waterplane Area Twin Hull*) broda [19, 20] ili pak analiza samopodiznih platformi u teglju [21]. U najnovije vrijeme pojavljuje se i potreba za hidroelastičnom analizom brodova za prijevoz ukapljenog plina (LNG brodova), [22].

Metodologija hidroelastične analize prikazana u [11] sastoji se od definicije strukturnog modela, distribucije mase broda i tereta te definicije geometrije oplakane



površine, nakon čega se provodi proračun "suhih" oblika vibriranja, hidrostatičke krutosti, dodane mase, prigušenja i valnog opterećenja. Potom slijedi proračun prijenosnih funkcija za određivanje odziva broda na morskim valovima u frekventnom području te prolaznog odziva uslijed udaranja pramca u valove u vremenskom području. Opisana metodologija provodi se u okviru hidroelastičnog modela koji se sastoji od strukturnog, hidrodinamičkog i hidrostatičkog modela.

Tip strukturnog modela (gredni model, gredni model višeg reda, 3D FEM model i sl.) najviše ovisi o svrsi za koju se provodi hidroelastična analiza te se na temelju njega određuju modalna matrica krutosti i masa kao rezultat proračuna "suhih" prirodnih vibracija. U okviru hidrodinamičkog modela provodi se proračun hidrodinamičkog opterećenja te se također definiraju matrice dodatne mase i prigušenja nekom od dostupnih metoda hidrodinamike (2D teorija odsječaka, metoda aproksimacije susretne frekvencije, razne 3D metode temeljene na valnoj Greenovoj funkciji).

U okviru hidrostatičkog modela odvija se proračun povratne krutosti kao jedna od vrlo važnih zadataka hidroelastične analize. Povratna krutost definira se kao varijacija poopćene sile koja djeluje na strukturu plovnog objekta, a koja nastaje uslijed malog pravocrtnog pomaka. Iako su problemi hidroelastičnosti poznati već dugi niz godina, još uvijek postoje dvojbe i razilaženja oko uspješne i točne formulacije koeficijenta povratne krutosti, tako da danas još uvijek ne postoji jedinstveno rješenje problema. U osnovi razlikuju se dva pristupa problemu: hidromehanički i strukturni [23]. Među njima ističu se slijedeće formulacije (poredane kronološki): Price i Wu 1985. godine [24], Newman 1994 godine [25], Riggs 1996. godine [26], Huang i Riggs 2000. godine [27], Malenica i Molin 2003. godine [28, 29] te Senjanović i drugi 2008. godine [30]. Kao posljedica različitog pristupa problemu javljaju se nejasnoće oko uzimanja u obzir varijacije moda, simetričnosti matrice povratne krutosti te potrebe uključivanja geometrijske krutosti u povratnu krutost [31, 32]. Uvođenjem konzistentne povratne krutosti koja je utemeljena na transparentnim i logičnim matematičkim i fizikalnim principima [33 - 35] opisani problemi i nejasnoće su razjašnjeni, a nedostaci prethodnih formulacija uklonjeni.

### 1.3 Pregled osnovne literature

Prema [36], termin hidroelastičnost prvi se put pojavljuje u tehničkoj literaturi 1958. godine te prema definiciji uzima u obzir interakciju vanjskih hidrodinamičkih i unutarnjih elastičnih sila, što ju svrstava u niz matematičkih modela za rješavanje zahtjevnih problema interakcije fluida i strukture. Jedan od prvih znanstvenih radova na temu pruženja broda objavio je M. A. Gelgova 1962. godine, koje je prvi put uočeno na brodovima za prijevoz rasutog tereta na Velikim Jezerima, a kasnije na velikim preookeanskim brodovima [11]. Prvi važan iskorak u rješavanju problema hidroelastičnosti učinili su Bishop i Price 1979. godine objavivši knjigu pod nazivom "Hydroelasticity of Ships" [37], nakon čega započinje značajniji razvoj na teorijskom i praktičnom području koji je rezultirao dvodimenzionalnom linearnom i nelinearnom hidroelastičnom teorijom, a nakon toga općenitom trodimenzionalnom linearnom i nelinearnom hidroelastičnom teorijom za proizvoljni oblik deformabilnog plovnog objekta u vremenskoj i frekventnoj domeni. Razvijene metode omogućile su određivanje valnog opterećenja i odziv broda na morskim valovima s ciljem provođenja kvalitetne kvazistatičke ili dinamičke analize brodske strukture ili pak analize zamora i koncentracije naprezanja.

Hidroelastični model, [11], moguće je podijeliti na strukturni, hidrodinamički i hidrostatički model (obuhvaća povratnu krutost) koji se razvijao uzastopno s cjelokupnim hidroelastičnim modelom. Prvu značajnu formulaciju hidrostatičkog modela objavili su Price i Wu, [24], uzimajući u obzir samo član hidrostatskog tlaka. Takva je formulacija predstavljala problem te je motivirala daljnje istraživanje. Newman, [25], je predstavio novi izraz za određivanje povratne krutosti u koji je uključio utjecaj volumetrijske deformacije na hidrostatičke sile. No niti jedna od navedenih formulacija nije uključivala utjecaj gravitacije. Riggs, [26], je uočio i ispravio tu činjenicu. Revidirajući tu formulaciju Huang i Riggs, [27], objavljuju novi, prošireni izraz za proračun povratne krutosti koji u sebi uključuje i geometrijsku krutost. Takva je formulacija dala simetričnu matricu povratne krutosti. Malenica i Molin, [28, 29], te Senjanović i drugi, [30], objavljuju formulaciju povratne krutosti koja se temelji na varijacijskim principima. U zadnjim je formulacijama uključen član koji opisuje varijaciju moda, što je potaklo

profesora Riggsa na raspravu [31] u kojoj izražava sumnju u opravdanost uključivanja varijacije moda u formulaciju povratne krutosti te ističe potrebu uvođenja geometrijske krutosti za primjenu u općoj hidroelastičnoj analizi. U odgovoru na raspravu Senjanović i drugi [32] ističu kako je pouzdanost njihove formulacije potvrđena koreliranjem rezultata analize s eksperimentalnim rezultatima.

Wu i Cui [36] u svojem radu ističu potrebu daljnjeg istraživanja opisanog problema. U svojim posljednjim radovima Senjanović i drugi [23, 34, 35] ističu potrebu transparentne te matematički i fizikalno utemeljene formulacije povratne krutosti, predstavljaju formulaciju konzistentne povratne krutosti, razmatraju potrebu uključivanja varijacije moda, simetričnost i nesimetričnost matrice povratne krutosti te potrebu uključivanja geometrijske krutosti u objedinjenu povratnu krutost.

Također, Senjanović i drugi u [38] daju prikaz formulacije geometrijske krutosti metodom konačnih elemenata te razmatraju utjecaj zanemarenja kutnih deformacija na točnost rezultata. Ističu kako je na taj način moguće geometrijsku matricu krutosti formulirati mnogo jednostavnije i brže uz zanemariv utjecaj na točnost rezultata hidroelastične analize.

#### **1.4 Hipoteza rada**

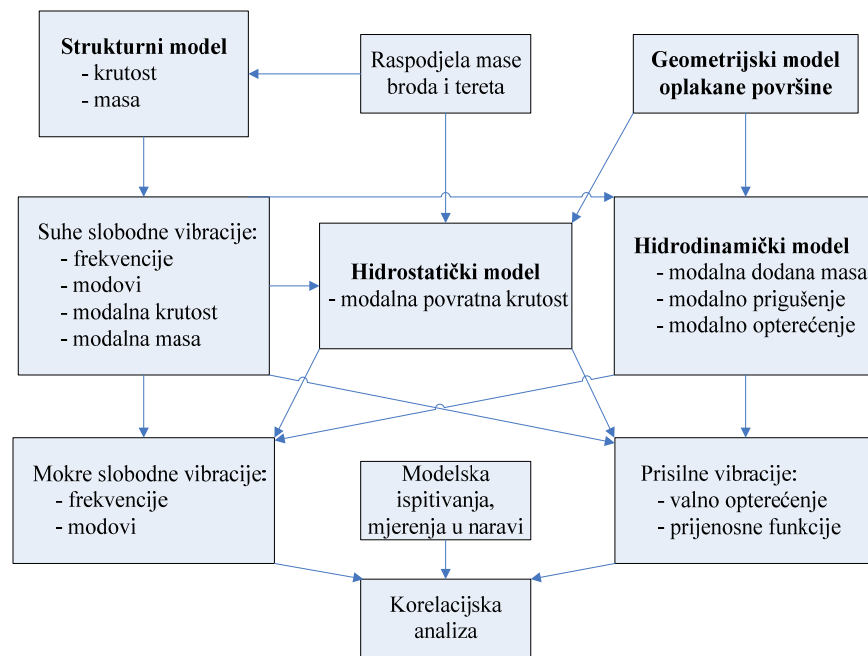
Izložena problematika motivira na istraživanje u okviru doktorskog rada u kojem će biti detaljno izložena konzistentna povratna krutost i njeno objedinjavanje s geometrijskom krutošću te će se izvesti njena formulacija u okvirima metode konačnih elemenata. Zahvaljujući njenoj širokoj primjeni, takva formulacija predstavlja logičan korak u primjeni hidroelastične analize, jer omogućuje stvarno opisivanje povratne krutosti koja se više ne temelji na grednim modelima nego na trodimenzionalnim modelima brodske strukture. Osim toga, formulacija povratne krutosti korištenjem metode konačnih elemenata pruža priliku, kako za istraživanje potrebne razine točnosti hidroelastičnog modela, tako i za lakšu komercijalnu upotrebu istog.

Cilj istraživanja koje će se provoditi u okviru ovog doktorskog rada je proširenje i unapređenje matematičkog modela za provođenje hidroelastične analize za potrebe proračuna dinamičkog odziva velikih kontejnerskih brodova na morskim valovima. Znanstveni doprinos koji bi trebao biti rezultat istraživanja sastoji se u prikazu detaljne

formulacije konzistentne povratne krutosti kao i objedinjene povratne krutosti, koja u sebi uključuje geometrijsku krutost. Sa svrhom boljeg razumijevanja fizikalne pozadine problema analizirat će se doprinos povratne krutosti ukupnom hidroelastičnom odzivu, te će se izvesti formulacija za 3D model primjenom metode konačnih elemenata. Prelazi se na formulaciju povratne krutosti metodom konačnih elemenata radi jednostavnije numeričke integracije odgovarajućih veličina po oplakanoj površini pomoću funkcija oblika. Pri tom će se geometrijska matrica krutosti izvesti bez doprinosa kutnih deformacija uz ostvarenje potrebne točnosti, [37].

## 2 HIDROELASTIČNI MATEMATIČKI MODEL

Metodologija hidroelastične analize, prikazana Slikom 2-1, [11], sastoji se od strukturnog, hidrostatičkog i hidrodinamičkog modela te od modela oplakane površine. U okviru metodologije se, na temelju određenih prirodnih oblika vibriranja u vakuumu, definiraju matrice modalne konvencionalne i povratne krutosti, modalne dodatne mase, hidrodinamičkog prigušenja i valnog opterećenja, nakon čega je moguće odrediti prirodne oblike vibriranja u moru te prijenosne funkcije za proračun odziva broda na valnu uzbuđu.



Slika 2-1 Metodologija hidroelastične analize, [11]

Prirodni oblici vibriranja u vakuum određuju se rješavanjem problema svojstvenih vrijednosti u okviru strukturnog modela

$$([K] - \Omega^2 [M])\{\delta\} = \{0\}, \quad (2.1)$$

gdje je  $[K]$  matrica konvencionalne krutosti,  $[M]$  matrica mase broda s teretom,  $\Omega$  prirodna frekvencija i  $\{\delta\}$  vektor suhog prirodnog oblika vibriranja. Rješenje problema svojstvenih vrijednosti, jednačba (2.1), su  $\Omega_i$  i  $\{\delta\}_i$  koji pripadaju svakom  $i$ -tom prirodnom obliku vibriranja. Formiranjem matrice prirodnih oblika vibriranja

$$[\delta] = [\{\delta\}_1, \{\delta\}_2, \dots, \{\delta\}_n] \quad (2.2)$$

te množenjem matrice konvencionalne krutosti i matrice mase s lijeve i desne strane s izrazom (2.2) slijede izrazi za modalnu konvencionalnu krutost,  $[k]$ , i modalnu masu,  $[m]$

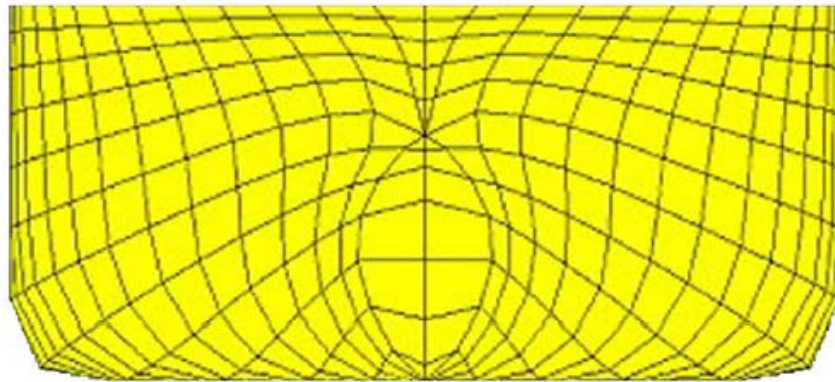
$$[k] = [\delta]^T [K] [\delta] \quad (2.3)$$

$$[m] = [\delta]^T [M] [\delta]. \quad (2.4)$$

Zahvaljujući svojstvu ortogonalnosti prirodnih oblika vibriranja,  $\{\delta\}_i$ , matrice modalne konvencionalne krutosti i modalne mase su dijagonalne. Veličine  $k_i$  i  $\Omega_i^2 m_i$  predstavljaju potencijalnu i kinetičku energiju  $i$ -tog moda. Također, u općem su slučaju prvih šest prirodnih frekvencija (kruti modovi),  $\Omega_i$ , jednake nuli. Zbog toga su i prvih šest komponenata matrice  $[k]$  također jednake nuli, dok su prve tri komponente matrice  $[m]$  jednake masi strukture, a druga tri elementa predstavljaju moment tromosti mase s obzirom na pripadnu koordinatnu os.

Složenost strukturnog modela ovisi o svrsi provođenja hidroelastične analize te je za preliminarnu projektnu fazu ili pak za komparativnu analizu dovoljno upotrijebiti 1D gredni FEM model, primjerice Euler-Bernoulijev, Timošenskov ili neki drugi složeniji tip grednog elementa. Za potrebe detaljne, završne analize i analize zamora potrebno je koristiti 3D FEM model.

Područje integracije podintegralnih funkcija hidrodinamičkog i hidrostatičkog modela predstavlja model oplakane površine koji definicijom čvorova i panela matematički opisuje geometriju oplakane površine. Složenost i finoća mreže oplakane površine ovisi o metodi kojom se određuje hidrodinamičko opterećenje konstrukcije. Slikom 2-2, [11] prikazana je racionalna mreža oplakane površine koja se koristi u okviru 3D radijacijsko-difrakcijske teorije. U slučaju da je strukturni model jedan od raspoloživih 1D modela, potrebno je izvršiti raspršivanje modalnih čvornih pomaka u čvorove oplakane površine na način prikazan u [11].



Slika 2-2 Racionalna mreža oplakane površine, [11]

Potpuno konzistentan hidrodinamički model s brzinom napredovanja još uvijek ne postoji, pa čak niti za brod kao kruto tijelo. Zbog toga je neophodno koristiti približne postupke proračuna hidrodinamičkih karakteristika broda poput tzv. 2D teorije odsječaka, metode susretne frekvencije ili raznih modela koji se temelje na valnoj Greenovoj funkciji.

Kako bi se uspješno izvelo sprezanje strukturnog i hidrodinamičkog modela potrebno je ukupnu vanjsku hidrodinamičku silu,  $F^h$ , razdvojiti na dio koji ovisi o pomacima strukturnog modela,  $F^R$ , i na dio koji predstavlja uzbuđu,  $F^{DI}$ , odnosno

$$F^h = F^R + F^{DI} . \quad (2.5)$$

Osim toga, primjenom metode superpozicije modova, vektor deformacije oplakane površine može se prikazati kao

$$\{H(x, y, z)\} = \sum_{i=1}^N \xi_i \{h(x, y, z)\}_i \quad (2.6)$$

gdje je  $\{h(x, y, z)\}_i$   $i$ -ti vektor modalnog pomaka strukturnog (suhog) modela, a  $\xi_i$  pripadajući nepoznati koeficijent, tj. amplituda  $i$  - tog moda. Pritom se pod pojmom modalnih pomaka podrazumjevaju pomaci broda kao krutog tijela ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) te pomaci nastali kao posljedica deformacije broda ( $i = 7, 8, \dots, N$ ).

Pod pretpostavkom potencijalne teorije strujanja potencijal brzine strujanja definiran je Laplaceovom diferencijalnom jednačbom te rubnim uvjetima na slobodnoj i oplakanoj površini

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, \quad \text{u fluidu} \\ -k\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= 0, \quad \text{na slobodnoj površini, } z = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= -i\omega\langle H \rangle\{n\}, \quad \text{na oplakanoj površini, } S, \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdje je  $k$  valni broj,  $k = \frac{\omega^2}{g}$ ,  $\omega$  valna frekvencija i  $\{n\}$  vektor normale. Na temelju linearne teorije valova slijedi dekompozicija ukupnog potencijala brzine strujanja

$$\varphi = \varphi_I + \varphi_D - i\omega \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_{Rj}, \quad (2.8)$$

gdje su  $\varphi_I$ ,  $\varphi_D$  i  $\varphi_{Rj}$  redom potencijal susretnog vala te difrakcijski i radijacijski potencijal. Na temelju jednačbe (2.8), rubni uvjeti, jednačba (2.7), prelaze u



$$\frac{\partial \varphi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_I}{\partial n}, \quad \frac{\partial \varphi_{Rj}}{\partial n} = \langle h \rangle_j \{n\}. \quad (2.9)$$

Osim rubnih uvjeta opisanih jednađbom (2.9), difrakcijski i radijacijski potencijal moraju zadovoljiti i radijacijski uvjet u beskonačnosti. Rješenje jednađbe (2.7), koristeći jednađbe (2.8) i (2.9), je potencijal brzine strujanja pomoću kojeg se, na temelju Bernoullijeve jednađbe određuje vrijednost tlaka

$$p = i\omega\rho\varphi - \rho gZ - \delta Z_0. \quad (2.10)$$

Prvi član jednađbe (2.10) predstavlja hidrodinamički tlak čijom integracijom po oplakanoj površini slijede modalne hidrodinamičke sile koje za jediničnu amplitudu vala glase

$$F_i^{DI} = i\omega\rho \iint_S (\varphi_I + \varphi_D) \langle h \rangle_i \{n\} dS, \quad (2.11)$$

$$F_i^R = \rho\omega^2 \sum_{j=1}^N \xi_j \iint_S \varphi_{Rj} \langle h \rangle_i \{n\} dS. \quad (2.12)$$

Jednađba (2.11) predstavlja modalnu uzbudnu silu, a jednađba (2.12) se može dalje razložiti na modalnu inercijsku silu, koja je u fazi s ubrzanjem, i na modalnu silu prigušenja koja je u fazi s brzinom oscilacija,

$$F_i^a = \operatorname{Re}(F_i^R) = \omega^2 \sum_{j=1}^N \xi_j A_{ij}, \quad A_{ij} = \rho \operatorname{Re} \iint_S \varphi_{Rj} \langle h \rangle_i \{n\} dS, \quad (2.13)$$

$$F_i^v = \operatorname{Im}(F_i^R) = \omega \sum_{j=1}^N \xi_j B_{ij}, \quad B_{ij} = \rho\omega \operatorname{Im} \iint_S \varphi_{Rj} \langle h \rangle_i \{n\} dS, \quad (2.14)$$

gdje su  $A_{ij}$  i  $B_{ij}$  elementi matrice dodane mase i hidrodinamičkog prigušenja. Postupak određivanja elemenata  $A_{ij}$  i  $B_{ij}$  je dobro poznat, [38], te je isti jednadžbama (2.11) i (2.12) proširen na elastične modove.

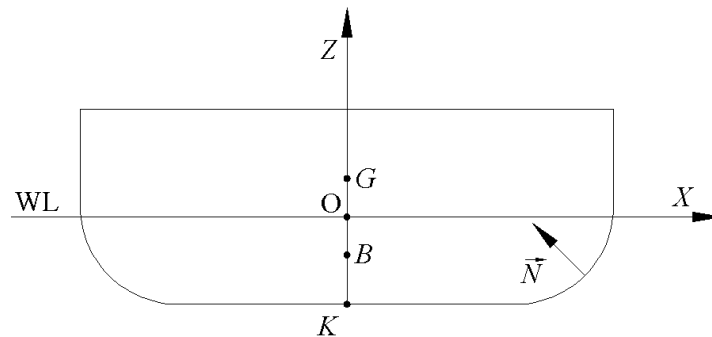
Zahvaljujući linearnosti problema koji je opisan lineariziranim dijelom Bernoulijeve jednadžbe, jednadža (2.10), moguće je hidrodinamičku i hidrostatičku komponentu razmatrati odvojeno i primjenom različitih metoda bez utjecaja na konačni rezultat. Stoga se promjenjivi dio hidrostatičkog dijela tlaka u jednadžbi (2.10),  $-\rho gZ$ , i deformacija broskog trupa na mirnoj vodi,  $\delta Z_0$ , razmatraju u okviru "hidrostatičkog" modela koji je detaljno opisan u narednim poglavljima.

### 3 POVRATNA KRUTOST

Formulacija izraza za proračun povratne krutosti temelji se na razmatranju trenutačne (deformirane) i referentne (nedeformirane) geometrije oplakane površine. Pritom je trenutačna geometrija oplakane površine posljedica malih pravocrtnih pomaka. Na temelju takvog fizikalnog modela moguće je primjenom usmjerene derivacije i metode superpozicije modova odrediti komponente matrice povratne krutosti za potrebe hidroelastične analize. Prilikom izvoda svih izraza koji opisuju povratnu krutost koristi se vektorska, matrična ili indeksna notacija, ovisno o njenoj prikladnosti. Također, svi izrazi izvedeni su u pravokutnim Kartezijevim koordinatama zbog čega se ne razlikuju kovarijantne i kontravarijantne komponente tenzora, te će se tenzorski indeksi pisati kao gornji ili donji, ovisno o prikladnosti zapisa.

#### 3.1 Hidrostatička povratna krutost

Povratna krutost proizvoljnog tijela koje pluta ili plovi površinom vode sastoji se od hidrostatičkog i gravitacijskog dijela. U svrhu formulacije hidrostatičke povratne krutosti potrebno je razmotriti silu koja nastaje djelovanjem hidrostatičkog tlaka na oplakanu površinu. Problem se razmatra u globalnom desnom Descartesovom koordinatnom sustavu, čije  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  osi predstavljaju uzdužnu, poprečnu i vertikalnu os. Ishodište koordinatnog sustava nalazi se u središtu vodne linije, a vertikalna os je pozitivna prema gore, slika 3-1. Budući da se problem razmatra u globalnom sustavu, sve relevantne oznake pisane su velikim slovima.



Slika 3-1 Definicija koordinatnog sustava

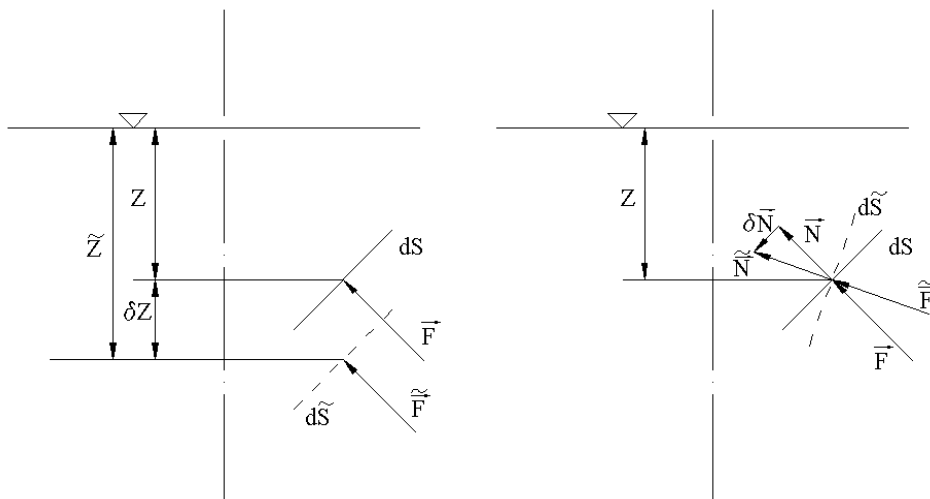
U slučaju nedeformirane oplakane površine  $S$ , infinitezimalna sila uslijed hidrostatičkog tlaka glasi

$$d\mathbf{F} = -\rho g Z \mathbf{N} dS, \quad (3.1)$$

gdje  $Z = Z(x, y)$  označuje aplikatu površine  $dS$ , a  $\mathbf{N}$  jedinični vektor normale na istu površinu usmjeren prema unutrašnjosti, slika 3-1. Hidrostatička sila u slučaju deformirane oplakane površine glasi

$$d\tilde{\mathbf{F}} = -\rho g \tilde{Z} \tilde{\mathbf{N}} d\tilde{S}, \quad (3.2)$$

gdje su tildom označene sve veličine ovisne o deformaciji. Promjena vertikalne koordinate,  $\tilde{Z}$ , mijenja amplitudu diferencijalne hidrostatičke sile  $d\tilde{\mathbf{F}}$ , a promjena vektora normale,  $\tilde{\mathbf{N}}$ , mijenja smjer djelovanja sile, tj. utječe na odnos između njenih komponentata, slika 3-2.



Slika 3-2 Fizikalna interpretacija promjene vertikalne koordinate i smjera normale na diferencijalnu površinu

### 3.1.1 Rad infinitezimalne sile uslijed hidrostatičkog tlaka

Rad  $W$  koji ostvaruje konstantna sila  $d\mathbf{F}$  na pomaku  $\mathbf{h}$  izražen je skalarnim umnoškom dvaju vektora kao

$$dW = d\mathbf{F}\mathbf{h} . \quad (3.3)$$

Jednadžbom (3.3) moguće je opisati i rad promjenljive sile  $d\mathbf{F}(\mathbf{c}(a))$  na pomaku duž prostorne krivulje  $\mathbf{c}(a)$ , [39], duž koje se infinitezimalni dio oplakane površine  $dS$  translacija, rotira i deformira, kao sumu radova ostvarenih na pomacima duž malih tetiva, slika 3-3. Rad  $\Delta W$  koji ostvari promjenljiva sila  $d\mathbf{F}(\mathbf{c}(a))$  na pravocrtном pomaku točke  $P$  između položaja određenih duljinom lukova  $a_P$  i  $a_{P_C}$  na krivulji  $\mathbf{c}(a)$ , tj.  $\mathbf{c}(a_P)$  i  $\mathbf{c}(a_{P_C})$  je

$$\Delta(dW) = d\mathbf{F}(\mathbf{c}(a_P))[\mathbf{c}(a_{P_C}) - \mathbf{c}(a_P)] \approx d\mathbf{F}(\mathbf{c}(a)) \frac{d\mathbf{c}}{da} \Delta a \quad (3.4)$$

Za slučaj kada  $\Delta a \rightarrow 0$  jednadžba (2.4) prelazi u oblik

$$d(dW) = d\mathbf{F}(\mathbf{c}(a))\mathbf{t}(a)da , \quad (3.5)$$

gdje je  $\mathbf{t}(a)$  vektor tangente na krivulju  $\mathbf{c}(a)$ , a  $a$  duljina luka krivulje  $\mathbf{c}(a)$  od  $a_P$  do  $a_{P_C}$ , slika 3-4. Za proizvoljnu točku  $P_C$  koja se nalazi na krivulji, jednadžba (3.5), može se zapisati kao

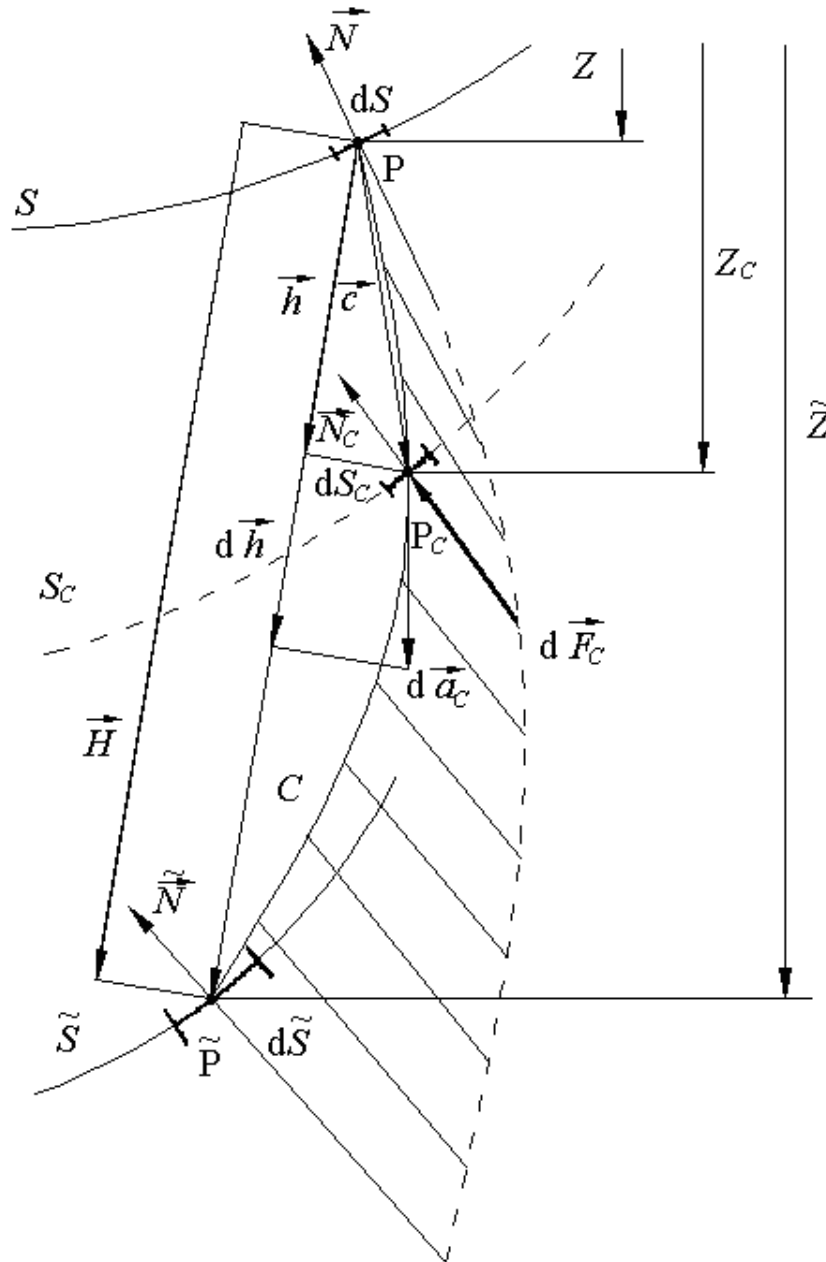
$$d(dW_c) = d\mathbf{F}_c \mathbf{t}_c da . \quad (3.6)$$

Za istu točku prema jednadžbi (3.1) slijedi da je

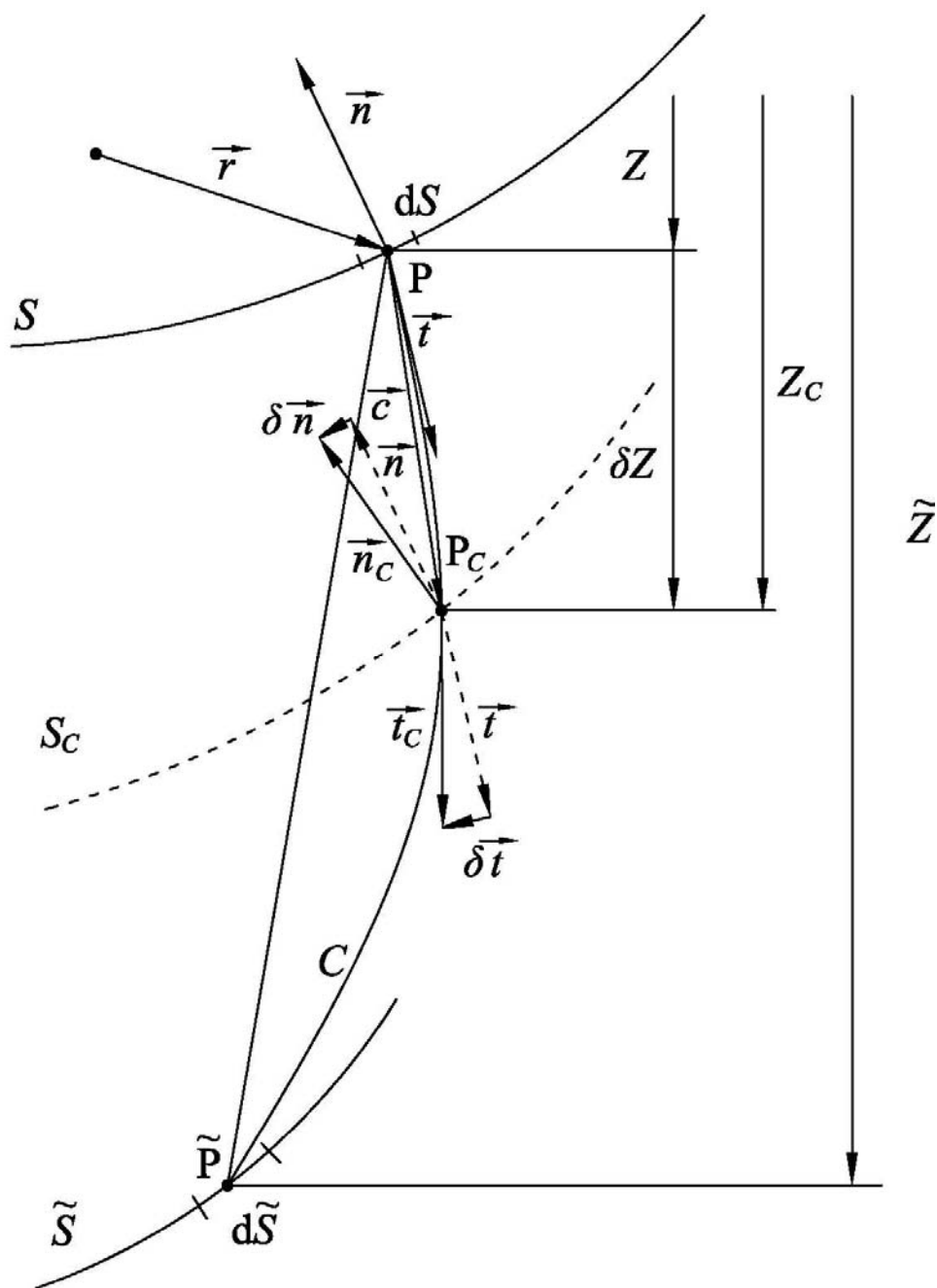
$$dF_c = -\rho g Z_c N_c dS_c, \quad (3.7)$$

čija raspodjela je dana na Slici 3-3. Uvrštavanjem izraza (3.7) u (3.6) slijedi

$$d(dW_c) = -\rho g Z_c N_c t_c dS_c da. \quad (3.8)$$



Slika 3-3 Rad infinitezimalne sile



Slika 3-4 Vektor tangente u proizvoljnoj toči  $P_c$

Jednadžba (3.8) razvojem u Taylorov red, Prilog A, oko proizvoljne točke  $P_c$  na krivulji  $\mathbf{c}(a)$ , i zadržavanjem samo veličina prvog reda prelazi u oblik

$$d(dW_c) = -\rho g Z \mathbf{N} t dS da - \rho g [D_C(Z) \mathbf{N} t dS + Z D_C(\mathbf{N}) t dS + Z \mathbf{N} D_C(\mathbf{t}) dS + Z \mathbf{N} t D_C(dS)] da, \quad (3.9)$$

gdje je operator  $D_C(\ )$  definiran slijedećim jednadžbama:

$$D_C(Z) = \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{c}} = (\mathbf{c} \nabla) Z, \quad (3.10a)$$

$$D_C(\mathbf{N}) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{c}} = (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{N}, \quad (3.10b)$$

$$D_C(\mathbf{t}) = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{c}} = (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{t}, \quad (3.10c)$$

$$D_C(dS) = \frac{\partial (dS)}{\partial \mathbf{c}} = (\mathbf{c} \nabla) dS. \quad (3.11d)$$

Četiri pribrojnika člana drugog reda Taylorovog razvoja jednadžbe (3.8) u sebi uključuju usmjerenu derivaciju te, prema [39 i 40], jednadžba (3.9) prelazi u oblik

$$dW_c = -\rho g Z \mathbf{N} t dS da - \rho g [(\mathbf{c} \nabla) Z \mathbf{N} t dS + Z (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{N} t dS + Z \mathbf{N} (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{t} dS + Z \mathbf{N} t (\mathbf{c} \nabla) dS] da. \quad (3.11)$$

Posljednji pribrojnik člana drugog reda jednadžbe (3.11) je zanemarivo mala veličina u odnosu na preostala tri te uz relaciju

$$(\mathbf{c} \nabla) Z = c_z, \quad (3.12)$$

gdje je  $c_z$  vertikalna komponenta vektora  $\mathbf{c}$ , slijedi da je diferencijalni rad jednak

$$dW_c = -\rho g Z \mathbf{N} t dS da - \rho g [c_z \mathbf{N} t dS + Z (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{N} t dS + Z \mathbf{N} (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{t} dS] da. \quad (3.13)$$



Integracijom jednadžbe (3.13) po volumenu deformacije, koji je omeđen vodnom linijom i oplakanom površinom prije i nakon pomaka, slijedi izraz za ukupni ostvareni rad

$$W = -\rho g \iint_S \int_0^A [(Z + c_z) \mathbf{N} \mathbf{t} + Z (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{N} \mathbf{t} + Z \mathbf{N} (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{t}] da dS, \quad (3.14)$$

gdje  $A$  označuje ukupnu duljinu krivulje  $\mathbf{c}(a)$ .

Pomak proizvoljne točke oplakane površine po glatkoj krivulji  $\mathbf{c}(a)$  od početne do konačne točke, slika 3-3, moguće je u okviru linearne hidroelastične teorije zamijeniti linearnom aproksimacijom, iz čega proizlaze slijedeće relacije, slika 3-3,

$$\mathbf{c} \approx \mathbf{H}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{t} da \approx d\mathbf{H}, \quad (3.16)$$

gdje je  $\mathbf{H}$  pravocrtni vektor pomaka. Uvrštavanjem jednadžbi (3.15) i (3.16) u (3.14) slijedi izraz za ukupni ostvareni rad u okviru linearne hidroelastične teorije

$$W = -\rho g \iint_S \int_0^{|\mathbf{H}|} [(Z + H_z) \mathbf{N} + Z (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{N} + Z \mathbf{N} (\mathbf{H} \nabla)] d\mathbf{H} dS. \quad (3.17)$$

Određivanje usmjerene derivacije normale na diferencijalnu površinu, drugi član u jednadžbi (3.17), je zahtjevan postupak koji uključuje poznavanje normale na referentnu i trenutačnu oplakanu površinu te njezinu promjenu duž vektora pomaka. Mnogo je jednostavnije, korištenjem veze između trenutne i referentne diferencijalne površine. problem opisati inverznim izrazom. Veza između trenutne i referentne diferencijalne površine dana je izrazom, [41]

$$d\tilde{\mathbf{S}} = |\mathbf{F}| (\mathbf{F}^{-1})^T dS, \quad (3.18)$$

gdje je  $\mathbf{F}$  Lagrangeov gradijent deformiranja koji u razvijenom obliku glasi

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial X_1}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_2} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_3}{\partial Y_2} & \frac{\partial X_3}{\partial Y_3} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

gdje je

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{H}, \quad (3.20)$$

pri čemu  $\mathbf{X}$  označuje prostorne, a  $\mathbf{Y}$  materijalne koordinate. Uvrštavanjem jednadžbe (3.20) u (3.19) slijedi

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial H_x}{\partial X} & \frac{\partial H_x}{\partial Y} & \frac{\partial H_x}{\partial Z} \\ \frac{\partial H_y}{\partial X} & 1 + \frac{\partial H_y}{\partial Y} & \frac{\partial H_y}{\partial Z} \\ \frac{\partial H_z}{\partial X} & \frac{\partial H_z}{\partial Y} & 1 + \frac{\partial H_z}{\partial Z} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Derivacija vektora normale  $\mathbf{N}$  u smjeru vektora pomaka  $\mathbf{H}$ , izraz (3.17), može se izraziti kao

$$(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{N} = \frac{d\tilde{\mathbf{S}} - d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|}, \quad (3.22)$$

čime, nakon uvrštavanja veze između trenutne i referentne diferencijalne površine, jednadžba (3.21), prelazi u

$$(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{N} = \left( |\mathbf{F}| (\mathbf{F}^{-1})^T - \mathbf{I} \right) \mathbf{N}, \quad (3.23)$$

gdje je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica, a  $\mathbf{N}$  jedinični vektor normale. Nakon provedene inverzije i transponiranja, uz zanemarenje članova nižeg reda, usmjerena derivacija vektora normale može se izraziti kao

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{N} = & \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial Y} + \frac{\partial H_z}{\partial Z} \right) N_x - \frac{\partial H_y}{\partial X} N_y - \frac{\partial H_z}{\partial X} N_z \right] \mathbf{i} \\ & + \left[ -\frac{\partial H_x}{\partial Y} N_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial X} + \frac{\partial H_z}{\partial Z} \right) N_y - \frac{\partial H_z}{\partial Y} N_z \right] \mathbf{j} \\ & + \left[ -\frac{\partial H_x}{\partial Z} N_x - \frac{\partial H_y}{\partial Z} N_y + \left( \frac{\partial H_x}{\partial X} + \frac{\partial H_y}{\partial Y} \right) N_z \right] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ako se članovima unutar uglatih zagrada jednadžbe (3.24) dodaju i oduzmu  $\frac{\partial H_x}{\partial X} N_x$ ,

$\frac{\partial H_y}{\partial Y} N_y$  i  $\frac{\partial H_z}{\partial Z} N_z$  slijedi da se jednadžba (3.24) može zapisati kao

$$(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{N} = \mathbf{N}(\nabla\mathbf{H}) - \left[ \left( \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial X} \right) \mathbf{i} + \left( \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Y} \right) \mathbf{j} + \left( \mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial Z} \right) \mathbf{k} \right], \quad (3.25)$$

odnosno

$$(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{N} = \mathbf{N}(\nabla\mathbf{H}) - \mathbf{N}(\mathbf{H}\nabla). \quad (3.26)$$

Konačno, uvrštavanjem jednadžbe (3.26) u (3.17), izraz za ukupni ostvareni rad glasi

$$W = -\rho g \iint_S \int_0^{|\mathbf{H}|} \left[ Z + H_z + Z(\nabla\mathbf{H}) \right] \mathbf{N} d\mathbf{H} dS. \quad (3.27)$$

Prvi član jednadžbe (3.27) predstavlja rad nepromjenjive sile tlaka, drugi član predstavlja dopinos promjene tlaka ukupnom radu, a treći dopinos pomaka i vektora normale. U vezi s time se u narednom poglavlju definiraju i koeficijenti povratne krutosti.

### 3.1.2 Koeficijenti hidrostatičke povratne krutosti

Krutost je definirana kao veza između prirasta poopćene sile (rada) i prirasta pomaka. Stoga slijedi iz jednadžbe (3.27)

$$\delta W = -\rho g \iint_S [Z + H_z + Z(\nabla \mathbf{H})] \delta \mathbf{H} \mathbf{N} dS, \quad (3.28)$$

gdje  $\delta \mathbf{H}$  predstavlja mali pomak. Primjenom metode superpozicije modova, vektor pomaka  $\mathbf{H}$  i  $\delta \mathbf{H}$  izražavaju se sumama

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j \xi_j, \quad (3.29)$$

$$\delta \mathbf{H} = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i \delta \xi_i, \quad (3.30)$$

gdje su  $\mathbf{H}_i$  i  $\mathbf{H}_j$  prirodni oblici vibriranja (modovi), a  $\xi_i$  i  $\xi_j$  nepoznati modalni koeficijenti. Uvrštavanjem jednadžbi (3.29) i (3.30) u jednadžbu (3.28) slijedi

$$\delta W_i = - \left[ F_i^p + \sum_{j=1}^N (C_{ij}^p + C_{ij}^{nh}) \xi_j \right] \delta \xi_i, \quad (3.31)$$

gdje je  $\delta W_i$  promjena modalne sile uslijed malog pomaka  $(\delta \mathbf{H})_i$ , a koeficijenti  $F_i^p$ ,  $C_{ij}^p$  i  $C_{ij}^{nh}$  su redom

$$F_i^p = \rho g \iint_S Z \mathbf{H}_i \mathbf{N} dS, \quad (3.32)$$

$$C_{ij}^p = \rho g \iint_S \mathbf{H}_i H_z^j \mathbf{N} dS, * \quad (3.33)$$

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \iint_S Z \mathbf{H}_i (\nabla \mathbf{H}_j) \mathbf{N} dS. \quad (3.34)$$

Koeficijenti  $F_i^p$  su elementi vektora opterećenja uslijed hidrostatskog tlaka. Koeficijenti  $C_{ij}^p$  su elementi matrice povratne krutosti uslijed promjene tlaka, a koeficijenti  $C_{ij}^{nh}$  uslijed promjene vektora normale i moda. Prema jednadžbama (3.33) i (3.34) slijedi da proizvoljni element matrice  $C_{ij}^p$  predstavlja koeficijent hidrostatičke modalne povratne sile  $i$ -tog oblika uslijed promjene tlaka zbog jediničnog  $j$ -tog oblika vibriranja. Također, proizvoljni element matrice  $C_{ij}^{nh}$  predstavlja koeficijent hidrostatičke modalne povratne sile  $i$ -tog oblika uslijed promjene vektora normale i moda zbog jediničnog  $j$ -tog oblika vibriranja.

## 3.2 Gravitacijska povratna krutost

Povratna krutost, osim hidrostatičke, obuhvaća i gravitacijsku komponentu. Postupak formulacije izraza za rad gravitacijske sile i koeficijenata gravitacijske povratne krutosti jednak je postupku koji je korišten prilikom formulacije izraza za koeficijente hidrostatičke povratne krutosti, podglavlje 3.1.

### 3.2.1 Rad infinitezimalne gravitacijske sile

Infinitezimalna gravitacijska sila koja djeluje na nedeformirano tijelo izražena je kao

$$d\mathbf{Q} = -g \rho_s \mathbf{k} dV, \quad (3.35)$$

gdje je vektor  $\mathbf{k}$  definiran u skladu sa slikom 3-1,  $\rho_s$  je gustoća, a  $V$  je volumen strukture. U slučaju deformiranog tijela, gravitacijska sila je definirana kao

---

\* Izrazi su izvedeni u pravokutnim Kartezijevim koordinatama zbog čega se kovarijantne i kontravarijantne komponente tenzora ne razlikuju.

$$d\tilde{Q} = -g\tilde{\rho}_s \mathbf{k} d\tilde{V} . \quad (3.36)$$

Zahvaljujući proporcionalnoj vezi između gustoće i volumena proizlazi jednakost

$$dQ = d\tilde{Q} , \quad (3.37)$$

te stoga slijedi da je infinitezimalni rad koji gravitacijska sila ostvari na proizvoljnom putu jednak, slika 3-3,

$$d(dW) = dQ da . \quad (3.38)$$

Jednadžba (3.49), korištenjem veza između geometrijskih značajki proizvoljne krivulje koje su sadržane u jednadžbama (3.4) – (3.6), prelazi u oblik

$$d(dW) = dQ \mathbf{t}_c da . \quad (3.39)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (3.35) u (3.39) slijedi izraz za infinitezimalni rad gravitacijske sile

$$d(dW) = -g\rho_s \mathbf{k} \mathbf{t}_c da dV . \quad (3.40)$$

Razvojem u Taylorov red i uzimanjem u obzir samo veličine prvog reda, jednadžba (3.40) se svodi na

$$d(dW) = -g\rho_s \mathbf{k} t da dV - g\rho_s \mathbf{k} D_C(\mathbf{t}) da dV , \quad (3.41)$$

gdje je

$$D_c(\mathbf{t}) = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{c}} = (\mathbf{c}\nabla)\mathbf{t}. \quad (3.42)$$

Drugi pribrojnik jednadžbe (3.41) u sebi sadrži usmjerenu derivaciju,  $D_c$ , te prema [39 i 40] ista jednadžba prelazi u oblik

$$dW = -g\rho_s \mathbf{k} t da dV - g\rho_s \mathbf{k} (\mathbf{c}\nabla) t da dV. \quad (3.43)$$

Ukupni rad koji ostvaruje gravitacijska sila duž proizvoljne krivulje rezultat je integracije jednadžbe (3.43) po volumenu strukture i duž krivulje  $\mathbf{c}(a)$

$$W = -g \iiint_V \rho_s \left[ \int_C \mathbf{k} (\mathbf{t} + (\mathbf{c}\nabla)\mathbf{t}) da \right] dV. \quad (3.44)$$

U skladu s pretpostavkama iz prethodnog poglavlja, uzimajući u obzir jednadžbe (3.15) i (3.16), jednadžba (3.43) može se zapisati u lineariziranom obliku kao

$$W = -g \iiint_V \rho_s \left[ \int_0^{|\mathbf{H}|} \mathbf{k} (d\mathbf{H} + (\mathbf{H}\nabla)d\mathbf{H}) \right] dV. \quad (3.45)$$

Množenjem članova podintegralne funkcije unutar zagrade s vektorom  $\mathbf{k}$  slijedi izraz za rad ostvaren gravitacijskom silom duž pravocrtnog pomaka u obliku

$$W = -g \iiint_V \rho_s \left[ \int_0^{|\mathbf{H}|} dH_z + (\mathbf{H}\nabla)dH_z \right] dV. \quad (3.46)$$

Drugi pribrojnik podintegralne funkcije u (3.46) predstavlja derivaciju pomaka u smjeru vektora pomaka  $\mathbf{H}$ . Budući da je derivacija pomaka zapravo deformacija, drugi pribrojnik iste podintegralne funkcije predstavlja deformaciju u smjeru vektora pomaka.

Međutim, za određivanje koeficijenata povratne krutosti nužno je poznavati vezu između poopcene sile i pomaka, a ne deformacije. Stoga je potrebno jednadžbu (3.46) dodatno prilagoditi primjenom jednakosti

$$(\mathbf{H}\nabla)d\mathbf{H} = (d\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}, \quad (3.47)$$

koja vrijedi za vektore konstantnog smjera. Uvrštavanjem jednadžbe (3.47) u (3.46) slijedi konačan izraz za rad koji ostvaruje gravitacijska sila na linearnom pomaku

$$W = -g \iiint_V \rho_S \left[ \int_0^{|\mathbf{H}|} dH_z + (d\mathbf{H}\nabla)H_z \right] dV. \quad (3.48)$$

### 3.2.2 Koeficijent gravitacijske povratne krutosti

Prema definiciji krutosti, koja je dana u podpoglavlju 3.1.2, iz jednadžbe (3.48) slijedi da se prirast poopcene sile (rada) i prirast pomaka odnose kao

$$\delta W = -g \iiint_V \rho_S \left[ \delta H_z + (\delta\mathbf{H}\nabla)H_z \right] dV, \quad (3.49)$$

gdje  $\delta\mathbf{H}$  predstavlja mali pomak. Primjenom metode superpozicije modova, odnosno uvrštavanjem jednadžbi (3.29) i (3.30) u (3.49) slijedi

$$\delta W_i = - \left( F_i^m + \sum_{j=1}^N C_{ij}^m \xi_j \right) \delta \xi_i, \quad (3.50)$$

gdje je  $\delta W_i$  promjena modalne sile uslijed malog pomaka  $\delta\mathbf{H}$ , a koeficijenti  $F_i^m$  i  $C_{ij}^m$  su redom



$$F_i^m = g \iiint_V \rho_s H_z^i dV, \quad (3.51)$$

$$C_{ij}^m = g \iiint_V \rho_s (\mathbf{H}_i \nabla) H_z^j dV. \quad (3.52)$$

Pritom su koeficijenti  $F_i^m$  elementi vektora gravitacijskog opterećenja, a koeficijenti  $C_{ij}^m$  elementi matrice gravitacijske povratne krutosti. Prema jednadžbi (3.52) slijedi da proizvoljni element matrice  $C_{ij}^m$  predstavlja koeficijent gravitacijske povratne sile  $i$ -tog oblika uslijed pomaka zbog jediničnog  $j$ -tog oblika vibriranja.

### 3.3 Ukupna povratna krutost

Ukupna povratna krutost izražena je sumiranjem izvedenih koeficijenata povratne krutosti, jednadžba (3.33), (3.34) i (3.52), odnosno

$$C_{ij} = C_{ij}^p + C_{ij}^{nh} + C_{ij}^m, \quad (3.53)$$

gdje svaki član jednadžbe (3.53) glasi u razvijenom obliku

$$C_{ij}^p = \rho g \iint_S (H_x^i N_x + H_y^i N_y + H_z^i N_z) H_z^j dS, \quad (3.54)$$

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \iint_S Z (H_x^i N_x + H_y^i N_y + H_z^i N_z) \left( \frac{\partial H_x^j}{\partial X} + \frac{\partial H_y^j}{\partial Y} + \frac{\partial H_z^j}{\partial Z} \right) dS, \quad (3.55)$$

$$C_{ij}^m = g \iiint_V \rho_s \left( H_x^i \frac{\partial H_z^j}{\partial X} + H_y^i \frac{\partial H_z^j}{\partial Y} + H_z^i \frac{\partial H_z^j}{\partial Z} \right) dV. \quad (3.56)$$

Ukupni vektor opterećenja dobije se sumiranjem vektora opterećenja uslijed hidrostatičkog tlaka, jednadžba (3.32), i vektora gravitacijskog opterećenja, jednadžba (3.51),

$$F_i = F_i^p + F_i^m = \rho g \iint_S Z (H_x^i N_x + H_y^i N_y + H_z^i N_z) dS + g \iiint_V \rho_s H_z^i dV, \quad (3.57)$$

te predstavlja statičko opterećenje konstrukcije koje nastaje uslijed razlike između težine i uzgona.

### 3.4 Strukturna krutost

Strukturna krutost se sastoji od konvencionalne i geometrijske krutosti. Obje se temelje na osnovnim relacijama poznatim iz mehanike kontinuuma i teorije elastičnosti u okviru koje se, na temelju varijacijskih principa, [42 – 46], izvode i izrazi kojima se one određuju.

Poznato je da vanjske sile koje djeluju na tijelo volumena  $V$  omeđeno plohom  $S$  ostvaruju rad,  $W_e$ , koji glasi

$$W_e = \iiint_V \mathbf{q}^T \mathbf{H} dV + \iint_S \mathbf{q}_s^T \mathbf{H}_s dS, \quad (3.58)$$

gdje su  $\mathbf{q}$  vektor volumenskih sila,  $\mathbf{q}_s$  vektor površinskih sila i  $\mathbf{H}$  vektor pomaka. Rad deformiranja ili rad unutarnjih sila,  $W_i$ , izražen je kao

$$W_i = \iiint_V \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{E} dV, \quad (3.59)$$

gdje je  $\boldsymbol{\Sigma}$  tenzor naprezanja, a  $\mathbf{E}$  tenzor deformacije u globalnom koordinatnom sustavu. Prema zakonu o očuvanju energije, rad unutarnjih i vanjskih sila mora biti u ravnoteži, pa slijedi iz jednadžbi (3.57) i (3.58)

$$\iiint_V \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{E} dV = \iiint_V \mathbf{q}^T \mathbf{H} dV + \iint_S \mathbf{q}_s^T \mathbf{H}_s dS, \quad (3.60)$$

što predstavlja temelj za izvođenje osnovnih relacija u okviru formulacije metode konačnih elemenata nekim od varijacijskih principa. Primjenom principa virtualnih pomaka jednadžba (3.60) prelazi u oblik

$$\iiint_V \boldsymbol{\Sigma}^T \delta \mathbf{E} dV = \iiint_V \mathbf{q}^T \delta \mathbf{H} dV + \iint_S \mathbf{q}_S^T \delta \mathbf{H}_S dS. \quad (3.61)$$

Član na lijevoj strani jednadžbe (3.61), koji predstavlja varijaciju energije deformiranja, zapisan u indeksnoj notaciji glasi

$$\iiint_V \Sigma_{kl} \delta E_{kl} dV, \quad (3.62)$$

pri čemu je tenzor naprezanja ovisan o tenzoru deformacije, odnosno vrijedi izraz, [41]

$$\Sigma_{kl} = \lambda \delta_{kl} E_{mm} + 2\mu E_{kl}, \quad (3.63)$$

gdje su  $\lambda$  i  $\mu$  Lamé-ove konstante, a  $\delta_{kl}$  je Kroneckerov  $\delta$  simbol. Tenzor deformacije, izražen preko pomaka glasi

$$E_{kl} = \frac{1}{2} (H_{k,l} + H_{l,k} + H_{m,l} H_{m,k}), \quad (3.64)$$

gdje indeks iza zareza, sukladno indeksnoj notaciji označuje derivaciju po tom indeksu. Jednadžba (3.64) može se rastaviti na linearnu i nelinearnu komponentu, pa slijedi

$$E_{kl} = E_{kl}^0 + E_{kl}^*, \quad (3.65)$$

gdje su

$$\mathbf{E}_{kl}^0 = \frac{1}{2}(H_{k,l} + H_{l,k}), \quad (3.66)$$

$$\mathbf{E}_{kl}^* = \frac{1}{2}H_{m,k}H_{m,l}. \quad (3.67)$$

### 3.4.1 Konvencionalna krutost

Uvrštavanjem linearne komponente deformacije, jednađba (3.66), u jednađbu (3.62) slijedi izraz za rad unutarnjih sila ostvaren na linearnim pomacima koji u sebi uključuje i izraz koji je definiran kao konvencionalna krutost

$$\delta W_i = \iiint_V \Sigma_{kl} \delta \mathbf{E}_{kl}^0 dV. \quad (3.68)$$

Jednađba (3.68) zapisana u matričnoj notaciji glasi

$$\delta W_i = \iiint_V \Sigma^T \delta \mathbf{E}^0 dV. \quad (3.69)$$

Korištenjem dobro poznate matrice elastičnosti  $\mathbf{D}$  i diferencijalnog operatora  $\Lambda$  uspostavljaju se veze između naprežanja i deformacije, odnosno između deformacije i pomaka koje glase

$$\Sigma = \mathbf{D} \mathbf{E}^0, \quad (3.70)$$

$$\mathbf{E}^0 = \Lambda \mathbf{H}, \quad (3.71)$$

gdje je  $\mathbf{H}$  vektor pomaka s komponentama  $\mathbf{H}^T = \langle H_x, H_y, H_z \rangle$ . Uvrštavanjem jednađbe (3.71) u (3.70) te nadalje u jednađbu (3.69) slijedi izraz za rad unutarnjih sila izražen pomacima

$$\delta W_i = \iiint_V (\Lambda \mathbf{H})^T \mathbf{D}(\Lambda \delta \mathbf{H}) dV . \quad (3.72)$$

Primjenom metode superpozicije modova, jednađba (3.29) i (3.30), jednađba (3.72) poprima oblik

$$\delta W = \xi^T \mathbf{k}_0 \delta \xi , \quad (3.73)$$

gdje je

$$\mathbf{k}_0 = \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV , \quad \mathbf{B} = \Lambda \mathbf{H} \quad (3.74)$$

matrica konvencionalne krutosti.

### 3.4.2 Geometrijska krutost

Uvrštavanjem nelinearne komponente deformacije, jednađba (3.67), u (3.62) slijedi izraz za rad unutarnjih sila ostvaren na nelinearnim pomacima koji u sebi uključuje i izraz koji je definiran kao geometrijska krutost

$$\delta W = \iiint_V \Sigma_{kl} \delta E_{kl}^* dV . \quad (3.75)$$

Slijedi da je rad unutarnjih sila jednak

$$\delta W = \frac{1}{2} \iiint_V \Sigma_{kl} (\delta H_{m,k} H_{m,l} + H_{m,k} \delta H_{m,l}) , \quad (3.76)$$

odnosno

$$\begin{aligned}\delta W &= \frac{1}{2} \iiint_V (\Sigma_{kl} \delta H_{m,k} H_{m,l} + \Sigma_{lk} H_{m,l} \delta H_{m,k}) dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V (\Sigma_{kl} + \Sigma_{lk}) \delta H_{m,k} H_{m,l} dV.\end{aligned}\tag{3.77}$$

Zahvaljujući simetriji tenzora naprezanja izraz (3.77) poprima oblik

$$\delta W = \iiint_V \Sigma_{kl} \delta H_{m,k} H_{m,l} dV = \iiint_V \Sigma_{kl} H_{m,k} \delta H_{m,l} dV.\tag{3.78}$$

Primjenom metode superpozicije modova, jednadžbe (3.29) i (3.30), izraz (3.78) se svodi na oblik

$$\delta W_i = \sum_{j=1}^N k_{ij}^G \xi_j \delta \xi_i,\tag{3.79}$$

gdje je

$$k_{ij}^G = \iiint_V \Sigma_{kl} H_{m,k}^i H_{m,l}^j dV\tag{3.80}$$

modalna marica geometrijske krutosti ili modalna matrica početnog naprezanja koja se može shvatiti kao doprinos konvencionalnoj krutosti zbog velikih deformacija, [47].

### 3.5 Objedinjena povratna i geometrijska krutost

Prethodno opisane krutosti, konvencionalna, geometrijska i povratna, koriste se prilikom strukturne analize pomorskih konstrukcija, pri čemu ukjučivanje geometrijske i povratne krutosti u analizu ovisi o njenoj specifičnoj svrsi. Tako se za analizu stabilnosti uz konvencionalnu koristi i geometrijska krutost, dok je za potrebe hidroelastične analize potrebno konvencionalnoj dodati i povratnu krutost. Za potrebe hidroelastične analize vitkih pomorskih konstrukcija, poput plovnih aerodroma i sl., potrebno je koristiti sve tri

krutosti. Pritom je važno istaknuti da, zbog jednakosti gradijenta distribucije naprezanja u vertikalnom smjeru i gravitacijskog opterećenja, geometrijska i povratna krutost imaju neke zajedničke članove, zbog čega je potrebno formulirati objedinjenu povratnu krutost koja predstavlja uniju geometrijske i povratne krutosti, odnosno objedinjena (*engl. unified*) povratna krutost je

$$k_{ij}^U = k_{ij}^G \cup C_{ij} = k_{ij}^G + C_{ij} - k_{ij}^{GZ}, \quad (3.81)$$

gdje je

$$k_{ij}^{GZ} = k_{ij}^G \cap C_{ij}, \quad (3.82)$$

a  $k_{ij}^{GZ}$  je nepoznata krutost koju je potrebno odrediti. Primjenjujući pravilo o derivaciji umnoška triju funkcija na izraz  $\sum_{kl} H_m^i H_{m,l}^j$  slijedi relacija

$$\left( \sum_{kl} H_m^i H_{m,l}^j \right)_{,k} = \sum_{kl,k} H_m^i H_{m,l}^j + \sum_{kl} H_{m,k}^i H_{m,l}^j + \sum_{kl} H_m^i H_{m,lk}^j. \quad (3.83)$$

Očito je da je drugi član jednadžbe (3.83) jednak podintegralnoj funkciji jednadžbe (3.80). Prema tome, geometrijska se krutost može izraziti kao zbroj triju krutosti, odnosno

$$\sum_{kl} H_{m,k}^i H_{m,l}^j = \left( \sum_{kl} H_m^i H_{m,l}^j \right)_{,k} - \sum_{kl,k} H_m^i H_{m,l}^j - \sum_{kl} H_m^i H_{m,lk}^j. \quad (3.84)$$

Funkcija  $\sum_{kl} H_m^i H_{m,l}^j$  je jedina funkcija koja nakon derivacije po indeksu  $k$  kao jedan od članova uključuje podintegralnu funkciju iz izraza za geometrijsku krutost, jednadžba (3.78). Isti izraz moguće je dobiti i derivacijom funkcije  $\sum_{kl} H_{m,k}^i H_m^j$  po indeksu  $l$ . Međutim, tako formulirana podintegralna funkcija izraza za geometrijsku krutost nije dobra jer ne zadovoljava uvjet ravnoteže unutar volumena tijela, slika 3-5, odnosno nije

zadovoljen uvjet  $dF = \Sigma_{k3,k} dV$ . Integriranjem po volumenu i primjenom Gaussovog teorema na prvi član jednadžbe (3.84) slijedi da su komponente geometrijske krutosti  $k_{ij}^G$

$$k_{ij}^S = \iint_S \Sigma_{kl} H_m^i H_{m,l}^j N_k dS, \quad (3.85)$$

$$k_{ij}^V = -\iiint_V \Sigma_{kl,l} H_m^i H_{m,l}^j dV, \quad (3.86)$$

$$k_{ij}^{Vc} = -\iiint_V \Sigma_{kl} H_m^i H_{m,lk}^j dV. \quad (3.87)$$

Prema [41] na oplakanoj površini,  $S$ , i unutar volumena strukture,  $V$ , vrijede slijedeći rubni i ravnotežni uvjeti, slika 3-4 i slika 3-5,

$$\Sigma_{kl} N_k = -\rho g Z N_l, \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{k1,k} &= \Sigma_{k2,k} = 0 \\ \Sigma_{k3,k} &= \rho_S g \end{aligned} \quad (3.89)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (3.88) u (3.85) i jednadžbe (3.89) u (3.86) slijedi

$$k_{ij}^{SZ} = -\rho g \iint_S Z H_m^i H_{m,l}^j N_l dS, \quad (3.90)$$

$$k_{ij}^{VZ} = -g \iiint_V \rho_S H_k^i H_{k,3}^j dV. \quad (3.91)$$

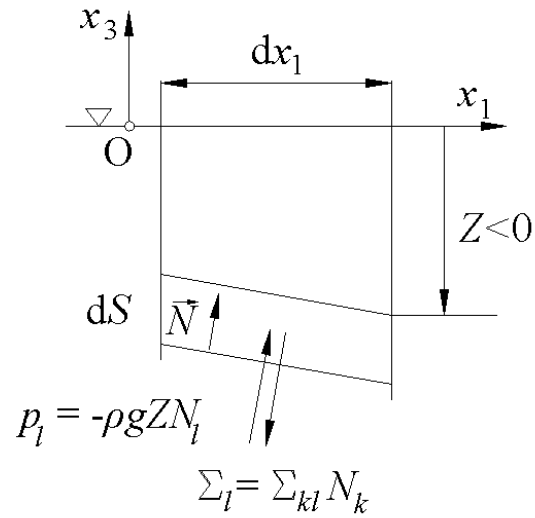
Usporedbom jednadžbi (3.90) i (3.91) s jednadžbama (3.54) i (3.55) slijedi da su krutosti  $k_{ij}^{SZ}$  i  $k_{ij}^{VZ}$  već sadžane u izrazu sa ukupnu povratnu krutost  $C_{ij}$  te stoga vrijedi

$$k_{ij}^{GZ} = k_{ij}^{SZ} + k_{ij}^{VZ}. \quad (3.92)$$

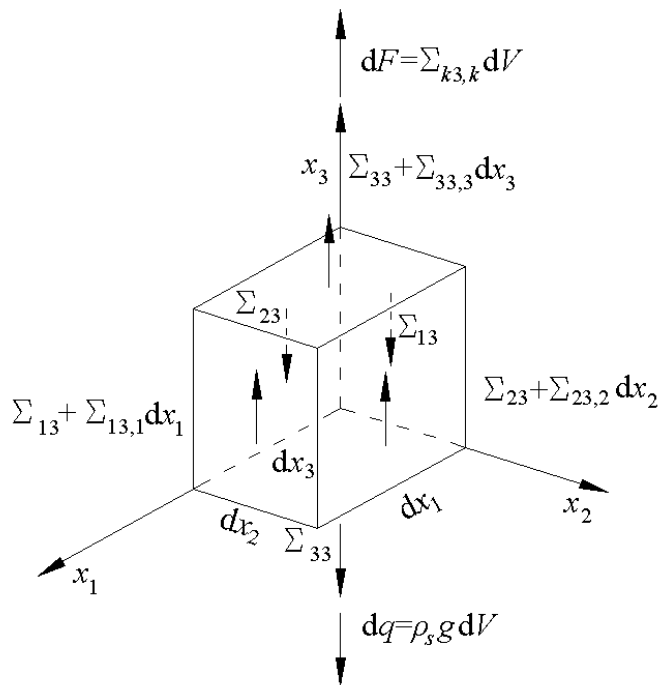
Naposljetku proizlazi da je objedinjena povratna krutost



$$k_{ij}^U = k_{ij}^G + C_{ij} - k_{ij}^{GZ} = k_{ij}^G + C_{ij}^p + C_{ij}^{nh} + C_{ij}^m - k_{ij}^{SZ} - k_{ij}^{VZ} . \quad (3.93)$$



Slika 3-5 Rubni uvjet na oplakanoj površini



Slika 3-6 Ravnotežni uvjet unutar volumena strukture

Korisno je primjetiti da su izraz za povratnu krutost uslijed gravitacije, jednačba (3.56), i izraz za krutost  $k_{ij}^{VZ}$ , jednačba (3.91), slični te se stoga mogu spregnuti u jedan zajednički izraz

$$C_{ij}^m - k_{ij}^{VZ} = g \iiint_V \rho_S H_k^i (H_{3,k}^j + H_{k,3}^i) dV. \quad (3.94)$$

Krutost  $k_{ij}^{Vc}$  nema sličnosti s nijednim elementom ukupne povratne krutosti  $C_{ij}$  pa stoga ostaje dio doprinosa geometrijske krutosti objedinjenoj povratnoj krutosti.

## 4 USPOREDBA NOVE POVROTNE KRUTOSTI S POSTOJEĆIM FORMULACIJAMA

Nakon što je izvedena nova formulacija povratne krutosti, korisno je konačne izraze usporediti s formulacijama koje su dostupne u literaturi. U tu su svrhu postojeće formulacije prikazane tablicom 4.1. Doprinos pojedine komponente povratne krutosti zapisan je u indeksnoj notaciji sa svrhom lakše usporedbe.

### 4.1 Usporedba konzistentne povratne krutosti s formulacijom Malenica i Molin

Izvedeni izrazi za novu ili konzistentnu povratnu krutost, jendadžba (3.54 – 3.56), prikazani su jednadžbom (4.3a, b i c), tablica 4.1. Formulacija Malenice i Molina [28, 29] temeljena na vektorskom računu prikazana je jednadžbom (4.2a, b i c). Usporedbom tih dviju formulacija proizlazi da obje formulacije imaju jednak broj koeficijenata koji se međusobno odnose kao (formulacija Malenice i Molina označena je zvjezdicom)

$$C_{ji}^p = C_{ij}^{*p}, \quad (4.5)$$

$$C_{ij}^{nh} \neq C_{ij}^{*nh}, \quad (4.6)$$

$$C_{ij}^m = C_{ji}^{*m}. \quad (4.7)$$

Očito je da su koeficijenti tlaka jednaki, dok se preostala dva koeficijenta razlikuju.

Koeficijent normale i moda  $C_{ij}^{*nh}$  sastoji se od koeficijenta  $C_{ij}^{nh}$  i dodatnog člana

$\rho g \iint_S (H_{k,l}^i H_l^j - H_l^i H_{k,l}^j) n_k dS$  koji nastaje uslijed varijacije moda i čiji su dijagonalni

elementi jednaki nuli. Koeficijent mase  $C_{ij}^m$  jednak je transponiranom koeficijentu  $C_{ji}^{*m}$ .

U okviru formulacije konzistentne povratne krutosti definiran je rad koji ostvaruje promjenljiva sila duž proizvoljne krivulje kao integral promjenljive hidrostatske sile duž proizvoljne krivulje. Ostvareni rad je izražen u linearnom obliku jednadžbom (3.17).

Tablica 4-1 Usporedba postojećih formulacija povratne krutosti

Doprinos	Oznaka	Cjelokupna krutost, Huang i Riggs (4.1), [27]	Nekonzistentna krutost, Malenica i Molin (4.2), [28, 29]	Konzistentna krutost (4.3), [30]	Objedinjena krutost (4.4), [23]
a) Tlak	$C_{ij}^P$	$\rho g \int_S H_k^i H_3^j N_k dS$	$\rho g \int_S H_k^i H_3^j N_k dS$	$\rho g \int_S H_k^i H_3^j N_k dS$	$\rho g \int_S H_k^i H_3^j N_k dS$
b) Normala i mod	$C_{ij}^{nh}$	$\rho g \int_S ZH_k^i H_{l,l}^j N_k dS$	$\rho g \int_S [ZH_k^i (H_{l,l}^j N_k - H_{l,k}^j N_l) + ZH_{k,l}^i H_l^j N_k] dS$	$\rho g \int_S ZH_k^i H_{l,l}^j N_k dS$	$\rho g \int_S ZH_k^i H_{l,l}^j N_k dS$
c) Gravitacija	$C_{ij}^m$		$g \int_V \rho_S H_{3,k}^i H_k^j dV$	$g \int_V \rho_S H_k^i H_{3,k}^j dV$	
d) Rubno naprezanje	$-k_{ij}^{S0}$	$-\rho g \int_S ZH_l^i H_{k,l}^j N_k dS$			$-\rho g \int_S ZH_l^i H_{k,l}^j N_k dS$
e) Geometrijska krutost	$k_{ij}^G$	$\int_V \Sigma_{kl} H_{m,k}^i H_{m,l}^j dV$			$\int_V \Sigma_{kl} H_{m,k}^i H_{m,l}^j dV$
f) Deformacija oplakane površine	$-k_{ij}^{SZ} + k_{ij}^{S0}$				$\rho g \int_S ZH_l^i (H_{l,k}^j + H_{k,l}^j) N_k dS$
g) Deformacija	$C_{ij}^m - k_{ij}^{VZ}$				$g \int_V \rho_S H_k^i (H_{3,k}^j + H_{k,3}^j) dV$

Četvrti pribrojnik istog izraza,  $\mathbf{Zn}(\mathbf{H}\nabla)d\mathbf{H}$ , predstavlja derivaciju prirasta pomaka u smjeru pomaka i javlja se kao posljedica razvoja diferencijalnog prirasta rada u Taylorov red, jednačba (3.9).

Izražavanjem usmjerene derivacije vektora normale jednačbom (3.26) i uvrštavanjem istog izraza u jednačbu (3.17), dva identična člana suprotnog predznaka se ponište iz čega naposljetku proizlazi izraz za koeficijent normale i moda, jednačba (3.34) i (4.3b).

Razmatranje jednačbe (4.2b) pokazuje da je prvi pribrojnik (derivacija prirasta  $j$ -tog pomaka u smjeru  $i$ -tog pomaka) jednak transponiranom drugom pribrojniku (derivacija prirasta  $i$ -tog pomaka u smjeru  $j$ -tog pomaka). Zbog tog razloga jednačba (4.2b) u sebi uključuje dodatni član čiji su dijagonalni elementi jednaki nuli.

Na temelju usporedbe jednačbi (4.3b) i (4.2b) pokazuje se uloga derivacije prirasta pomaka u smjeru pomaka (što je u literaturi poznato i pod nazivom varijacija moda) koji proizlazi iz razmatranja gibanja diferencijalne oplakane površine koja se pomiče duž proizvoljne krivulje. Kao posljedica takve fizikalne pozadine problema hidroelastičnosti, nužno je u obzir uzeti derivaciju vektora tangente,  $\mathbf{t}$ , na proizvoljnu krivulju,  $\mathbf{c}(a)$ , u smjeru vektora pomaka  $\mathbf{c}$ , zbog čega je varijacija moda uključena u izraz za ostvareni rad hidrostatske sile. Bez prisutnosti tog člana identičan izraz suprotnog predznaka, koji proizlazi iz jednačbe (3.26), se ne bi poništio. Na taj se način jasno dokazuju i objašnjavaju pretpostavke autora poznate iz literature, [31] i [32].

Jednačba (4.2c) se razlikuje od izraza za gravitacijsku komponentu (4.3c), koji je definiran u okviru konzistentne povratne krutosti, zbog toga što prilikom formulacije izraza (4.2c) nije poštivana definicija krutosti koja uspostavlja vezu između  $i$ -te sile i  $i$ -tog pomaka. Izraz (4.2c) sadrži vezu između  $i$ -te sile i  $i$ -te derivacije pomaka, koja predstavlja deformaciju i kut zakreta.

## 4.2 Usporedba objedinjene povratne krutosti s cjelokupnom formulacijom

Usporedbom formulacije Huang i Riggs, [27], jednačba (4.1) s objedinjenom povratnom krutosti, jednačba (4.4) proizlazi da posljednja ima dva člana više nego prva. Izraz za objedinjenu povratnu krutost obuhvaća jednačbe (3.33), (3.34), (3.80) i (3.94).

Sa svrhom usporedbe dviju formulacija s izvornom formulacijom objedinjene povratne krutosti, [23], dodan je i oduzet izraz za rubno naprezanje (4.1d) iz čega proizlaze dva nova člana. Prvi predstavlja rubno naprezanje

$$-k_{ij}^{S0} = -\rho g \iint_S ZH_l^i H_{k,l}^j N_k dS, \quad (4.8)$$

a drugi deformaciju oplakane površine

$$-k_{ij}^{SZ} + k_{ij}^{S0} = \rho g \iint_S ZH_l^i (H_{l,k}^j + H_{k,l}^j) dS. \quad (4.9)$$

Jednadžba (4.9) dobivena je sprežanjem jednadžbe (3.90) i rubnog naprežanja (4.8) u jedan istovjetan izraz. Na sličan je način moguće spregnuti i jednadžbu (3.91) sa (4.8) u jedan izraz

$$C_{ij}^m - k_{ij}^{VZ} = g \iiint_V \rho_S H_k^i (H_{3,k}^j + H_{k,3}^i) dV, \quad (4.10)$$

koji predstavlja deformaciju.

Obje formulacije su istovjetne za slučaj krutih modova kada vrijedi odnos

$$H_{l,k}^j = -H_{k,l}^j, \quad (4.10)$$

koji ukazuje da u slučaju krutih modova ne postoje deformacije. Direktna posljedica te činjenice je izostanak jednadžbi (4.4f) i (4.4g) iz formulacije za objedinjenu povratnu krutost krutog tijela.

Izrazi (3.90) i (3.91) proizašli su iz geometrijske krutosti, (3.80), tj. iz volumenskog integrala te kao takvi vrijede samo za puna, homogena tijela, za koja je na oplakanoj površini moguće odrediti derivacije  $H_{l,k}^j$ , prilog B. Prema tome, koeficijente povratne krutosti (3.90) i (3.91) nemoguće je u potpunosti odrediti za slučaj tankostijene konstrukcije, prilog B, zbog čega ih je potrebno apriori izostaviti iz definicije objedinjene

povratne krutosti. Uzimajući u obzir relaciju (4.10) za krute modove te činjenicu da je za slučaj elastičnih modova dominantna konvencionalna povratna krutost, lako je zaključiti da zanemarenje izraza (4.4f) i (4.4g) nema značajan utjecaj na ukupni hidroelastični odziv tankostijene konstrukcije.

Formulacija objedinjene povratne krutosti (4.4) izvedena je za elastična tijela. Iz gornjih razmatranja proizlazi da se ona u slučaju tankostijenih konstrukcija kao što su brodske, svodi na formulaciju cjelokupne povratne krutosti, Huang i Riggs, (4.3).

## **5 FORMULACIJA POVROTNE KRUTOSTI METODOM KONAČNIH ELEMENATA**

U skladu s hipotezom doktorskog rada obrazloženom u podpoglavlju 1.4 potrebno je koeficijente povratne krutosti, poglavlje 3, formulirati u okvirima metode konačnih elemenata kako bi se što pouzdanije provela numerička integracija odgovarajućih veličina pomoću funkcija oblika. S tom je svrhom u ovom poglavlju dan sažeti pregled osnovnih relacija metode konačnih elemenata pomoću kojih se potom formiraju sami koeficijenti povratne krutosti. Osim numeričke integracije, cilj doktorskog rada je i preispitivanje potrebe uključivanja geometrijske krutosti u analizu hidroelastičnosti brodskog tupa, te su stoga u svrhu usporedbe rezultata, osim jednadžbi (4.3a – 4.3c) metodom konačnih elemenata formulirani i izrazi (4.1d) i (4.1e). Nakon razmatranja provedenih u poglavlju 4, formulacija koeficijenata povratne krutosti metodom konačnih elemenata ograničena je na konzistentnu (4.3) i cjelovitu (4.1) formulaciju.

### **5.1 Osnovne pretpostavke i relacije metode konačnih elemenata**

Metoda konačnih elemenata, s matematičkog stanovišta, predstavlja numeričku metodu rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koja, zahvaljujući intenzivnom razvoju računala, danas predstavlja glavni inženjerski postupak za rješavanje brojnih fizikalnih i tehničkih problema. Razina aproksimacije fizikalnih zakona i pojava metodom konačnih elemenata danas seže preko granica diskretizacije kontinuuma makroskopskog svijeta. Tako, uz primjenu u strukturnoj analizi konstrukcija, hidrodinamici, termodinamici, elektrotehnici i sl. postoje i primjeri rješavanja fizikalnih problema na molekularnoj ili čak atomskoj razini, primjerice industrijska proizvodnja paukove mreže za medicinske svrhe, tok krvi u žilama, rad ljudskog srca i pluća, razni nanotehnološki problemi poput nanocijevi i sl., [48].

Osnovni postupak analize fizikalnog problema metodom konačnih elemenata sastoji se od izrade diskretiziranog modela, formiranja i rješavanja sustava algebarskih jednadžbi te od interpretacije rezultata analize. Postupkom modeliranja promatrani kontinuum ili fizikalni sustav se aproksimira konačnim elementima određene veličine i oblika



povezanim u konačnom broju točaka koje se nazivaju čvorovima. Ukoliko se radi o strukturnoj analizi, osnovne nepoznanice takvog sustava su pomaci čvorova, dok se pomaci unutar pojedinog elementa aproksimiraju funkcijama oblika. Opterećenje konstrukcije aproksimira se odgovarajućim opterećenjem u čvorovima koje je matricom krutosti povezano s pomacima čvorova.

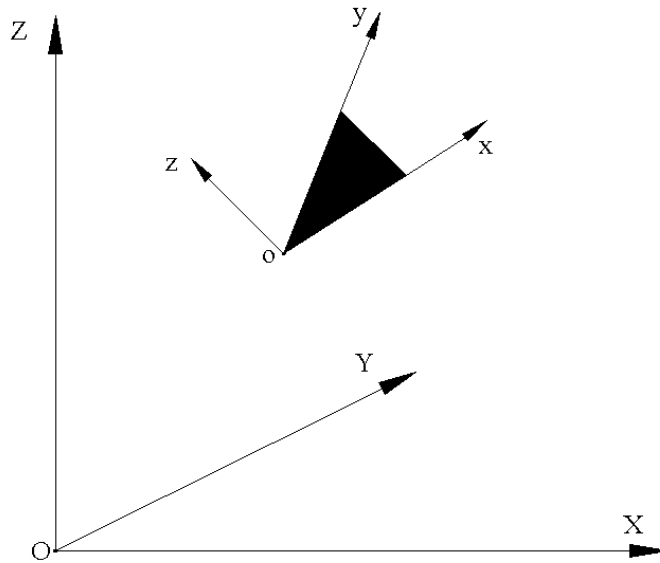
Konačni elementi povezani u čvorovima sačinjavaju mrežu konačnih elemenata čija gustoća utječe na točnost rezultata analize. Zbog toga je potrebno gustoću mreže prilagoditi razmatranom problemu. Osim toga, pouzdanost analize ovisi i o izboru tipa konačnih elemenata. Općenito, s obzirom na prostor konačni elementi mogu biti linijski (gredni), površinski ili volumenski. S obzirom na oblik mogu biti trokutasti, četverokutni, tetraedarni ili prizmatični, a s obzirom na namjenu elementi rastezanja, savijanja i uvijanja greda, membranski ili savojni površinski elementi, ljuskasti elementi i sl.

Sve značajke konačnih elemenata definirane su u lokalnom koordinatnom sustavu svakog pojedinog elementa te ih je potrebno prilikom spajanja elemenata prevesti u globalni koordinatni sustav. Spajanje konačnih elemenata ispunjavanjem uvjeta ravnoteže, kompatibilnosti pomaka i rubnih uvjeta rezultira sustavom linearnih algebarskih jednadžbi koji je potrebno riješiti primjenom metoda matričnog računa. Ukoliko je problem nehomogen (statička analiza i prisilne vibracije) rješenje sustava predstavlja vektor čvornih pomaka, dok je u slučaju homogenog problema (slobodne vibracije i analiza stabilnosti) rješenje sustava predstavljeno svojstvenim vrijednostima (prirodnim frekvencijama ili kritičnim silama) i oblicima deformacije.

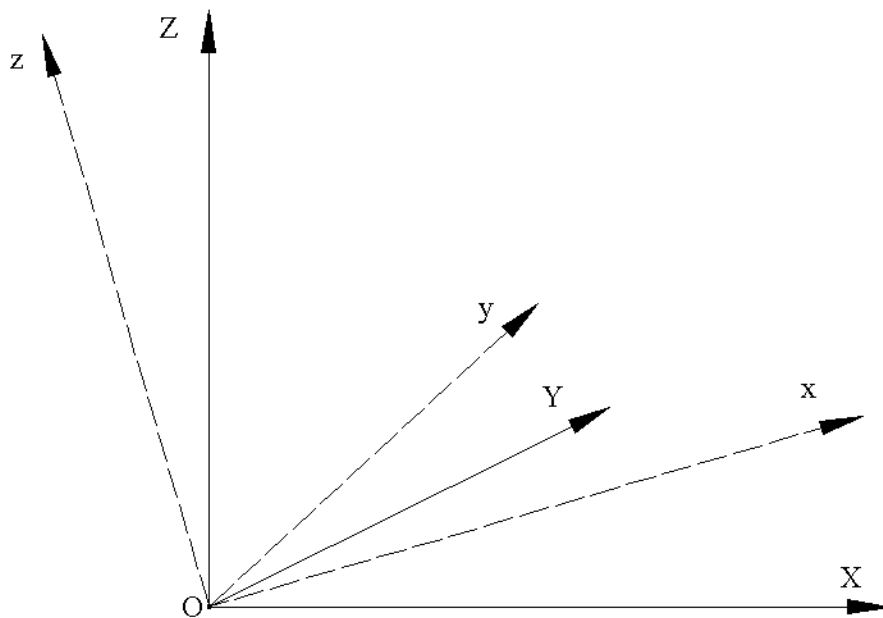
#### 5.1.1 Transformacija koordinata iz globalnog u lokalni koordinati sustav

Karakteristike konačnih elemenata definirane su u lokalnom koordinatnom sustavu, a analiza problema se vrši u globalnom, te je zbog toga potrebno poznavati geometrijske relacije pomoću kojih je moguće transformirati lokalno definirane koordinate i karakteristike u globalno definirane i obratno. Sve veličine u globalnom koordinatnom sustavu označene su velikim slovom, a one u lokalnom malim. U skladu s time, svi do sada izvedeni izrazi za koeficijente povratne krutosti izraženi su u globalnom koordinatnom sustavu.

Lokalni i globalni koordinatni sustav za neki hipotetski konačni element prikazani su slikom 5.1. Ishodište lokalnog koordinatnog sustava moguće je postaviti u proizvoljnu točku u prostoru za koju je pogodno izabrati ishodište globalnog koordinatnog sustava i na taj način eliminirati translaciju koordinatnog sustava iz izraza za transformaciju, slika 5.2. U potonjem slučaju se lokalne i globalne koordinate odnose kao



Slika 5-1 Globalni i lokalni koordinatni sustav



Slika 5-2 Lokalni i globalni koordinatni sustav sa zajedničkim ishodištem

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [c] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}, \quad (5.1)$$

odnosno

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [c]^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (5.2)$$

gdje je matrica  $[c]$  matrica transformacije ili matrica koeficijenata smjera čiji su elementi jednaki kosinusima kutova između karakterističnih koordinatnih osi, tj.

$$[c] = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Matrica transformacije je ortogonalna matrica te stoga vrijedi

$$\mathbf{c}^{-1} = \mathbf{c}^T, \quad (5.4)$$

uslijed čega izraz (5.2) prelazi u

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [c]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (5.5)$$

Razmatranjem izraza (5.5) očito je da je određena globalna koordinata funkcija triju varijabli, odnosno izražena je pomoću sve tri lokalne koordinate. Isto pravilo vrijedi

i u obratnom slučaju. Stoga se parcijalna derivacija proizvoljne veličine po globalnoj koordinati primjenom lančane derivacije može izraziti kao

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\cdot)}{\partial X} &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial X} \\
 \frac{\partial(\cdot)}{\partial Y} &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Y} \\
 \frac{\partial(\cdot)}{\partial Z} &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Z} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial Z} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Iz izraza (5.1) slijedi da je

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \cos(x, X), \quad \frac{\partial y}{\partial X} = \cos(y, X), \quad \frac{\partial z}{\partial X} = \cos(z, X) \dots \tag{5.7}$$

što uvršteno u jednadžbu (5.6) daje

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\cdot)}{\partial X} &= \cos(x, X) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \cos(y, X) \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} + \cos(z, X) \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \\
 \frac{\partial(\cdot)}{\partial Y} &= \cos(x, Y) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \cos(y, Y) \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} + \cos(z, Y) \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \\
 \frac{\partial(\cdot)}{\partial Z} &= \cos(x, Z) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \cos(y, Z) \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} + \cos(z, Z) \frac{\partial(\cdot)}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial X} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial Y} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial Z} \end{pmatrix} = [c]^T \begin{pmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

### 5.1.2 Transformacija pomaka iz globalnog u lokalni koordinatni sustav

U okviru predmetne analize dostatno je poznavati translacijske pomake u svakom smjeru koordinatnih osi, kako bi se potpuno opisalo gibanje tijela iz referentne u trenutačnu poziciju. Stoga, pod pojmom pomaci podrazumijevaju se samo translacijski pomaci. Odnos pomaka u globalnom i lokalnom koordinatnom sustavu identičan je odnosu koordinata, jednačba (5.1), te vrijedi da je

$$\begin{Bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{Bmatrix} = [c] \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix}. \quad (5.10)$$

Sukladno prethodnoj notaciji, malim slovom označeni su pomaci u lokalnom koordinatnom sustavu, a velikim u globalnom. Indeks pritom označuje smjer koordinatne osi kojem pripada svaki pomak. Također, vrijedi i obratni odnos

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = [c]^T \begin{Bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{Bmatrix}. \quad (5.11)$$

Prema metodi konačnih elemenata, polje pomaka unutar konačnog elementa se u lokalnom koordinatnom sustavu izražava pomoću funkcija oblika i čvornih pomaka, odnosno vrijedi

$$\begin{Bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^M \begin{Bmatrix} h_{x,k} \\ h_{y,k} \\ h_{z,k} \end{Bmatrix} \phi_k, \quad (5.12)$$

gdje je  $k$  indeks čvora,  $M$  ukupan broj čvorova, a  $\phi_k$  funkcija oblika odgovarajućeg čvora. Pri tome zarez ispred indeksa čvora ne predstavlja derivaciju. Funkcije oblika zadaju se u lokalnom koordinatnom sustavu. Uvrštavanjem jednačbe (5.12) u (5.11)

slijedi da se pomaci u globalnom koordinatnom sustavu mogu izraziti preko čvornih pomaka i funkcija oblika u lokalnom koordinatnom sustavu kao

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = [c]^T \sum_{k=1}^M \begin{Bmatrix} h_{x,k} \\ h_{y,k} \\ h_{z,k} \end{Bmatrix} \phi_k. \quad (5.13)$$

Uvrštavanjem izraza (5.10) u (5.13) slijedi

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = [c]^T [c] \sum_{k=1}^M \begin{Bmatrix} H_{x,k} \\ H_{y,k} \\ H_{z,k} \end{Bmatrix} \phi_k, \quad (5.14)$$

odnosno, sukladno svojstvu ortogonalnosti matrice transformacije, slijedi

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^M \begin{Bmatrix} H_{x,k} \\ H_{y,k} \\ H_{z,k} \end{Bmatrix} \phi_k. \quad (5.15)$$

## 5.2 Formulacija koeficijenta tlaka metodom konačnih elemenata

Koeficijent tlaka u globalnom koordinatnom sustavu, jednažba (4.3a), izražen u indeksnoj notaciji glasi

$$C_{ij}^p = \rho g \iint_S H_k^i H_3^j N_k \, dS, \quad (5.16)$$

što je istovjetno izrazu

$$C_{ij}^p = \rho g \iint_S N_k H_k^i H_3^j \, dS. \quad (5.17)$$

Budući da vrijedi

$$C_{ij}^p = \rho g \iint_S (N_x H_x^i + N_y H_y^i + N_z H_z^i) H_z^j dS, \quad (5.18)$$

koeficijent tlaka može se zapisati u matricnoj notaciji kao

$$C_{ij}^p = \rho g \iint_S \langle N_x, N_y, N_z \rangle \begin{Bmatrix} H_x^i \\ H_y^i \\ H_z^i \end{Bmatrix} H_z^j dS. \quad (5.19)$$

Izražavanjem vektora pomaka preko čvornih pomaka i funkcija oblika, odnosno uvrštavanjem izraza (5.15) u (5.19) slijedi

$$C_{ij}^p = \rho g \iint_S \langle N_x, N_y, N_z \rangle \sum_{k=1}^M \begin{Bmatrix} H_{x,k}^i \\ H_{y,k}^i \\ H_{z,k}^i \end{Bmatrix} \phi_k \sum_{l=1}^M H_{z,l}^j \phi_l dS. \quad (5.20)$$

Funkcije oblika ovise o lokalnim koordinatama, te je stoga moguće sve ostale članove izraza (5.20) izlučiti ispred integrala, pa slijedi

$$C_{ij}^p = \rho g \langle N_x, N_y, N_z \rangle \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \begin{Bmatrix} H_{x,k}^i \\ H_{y,k}^i \\ H_{z,k}^i \end{Bmatrix} H_{z,l}^j \iint_S \phi_k \phi_l dS. \quad (5.20)$$

Izraz (5.20) zapisan u sažetom obliku glasi

$$C_{ij}^p = \rho g \mathbf{N} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \mathbf{H}_k^i H_{z,l}^j \iint_S \phi_k \phi_l dS, \quad (5.21)$$

gdje su vektor normale,  $\mathbf{N}$ , i vektor pomaka  $k$ -tog čvora uslijed  $i$ -tog moda,  $\mathbf{H}_k^i$ ,

$$\mathbf{N} = \langle N_x, N_y, N_z \rangle, \quad (5.22)$$

$$\mathbf{H}_k^i = \begin{Bmatrix} H_{x,k}^i \\ H_{y,k}^i \\ H_{z,k}^i \end{Bmatrix}. \quad (5.23)$$

Vrijednost podintegralne funkcije izraza (5.21),  $\iint_S \phi_k \phi_l dS$ , određuje se u lokalnom koordinatnom sustavu, dok ostali članovi pripadaju globalnom.

### 5.3 Formulacija koeficijenta normale i moda metodom konačnih elemenata

Koeficijent normale i moda u globalnom koordinatnom sustavu, jednačba (4.3b), izražen u indeksnoj notaciji glasi

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \iint_S Z H_k^i H_{l,l}^j N_k dS, \quad (5.24)$$

što je istovjetno izrazu

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \iint_S Z N_k H_k^i H_{l,l}^j dS. \quad (5.25)$$

Budući da vrijedi

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \iint_S Z \left( N_x H_x^i + N_y H_y^i + N_z H_z^i \right) \left( \frac{\partial H_x^j}{\partial X} + \frac{\partial H_y^j}{\partial Y} + \frac{\partial H_z^j}{\partial Z} \right) dS, \quad (5.26)$$

koeficijent normale i moda može se zapisati u matricnoj notaciji kao



$$C_{ij}^{nh} = \rho g \iint_S Z \langle N_x, N_y, N_z \rangle \begin{Bmatrix} H_x^i \\ H_y^i \\ H_z^i \end{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z} \right\rangle \begin{Bmatrix} H_x^j \\ H_y^j \\ H_z^j \end{Bmatrix} dS. \quad (5.27)$$

Izražavanjem vektora pomaka preko čvornih pomaka i funkcija oblika, odnosno uvrštavanjem izraza (5.15) u (5.19) slijedi

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \iint_S Z \langle N_x, N_y, N_z \rangle \sum_{k=1}^M \begin{Bmatrix} H_{x,k}^i \\ H_{y,k}^i \\ H_{z,k}^i \end{Bmatrix} \phi_k \sum_{l=1}^M \left\langle \frac{\partial \phi_l}{\partial X}, \frac{\partial \phi_l}{\partial Y}, \frac{\partial \phi_l}{\partial Z} \right\rangle \begin{Bmatrix} H_{x,l}^j \\ H_{y,l}^j \\ H_{z,l}^j \end{Bmatrix} dS. \quad (5.28)$$

Funkcije oblika i vertikalna koordinata  $Z$  ovise o lokalnim koordinatama, te je stoga moguće sve ostale članove izraza (5.28) izlučiti ispred integrala, pa slijedi

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \langle N_x, N_y, N_z \rangle \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \begin{Bmatrix} H_{x,k}^i \\ H_{y,k}^i \\ H_{z,k}^i \end{Bmatrix} \left\langle H_{x,l}^j, H_{y,l}^j, H_{z,l}^j \right\rangle \iint_S \begin{Bmatrix} Z \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial X} dS \\ Z \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial Y} dS \\ Z \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial Z} dS \end{Bmatrix}. \quad (5.29)$$

Uzimajući u obzir jednadžbu (5.9), (5.29) se može izraziti kao

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \langle N_x, N_y, N_z \rangle \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \begin{Bmatrix} H_{x,k}^i \\ H_{y,k}^i \\ H_{z,k}^i \end{Bmatrix} \left\langle H_{x,l}^j, H_{y,l}^j, H_{z,l}^j \right\rangle [c]^T \iint_S \begin{Bmatrix} Z \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dS \\ Z \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dS \\ Z \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial z} dS \end{Bmatrix}, \quad (5.30)$$

pri čemu su parcijalne derivacije funkcije oblika u vektoru podintegralnih funkcija transformirane s globalnih u lokalne koordinate. Izraz (5.30) zapisan u sažetom obliku glasi

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \mathbf{N} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \mathbf{H}_{kl}^{ij} \mathbf{c}^T \iint_S Z \phi_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{Bmatrix} dS, \quad (5.31)$$

gdje su vektor normale,  $\mathbf{N}$ , i matrica,  $\mathbf{H}_{kl}^{ij}$ ,

$$\mathbf{N} = \langle N_x, N_y, N_z \rangle, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{H}_{kl}^{ij} = \begin{Bmatrix} H_{x,k}^i \\ H_{y,k}^i \\ H_{z,k}^j \end{Bmatrix} \langle H_{x,l}^j, H_{y,l}^j, H_{z,l}^j \rangle. \quad (5.33)$$

Vrijednost podintegralne funkcije izraza (5.31), određuje se u lokalnom koordinatnom sustavu, dok ostali članovi pripadaju globalnom. Treća komponenta vektora podintegralne funkcije jednaka je nuli za plošne elemente zbog toga što su funkcije oblika ovisne samo o plošnim koordinatama, tj. o  $x$  i  $y$  koordinati, a ne i o  $z$ .

#### 5.4 Formulacija koeficijenta mase metodom konačnih elemenata

Koeficijent mase u globalnom koordinatnom sustavu, jednačba (4.3b), izražen u indeksnoj notaciji glasi

$$C_{ij}^m = g \iiint_V \rho_s H_k^i H_{3,k}^j dV, \quad (5.34)$$

te se može zapisati u matričnoj notaciji kao

$$C_{ij}^m = g \iiint_V \rho_S \langle H_x^i, H_y^i, H_z^i \rangle \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{array} \right\} H_z^j dV . \quad (5.35)$$

Izražavanjem vektora pomaka preko čvornih pomaka i funkcija oblika, odnosno uvrštavanjem izraza (5.15) u (5.35) slijedi

$$C_{ij}^m = g \iiint_V \rho_S \sum_{k=1}^M \langle H_{x,k}^i, H_{y,k}^i, H_{z,k}^i \rangle \phi_k \sum_{l=1}^M \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi_l}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Z} \end{array} \right\} H_{z,l}^j dV . \quad (5.36)$$

Funkcije oblika ovise o lokalnim koordinatama, te je stoga moguće sve ostale članove izraza (5.36), osim gustoće materijala, izlučiti ispred integrala, pa slijedi nakon sređivanja

$$C_{ij}^m = g \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \langle H_{x,k}^i, H_{y,k}^i, H_{z,k}^i \rangle H_{z,l}^j \iiint_V \rho_S \phi_k \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi_l}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Z} \end{array} \right\} dV . \quad (5.37)$$

Za slučaj površinskog konačnog elementa diferencijalni volumen,  $dV$ , glasi

$$dV = dX dY dZ , \quad (5.38)$$

pri čemu vrijedi da je

$$dZ = t, \quad (5.39)$$

gdje je  $t$  debljina konačnog elementa. Koristeći jednadžbe (5.38) i (5.39), volumenski integral u izrazu (5.37) prelazi u površinski te za homogeni materijal slijedi

$$C_{ij}^m = \rho_S g t \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \langle H_{x,k}^i, H_{y,k}^i, H_{z,k}^i \rangle H_{z,l}^j \iint_S \phi_k \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi_l}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Z} \end{array} \right\} dS. \quad (5.40)$$

Uzimajući u obzir jednadžbu (5.9), (5.40) se može izraziti kao

$$C_{ij}^m = \rho_S g t \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \langle H_{x,k}^i, H_{y,k}^i, H_{z,k}^i \rangle H_{z,l}^j [c]^T \iint_S \phi_k \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{array} \right\} dS, \quad (5.41)$$

pri čemu su parcijalne derivacije funkcija oblika u vektoru podintegralnih funkcija transformirane s globalnih u lokane koordinate. Izraz (5.41) zapisan u sažetom obliku glasi

$$C_{ij}^m = \rho_S g t \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \mathbf{H}_k^i H_{z,l}^j \mathbf{c}^T \iint_S \phi_k \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{array} \right\} dS, \quad (5.42)$$

gdje je vektor pomaka  $k$ -tog čvora uslijed  $i$ -tog moda,  $\mathbf{H}_k^i$ ,

$$\mathbf{H}_k^i = \langle H_{x,k}^i, H_{y,k}^i, H_{z,k}^i \rangle. \quad (5.43)$$

Vrijednost podintegralne funkcije izraza (5.42), određuje se u lokalnom koordinatnom sustavu, dok ostali članovi pripadaju globalnom. Treća komponenta vektora podintegralne funkcije jednaka je nuli za plošne elemente zbog toga što su funkcije oblika ovisne samo o plošnim koordinatama, tj. o  $x$  i  $y$  koordinati, a ne i o  $z$ .

### 5.5 Formulacija koeficijenta rubnog napreznja (Huang i Riggs) metodom konačnih elemenata

Koeficijent rubnog napreznja u globalnom koordinatnom sustavu, jednažba (4.1d), izražen u indeksnoj notaciji glasi

$$-k_{ij}^{S0} = -\rho g \iint_S Z H_l^i H_{k,l}^j N_k \, dS, \quad (5.44)$$

Budući da koeficijent rubnog napreznja u razvijenom obliku ima oblik

$$\begin{aligned} -k_{ij}^{S0} = & -\rho g \iint_S Z H_x^i \left( \frac{\partial H_x^j}{\partial X} N_x + \frac{\partial H_y^j}{\partial X} N_y + \frac{\partial H_z^j}{\partial X} N_z \right) dS \\ & - \rho g \iint_S Z H_y^i \left( \frac{\partial H_x^j}{\partial Y} N_x + \frac{\partial H_y^j}{\partial Y} N_y + \frac{\partial H_z^j}{\partial Y} N_z \right) dS, \\ & - \rho g \iint_S Z H_z^i \left( \frac{\partial H_x^j}{\partial Z} N_x + \frac{\partial H_y^j}{\partial Z} N_y + \frac{\partial H_z^j}{\partial Z} N_z \right) dS \end{aligned} \quad (5.45)$$

može se zapisati u matricnoj notaciji kao

$$\begin{aligned}
-k_{ij}^{S0} = & -\rho g \iint_S Z H_x^i \frac{\partial}{\partial X} \langle H_x^j, H_y^j, H_z^j \rangle \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} dS \\
& -\rho g \iint_S Z H_y^i \frac{\partial}{\partial Y} \langle H_x^j, H_y^j, H_z^j \rangle \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} dS, \\
& -\rho g \iint_S Z H_z^i \frac{\partial}{\partial Z} \langle H_x^j, H_y^j, H_z^j \rangle \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} dS
\end{aligned} \tag{5.46}$$

odnosno

$$-k_{ij}^{S0} = -\rho g \iint_S Z \langle H_x^i, H_y^i, H_z^i \rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{Bmatrix} \langle H_x^j, H_y^j, H_z^j \rangle \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} dS. \tag{5.47}$$

Izražavanjem vektora pomaka preko čvornih pomaka i funkcija oblika, odnosno uvrštavanjem izraza (5.15) u (5.47) slijedi

$$-k_{ij}^{S0} = -\rho g \iint_S Z \sum_{k=1}^M \langle H_{x,k}^i, H_{y,k}^i, H_{z,k}^i \rangle \phi_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{Bmatrix} \sum_{l=1}^M \langle H_{x,l}^j, H_{y,l}^j, H_{z,l}^j \rangle \phi_l \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} dS. \tag{5.48}$$

Funkcije oblika i vertikalna koordinata  $Z$  ovise o lokalnim koordinatama, te je stoga moguće sve ostale članove izraza (5.48) izlučiti ispred integrala, pa slijedi nakon sređivanja

$$-k_{ij}^{S0} = -\rho g \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \langle H_{x,k}^i, H_{y,k}^i, H_{z,k}^i \rangle \langle H_{x,l}^j, H_{y,l}^j, H_{z,l}^j \rangle \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} \iint_S Z \phi_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Z} \end{Bmatrix} dS. \quad (5.49)$$

Budući da je umnožak vektora pomaka  $l$ -tog čvora uslijed  $j$ -tog moda i vektora normale broj, moguće je izraz (5.49) transformirati na način da vrijedi

$$-k_{ij}^{S0} = -\rho g \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \langle N_x, N_y, N_z \rangle \begin{Bmatrix} H_{x,l}^j \\ H_{y,l}^j \\ H_{z,l}^j \end{Bmatrix} \langle H_{x,k}^i, H_{y,k}^i, H_{z,k}^i \rangle \iint_S Z \phi_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Z} \end{Bmatrix} dS, \quad (5.50)$$

odnosno

$$-k_{ij}^{S0} = -\rho g \langle N_x, N_y, N_z \rangle \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \begin{Bmatrix} H_{x,l}^j \\ H_{y,l}^j \\ H_{z,l}^j \end{Bmatrix} \langle H_{x,k}^i, H_{y,k}^i, H_{z,k}^i \rangle \iint_S Z \phi_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial X} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial Z} \end{Bmatrix} dS. \quad (5.51)$$

Uzimajući u obzir jednadžbu (5.9), (5.50) se može izraziti kao

$$-k_{ij}^{S0} = -\rho g \langle N_x, N_y, N_z \rangle \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \begin{Bmatrix} H_{x,l}^j \\ H_{y,l}^j \\ H_{z,l}^j \end{Bmatrix} \langle H_{x,k}^i, H_{y,k}^i, H_{z,k}^i \rangle [c]^T \iint_S Z \phi_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{Bmatrix} dS, \quad (5.52)$$

pri čemu su parcijalne derivacije funkcija oblika u vektoru podintegralnih funkcija transformirane s globalnih u lokane koordinate. Izraz (5.52) zapisan u sažetom obliku glasi

$$-k_{ij}^{S0} = -\rho g \mathbf{N} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M (\mathbf{H}_{kl}^{ij})^T [c]^T \iint_S Z \phi_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{Bmatrix} dS, \quad (5.53)$$

gdje su vektor normale,  $\mathbf{N}$ , i matrica,  $(\mathbf{H}_{kl}^{ij})^T$ ,

$$\mathbf{N} = \langle N_x, N_y, N_z \rangle, \quad (5.54)$$

$$(\mathbf{H}_{kl}^{ij})^T = \begin{Bmatrix} H_{x,l}^j \\ H_{y,l}^j \\ H_{z,l}^j \end{Bmatrix} \langle H_{x,k}^i, H_{y,k}^i, H_{z,k}^i \rangle. \quad (5.55)$$

Izraz za koeficijent rubnog naprezanja, (5.53) sličan je izrazu za koeficijent normale i moda, (5.31) te je zahvaljujući tome moguće ta dva izraza spregnuti u jedan, kako slijedi



$$C_{ij}^{nh} - k_{ij}^{S0} = \rho g \mathbf{N} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \left( \mathbf{H}_{kl}^{ij} - (\mathbf{H}_{kl}^{ij})^T \right) [\mathbf{c}]^T \iint_S Z \phi_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{Bmatrix} dS. \quad (5.56)$$

Vrijednost podintegralne funkcije izraza (5.53), određuje se u lokalnom koordinatnom sustavu, dok ostali članovi pripadaju globalnom. Treća komponenta vektora podintegralne funkcije jednaka je nuli za plošne elemente zbog toga što su funkcije oblika ovisne samo o plošnim koordinatama, tj. o  $x$  i  $y$  koordinati, a ne i o  $z$ .

## 5.6 Formulacija geometrijske krutosti metodom konačnih elemenata

Geometrijska krutost u hidroelastičnoj analizi definirana je naprezanjem na mirnoj vodi i prirodnim oblicima vibriranja te izražena u globalnom koordinatnom sustavu i indeksnoj notaciji glasi, jednačba (4.1e)

$$k_{ij}^G = \iiint_V \sum_{kl} H_{m,k}^i H_{m,l}^j dV. \quad (5.57)$$

U matričnom zapisu (5.57) glasi

$$k_{ij}^G = \sum_m \iiint_V \langle H_{m,k}^i \rangle [\Sigma_{kl}] \{ H_{m,l}^j \} dV. \quad (5.58)$$

Geometrijska krutost, (5.57), predstavlja rad u globalnom koordinatnom sustavu. Budući da rad ne ovisi o koordinatnom sustavu, vrijedi da je geometrijska krutost u lokalnom koordinatnom sustavu

$$k_{ij}^G = \iiint_V \sigma_{kl} h_{m,k}^i h_{m,l}^j dV, \quad (5.59)$$

odnosno

$$k_{ij}^G = \sum_m \iiint_V \langle h_{m,k}^i \rangle [\sigma_{kl}] \{ h_{m,l}^j \} dV, \quad (5.60)$$

jednaka geometrijskoj krutosti u globalnom te će se stoga u nastavku ovog rada formulirati konačni elementi geometrijske povratne krutosti u lokalnom koordinatnom sustavu, zbog čega je neophodno pomake čvorova u globalnom koordinatnom sustavu transformirati u lokalni koristeći izraz (5.10), odakle slijedi

$$\begin{Bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{Bmatrix} = [c] \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle c \rangle_1 \\ \langle c \rangle_2 \\ \langle c \rangle_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix}. \quad (5.61)$$

Razvijeni obik izraza (5.60)

$$\begin{aligned} k_{ij}^G = & \iiint_V \left\langle \frac{\partial h_x^i}{\partial x}, \frac{\partial h_x^i}{\partial y}, \frac{\partial h_x^i}{\partial z} \right\rangle [\sigma] \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_x^j}{\partial x} \\ \frac{\partial h_x^j}{\partial y} \\ \frac{\partial h_x^j}{\partial z} \end{Bmatrix} dV + \\ & + \iiint_V \left\langle \frac{\partial h_y^i}{\partial x}, \frac{\partial h_y^i}{\partial y}, \frac{\partial h_y^i}{\partial z} \right\rangle [\sigma] \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_y^j}{\partial x} \\ \frac{\partial h_y^j}{\partial y} \\ \frac{\partial h_y^j}{\partial z} \end{Bmatrix} dV + \iiint_V \left\langle \frac{\partial h_z^i}{\partial x}, \frac{\partial h_z^i}{\partial y}, \frac{\partial h_z^i}{\partial z} \right\rangle [\sigma] \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_z^j}{\partial x} \\ \frac{\partial h_z^j}{\partial y} \\ \frac{\partial h_z^j}{\partial z} \end{Bmatrix} dV \end{aligned} \quad (5.62)$$

primjenom (5.61) glasi

$$\begin{aligned}
k_{ij}^G = & \iiint_V \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \langle c \rangle_1 \begin{Bmatrix} H_x^i \\ H_y^i \\ H_z^i \end{Bmatrix} [\sigma] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \langle c \rangle_1 \begin{Bmatrix} H_x^j \\ H_y^j \\ H_z^j \end{Bmatrix} dV + \\
& + \iiint_V \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \langle c \rangle_2 \begin{Bmatrix} H_x^i \\ H_y^i \\ H_z^i \end{Bmatrix} [\sigma] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \langle c \rangle_2 \begin{Bmatrix} H_x^j \\ H_y^j \\ H_z^j \end{Bmatrix} dV + \\
& + \iiint_V \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \langle c \rangle_3 \begin{Bmatrix} H_x^i \\ H_y^i \\ H_z^i \end{Bmatrix} [\sigma] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \langle c \rangle_3 \begin{Bmatrix} H_x^j \\ H_y^j \\ H_z^j \end{Bmatrix} dV
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Izražavanjem vektora pomaka preko čvornih pomaka i funkcija oblika, odnosno uvrštavanjem izraza (5.15) u (5.63), slijedi (u skraćenom zapisu)

$$k_{ij}^G = \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \iiint_V \left\langle \frac{\partial \phi_k}{\partial x}, \frac{\partial \phi_k}{\partial y}, \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \right\rangle \langle c \rangle_p \begin{Bmatrix} H_{x,k}^i \\ H_{y,k}^i \\ H_{z,k}^i \end{Bmatrix} [\sigma] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{Bmatrix} \langle c \rangle_p \begin{Bmatrix} H_{x,l}^j \\ H_{y,l}^j \\ H_{z,l}^j \end{Bmatrix} dV . \tag{5.64}$$

gdje su  $k$  i  $l$  indeksi čvorova. Nakon sređivanja slijedi

$$k_{ij}^G = \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \langle c \rangle_p \begin{Bmatrix} H_{x,k}^i \\ H_{y,k}^i \\ H_{z,k}^i \end{Bmatrix} \langle H_{x,l}^j, H_{y,l}^j, H_{z,l}^j \rangle \{c\}_p \iiint_V \left\langle \frac{\partial \phi_k}{\partial x}, \frac{\partial \phi_k}{\partial y}, \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \right\rangle [\sigma] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{Bmatrix} dV. \quad (5.65)$$

Brodski trup je tankostijena konstrukcija koja se sastoji od ukrepljenih panela, tj. ploča i greda. Aproksimacija polja pomaka takve konstrukcije vrši se pomoću ljuskastih konačnih elemenata sa šest stupnjeva slobode i njihovim odgovarajućim funkcijama oblika koje u sebi uključuju translacije i rotacije čvorova. Konvencionalnu krutost je potrebno odrediti primjenom takvih funkcija oblika, kako bi se kasnije moglo definirati membransko i savojno naprezanje. Međutim, matrica mase i matrica geometrijske krutosti može se odrediti i primjenom jednostavnijih funkcija oblika koje se temelje jedino na translacijama, što je dovoljno pouzdano na globalnoj razini i zadovoljava potrebe hidroelastične analize, [37]. U tom slučaju su funkcije oblika za neki ravninski konačni element,  $\phi_k(x, y)$ , jednake za progib i membranske pomake. Prema tome, jednačba (5.65) za plošni element glasi

$$k_{ij}^G = t \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \left( \langle c \rangle_1 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_1 + \langle c \rangle_2 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_2 + \langle c \rangle_3 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_3 \right) \cdot \left( I_{11}^{kl} \sigma_{11} + I_{21}^{kl} \sigma_{21} + I_{12}^{kl} \sigma_{12} + I_{22}^{kl} \sigma_{22} \right), \quad (5.66)$$

gdje je  $t$  debljina ljuskastog elementa, a  $\sigma_{11}, \sigma_{21} = \sigma_{12}$  i  $\sigma_{22}$  su elementi matrice naprežanja u lokalnom koordinatnom sustavu ploče. Matrica  $[H_{kl}^{ij}]$  i integrali

$I_{11}^{kl}, I_{21}^{kl}, I_{12}^{kl}$  i  $I_{22}^{kl}$  definirani su izrazima

$$[H_{kl}^{ij}] = \begin{Bmatrix} H_{x,k}^i \\ H_{y,k}^i \\ H_{z,k}^i \end{Bmatrix} \langle H_{x,l}^j, H_{y,l}^j, H_{z,l}^j \rangle, \quad (5.67)$$

$$I_{11}^{kl} = \iint_A \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dA, \quad (5.68)$$

$$I_{21}^{kl} = \iint_A \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dA, \quad (5.69)$$

$$I_{12}^{kl} = \iint_A \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dA, \quad (5.70)$$

$$I_{22}^{kl} = \iint_A \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dA, \quad (5.71)$$

gdje je  $A$  površina plošnog elementa.

U slučaju kad se lokalne koordinatne osi podudaraju s osima globalnog koordinatnog sustava (npr. pravilna barža) matrica transformacije  $[c]$  postaje dijagonalna s elementima koji su jednaki 1, tj.  $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1$ . Budući da su svi vandijagonalni elementi jednaki 0, izraz (5.66) prelazi u nešto jednostavniji oblik

$$k_{ij}^G = t \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \left( H_{x,k}^i H_{x,l}^j + H_{y,k}^i H_{y,l}^j + H_{z,k}^i H_{z,l}^j \right) \left( I_{11}^{kl} \sigma_{11} + I_{21}^{kl} \sigma_{21} + I_{12}^{kl} \sigma_{12} + I_{22}^{kl} \sigma_{22} \right). \quad (5.72)$$

Može se pokazati da je jednadžba (5.72) jednaka izrazu za geometrijsku krutost ploče izvedenom u globalnom koordinatnom sustavu. Utjecaj pojednostavljenja modalne geometrijske krutosti na rezultat je prikazan u prilogu C.

Važno je napomenuti da izraz (5.72) za geometrijsku krutost u hidroelastičnoj analizi ima tri člana ovisna o čvornim pomacima:  $H_{x,k}^i H_{x,l}^j$ ,  $H_{y,k}^i H_{y,l}^j$  i  $H_{z,k}^i H_{z,l}^j$ . Ako promotrimo konačni element u ravnini  $x$ - $y$  uočljivo je da prvi i drugi član uključuju membranske pomake u  $x$  i  $y$  smjeru, a treći progibe elementa u  $z$  smjeru. Treći član, dakle, predstavlja standardnu geometrijsku krutost koja se koristi u analizi stabilnosti

ploča. Prema tome, geometrijska krutost koja se može odrediti komercijalnim programskim paketima za analizu stabilnost konstrukcija nije dostatna za hidroelastičnu analizu.

### 5.7 Koeficijenti povratne i geometrijske krutosti za trokut

Razmatranjem izraza za koeficijente povratne krutosti moguće je uočiti da svi koeficijenti u sebi uključuju translacije čvorova u smjerovima koordinatnih osi, te se u skladu s time, za funkcije oblika odabiru polinomi prvog stupnja.

Membranski trokutni element sa čvornim pomacima  $h_{x,k}$  i  $h_{y,k}$  u pravokutnom lokalnom koordinatnom sustavu prikazan je slikom 5.3. Trokutni element ima šest stupnjeva slobode, pa se pomaci unutar elementa mogu pretpostaviti u obliku potpunog polinoma prvog stupnja kao

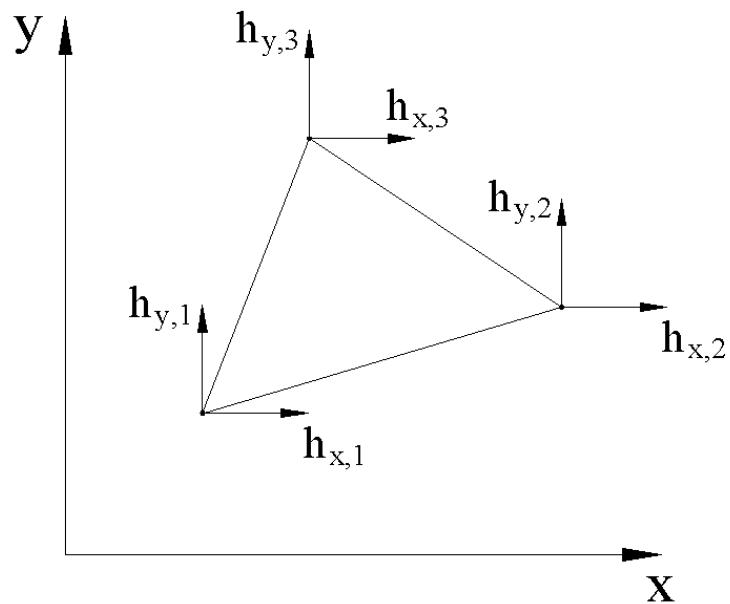
$$\begin{aligned} h_x &= a_0 + a_1x + a_2y \\ h_y &= b_0 + b_1x + b_2y, \end{aligned} \tag{5.73}$$

gdje su  $a_i$  i  $b_i$  nepoznati koeficijenti. Izraz (5.73) predstavlja dva odvojena sustava od tri jednačbe koji se mogu zapisati u matričnom obliku kao

$$\begin{aligned} \{h_x\} &= [Z]\{a\} \\ \{h_y\} &= [Z]\{b\}, \end{aligned} \tag{5.74}$$

gdje su

$$\begin{aligned} \{h_x\} &= \begin{Bmatrix} h_{x,1} \\ h_{x,2} \\ h_{x,3} \end{Bmatrix}, \quad \{h_y\} = \begin{Bmatrix} h_{y,1} \\ h_{y,2} \\ h_{y,3} \end{Bmatrix}, \quad \{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}, \\ [Z] &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.75}$$



Slika 5-3 Trokutni element u lokalnom koordinatnom sustavu

Iz (5.74) slijedi da su nepoznati koeficijenti

$$\begin{aligned} \{a\} &= [Z]^{-1} \{h_x\} \\ \{b\} &= [Z]^{-1} \{h_y\}, \end{aligned} \tag{5.76}$$

pri čemu se može pokazati da je inverzija matrice  $[Z]$

$$[Z]^{-1} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}, \tag{5.77}$$

gdje je

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \\
\alpha_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad \alpha_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad \alpha_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \\
x_{ij} &= x_i - x_j, \\
y_{ij} &= y_i - y_j.
\end{aligned} \tag{5.78}$$

Polje pomaka unutar elementa, jednažba (5.74), zapisano u matričnom obliku glasi

$$\begin{aligned}
h_x &= \langle P \rangle \{a\} \\
h_y &= \langle P \rangle \{b\},
\end{aligned} \tag{5.79}$$

gdje je

$$\langle P \rangle = \langle 1, x, y \rangle. \tag{5.80}$$

Uvrštavanjem (5.76) u (5.79) slijedi

$$\begin{aligned}
h_x &= \langle \phi \rangle \{a\} \\
h_y &= \langle \phi \rangle \{b\},
\end{aligned} \tag{5.81}$$

gdje je vektor funkcija oblika  $\langle \phi \rangle$

$$\langle \phi \rangle = \langle P \rangle [Z]^{-1}, \tag{5.82}$$

čije komponente su



$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{2S}(\alpha_1 + y_{23}x + x_{32}y), \\
\phi_2 &= \frac{1}{2S}(\alpha_2 + y_{31}x + x_{13}y), \\
\phi_3 &= \frac{1}{2S}(\alpha_3 + y_{12}x + x_{21}y).
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Razmatranjem izraza za koeficijent tlaka, (5.21), koeficijent normale i moda, (5.31), koeficijent mase, (5.42), koeficijent rubnog napreznja, (5.53) i koeficijent geometrijske krutosti, (5.72), moguće je izdvojiti slijedeće integrale funkcija oblika koje je potrebno odrediti

$$\iint_S \phi_k \phi_l dS, \tag{5.84}$$

$$\iint_S \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dS, \tag{5.85}$$

$$\iint_S \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dS, \tag{5.86}$$

$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dS, \tag{5.87}$$

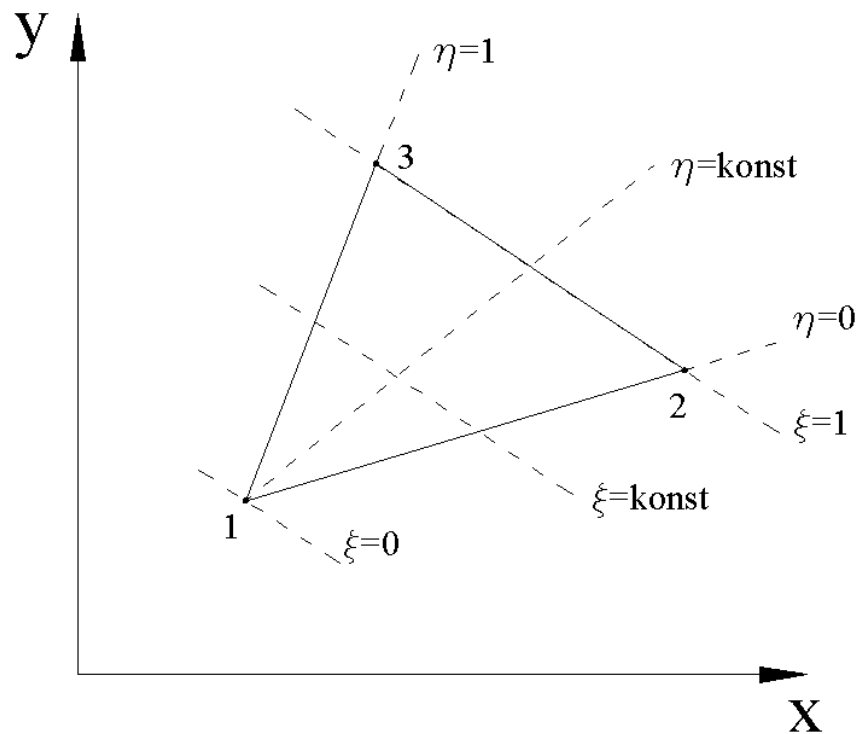
$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dS, \tag{5.88}$$

$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dS, \tag{5.89}$$

$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dS. \tag{5.90}$$

Za potrebu integracije podintegralnih funkcija (5.84 – 5.90) korisno je izraziti pravokutne koordinate pomoću trokutnih, slika 5.4,

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + x_{21}\xi + x_{32}\xi\eta, \\
y &= y_1 + y_{21}\xi + y_{32}\xi\eta.
\end{aligned} \tag{5.91}$$



Slika 5-4 Trokutni element u trokutnim koordinatama

Uvrštavanjem izraza (5.91) u (5.83) slijedi

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= 1 - \xi, \\
 \phi_2 &= \xi(1 - \eta), \\
 \phi_3 &= \xi\eta.
 \end{aligned}
 \tag{5.92}$$

pri čemu diferencijal površine glasi

$$dS = 2S\xi d\xi d\eta.
 \tag{5.93}$$

Uvrštavanjem (5.92) u (5.84) i integriranjem u granicama između 0 i 1 slijedi

$$\iint_S \phi_k \phi_l dS = \begin{cases} \frac{S}{6}, & \text{za } k = l \\ \frac{S}{12}, & \text{za } k \neq l. \end{cases} \quad (5.94)$$

Također vrijedi da je

$$\iint_S \phi_k dS = \frac{S}{3}. \quad (5.95)$$

Kako bi se odredila vrijednost integrala (5.85) – (5.90) potrebno je izvršiti derivaciju svake od tri funkcije oblika, odnosno vrijedi da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= \frac{y_{23}}{2S}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= \frac{y_{31}}{2S}, & \frac{\partial \phi_3}{\partial x} &= \frac{y_{12}}{2S}, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} &= \frac{x_{32}}{2S}, & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} &= \frac{x_{13}}{2S}, & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} &= \frac{x_{21}}{2S}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Budući da je svaka od derivacija (5.96) konstanta, ona se može izlučiti izvan integrala (5.85) odnosno (5.86) te uz primjenu odnosa (5.95) direktno slijedi da su vrijednosti podintegralnih funkcija sljedeće:

$$\iint_S \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dS = \begin{cases} \frac{1}{6} y_{23}, & \text{za } l = 1 \\ \frac{1}{6} y_{31}, & \text{za } l = 2 \\ \frac{1}{6} y_{12}, & \text{za } l = 3, \end{cases} \quad (5.97)$$

odnodsno

$$\iint_S \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dS = \begin{cases} \frac{1}{6} x_{32}, & \text{za } l = 1 \\ \frac{1}{6} x_{13}, & \text{za } l = 2 \\ \frac{1}{6} x_{21}, & \text{za } l = 3. \end{cases} \quad (5.98)$$

Na sličan način se za integrale (5.87) – (5.90) dobivaju slijedeći izrazi zapisani u obliku matrica

$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dS = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} y_{23}^2 & y_{23}y_{31} & y_{23}y_{12} \\ y_{31}y_{23} & y_{31}^2 & y_{31}y_{12} \\ y_{12}y_{23} & y_{12}y_{31} & y_{12}^2 \end{bmatrix}, \quad (5.99)$$

$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dS = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} x_{32}y_{23} & x_{13}y_{23} & x_{21}y_{23} \\ x_{32}y_{31} & x_{13}y_{31} & x_{21}y_{31} \\ x_{32}y_{12} & x_{13}y_{12} & x_{21}y_{12} \end{bmatrix}, \quad (5.100)$$

$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dS = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} x_{32}y_{23} & x_{32}y_{31} & x_{32}y_{12} \\ x_{13}y_{23} & x_{13}y_{31} & x_{13}y_{12} \\ x_{21}y_{23} & x_{21}y_{31} & x_{21}y_{12} \end{bmatrix}, \quad (5.101)$$

$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dS = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} x_{32}^2 & x_{32}x_{13} & x_{32}x_{21} \\ x_{13}x_{32} & x_{13}^2 & x_{13}x_{21} \\ x_{21}x_{32} & x_{21}x_{13} & x_{21}^2 \end{bmatrix}. \quad (5.102)$$

Vrijednosti integrala (5.87) – (5.90) prikazane su u matičnom obliku za svaku kombinaciju  $k$  i  $l$ , gdje redni broj retka predstavlja čvor  $k$ , a redni broj stupca čvor  $l$ .

Koeficijenti povratne krutosti, koeficijent rubnog napreznja (Huang i Riggs) i koeficijent geometrijske krutosti za trokutni element mogu se prema izvodima u podpoglavljima 5.2 – 5.6 prikazati u obliku

$$C_{ij}^p = \rho g N \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{H}_k^i H_{z,l}^j \iint_S \phi_k \phi_l dS, \quad (5.103)$$

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \mathbf{N} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{H}_{kl}^{ij} \mathbf{c}^T \iint_S Z \phi_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{Bmatrix} dS, \quad (5.104)$$

$$C_{ij}^m = \rho_s g t \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{H}_k^i H_{z,l}^j \mathbf{c}^T \iint_S \phi_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{Bmatrix} dS, \quad (5.105)$$

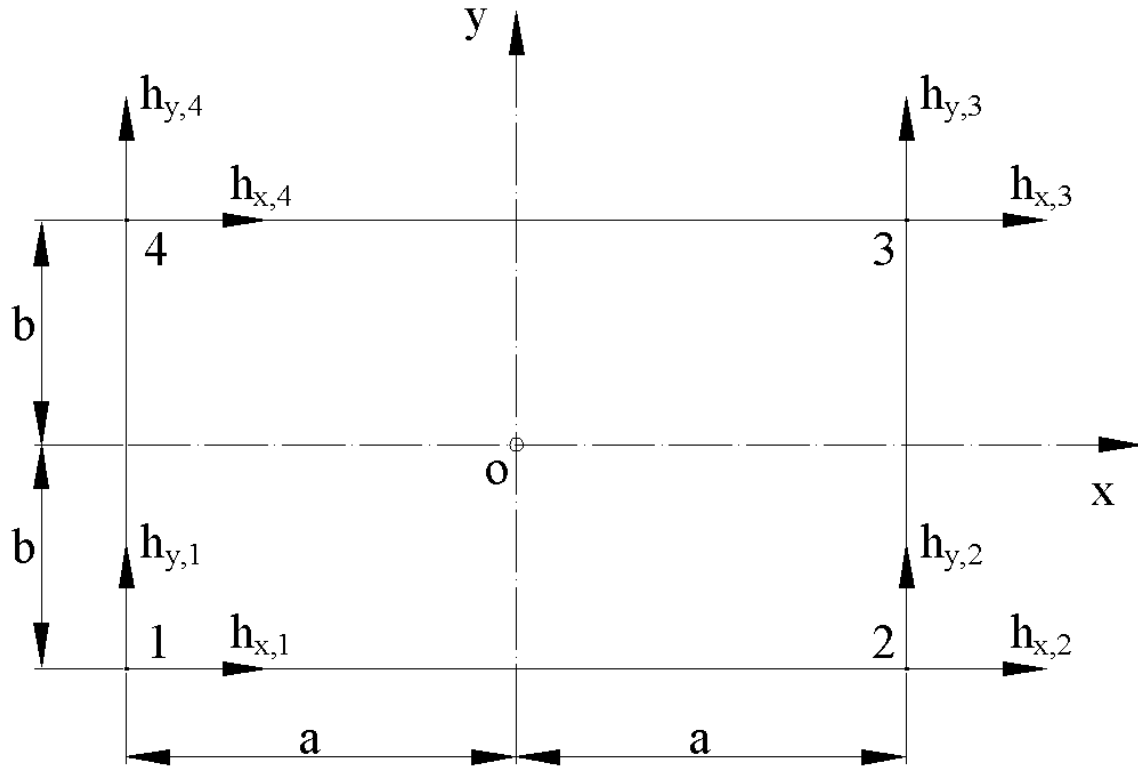
$$-k_{ij}^{S0} = -\rho g \mathbf{N} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 (\mathbf{H}_{kl}^{ij})^T \mathbf{c}^T \iint_S Z \phi_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{Bmatrix} dS, \quad (5.106)$$

$$k_{ij}^G = t \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 (\langle c \rangle_1 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_1 + \langle c \rangle_2 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_2 + \langle c \rangle_3 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_3) \cdot (I_{11}^{kl} \sigma_{11} + I_{21}^{kl} \sigma_{21} + I_{12}^{kl} \sigma_{12} + I_{22}^{kl} \sigma_{22}) \quad (5.107)$$

## 5.8 Koeficijenti povratne i geometrijske krutosti za pravilan četverokut

Membranski četverokutni element s linearnim čvornim pomacima  $h_{x,k}$  i  $h_{y,k}$  u pravokutnom lokalnom koordinatnom sustavu s ishodištem u sredini elementa prikazan je slikom 5.5. Četverokutni element ima osam stupnjeva slobode, pa se pomaci unutar elementa mogu pretpostaviti u obliku nepotpunog polinoma drugog reda kao

$$\begin{aligned} h_x &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \xi \eta, \\ h_y &= b_0 + b_1 \xi + b_2 \eta + b_3 \xi \eta, \end{aligned} \quad (5.108)$$



Slika 5-5 Četverokutni element u lokalnom koordinatnom sustavu

gdje su  $a_i$  i  $b_i$  nepoznati koeficijenti, a

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad (5.109)$$

bezdimenzionalne koordinate. Izraz (5.108) predstavlja dva odvojena sustava od četiri jednačbe koji se mogu izraziti u matričnom obliku kao

$$\begin{aligned} \{h_x\} &= [Z]\{a\} \\ \{h_y\} &= [Z]\{b\}, \end{aligned} \quad (5.110)$$

gdje su

$$\{h_x\} = \begin{Bmatrix} h_{x,1} \\ h_{x,2} \\ h_{x,3} \\ h_{x,4} \end{Bmatrix}, \quad \{h_y\} = \begin{Bmatrix} h_{y,1} \\ h_{y,2} \\ h_{y,3} \\ h_{y,4} \end{Bmatrix}, \quad \{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}, \quad (5.111)$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Iz (5.110) slijedi da su nepoznati koeficijenti

$$\begin{aligned} \{a\} &= [Z]^{-1} \{h_x\} \\ \{b\} &= [Z]^{-1} \{h_y\}, \end{aligned} \quad (5.112)$$

gdje je inverzija matrice  $[Z]$

$$[Z]^{-1} = \frac{1}{4} [Z]^T, \quad (5.113)$$

Polje pomaka unutar elementa, jednačba (5.108), zapisano u matričnom obliku glasi

$$\begin{aligned} h_x &= \langle P \rangle \{a\} \\ h_y &= \langle P \rangle \{b\}, \end{aligned} \quad (5.114)$$

gdje je

$$\langle P \rangle = \langle 1, \xi, \eta, \xi\eta \rangle. \quad (5.115)$$

Uvrštavanjem (5.112) u (5.115) slijedi

$$\begin{aligned} h_x &= \langle \phi \rangle \{a\} \\ h_y &= \langle \phi \rangle \{b\}, \end{aligned} \quad (5.116)$$

gdje je vektor funkcija oblika  $\langle \phi \rangle$

$$\langle \phi \rangle = \langle P \rangle [Z]^{-1}, \quad (5.117)$$

čije komponente su

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \\ \phi_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ \phi_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \\ \phi_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \end{aligned} \quad (5.118)$$

ili u općem obliku

$$\phi_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad (5.119)$$

gdje su  $\xi_i$  i  $\eta_i$  koordinate  $i$ -tog čvora. Kao i u slučaju trokutnog elementa potrebno je, koristeći izvedene funkcije oblika (5.118) ili (5.119), odrediti vrijednosti integrala (5.84) – 5.90). Integriranjem jednažbe (5.84) u granicama između 0 i 1 proizlazi vrijednost integrala za svaku od kombinacija čvorova

$$\iint_S \phi_k \phi_l dS = \frac{S}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ & 4 & 2 & 1 \\ & & 4 & 2 \\ \text{Sim.} & & & 4 \end{bmatrix}, \quad (5.120)$$



gdje redni broj retka predstavlja čvor  $k$ , a redni broj stupca čvor  $l$ . Za potrebe integriranja izraza (5.85) - (5.90) nužno je izraziti parcijalne derivacije funkcija oblika, odnosno

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial x} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{4a} \xi_l (1 + \eta_l \eta), \quad (5.121)$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial y} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{4b} \eta_l (1 + \xi_l \xi). \quad (5.122)$$

Uvrštavanjem (5.119) i (5.120) u (5.85) i integriranjem slijedi

$$\iint_S \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dS = \frac{b}{12} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad (5.123)$$

gdje redni broj retka predstavlja čvor  $k$ , a redni broj stupca čvor  $l$ . Uvrštavanjem (5.119) i (5.122) u (5.86) i integriranjem slijedi

$$\iint_S \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dS = \frac{a}{12} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (5.124)$$

gdje redni broj retka predstavlja čvor  $k$ , a redni broj stupca čvor  $l$ . Uvrštavanjem odgovarajuće kombinacije izraza (5.121) i (5.122) u (5.87) – (5.90) slijedi da su u matričnom zapisu

$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dS = \frac{b}{12a} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad (5.125)$$

$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dS = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.126)$$

$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dS = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.127)$$

$$\iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dS = \frac{a}{12b} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & -4 & -2 \\ -2 & -4 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (5.128)$$

gdje redni broj retka predstavlja čvor  $k$ , a redni broj stupca čvor  $l$ . Iz jednadžbi (5.126) i (5.127) slijedi relacija

$$\left[ \iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dS \right] = \left[ \iint_S \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial y} dS \right]^T. \quad (5.129)$$

Koeficijenti povratne krutosti, koeficijent rubnog naprezanja i koeficijent geometrijske krutosti za četverokutni element mogu se u konačnici izraziti kao

$$C_{ij}^p = \rho g N \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \mathbf{H}_k^i H_{z,l}^j \iint_S \phi_k \phi_l dS, \quad (5.130)$$

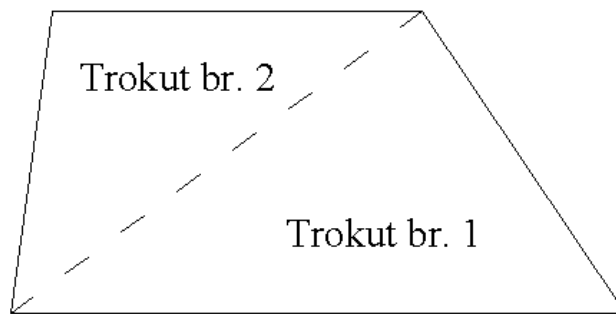
$$C_{ij}^{nh} = \rho g N \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \mathbf{H}_{kl}^{ij} \mathbf{c}^T \iint_S Z \phi_k \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{array} \right\} dS, \quad (5.131)$$

$$C_{ij}^m = \rho_s g t \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \mathbf{H}_k^i H_{z,l}^j \mathbf{c}^T \iint_S \phi_k \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{pmatrix} dS, \quad (5.132)$$

$$-k_{ij}^{S0} = -\rho g \mathbf{N} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\mathbf{H}_{kl}^{ij})^T \mathbf{c}^T \iint_S Z \phi_k \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{pmatrix} dS, \quad (5.133)$$

$$k_{ij}^G = t \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \left( \langle c \rangle_1 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_1 + \langle c \rangle_2 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_2 + \langle c \rangle_3 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_3 \right) \cdot (I_{11}^{kl} \sigma_{11} + I_{21}^{kl} \sigma_{21} + I_{12}^{kl} \sigma_{12} + I_{22}^{kl} \sigma_{22}) \quad (5.134)$$

U slučaju da je jedan od elemenata oplakane površine nepravilni četverokut, numerička integracija relevantnih veličina vrši se na način da se takav element podijeli s obzirom na kraću diagonalu na dva trokutna elementa te se u daljnjoj analizi koriste sve veličine važeće za trokutni element. Ilustracija dijeljenja nepravilnog četverokuta na dva trokuta prikazana je slikom 5.6 i detaljnije opisana u poglavlju 6. Također, kako bi se mogli koristiti prethodno određeni integrali funkcija oblika, potrebno je za koordinatu  $Z$  plošnog elementa uzeti konstantnu vrijednost određenu za njegovo težište.



Slika 5-6 Dijeljenje nepravilnog četverokuta na dva trokuta

## 5.9 Koeficijenti mase i geometrijske krutosti za linijske elemente

Razmatranjem izraza za koeficijente mase i geometrijske krutosti uočljivo je da se integracija provodi po volumenu cijele konstrukcije, za razliku od koeficijenata tlaka, normale i moda te koeficijenta rubnog naprezanja, gdje se integracija vrši po elementima oplakane površine. Stoga je potrebno ta dva koeficijenta zasebno definirati za slučaj linijskih konačnih elemenata (štapovi i grede) te je također potrebno definirati doprinos koncentriranih masa koeficijentu mase.

Koeficijent mase pri primjeni metode konačnih elemenata za općeniti element predstavljen je jednadžbom (5.42), koja za slučaj linijskog elementa glasi

$$C_{ij}^m = \rho_s g A \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \mathbf{H}_k^i H_{z,l}^j \mathbf{c}^T \int_L \phi_k \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \end{pmatrix} dx, \quad (5.135)$$

pri čemu su druga i treća komponenta vektora koji sadži derivacije funkcija oblika jednake nuli te je jedino potrebno odrediti vrijednost integrala

$$\int_L \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dx. \quad (5.136)$$

Funkcije oblika rastezanja štapa definirane su izrazima

$$\phi_1 = 1 - \frac{x}{L}, \quad (5.137)$$

$$\phi_2 = \frac{x}{L}, \quad (5.138)$$

pri čemu su parcijalne derivacije po koordinati  $x$  jednake

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = -\frac{1}{L}, \quad (5.139)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{1}{L}. \quad (5.140)$$

Uvrštavanjem (5.138) i (5.139) u (5.135) slijedi da je

$$\int_L \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.141)$$

gdje redni broj retka predstavlja čvor  $k$ , a redni broj stupca čvor  $l$ .

Koeficijent geometrijske krutosti u metodi konačnih elemenata za plošni element dan je jednažbom (5.66), koja za slučaj linijskog elementa glasi

$$k_{ij}^G = t \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \left( \langle c \rangle_1 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_1 + \langle c \rangle_2 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_2 + \langle c \rangle_3 [H_{kl}^{ij}] \{c\}_3 \right) \cdot I_{11}^{kl} \sigma_{11}. \quad (5.142)$$

Vrijednosti integrala korištenjem funkcija oblika (5.137) i (5.138) su

$$\int_L \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dx = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.143)$$

## 5.10 Koeficijent mase za slučaj koncentrirane mase

Koeficijent mase izražen je jednažbom (5.34). Masa je koncentrirana u jednom čvoru te je nemoguće koristiti funkcije oblika za opis polja pomaka unutar elementa. Zbog toga se zadržavaju čvorne vrijednosti vektora modalnih pomaka, prema čemu slijedi relacija

$$C_{ij}^m = g \iiint_V \rho_S H_k^i H_{3,k}^j dV = g H_k^i H_{3,k}^j m, \quad (5.144)$$

gdje je  $m$  koncentrirana masa. Zapisivanjem gornjeg izraza u matricnoj notaciji slijedi

$$C_{ij}^m = gm \left\langle H_x^i, H_y^i, H_z^i \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{\partial H_z^j}{\partial X} \\ \frac{\partial H_z^j}{\partial Y} \\ \frac{\partial H_z^j}{\partial Z} \end{pmatrix}, \quad (5.145)$$

što daje

$$C_{ij}^m = gm \left( H_x^i \frac{\partial H_z^j}{\partial X} + H_y^i \frac{\partial H_z^j}{\partial Y} + H_z^i \frac{\partial H_z^j}{\partial Z} \right), \quad (5.146)$$

gdje  $\frac{\partial H_z^j}{\partial X}$  i  $\frac{\partial H_z^j}{\partial Y}$  predstavljaju rotaciju oko osi  $x$  i  $y$ , a  $\frac{\partial H_z^j}{\partial Z}$  deformaciju  $\varepsilon_z$ . U odnosu na prva dva pribrojnika, treći se može smatrati veličinom drugog reda, nakon čega slijedi da je

$$C_{ij}^m = gm \left( H_x^i \frac{\partial H_z^j}{\partial X} + H_y^i \frac{\partial H_z^j}{\partial Y} \right). \quad (5.147)$$

Ako se prvom pribrojniku jednažbe (5.147) doda i oduzme  $\frac{1}{2} \frac{\partial H_x^j}{\partial Z}$ , a drugom doda i

oduzme  $\frac{1}{2} \frac{\partial H_y^j}{\partial Z}$ , slijedi

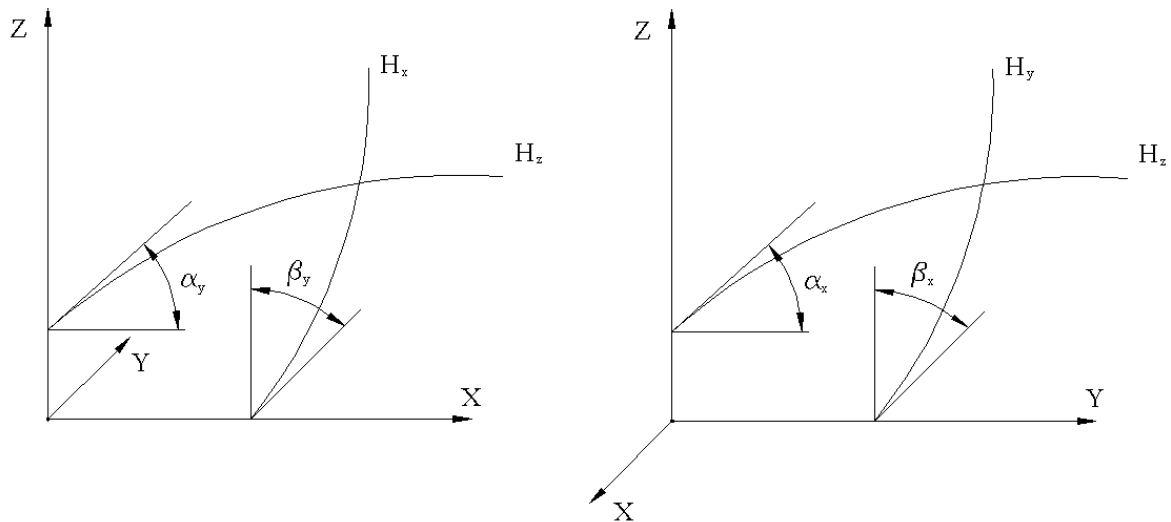
$$C_{ij}^m = gm \left[ H_x^i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_z^j}{\partial X} - \frac{\partial H_x^j}{\partial Z} \right) + H_x^i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_z^j}{\partial X} + \frac{\partial H_x^j}{\partial Z} \right) + H_y^i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_z^j}{\partial Y} - \frac{\partial H_y^j}{\partial Z} \right) + H_y^i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_z^j}{\partial Y} + \frac{\partial H_y^j}{\partial Z} \right) \right]. \quad (5.148)$$

Razmatranjem izraza (5.148) uočljivo je da prvi i treći član predstavljaju kutove rotacija  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\alpha_y$  i  $\beta_y$  oko  $x$  i  $y$  osi, slika 5-7, a drugi i četvrti pribrojnik smičnu deformaciju te se stoga u odnosu na prvi i treći član mogu zanemariti kao veličine drugog reda. U konačnici slijedi,

$$C_{ij}^m = gm \left[ H_x^i \frac{1}{2} (-\alpha_y - \beta_y) + H_y^i \frac{1}{2} (\alpha_x + \beta_x) \right]. \quad (5.149)$$

Budući da prvi i drugi pribrojnik predstavljaju kutove rotacije oko osi  $y$ , odnosno osi  $x$  slijedi

$$C_{ij}^m = gm (-H_x^i \varphi_y + H_y^i \varphi_x). \quad (5.150)$$

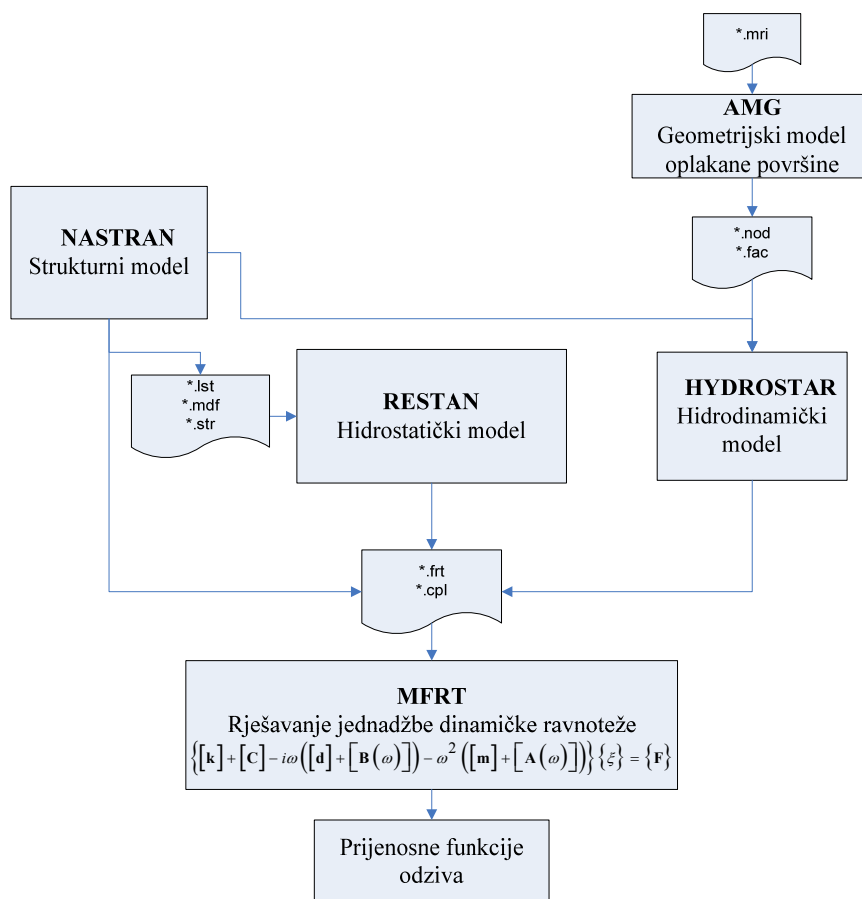


Slika 5-7 Kutovi rotacije oko osi  $x$  i  $y$

## 6 OPIS PROGRAMA RESTAN

Proračun povratne krutosti formulirane metodom konačnih elemenata, poglavlje 5, vrši se pomoću programa RESTAN (REStoring STiffness ANalysis). Program RESTAN, kodiran u programskom jeziku FORTRAN, [53], predstavlja alat za određivanje koeficijenata povratne krutosti na temelju mreže konačnih elemenata 3D strukturnog modela te na temelju rezultata analize čvrstoće broda na mirnoj vodi i analize prirodnih vibracija broda u zraku.

Programsko okruženje u kojem radi program RESTAN, slika 6-1, odgovara metodologiji hidroelastične analize prikazanoj slikom 2-1 te se sastoji od programa AMG (Automatic Mesh Generator), [54], NASTRAN, HYDROSTAR i MFRT (Motion FRequency Time), [55].



Slika 6-1 RESTAN - programsko okruženje

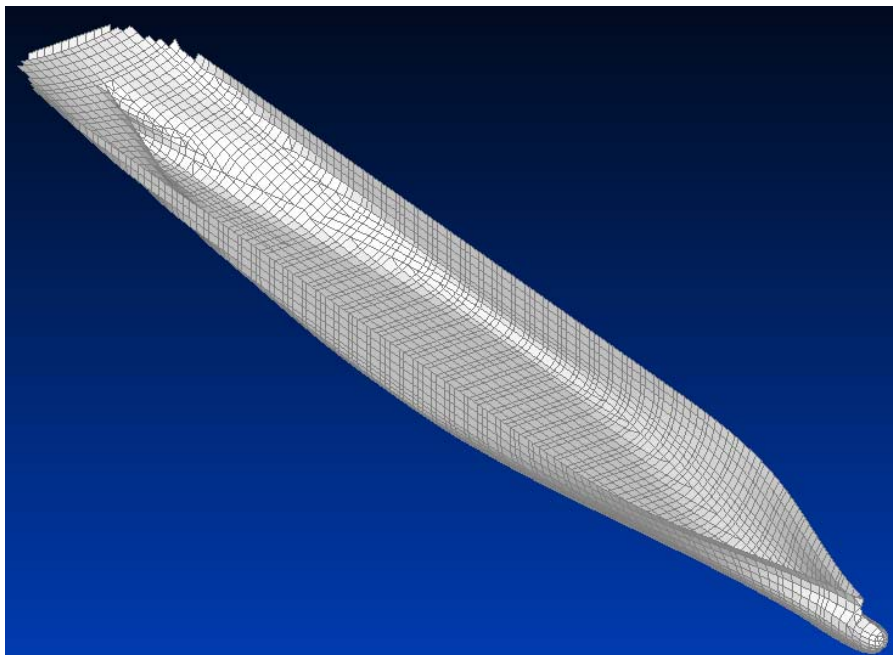


Postupak pripreme datoteka koje sadrže ulazne podatke za program RESTAN sastoji se od nekoliko koraka. Prije svega potrebno je formirati datoteku \*.lst koja u sebi sadrži informacije o strukturnom modelu, tj. redni broj i koordinate svakog čvora, zatim karakteristike materijala korištenih u modelu, karakteristike konačnih elemenata, redni broj i čvorove svakog elementa i naposljetku konačne elemente na oplakanoj površini. Sve navedene karakteristike strukturnog modela dostupne su u programu NASTRAN odabirom naredbe *List/model* te ih je potrebno ispisati slijedećim redoslijedom:

1. Model Info
2. Node
3. Material
4. Property
5. Element
6. Group – wetted surface elements

Za potrebe ispisa elemenata na oplakanoj površini potrebno je da korisnik prethodno formira grupu pod imenom *Wetted surface* te da toj grupi dodijeli odgovarajuće elemente. Primjer grupe elemenata oplakane površine prikazan je slikom 6-2. U istu je grupu potrebno uključiti i sve elemente koje siječe vodna linija. Za takve elemente je nužno da čvor ili čvorovi koji su iznad vodne linije budu numerirani rednim brojem 1 – 3 u smjeru kazaljke na satu, ovisno o pojedinom slučaju, tablica 6-1.

Zbog veličine datoteka korisno je rezultate analize prirodnih vibracija broda i analize čvrstoće na mirnoj vodi pohraniti u odvojenim datotekama. Datoteka \*.mdf (Modal Displacement File) sadrži modalne pomake i rotacije čvorova strukturnih elemenata, a datoteka \*.str (STress) naprezanja u svim strukturnim elementima. Obje datoteke moguće je formirati programom NASTRAN primjenom naredbe *List/Output*.



Slika 6-2 Elementi oplakane površine

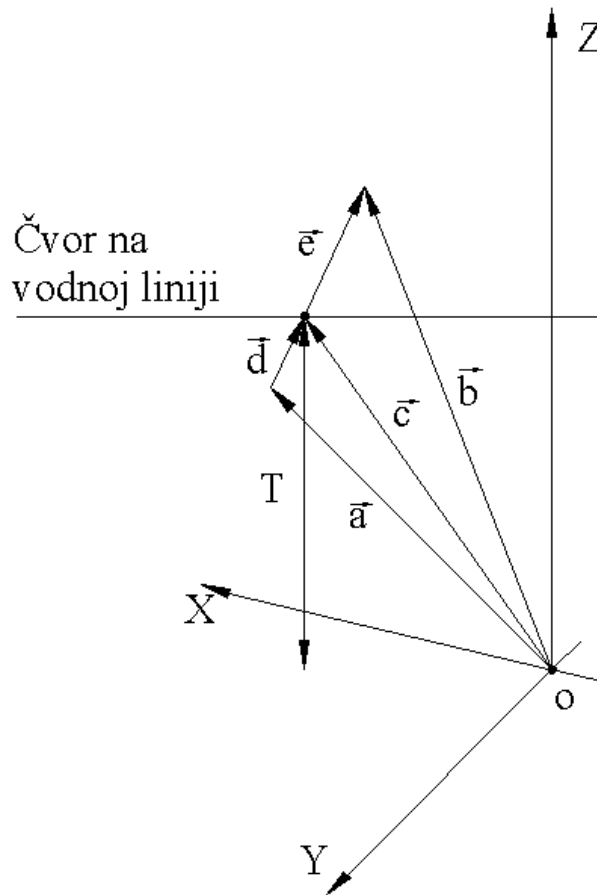
Tablica 6-1 Numeracija čvorova elemenata oplakane površine

Element	Numeracija čvorova		
Trokut			
Četverokut			

Nakon učitavanja ulaznih podataka program RESTAN započinje postupak brisanja "pretička" elemenata oplakane površine iznad vodne linije presjecanjem geometrije broda horizontalnom ravninom na koordinati  $z$  jednakoj gazu broda, nakon čega određuje koordinate novonastalih čvorova. Budući da je koordinata  $z$  unaprijed poznata i jednaka gazu broda,  $T$ , koordinate  $x$  i  $y$  određuju se linearnom interpolacijom prema izrazima,

$$\begin{aligned}
 c_x &= a_x + \frac{(b_x - a_x)(c_z - a_z)}{b_z - a_z}, \\
 c_y &= a_y + \frac{(b_y - a_y)(c_z - a_z)}{b_z - a_z}, \\
 c_z &= T,
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

gdje su  $a_x$ ,  $a_y$  i  $a_z$  koordinate čvora ispod vodne linije,  $b_x$ ,  $b_y$  i  $b_z$  koordinate čvora iznad vodne linije, a  $c_x$  i  $c_y$  nepoznate koordinate novog čvora na vodnoj liniji, slika 6-3.

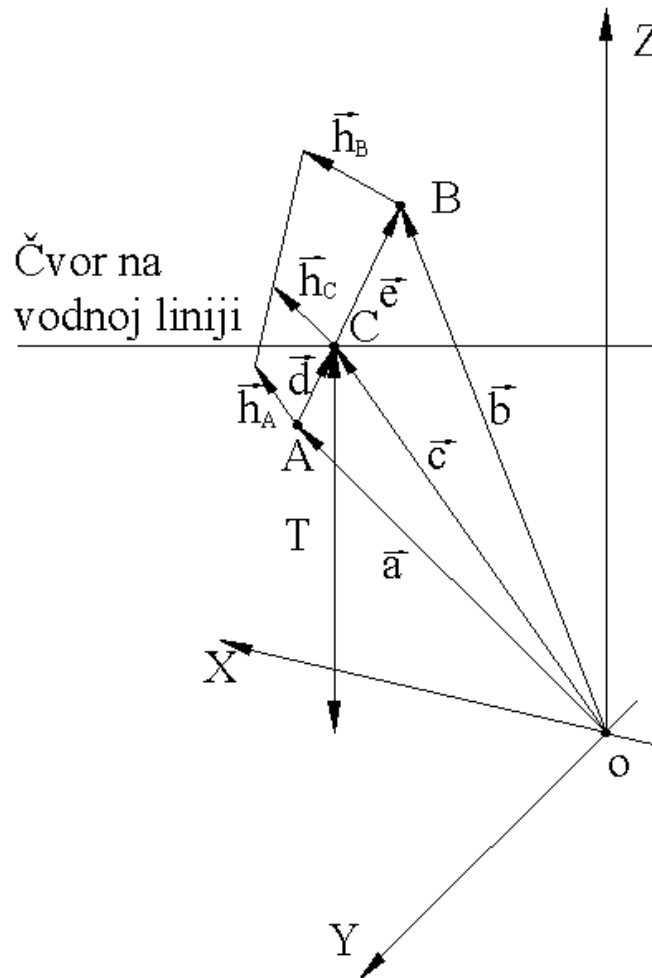


Slika 6-3 Linearna interpolacija čvorova na vodnoj liniji

Nakon kreiranja novih čvorova potrebno je odrediti njihove modalne pomake. U tu svrhu program RESTAN vrši linearnu interpolaciju modalnih pomaka susjednih čvorova elemenata prema izrazu

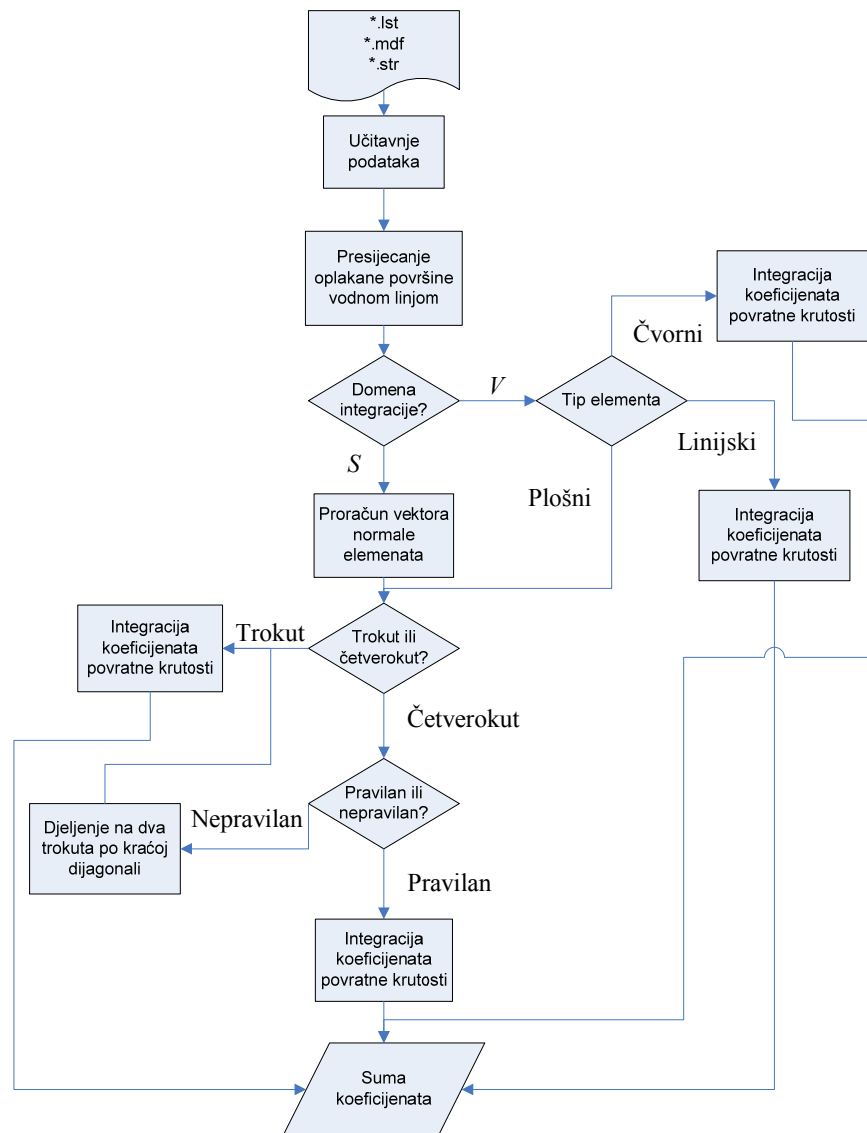
$$\mathbf{h}_C = \mathbf{h}_A + \frac{|\mathbf{d}|}{|\mathbf{e}|}(\mathbf{h}_B - \mathbf{h}_A), \quad (6.2)$$

gdje  $\mathbf{h}_A$ ,  $\mathbf{h}_B$  i  $\mathbf{h}_C$  predstavljaju vektore modalnog pomaka čvorova A, B i C, slika 6-4.



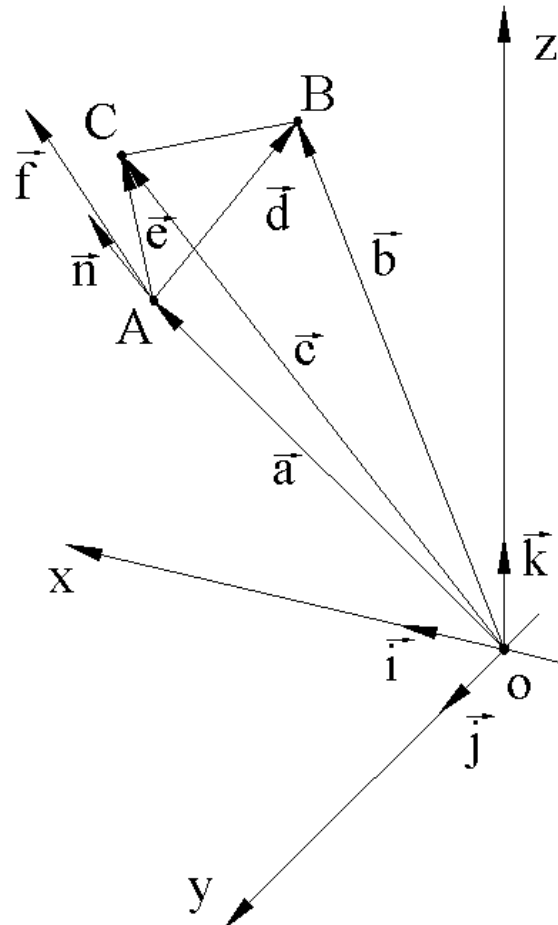
Slika 6-4 Linearna interpolacija modalnih čvornih pomaka

Razmatranjem izraza za koeficijente povratne krutosti uočljiva je osnovna podjela koeficijenata prema području integracije, tj. koeficijenti koji se određuju integracijom po oplakanoj površini i koeficijenti koji su rezultat integracije po cjelokupnom volumenu brodske strukture. Shodno tome, proračun koeficijenata u programu RESTAN se dijeli u dva osnovna pravca, slika 6-5, pri čemu su integracijom po oplakanoj površini obuhvaćeni samo plošni elementi, tj. trokuti i četverokuti, a integracijom po volumenu potrebno je uz plošne elemente uzeti u obzir i linijske, tj. štapove i grede, te također i čvorne elemente.



Slika 6-5 Shematski prikaz proračuna povratne krutosti u programu RESTAN

Nakon definiranja oplakane površine  $S$  kao domene integracije, vrši se postupak proračuna vektora normale na plošni element koji se temelji na vektorskoj analizi. Primjer proračuna za slučaj trokutnog elementa dan je slikom 6-6, prema kojoj je vidljivo da je vektor normale,  $\vec{n}$ , rezultat vektorskog produkta vektora  $\vec{d}$  i  $\vec{e}$ . Na temelju istog principa program RESTAN vrši određivanje lokalnih koordinatnih osi i komponenata matrice transformacije svakog elementa. Vektorski produkt vektora normale  $\vec{n}$  i vektora  $\vec{d}$  daje vektor  $\vec{f}$  koji predstavlja treću koordinatnu os lokalnog koordinatnog sustava ( $\vec{d}-\vec{f}-\vec{n}$ ) elementa. Naposljetku, skalarnim umnoškom pojedinog jediničnog vektora u smjeru globalnih koordinatnih osi s pojedinim vektorom koji definira lokalni koordinatni sustav, moguće je jednostavno odrediti elemente matrice transformacije svakog elementa.



Slika 6-6 Trokutni element s vektorom normale

Nakon određivanja osnovnih parametara vezanih za svaki element program RESTAN započinje proračun koeficijenta povratne krutosti prema izrazima danim u poglavlju 5. Ukoliko je element oplakane površine nepravilan četverokut, potrebno ga je razdijeliti na dva trokuta s obzirom na kraću dijagonalu, slika 5-6. Kao rezultat analize povratne krutosti program RESTAN daje matricu modalne povratne krutosti. Testiranje programskog koda programa RESTAN vršeno je tijekom njegove izrade. Primjer testiranja točnosti koda prikazan je u Prilogu D.

Ostale komponente jednadžbe dinamičke ravnoteže potrebno je odrediti primjenom već ranije spomenutih programskih paketa. Modalnu matricu konvencionalne krutosti i mase moguće je odrediti programom NASTRAN, a modalne matrice dodatne mase i hidrodinamičkog prigušenja te hidrodinamičko opterećenje programom HYDROSTAR. Matrica strukturnog prigušenja definira se kao postotak kritičnog prigušenja. U konačnici, sve navedene komponente potrebno je uvrstiti u linearnu modalnu jednadžbu dinamičke ravnoteže

$$\left\{ \left( [k] + [C] \right) - i\omega_e \left( [d] + [B(\omega_e)] \right) - \omega_e^2 \left( [m] + [A(\omega_e)] \right) \right\} \{ \xi \} = \{ F(\omega_e) \}, \quad (6.3)$$

gdje su

$[k]$  - matrica konvencionalne krutosti

$[d]$  - matrica strukturnog prigušenja

$[m]$  - matrica mase

$[C]$  - matrica povratne krutosti

$[B(\omega)]$  - matrica hidrodinamičkog prigušenja

$[A(\omega)]$  - dodane mase

$\{ \xi \}$  - vector modalnih amplituda

$\{ F \}$  - vector valne uzbude

$\omega_e$  - susretna frekvencija

koja se rješava primjenom programa MFRT čiji rezultat su amplitude modova te krivulje prijenosnih funkcija.



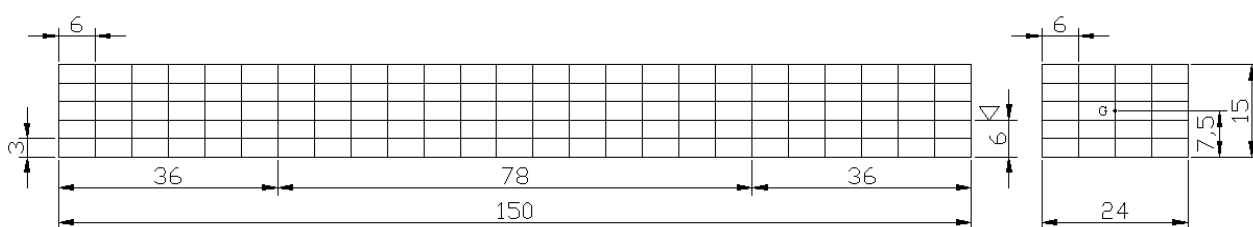
## 7 ILUSTRATIVNI PRIMJERI

### 7.1 Pravilna barža

Prije analize utjecaja formulacije povratne krutosti na hidroelastični odziv brodske konstrukcije, prikladno je istu provesti za slučaj pravilne barže. U potonjem slučaju je interpretacija rezultata mnogo lakša te je također moguće validirati koeficijente povratne krutosti za krute modove usporedbom s dostupnim analitičkim vrijednostima. Pravilna barža osnovnih karakteristika

Duljina	$L = 150, \text{ m}$
Širina	$B = 24, \text{ m}$
Gaz	$T = 6, \text{ m}$
Visina	$D = 15, \text{ m}$
Volumen istisnine	$\nabla = 21600, \text{ m}^3$
Istisnina	$\Delta = 22140, \text{ t}$
Vertikalna koordinata težišta mase	$z_G = 7,5, \text{ m}$
Površina vodne linije	$A_{WL} = 3600 \text{ m}^2$
Gustoća morske vode	$\rho = 1.025 \text{ t/m}^3$

prikazana je slikom 7-1.

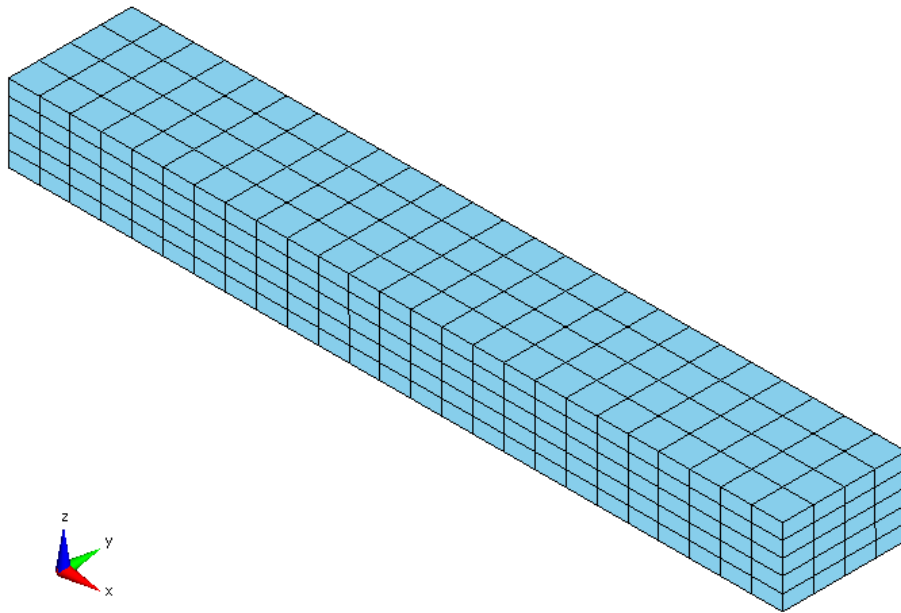


Slika 7-1 Struktura pravilne barže

Unutarnja struktura barže se sastoji od 3 uzdužne i 24 poprečne pregrade te 4 palube. Debljina svih elemenata konstrukcije je 10 mm, te je definiranjem gustoće materijala pojedinih elemenata zadana i masa barže. Ukupna masa je raspodijeljena u tri zone. Gustoća materijala elemenata krmenog i pramčanog dijela (36 m od krmenog /

pramčanog čela) je  $\rho_1 = 0.260427 \text{ t/m}^3$ , dok elementi središnjeg dijela barže (dužine 78 m) imaju gustoću  $\rho_2 = 0.781277 \text{ t/m}^3$ . Na taj je način osigurano prednaprezanje strukture barže na mirnoj vodi njenim progibanjem

3D FEM model pravilne barže izrađen je u programu NASTRAN sa svrhom provođenja analize čvrstoće barže na mirnoj vodi i slobodnih vibracija barže u zraku. Model se sastoji od ukupno 780 čvorova i 1745 pravokutnih elemenata, pri čemu mreža konačnih elemenata koincidira s topologijom strukture barže, slika 7-1. 3D FEM model barže prikazan je slikom 7-2.

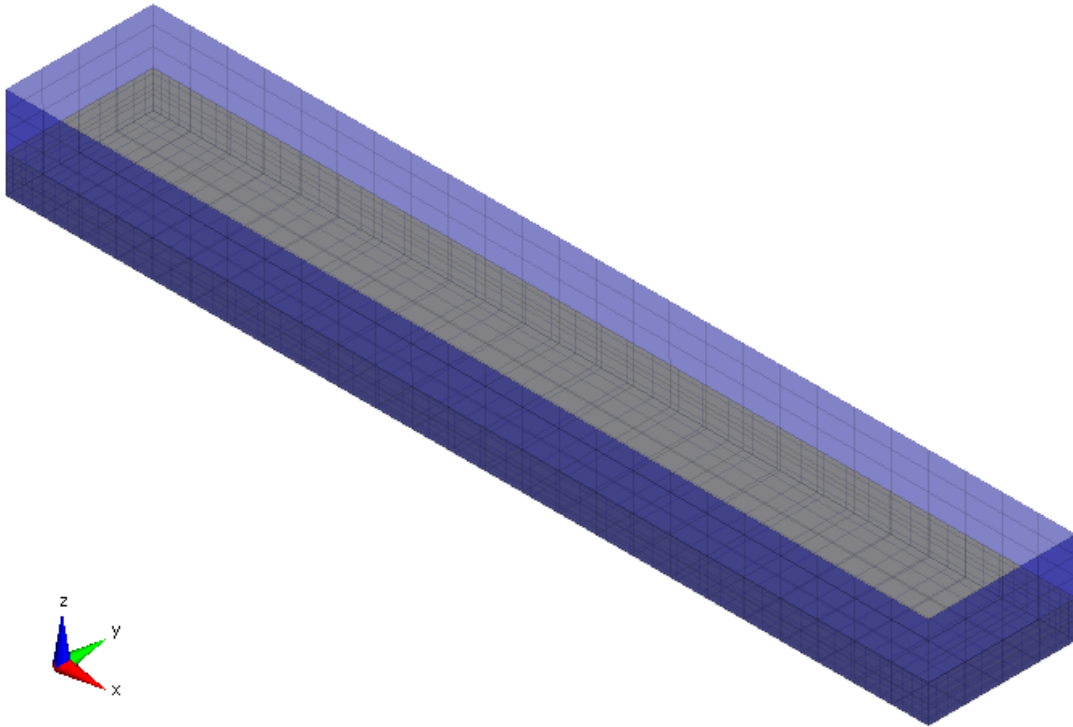


Slika 7-2 3D FEM model barže izrađen u programu NASTRAN

#### 7.1.1 Analiza čvrstoće barže na mirnoj vodi

Za potrebu određivanja vrijednosti elemenata matrice modalne geometrijske krutosti potrebno je provesti analizu čvrstoće barže na mirnoj vodi i definirati stanje naprezanja. Analiza čvrstoće barže provedena je pomoću programa HOMER, [56], koji predstavlja grafičko sučelje kojim su objedinjeni programi HYDROSTAR i NASTRAN. Uz postojeći 3D FEM model potrebno je formirati hidrodinamički model oplakane

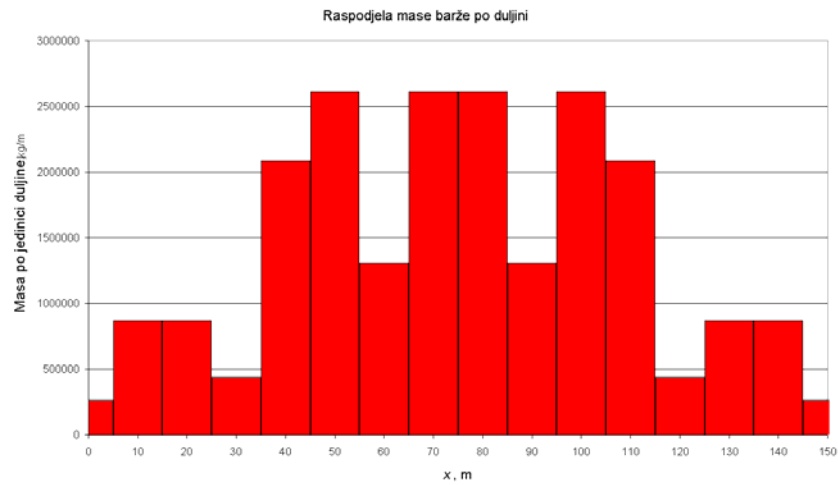
površine koji se koristi za proračun hidrostatičkih i hidrodinamičkih karakteristika barže te također model oplakane površine 3D FEM modela pomoću kojeg se ostvaruje sprežanje strukturnog i hidrodinamičkog modela. Hidrodinamički model oplakane površine i model oplakane površine 3D FEM modela u slučaju barže prikazani su slikom 7-3.



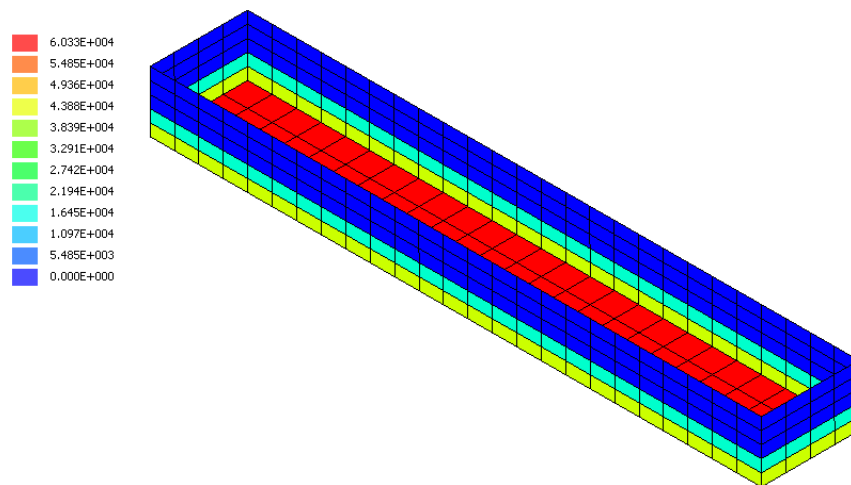
Slika 7-3 Sprega hidrodinamičkog modela i modela oplakane površine barže

Opterećenje barže se sastoji od mase strukture barže te od hidrostatičkog tlaka koji uravnotežuje baržu. Raspodjela mase duž  $x$  koordinate barže prikazana je slikom 7-4, a raspodjela tlaka po oplakanoj površini slikom 7-5. Maksimalni hidrostatski tlak iznosi  $p_{\max} = 60.33$  kPa, što odgovara visini stupca vode od 6 m. Rezultirajuće opterećenje barže na mirnoj vodi prikazano je slikom 7-6. Posignuta je zadovoljavajuća raspodjela momenata savijanja i poprečnih sila na mirnoj vodi. Obje krivulje na krajevima barže imaju vrijednost 0, te maksimalne vrijednosti na očekivanim presjecima, tj. na sredini barže (moment savijanja) i na četvrtini udaljenosti od čela (poprečna sila). Rezultat analize čvrstoće barže na mirnoj vodi su deformacije i naprezanja pojedinih strukturnih

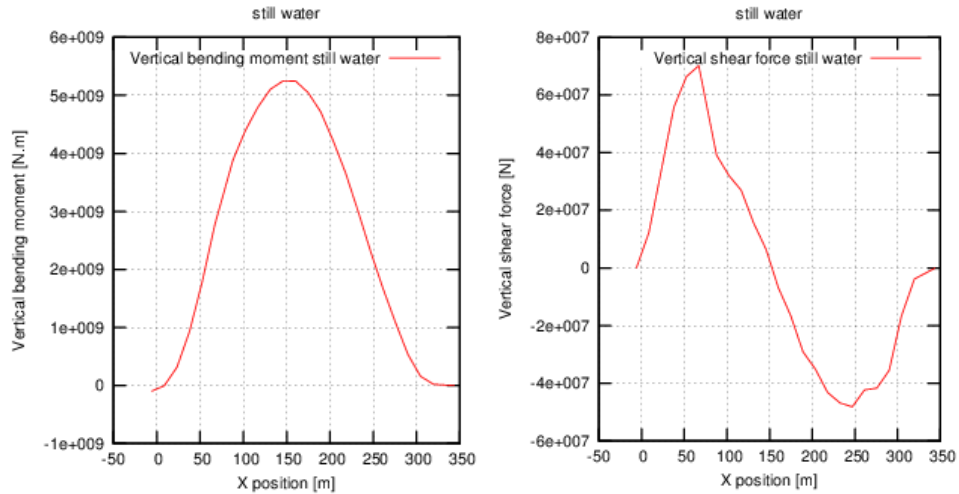
elementa. Slika 7-7 prikazuje deformirani strukturni model sa distribucijom uzdužnog naprezanja,  $\sigma_x$ , po elementima. Maksimalno naprezanje javlja se na dnu i gornjoj palubi barže na središnjem presjeku i iznosi  $\sigma_{\max} = \pm 137.5 \text{ N/mm}^2$ . Preostali rezultati analize čvrstoće su izostavljeni radi konciznosti rada.



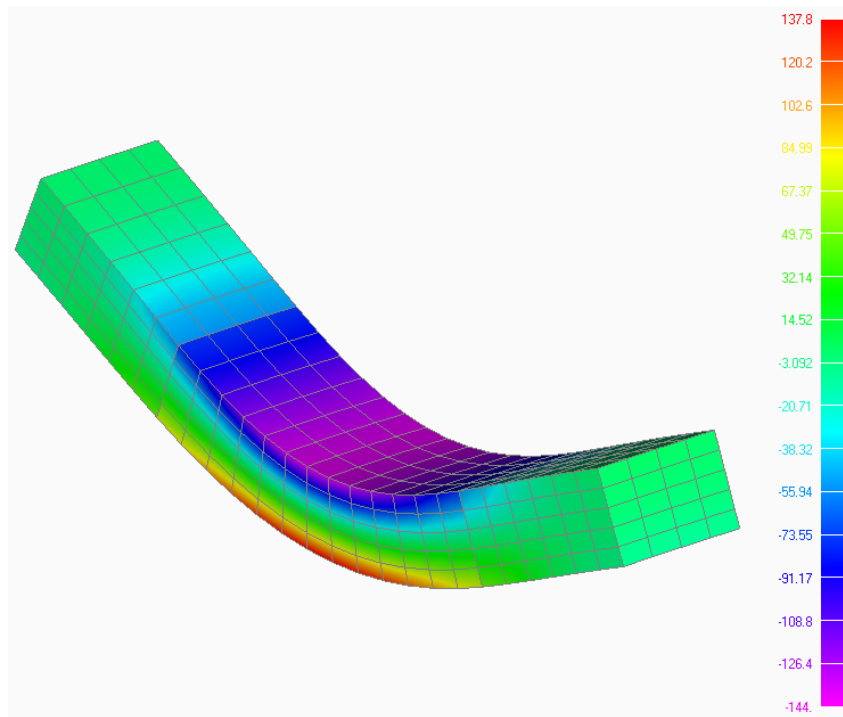
Slika 7-4 Distribucija mase po dužini barže



Slika 7-5 Raspodjela hidrostatičkog tlaka po oplakanoj površini, [Pa]



Slika 7-6 Vertikalni moment savijanja i poprečna sila barže na mirnoj vodi



Slika 7-7 Distribucija  $\sigma_x$  naprezanja

### 7.1.2 Analiza slobodnih vibracija u zraku

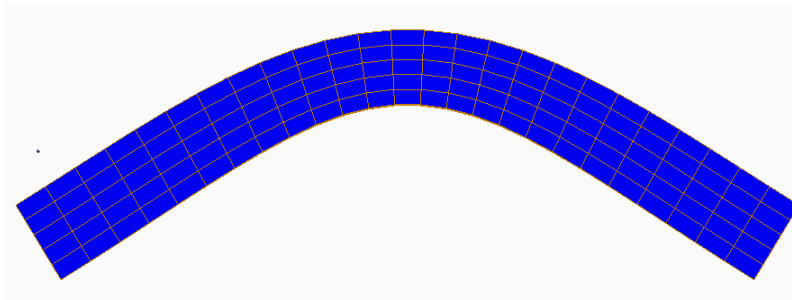
Analiza slobodnih vibracija u zraku provedena je pomoću komercijalnog programskog paketa NASTRAN. Problem svojstvenih vrijednosti riješen je Lanczs-ovom metodom. Prilikom rješavanja problema izvršena je normalizacija modalnih pomaka, na

način da je ostvarena jedinična vrijednost poopćene mase, [51]. Prirodne frekvencije nekoliko prvih suhih elastičnih modova barže (vertikalni, horizontalni i torzijski) u zraku prikazane su u tablici 7-1.

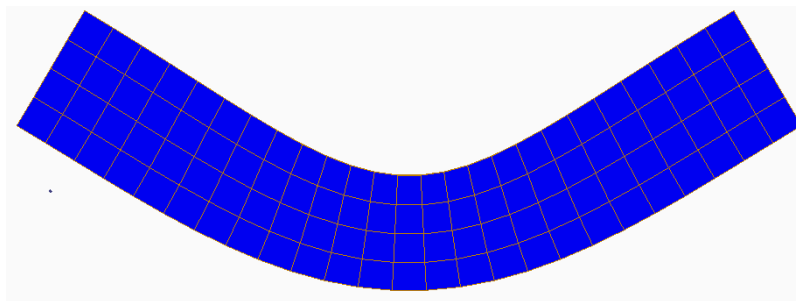
Tablica 7-1 Frekvencije prirodnih oblika vibriranja barže u zraku,  $f$ , [Hz]

<i>Mod</i>	<i>Vertikalne</i>	<i>Horizontalne</i>	<i>Torzijske</i>
1	1.4611	2.1674	2.9425
2	3.1266	4.5227	5.4358
3	5.3028	7.5194	7.4517
4	7.7376	10.8088	9.5297

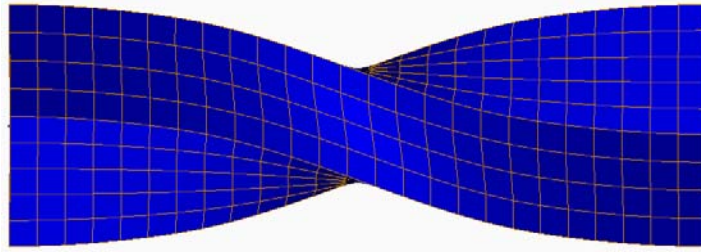
Važno je naglasiti da su težište mase i centar torzije u slučaju pravilne barže identična točka te stoga ne postoji sprega između horizontalnih i torzijskih vibracija koja je jako izražena kod velikih kontejnerskih brodova. Prvi vertikalni, horizontalni i torzijski mod vibriranja prikazani su slikama 7-8, 7-9 i 7.10.



Slika 7-8 Prvi vertikalni prirodni oblik vibriranja



Slika 7-9 Prvi horizontalni prirodni oblik vibriranja



Slika 7-10 Prvi torzijski prirodni oblik vibriranja

### 7.1.3 Analiza povratne krutosti

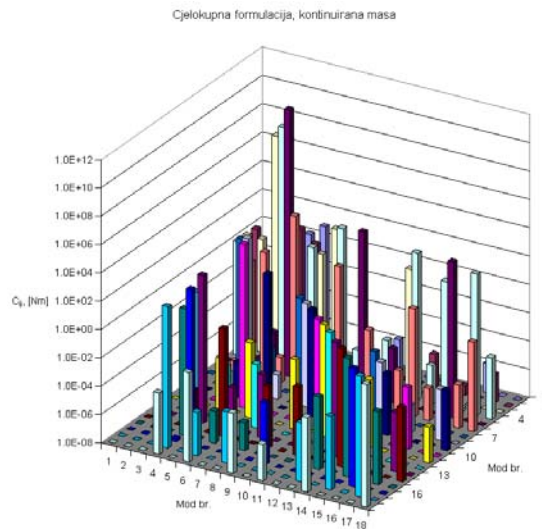
Na temelju određenog stanja naprezanja i modalnih pomaka čvorova svih elemenata 3D FEM modela barže moguće je odrediti koeficijente modalne povratne krutosti pomoću programa RESTAN. Razmatrana su ukupno tri različita slučaja: cjelokupna formulacija, jednađba (4.1), konzistentna formulacija povratne krutosti, jednađba (4.3), sa distribuiranom masom strukture barže, te konzistentna formulacija povratne krutosti s masom strukture koncentriranom u strukturnim čvorovima.

Koeficijenti modalne povratne krutosti određeni su za sva tri slučaja programom RESTAN integracijom funkcija oblika po površini plošnih elemenata za ukupno 18 modova (6 krutih i 12 elastičnih). Skup od ukupno 12 elastičnih modova sastavljen je od 4 verikalna, 4 horizontalna i 4 torziona prirodna oblika vibriranja, tablica 7-1. Integracija funkcija oblika provedena je korištenjem mreže konačnih elemenata strukturne mreže postojećeg 3D FEM modela. Takva integracija nije moguća jedino u slučaju proračuna vrijednosti koeficijenta mase,  $C_{ij}^m$ , na temelju mase koncentrirane u čvorovima modela. U tom je slučaju neophodno koristiti jednađbu (5.150) te se na taj način omogućuje uvid u utjecaj smične deformacije na hidroelastični odziv barže.

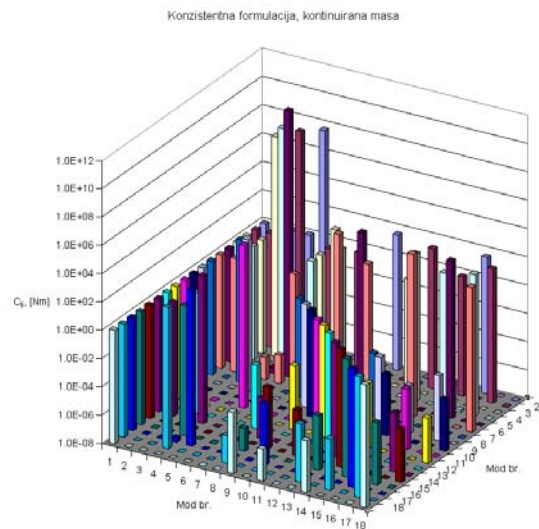
Slike 7-11 – 7-13 prikazuju elemente matrice modalne povratne krutosti za svaki od navedena tri slučaja. Apsolutna vrijednost svakog elementa matrice povratne krutosti prikazana je jednim stupcem u logaritamskom mjerilu. Na taj je način omogućena kvalitativna usporedba različitih formulacija povratne krutosti. Uočljivo je da u sva tri slučaja formulacije povratne krutosti dominantnu vrijednost imaju dijagonalni elementi matrica (osobito u slučaju krutih modova – poniranje, valjanje i posrtanje) te elementi matrica koji predstavljaju spregu krutih modova s elastičnim. Sprega elastičnih s

elastičnim modovima u manjoj je mjeri izražena, ukoliko je masa barže uzeta u obzir kao kontinuirano raspodijeljena u odnosu na masu koncentriranu u čvorovima, koje predstavlja aproksimaciju realnog fizikalnog stanja.

Detaljniju usporedbu rezultata dobivenih različitim formulacijama te validaciju same analize povratne krutosti pomoću programa RESTAN moguće je provesti za slučaj poniranja, valjanja i posrtanja barže, jer je u tim slučajevima moguće koeficijente povratne krutosti usporediti s analitičkim vrijednostima, navedenim u prilogu B. Vrijednosti pojedinih koeficijenata povratne krutosti prikazane su u tablici 7-2 za tri slučaja formulacije povratne krutosti.

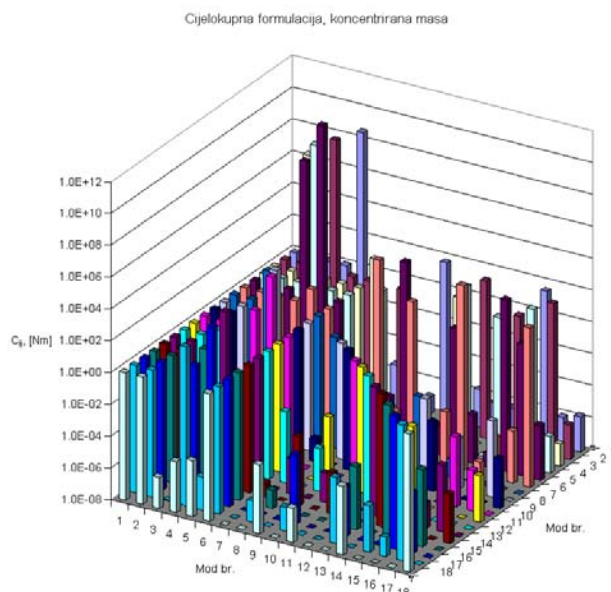


Slika 7-11 Matrica povratne krutosti barže, cjelokupna formulacija, (4.1)



Slika 7-12 Matrica povratne krutosti barže, konzistentna formulacija, (4.3)





Slika 7-13 Matrica povratne krutosti barže, konzistentna formulacija – koncentrirana masa, (4.3)

Tablica 7-2 Usporedba koeficijenata povratne krutosti barže

Gibanje	Formulacija	$C_{ij}^p$	$C_{ij}^{nh}$	$C_{ij}^m$	$-k_{ij}^{s0}$	$k_{ij}^G$	$C_{ij}^{total}$	$C_{ij}^{an}$	$\varepsilon(\%)$
Poniranje $i=j=3$	Cjelokupna	$3.6199 \cdot 10^7$					$3.6199 \cdot 10^7$	$3.6190 \cdot 10^7$	0.025
	Konzistentna	$3.6199 \cdot 10^7$					$3.6199 \cdot 10^7$		0.025
	Konzistentna koncentrirana masa	$3.6199 \cdot 10^7$					$3.6199 \cdot 10^7$		0.025
Valjanje $i=j=4$	Cjelokupna	$7.6018 \cdot 10^8$	0.0		$2.2805 \cdot 10^9$	$-2.2806 \cdot 10^9$	$7.6015 \cdot 10^8$	$7.601 \cdot 10^8$	0.007
	Konzistentna	$7.6018 \cdot 10^8$	0.0	0.0			$7.6018 \cdot 10^8$		0.010
	Konzistentna koncentrirana masa	$7.6018 \cdot 10^8$	0.0	0.0			$7.6018 \cdot 10^8$		0.010
Posrtanje $i=j=5$	Cjelokupna	$6.6896 \cdot 10^{10}$	0.0		$2.2805 \cdot 10^9$	$-2.2806 \cdot 10^9$	$6.6896 \cdot 10^{10}$	$6.6890 \cdot 10^{10}$	0.009
	Konzistentna	$6.6896 \cdot 10^{10}$	0.0	0.0			$6.6896 \cdot 10^{10}$		0.009
	Konzistentna koncentrirana masa	$6.6896 \cdot 10^{10}$	0.0	$-1.978 \cdot 10^1$			$6.6896 \cdot 10^{10}$		0.009

U slučaju poniranja barže doprinos povratnoj krutosti ostvaren je jedino koeficijentom tlaka,  $C_{33}^p$ , čija vrijednost je gotovo jednaka analitičkoj ( $\varepsilon = 0.025\%$ ). Također, osnovni doprinos ukupnom koeficijentu povratne krutosti za valjanje ostvaren

je koeficijentom tlaka. Kako je već ranije istaknuto, kod pravilne barže centar torzije koincidira s težištem mase barže zbog čega je vrijednost koeficijenta  $C_{44}^m$ , u slučaju konzistentne formulacije, jednaka 0 bez obzira na način modeliranja mase (kontinuirana ili koncentrirana u čvorovima). Također, kako se radi o krutom modu, koeficijent  $C_{44}^{mh}$  također ima vrijednost 0. Koeficijenti  $k_{44}^{S0}$  i  $k_{44}^G$  sastavni su dio cjelokupne formulacije povratne krutosti te je, sukladno očekivanju ( $C_{44}^m = 0$ ), razlika  $-k_{44}^{S0} + k_{44}^G \approx 0$ . Odstupanje od analitičke vrijednosti je u sva tri slučaja zanemarivo mala ( $\varepsilon = 0.007\%$  i  $\varepsilon = 0.010\%$ ). Povratna krutost u slučaju posrtanja nije senzitivna kao u slučaju valjanja te su stoga odstupanja dobivenih koeficijenata u odnosu na analitička još manja.

Važno je napomenuti da je moguće koeficijente povratne krutosti odrediti za svaki od navedenih slučajeva i numeričkom integracijom preko Gauss-ovih točaka (postupak implementiran u komercijalnom programskom paketu HOMER). Za relativno grubu mrežu elemenata oplakane površine, kakva se koristi u ovom primjeru postiže se vrijednost koeficijenta za valjanje barže koja se razlikuje od analitičke za  $\varepsilon = -14.277\%$ . Međutim, već dvostruko gušća mreža rezultira mnogo točnijom vrijednosti koeficijenta koja se od analitičke razlikuje za  $\varepsilon = -2.633\%$ . Razlika u rezultatu nastaje kao posljedica aproksimacije gradijenta tlaka u poprečnom smjeru pomoću Gauss-ovih točaka koja je bliža stvarnom gradijentu u slučaju većeg broja točaka.

#### 7.1.4 Analiza odziva barže

Kako bi se odredio hidroelastični odziv barže potrebno je riješiti jednadžbu dinamičke ravnoteže, koja u sebi objedinjuje konvencionalnu i povratnu krutost, hidrodinamičko i strukturno prigušenje, dodanu masu i inercijske karakteristike barže te valnu uzбудu. Hidrodinamičke veličine potrebne za formiranje jednadžbe dinamičke ravnoteže određene su za dva nailazna kuta valova  $\chi_1 = 150^\circ$  i  $\chi_2 = 180^\circ$  za baržu u mirovanju, tj.  $v = 0$  m/s i valnu amplitudu  $\zeta_a = 1$  m. Strukturno prigušenje zadano je izrazom

$$D_{ij} = 2\xi_{Di} \sqrt{(C_{ij} + K_{ij})(M_{ij} + A_{ij})}, \quad (7.1)$$

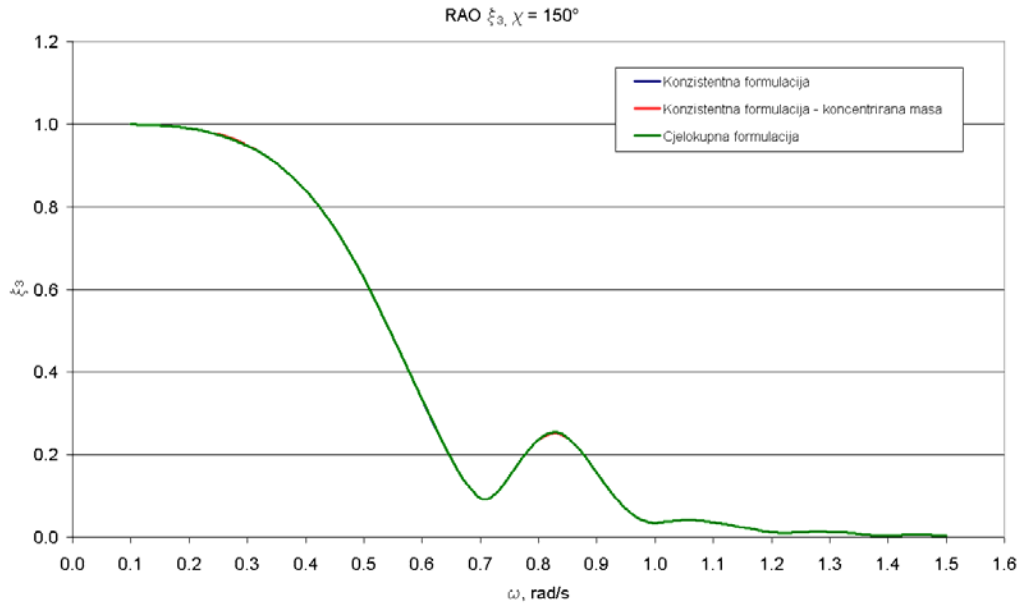
gdje  $\xi_{Di}$  predstavlja postotak kritičnog prigušenja za mod  $i$ . Vrijednost koeficijenta prigušenja  $\xi_D$  određena je na osnovi eksperimenta i iskustva Bureau Veritasa te su usvojene sljedeće vrijednosti

$$\begin{aligned}
 \xi_{D1} &= \xi_{D2} = \xi_{D3} = \xi_{D5} = \xi_{D6} = 0, \\
 \xi_{D4} &= 0.070, \\
 \xi_{D7} &= 0.015, \\
 \xi_{D8} &= 0.020, \\
 \xi_{D9} &= 0.022, \\
 \xi_{D10} &= 0.025, \\
 \xi_{D11} &= 0.035, \\
 \xi_{D12} &= 0.045, \\
 \xi_{D13} &= 0.055, \\
 \xi_{D14} &= 0.070, \\
 \xi_{D15} &= 0.080, \\
 \xi_{D16+} &= 0.100.
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

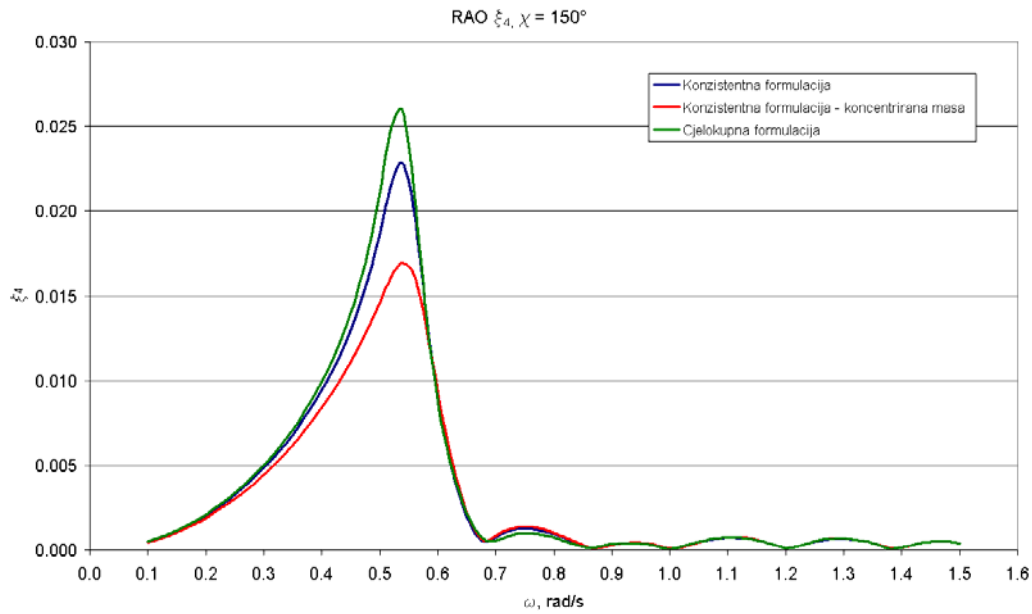
Hidrodinamičke karakteristike, dodana masa, hidrodinamičko prigušenje i valna uzbuda dobiveni su rješavanjem problema rubnih vrijednosti programom HYDROSTAR. Prilikom analize rezultata hidrodinamičkog proračuna uočeno je da krivulja ovisnosti modalnog momenta torzije o frekvenciji vala ne konvergira u nulu u području niskih frekvencija za antisimetrične torziona modove. Navedena pojava nastaje uslijed nesimetričnog prijenosa modalnih pomaka strukturnog modela na hidrodinamičku oplakanu površinu. Nakon detaljne analize problem je otklonjen na način opisan u prilogu E.

Jednadžba dinamičke ravnoteže riješena je za svaku od tri ranije navedene formulacije povratne krutosti. Rješenje jednadžbe predstavljeno je u obliku prijenosnih funkcija modalnih koeficijenata,  $\xi$ . Usporedba formulacija povratne krutosti na toj razini omogućuje detaljan uvid u odnos između samih formulacija. Prijenosne funkcije modalnih koeficijenata za oba nailazna kuta dane su slikama 7-14 – 7-22.

Analizom prijenosnih funkcija modalnih koeficijenata uočljivo je vrlo dobro slaganje rezultata određenih primjenom cjelokupne, konzistentne ili konzistentne formulacije s koncentriranom masom. Utjecaj povratne krutosti na rezultat analize opada s povećanjem frekvencije vala jer u tom području dominantnu ulogu ima konvencionalna povratna krutost.

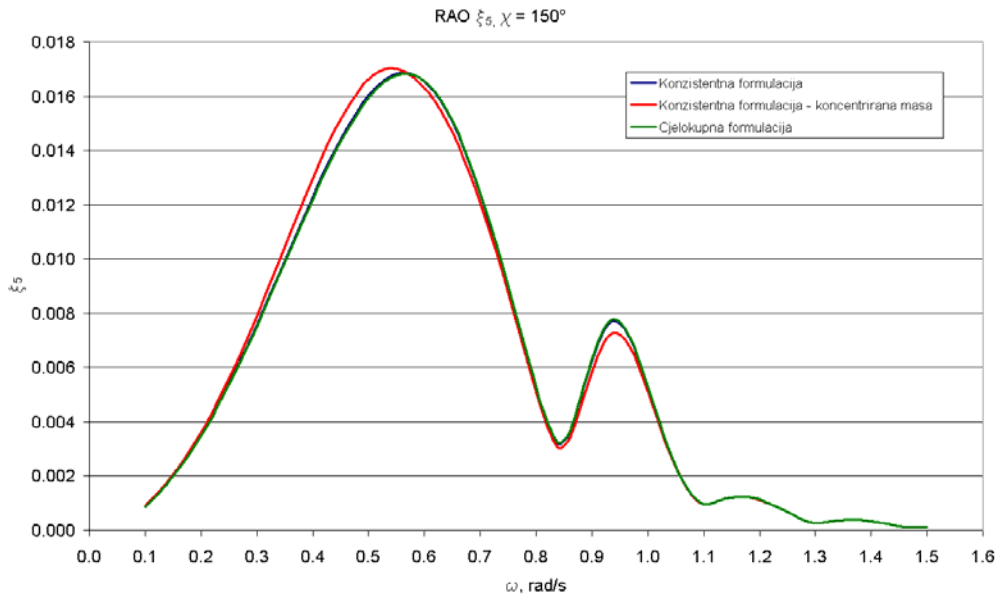


Slika 7-14 Prijenosna funkcija koeficijenta poniranja,  $\chi = 150^\circ$

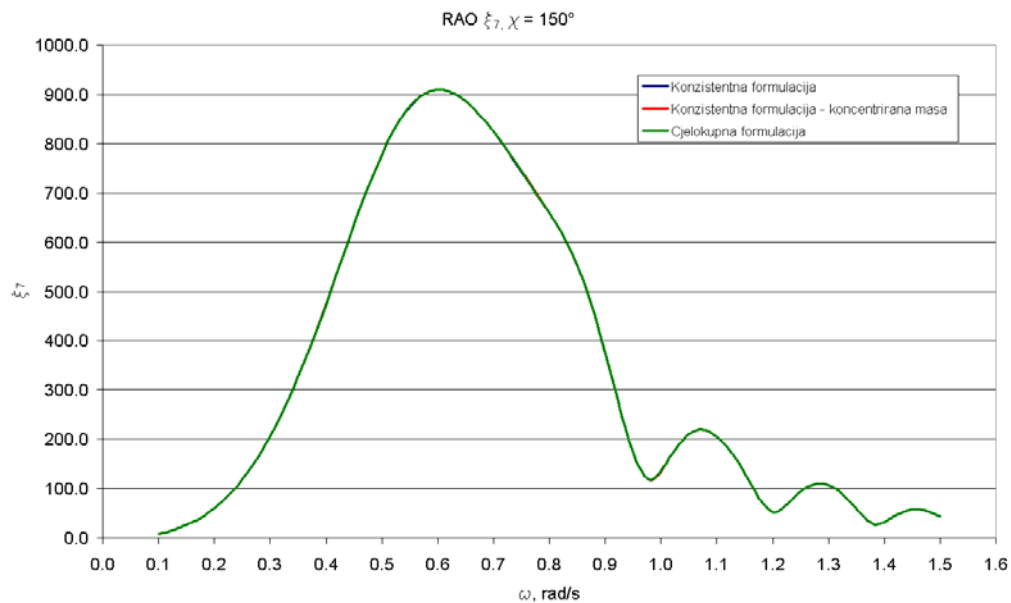


Slika 7-15 Prijenosna funkcija koeficijenta valjanja,  $\chi = 150^\circ$

Također, vrlo dobro poklapanje rezonantnih frekvencija postignuto je u slučaju svih prijenosnih funkcija. To je osobito važno kod valjanja, slika 7-15, jer je valjanje mod koji je vrlo senzitiv na primijenjenu formulaciju povratne krutosti zbog relativno male vrijednosti koeficijenta tlaka.

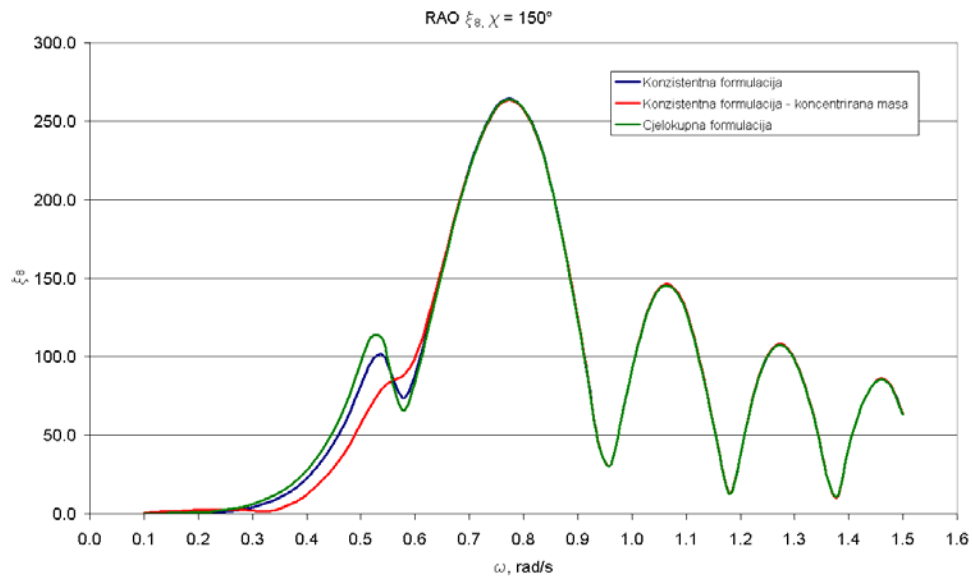


Slika 7-16 Prijenosna funkcija koeficijenta posrtnanja,  $\chi = 150^\circ$

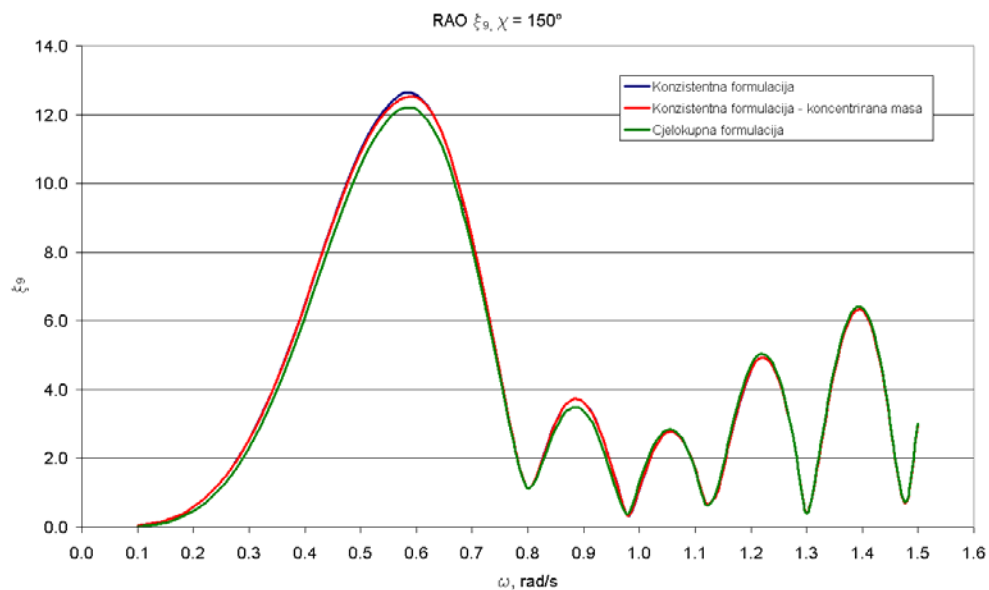


Slika 7-17 Prijenosna funkcija koeficijenta moda V1,  $\chi = 150^\circ$

Osim toga, potrebna konvergencija krivulja ka statičkom pomaku s opadanjem frekvencije vala u nulu ostvarena je kod svih prijenosnih funkcija. Razlike između prijenosnih funkcija u području utjecaja povratne krutosti rezultat su različitih vrijednosti vandijagonalnih elemenata matrice povratne krutosti koje nastaju uslijed uvođenja primjerice koeficijenta rubnog napreznja i geometrijske krutosti umjesto koeficijenta mase.

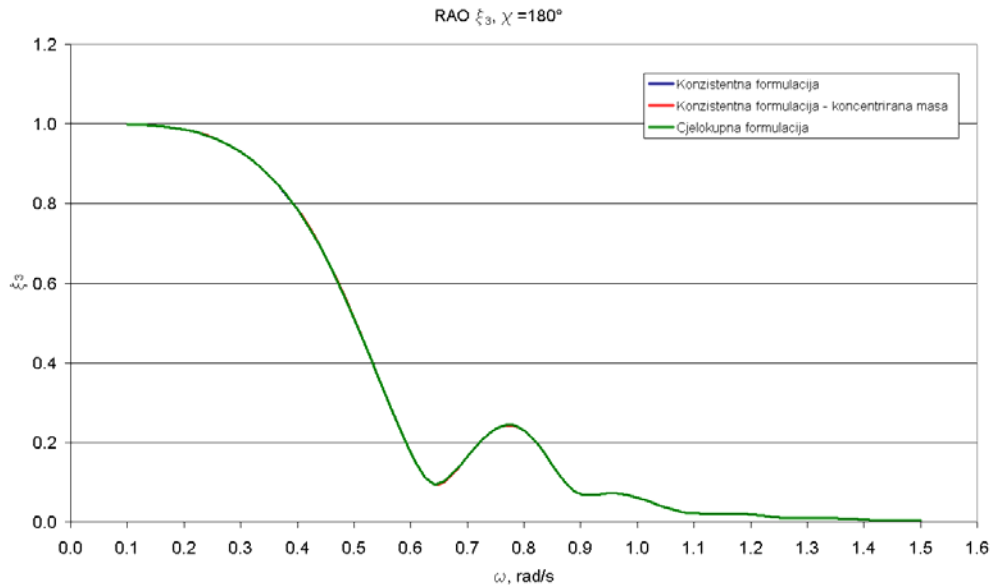


Slika 7-18 Prijenosna funkcija koeficijenta moda H1,  $\chi = 150^\circ$

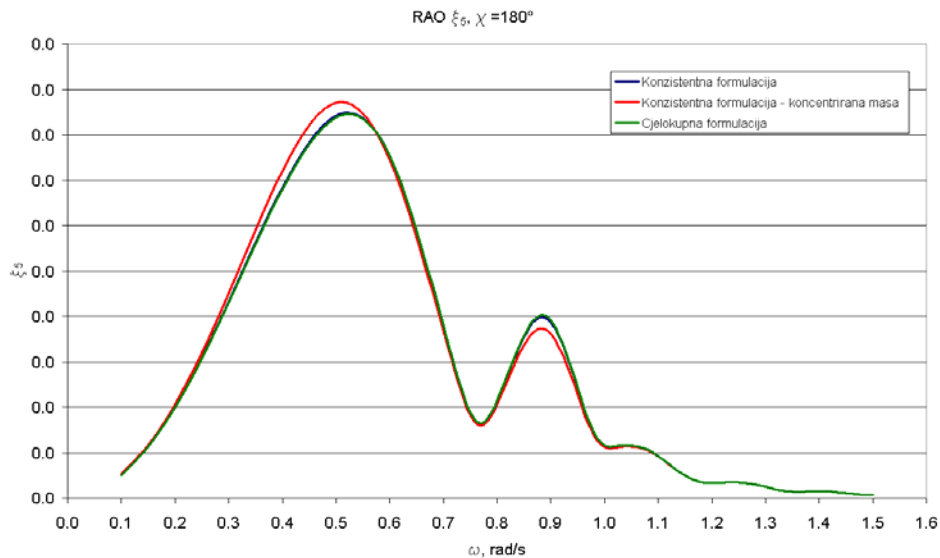


Slika 7-19 Prijenosna funkcija koeficijenta moda T1,  $\chi = 150^\circ$

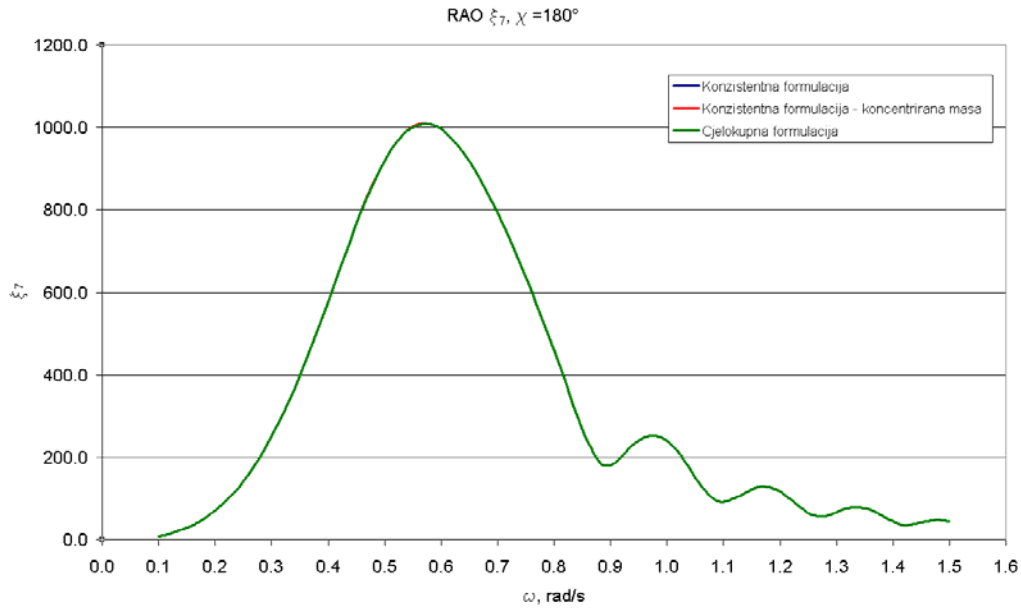
Dodatni razlog pojavljivanja razlika između pojedinih odzivnih krivulja može se pronaći i u činjenici da se prilikom modeliranja mase strukture masom u čvorovima nužno zanemaruje doprinos smične deformacije koeficijentu mase, jednačba (5.150). Iznimno dobro poklapanje različitih formulacija povratne krutosti vidljivo je u slučaju nailaska valova pod kutom  $\chi = 180^\circ$ , slike 7-20 – 7-22.



Slika 7-20 Prijenosna funkcija koeficijenta poniranja,  $\chi = 180^\circ$



Slika 7-21 Prijenosna funkcija koeficijenta posrtanja,  $\chi = 180^\circ$



Slika 7-22 Prijenosna funkcija koeficijenta moda V1,  $\chi = 180^\circ$

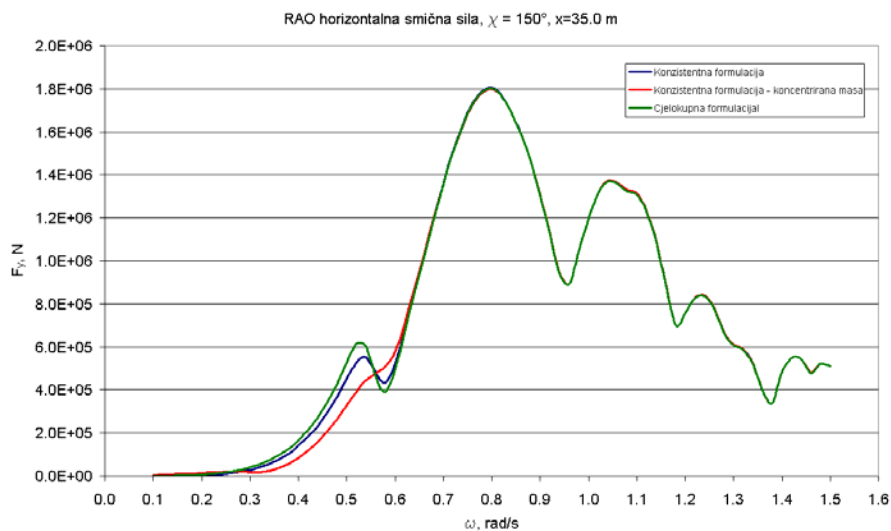
Osobito važan rezultat hidroelastične analize su prijenosne funkcije presječnih sila i momenata savijanja i uvijanja kojima je opterećena brodska konstrukcija. U okviru modalnog pristupa hidroelastičnoj analizi, prijenosne funkcije presječnih sila i momenata savijanja i uvijanja određene su izrazima

$$\begin{aligned}
 Q_x^v &= \sum_{i=1}^n \xi_i q_i^v, \\
 Q_x^h &= \sum_{i=1}^n \xi_i q_i^h, \\
 T_x &= \sum_{i=1}^n \xi_i t_i, \\
 M_x^v &= \sum_{i=1}^n \xi_i m_i^v, \\
 M_x^h &= \sum_{i=1}^n \xi_i m_i^h,
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

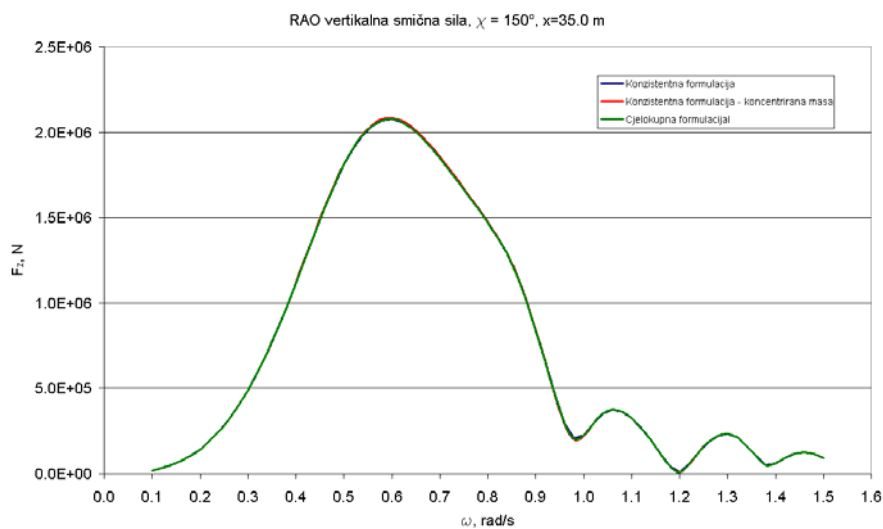
gdje su redom  $Q_x^v$  ukupna vertikalna i  $Q_x^h$  ukupna horizontalna sila na presjeku  $x$ ,  $T_x$  ukupni torzijski moment te  $M_x^v$  ukupni vertikalni i  $M_x^h$  ukupni horizontalni moment



savijanja na presjeku  $x$ . Modalne vrijednosti poprečnih sila  $q_i^v$  i  $q_i^h$  i momenata uvijanja i savijanja,  $t_i$ ,  $m_i^v$  i  $m_i^h$  za mod  $i$  određene su integracijom čvornih sila koje nastaju kao suma inercijskog i hidrodinamičkog opterećenja pojedinog strukturnog elementa od krme do željenog presjeka. Pritom se u obzir uzimanju elementi koji doprinose uzdužnoj čvrstoći. Vrijednosti modalnih poprečnih sila i momenata uvijanja i savijanja izračunate su od strane Bureau Veritasa primjenom "in house" programskog paketa MOE. Prijenosne funkcije presječnih sila i momenata savijanja prikazani su slikama 7-23 – 7-29 za odabrane presjeke i slučajeve opterećenja.

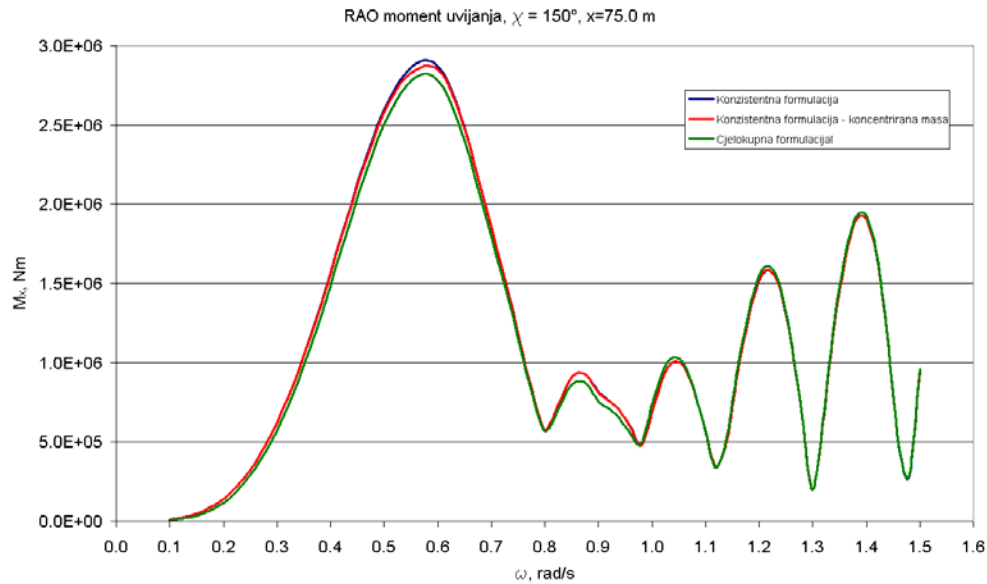


Slika 7-23 Prijenosna funkcija horizontalne smične sile,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 35.0$  m

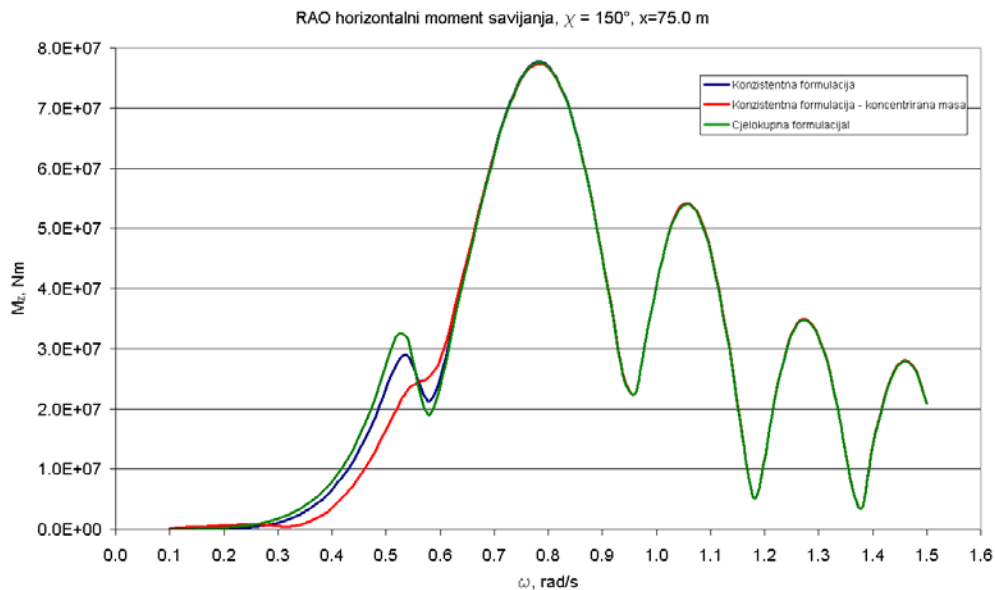


Slika 7-24 Prijenosna funkcija vertikalne smične sile,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 35.0$  m

Kao i u slučaju modalnih koeficijenata, analizom prijenosnih funkcija presječnih sila i momenata savijanja i uvijanja uočljivo je vrlo dobro slaganje rezultata određenih primjenom cjelokupne, konzistentne i konzistentne formulacije s koncentriranom masom.

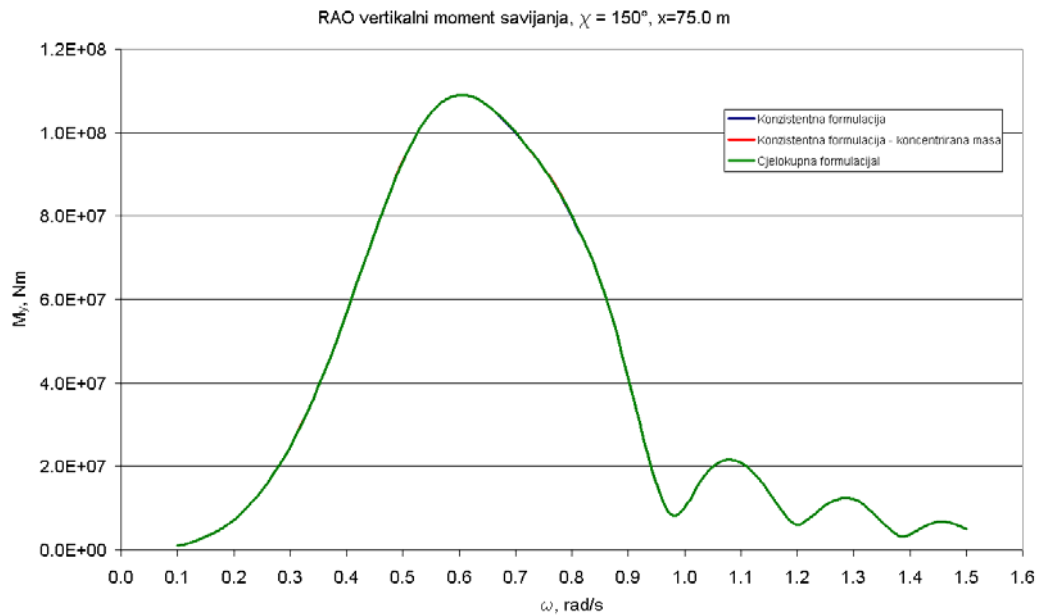


Slika 7-25 Prijenosna funkcija momenta uvijanja,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 75.0$  m

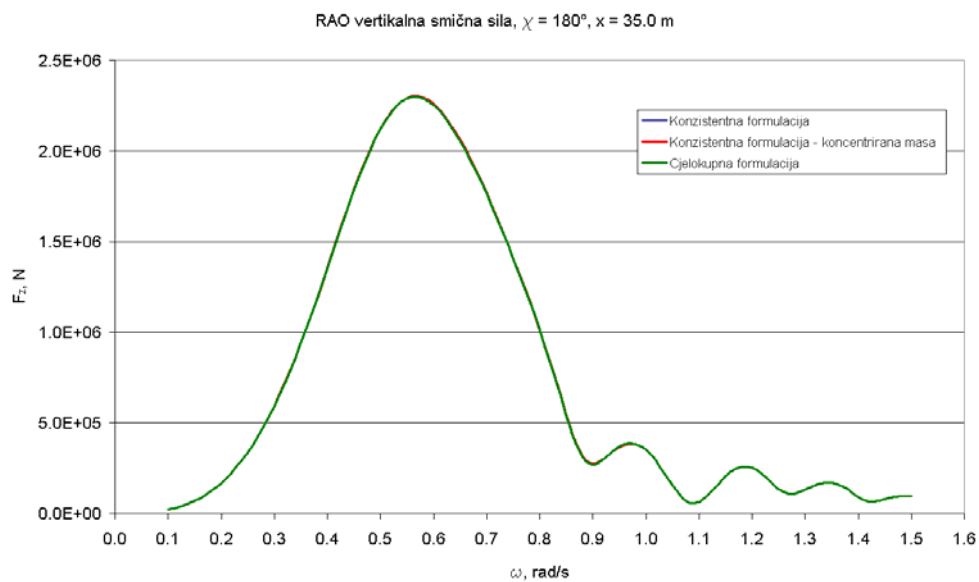


Slika 7-26 Prijenosna funkcija horizontalnog momenta savijanja,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 75.0$  m

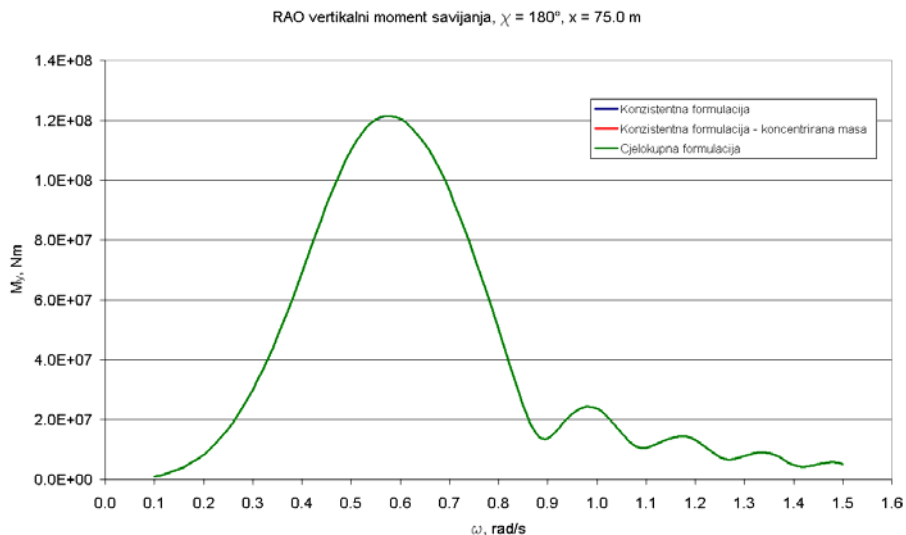
Utjecaj povratne krutosti na prijenosne funkcije je neznatan u području nižih frekvencija te opada s povećanjem frekvencije vala, jer u tom području dominantnu ulogu ima konvencionalna krutost. Važno je istaknuti da je konvergencija prijenosnih funkcija ka nuli s opadanjem valne frekvencije ostvarena u slučaju svih primijenjenih formulacija.



Slika 7-27 Prijenosna funkcija vertikalnog momenta savijanja,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 75.0$  m

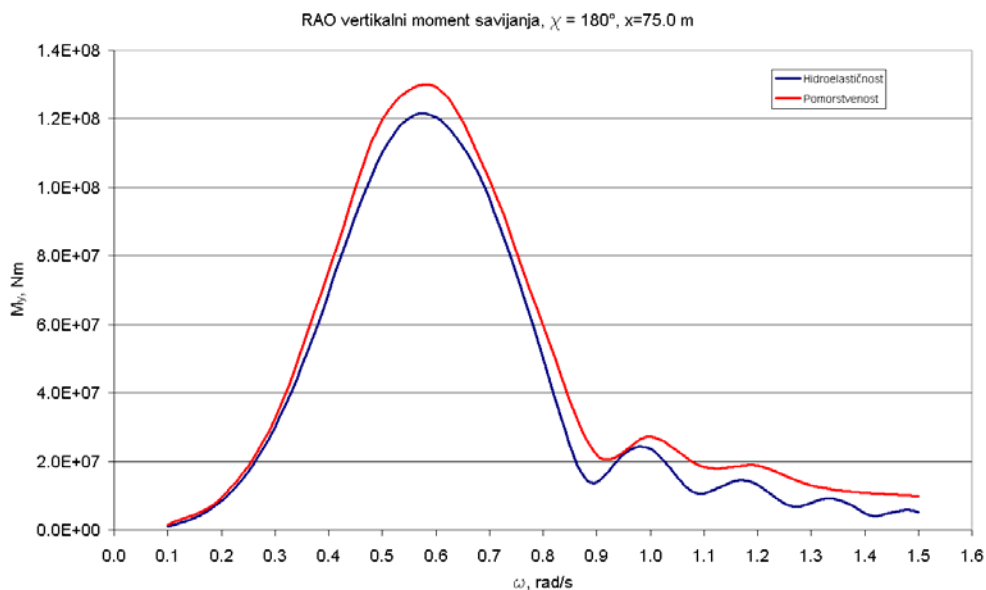


Slika 7-28 Prijenosna funkcija vertikalne smične sile,  $\chi = 180^\circ$ ,  $x = 35.0$  m



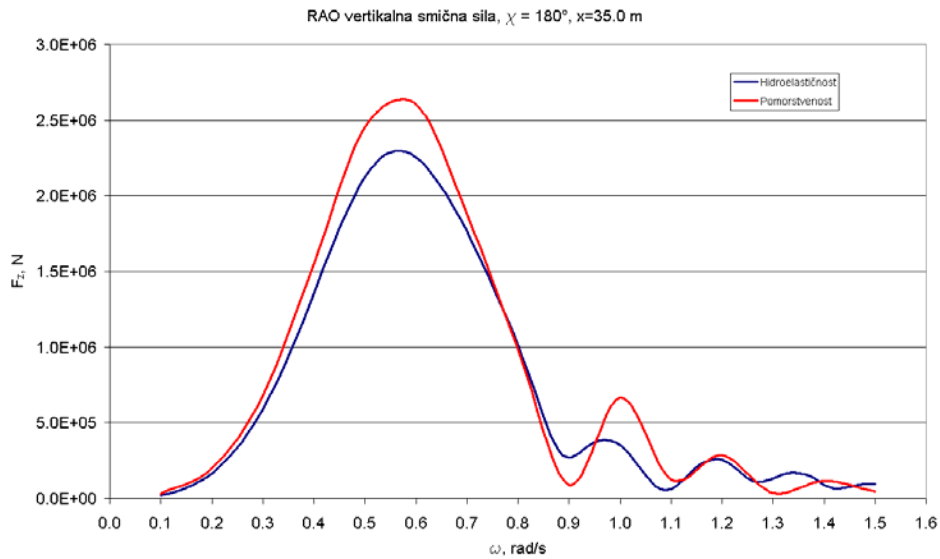
Slika 7-29 Prijenosna funkcija vertikalnog momenta savijanja,  $\chi = 180^\circ$ ,  $x = 75.0$  m

Slikama 7-30 – 7-36 prikazana je usporedba prijenosnih funkcija vertikalnih i horizontalnih smičnih sila, te vertikalnih i horizontalnih momenata savijanja i momenata uvijanja određenih primjenom hidroelastične analize i klasične teorije pomorstvenosti.

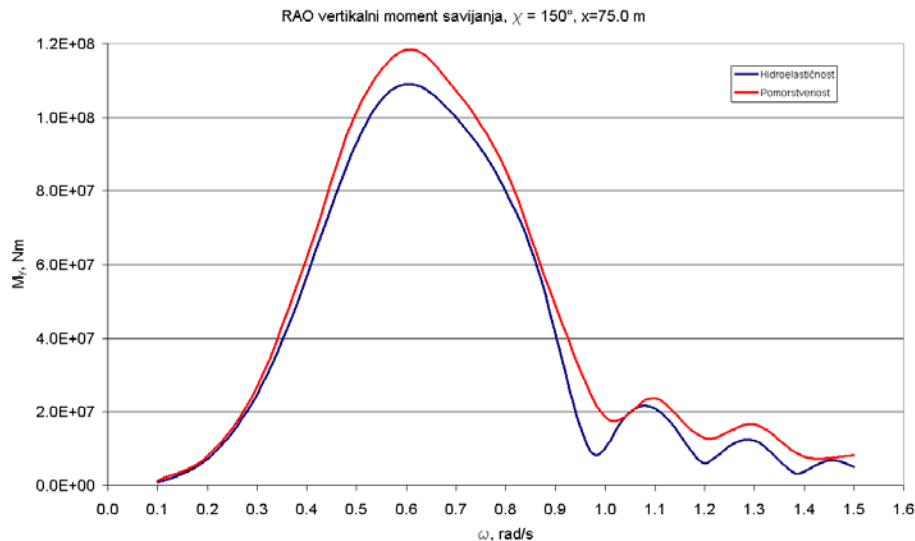


Slika 7-30 RAO vertikalnog momenta savijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 180^\circ$ ,  $x = 75.0$  m

Izraženije razlike između odziva određenog teorijom hidroelastičnosti i teorijom pomorstvenosti u području viših frekvencija (uobičajene kod kontejnerskih brodova) ne javljaju se zbog povećane krutosti barže, odnosno rezonantne frekvencije elastičnih modova barže nisu obuhvaćene danim rasponom frekvencija.

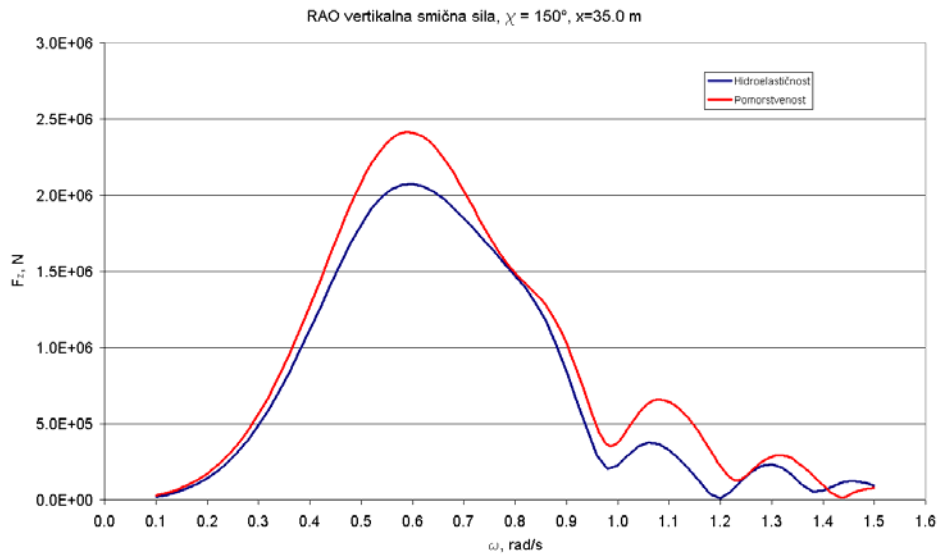


Slika 7-31 RAO vertikalne smične sile, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 180^\circ$ ,  $x = 35.0$  m

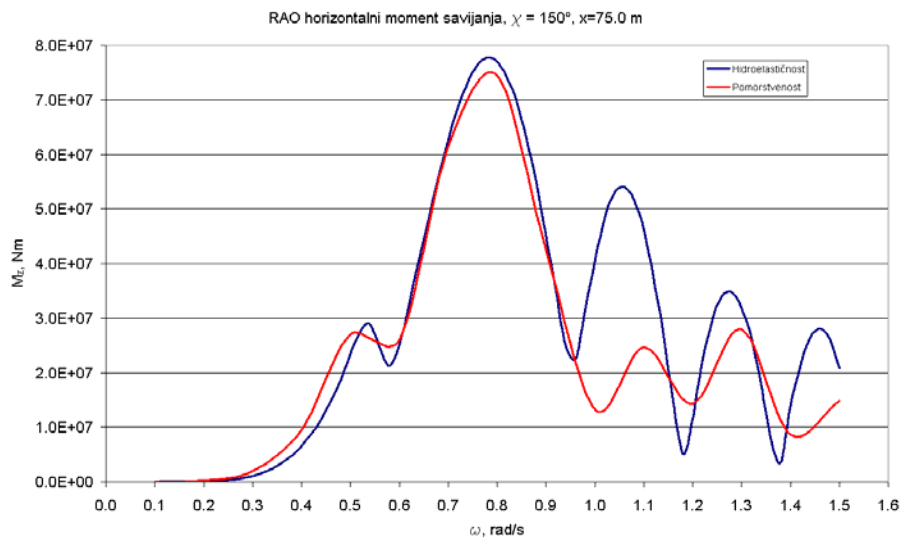


Slika 7-32 RAO vertikalniog momenta savijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 75.0$  m

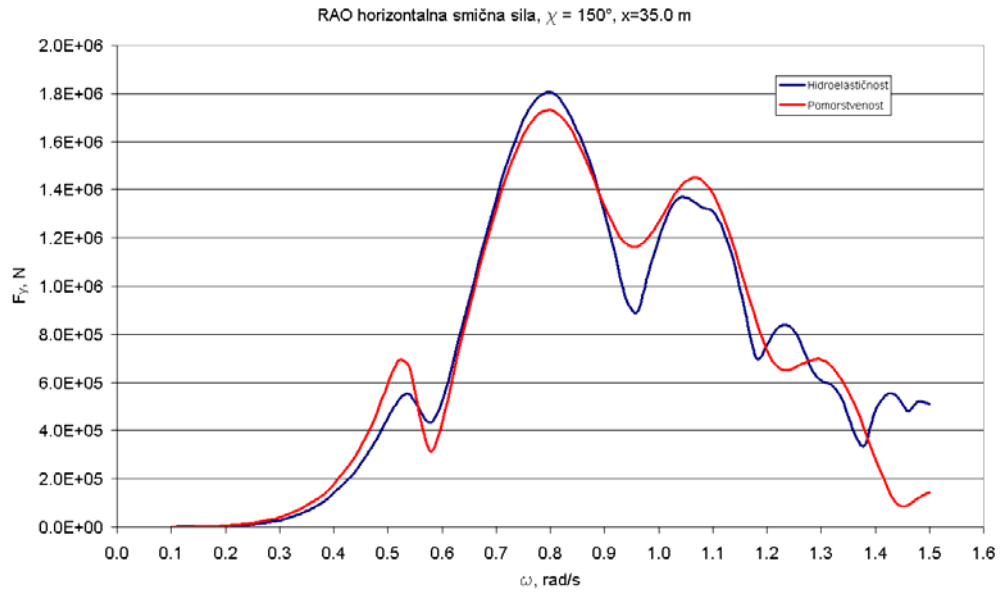
Razmatranjem rezultata analize prikazane slikama 7-30 – 7-36 moguće je zaključiti da obje krivulje imaju sličan trend i zadovoljavajuće podudaranje rezonantnih frekvencija. Međutim, primjenom većeg broja prirodnih oblika vibriranja osigurala bi se bolja konvergencija rezultata dobivenih analizom hidroelastičnosti k vrijednostima određenim teorijom pomorstvenosti.



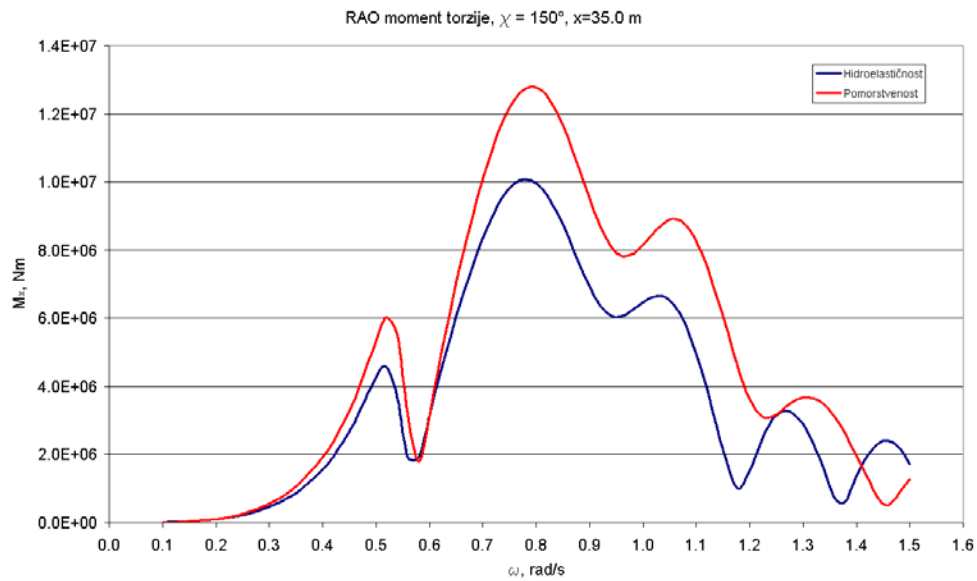
Slika 7-33 RAO vertikalne smične sile, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 35.0$  m



Slika 7-34 RAO horizontalnog momenta savijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 75.0$  m



Slika 7-35 RAO horizontalne smične sile, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 35.0$  m



Slika 7-36 RAO momenta uvijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 35.0$  m

## 7.2 Brod za prijevoz kontejnera

Predloženi pristup formulacije hidrostatičkog modela metodom konačnih elemenata, koji se temelji na 3D FEM modelu broda, te utjecaj doprinosa pojedinih formulacija povratne krutosti na hidroelastični odziv broda na morskim valovima ilustrirat će se na primjeru vrlo velikog kontejnerskog broda (*VLCS – Very Large Container Ship*) pod imenom *Rigoletto* koji je izgrađen u korejskom brodogradilištu Hyundai u klasi Bureau Veritasa. Izgled i opći plan broda osnovnih karakteristika:

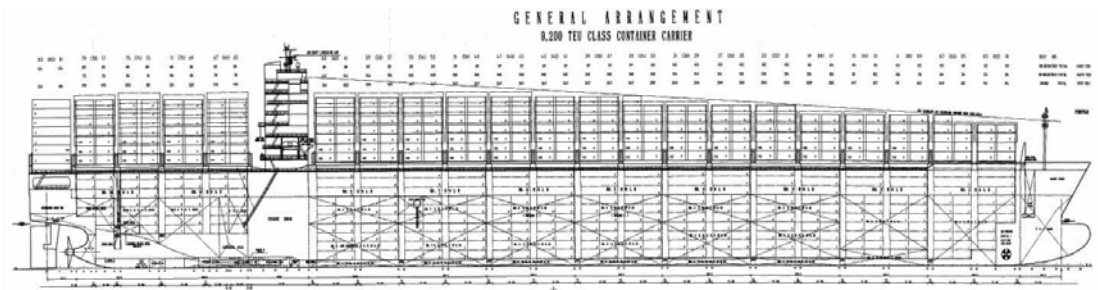
Dužina preko svega	$L_{oa} = 349.00, \text{ m}$
Dužina između perpendikulara	$L_{pp} = 333.44, \text{ m}$
Širina	$B = 42.80, \text{ m}$
Gaz	$T = 13.10, \text{ m}$
Visina	$D = 27.30, \text{ m}$
Volumen istisnine	$\nabla = 122540.00, \text{ m}^3$
Istisnina	$\Delta = 125604, \text{ t}$
Kapacitet kontejnera	TEU = 9415 TEU
Brzina u službi	$v = 25 \text{ čv}$
Metacentarska visina	GM = 1.37 m
Snaga motora	P = 68640 kW

prikazani su slikama 7.37 i 7.38.



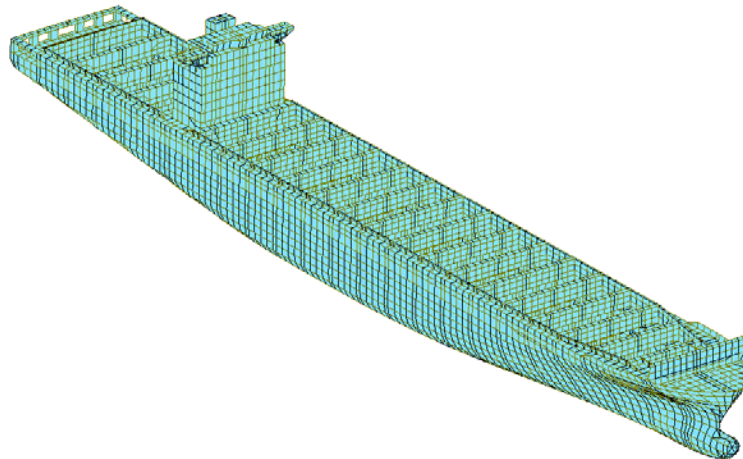
Slika 7-37 *Rigoletto* – brod za prijevoz kontejnera





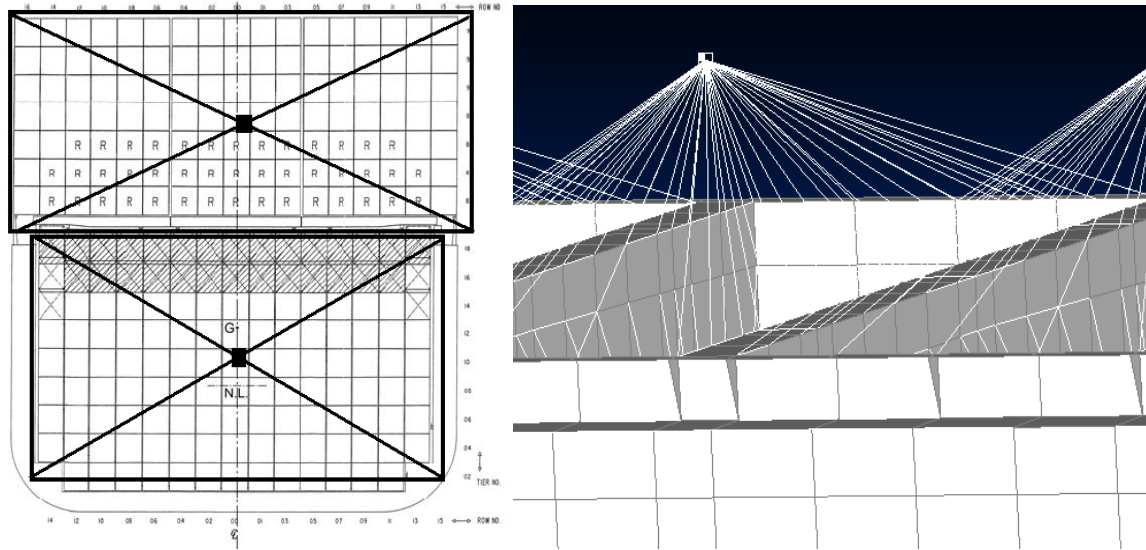
Slika 7-38 Opći plan broda

3D FEM model broda preuzet je od klasifikacijskog društva Bureau Veritas, Pariz. Strukturni model broda izrađen je u 3D FEM programu NASTRAN sa svrhom provođenja analize čvrstoće broda i slobodnih vibracija broda u zraku te se sastoji od ukupno 84893 elemenata i 16966 čvorova. Navedeni je model prikazan slikom 7-39.



Slika 7-39 3D FEM model broda izrađen u programu NASTRAN

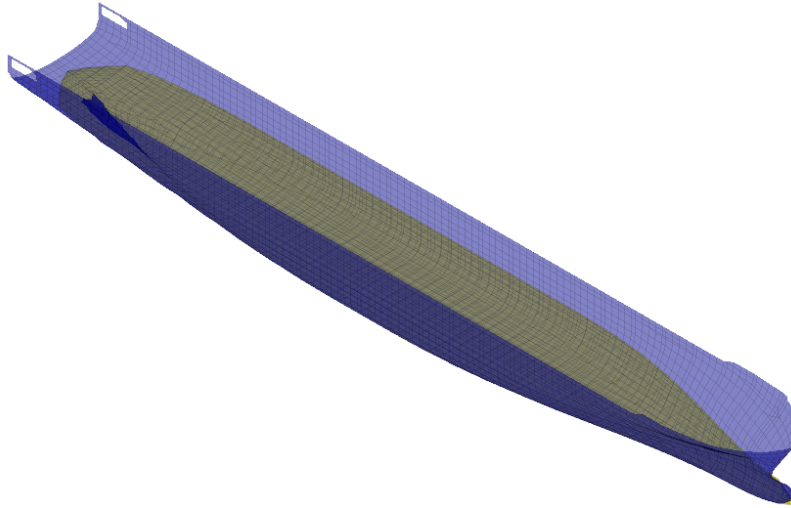
Kotejnerski teret modeliran je pomoću elemenata koncentrirane mase koji su krutim vezama povezani s čvorovima okolne strukture u obliku kišobrana. Masa kontejnera koncentrirana je u zajedničkom čvoru krutih veza smještenom u težištu mase kontejnera. Primjenom krutih veza između čvorova omogućuje se prijenos gibanja s nezavisnih na zavisne čvorove. Poprečni presjek kroz skladište broda ispunjenog kontejnerima prikazan je slikom 7-40, zajedno s detaljem strukturnog modela u kojem je sadržana koncentrirana masa tereta povezana krutim vezama s okolnom strukturom.



Slika 7-40 Modeliranje mase kontejnera s teretom u skladištu i na palubi

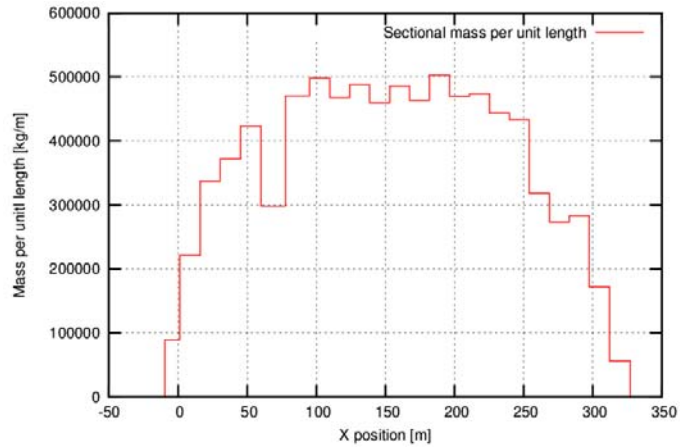
### 7.2.1 Analiza čvrstoće broda na mirnoj vodi

Ukoliko se želi odrediti modalna matrica geometrijske krutosti neophodno je da se provede analiza čvrstoće broda na mirnoj vodi kako bi se definiralo stanje naprezanja broda. Analiza čvrstoće broda provedena je pomoću programa HOMER, [56] koji predstavlja grafičko sučelje koje objedinjuje programe HYDROSTAR i NASTRAN. Uz postojeći 3D FEM model, slika 7.41, potrebno je formirati hidrodinamički model oplakane površine broda za potrebu proračuna hidrostatičkih i hidrodinamičkih karakteristika broda te također model oplakane površine 3D FEM modela pomoću kojega se vrši sprezanje strukturnog i hidrodinamičkog modela. Hidrodinamički model oplakane površine i model oplakane površine 3D FEM modela za slučaj broda za prijevoz kontejnera, *Rigoletto*, prikazani su slikom 7-41.

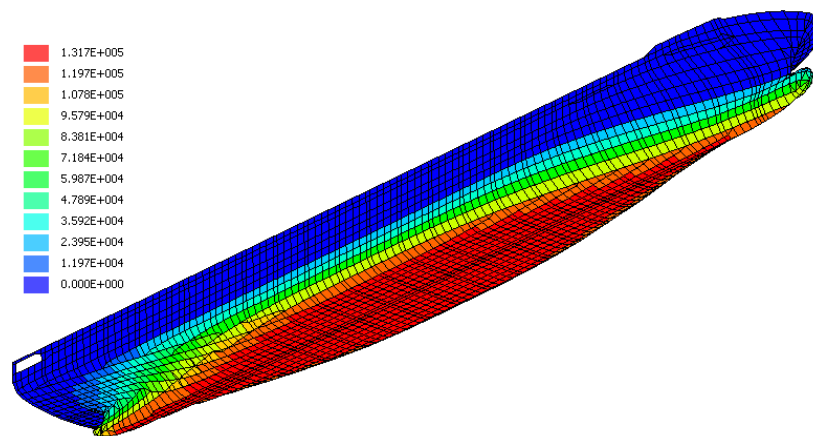


Slika 7-41 Sprega hidrodinamičkog modela i modela oplakane površine broda

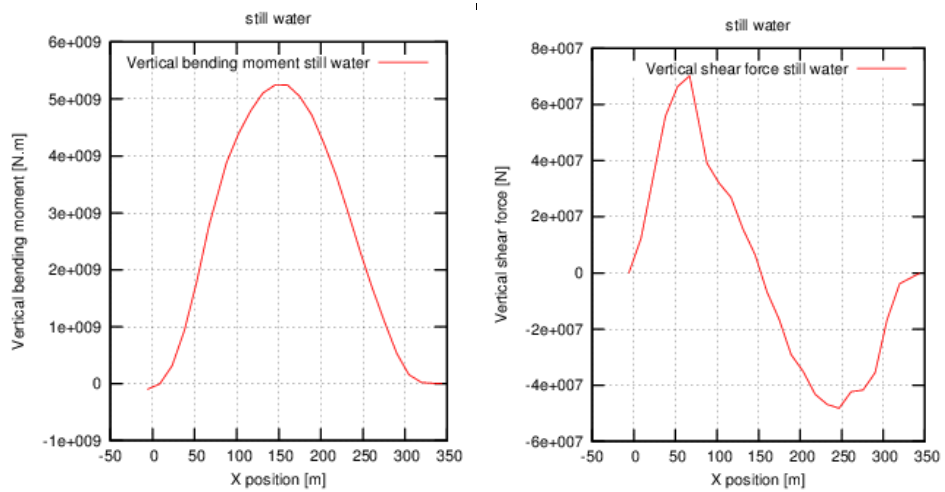
Opterećenje broda sastoji se od mase strukture broda i tereta za odabrano stanje krcanja te od hidrostatičkog tlaka koji uravnotežuje brod. Raspodjela mase duž  $x$  koordinate broda prikazana je slikom 7-42. Distribucija tlaka po oplakanoj površini prikazana je slikom 7-43. Maksimalni hidrostatski tlak iznosi  $p_{\max} = 131.7$  kPa, što odgovara visini stupca vode od 13.1 m. Slikom 7-44 prikazana je rezultirajuća distribucija opterećenja broda na mirnoj vodi. Posignuta je zadovoljavajuća raspodjela momenata savijanja i poprečnih sila na mirnoj vodi. Obje krivulje na krajevima barže imaju vrijednost 0, te maksimalne vrijednosti na očekivanim presjecima, tj. na sredini broda (moment savijanja) i na četvrtini udaljenosti od pikova (poprečna sila). U konačnici, rezultat analize čvrstoće broda na mirnoj vodi su deformacije i stanje naprezanja u pojedinim strukturnim elementima. Slika 7-45 prikazuje deformirani strukturni model s distribucijom Von Mises naprezanja po elementima. Preostali rezultati analize čvrstoće su izostavljeni radi konciznosti rada.



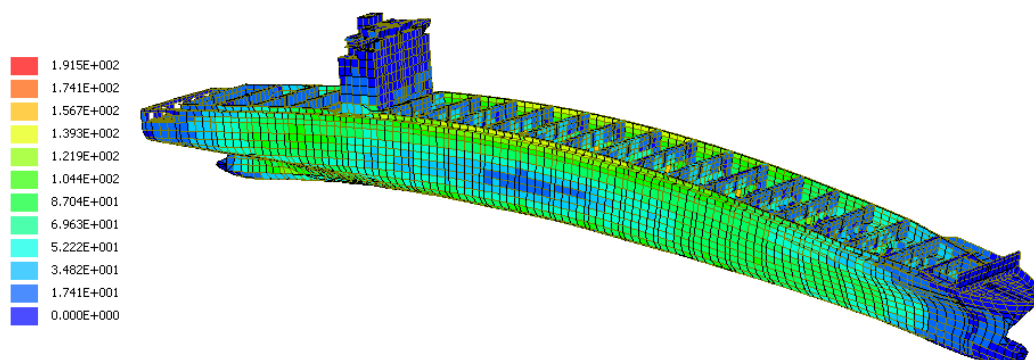
Slika 7-42 Distribucija mase po duljini broda



Slika 7-43 Raspodjela hidrostatičkog tlaka po oplakanoj površini, [Pa]



Slika 7-44 Vertikalni moment savijanja i poprečna sila broda na mirnoj vodi



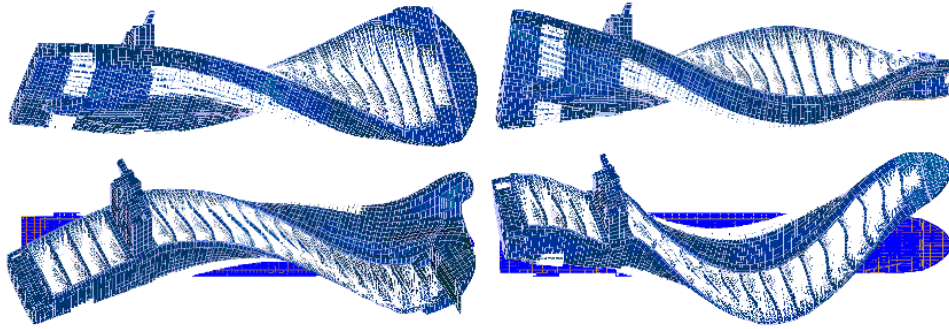
Slika 7-45 Von Mises naprezanje

### 7.2.2 Analiza slobdnih vibracija u zraku

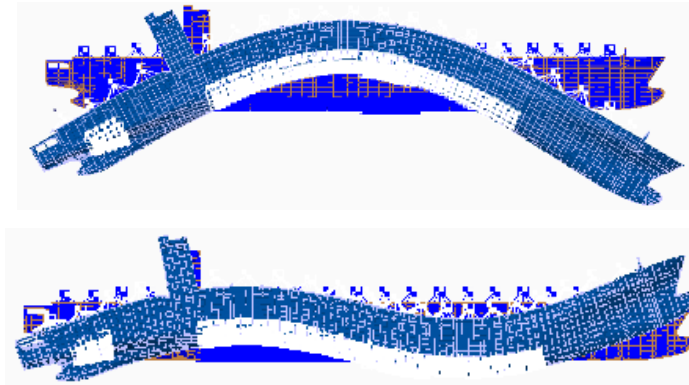
Analiza slobodnih vibracija u zraku provedena je pomoću komercijalnog programskog paketa NASTRAN. Problem svojstvenih vrijednosti riješen je Lanczos-ovom metodom. Prilikom rješavanja problema izvršena je normalizacija modalnih pomaka masom, na način da je ostvarena jedinična vrijednost poopćene mase, [51]. Prirodne frekvencije prvih 6 suhih elastičnih vibracija broda u zraku prikazane su u tablici 7-3. Slika 7-46 prikazuje prva dva spregnuta horizontalna i torzijska oblika vibriranja, a slika 7-47 prva dva vertikalna oblika vibriranja.

Tablica 7-3 Prirodne frekvencije prvih 6 suhih vibracija broda u zraku

<i>Oblik br.</i>	<i>Opis</i>	$f_b$ [Hz]
1	H1+T1	0.415
2	H1+T2	0.588
3	V1	0.676
4	H2+T3	1.018
5	V2	1.384
6	H3+T4	1.391



Slika 7-46 Prvi i drugi spregnuti prirodni oblici torzijskih i horizontalnih vibracija (lateralni i ptičji pogled)



Slika 7-47 Prvi i drugi prirodni oblik vertikalnih vibracija

### 7.2.3 Analiza povratne krutosti

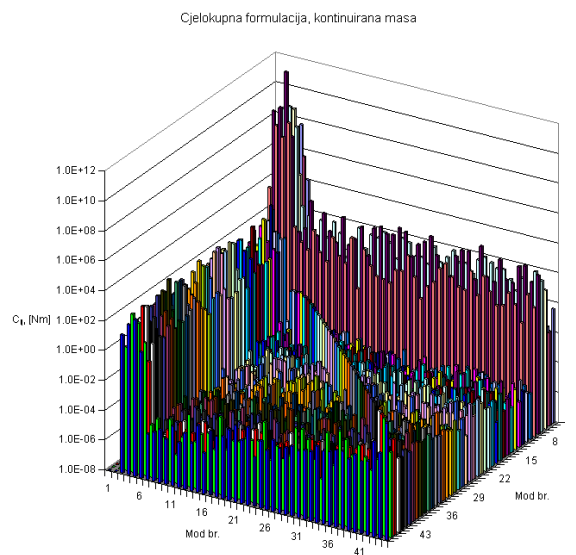
Na temelju određenog stanja naprezanja i modalnih pomaka čvorova svih elemenata 3D FEM modela broda moguće je odrediti koeficijente modalne povratne krutosti pomoću programa RESTAN. Razmatrana su ukupno tri različita slučaja: cjelokupna i konzistentna formulacija, jednadžba (4.1) i (4.3), s distribuiranom masom strukture broda i analitičkom integracijom koeficijenata te konzistentna formulacija povratne krutosti, jednadžba (4.3), s masom strukture koncentriranom u strukturnim čvorovima i numeričkom integracijom koeficijenata.

Koeficijenti modalne povratne krutosti određeni su za prva dva slučaja programom RESTAN integracijom funkcija oblika po površini plošnih elemenata za ukupno 45 modova (6 krutih i 39 elastičnih). Integracija funkcija oblika provedena je korištenjem mreže konačnih elemenata 3D FEM modela. U trećem slučaju su koeficijenti

povratne krutosti određeni integracijom relevantnih veličina po mreži elemenata hidrodinamičke mreže oplakane površine pomoću Gauss-ovih točaka. U svakoj je Gauss-ovoj točki potrebno poznavati modalni pomak koji je prethodno određen interpolacijom modalnih pomaka susjednih čvorova. Proračun modalne povratne krutosti u trećem je slučaju izvršen od strane Bureau Veritasa, Pariz.

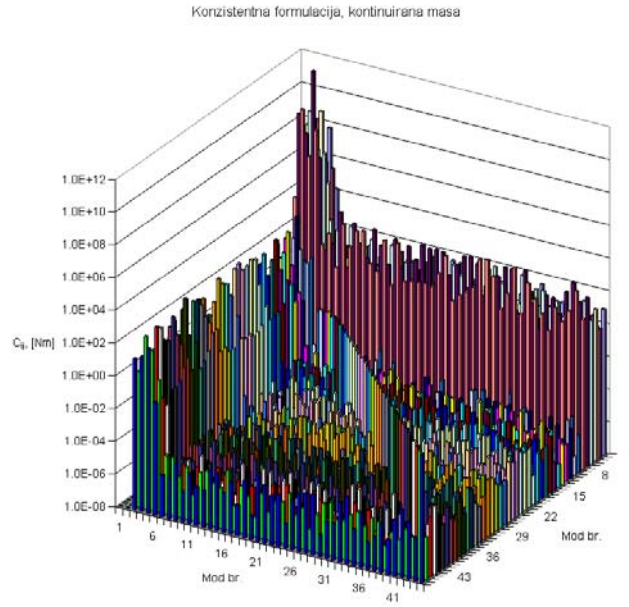
Slike 7-48 – 7-50 prikazuju matrice modalne povratne krutosti za svaki od navedena tri slučaja. Apsolutna vrijednost svakog elementa matrice povratne krutosti prikazana je jednim stupcem u logaritamskom mjerilu. Na taj je način omogućena kvalitativna usporedba različitih formulacija povratne krutosti. Jednako kao i kod analize povratne krutost barže, uočljivo je da u sva tri slučaja formulacije povratne krutosti dominantnu vrijednost imaju dijagonalni elementi matrica (osobito u slučaju krutih modova – poniranje, valjanje i posrtanje) te elementi matrica koji predstavljaju spregu krutih modova s elastičnim.

Detaljniju usporedbu formulacija te validacija same analize povratne krutosti pomoću programa RESTAN moguće je provesti za slučaj poniranja, valjanja i posrtanja broda, jer je u tim slučajevima moguće koeficijente povratne krutost usporediti s analitičkim vrijednostima, određenim primjenom dobro poznatih izraza iz teorije pomorstvenosti. Vrijednosti pojedinih koeficijenata povratne krutosti prikazane su u tablici 7-4 za tri slučaja formulacije povratne krutosti.

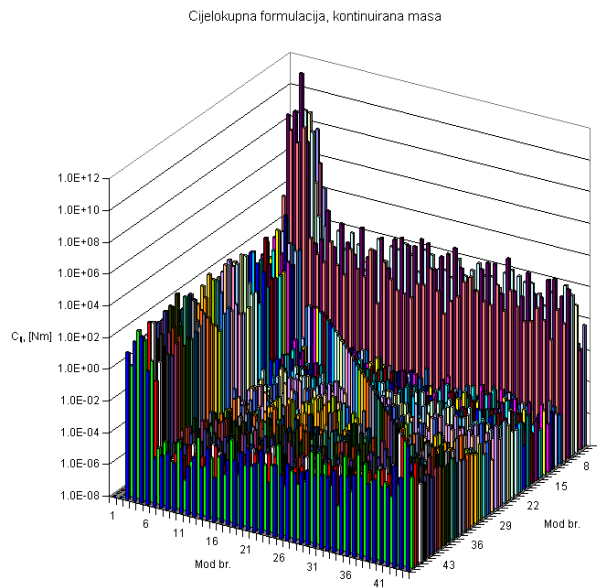


Slika 7-48 Matrica povratne krutosti broda, cjelokupna formulacija, (4.1)





Slika 7-49 Matrica povratne krutosti broda, konzistentna formulacija, (4.3)



Slika 7-50 Matrica povratne krutosti broda, konzistentna formulacija – koncentrirana masa, (4.3)



Tablica 7-4 Usporedba koeficijenata povratne krutosti broda

Gibanje	Formulacija	$C_{ij}^p$	$C_{ij}^{nh}$	$C_{ij}^m$	$-k_{ij}^{S0}$	$k_{ij}^G$	$C_{ij}^{total}$	$C_{ij}^{an}$	$\varepsilon(\%)$
Poniranje $i=j=3$	Cjelokupna	$1.2027 \cdot 10^8$					$1.2027 \cdot 10^8$	$1.1900 \cdot 10^8$	1.067
	Konzistentna	$1.2027 \cdot 10^8$					$1.2027 \cdot 10^8$		1.067
	Konzistentna koncentrirana masa	$1.1976 \cdot 10^8$					$1.1976 \cdot 10^8$		0.638
Valjanje $i=j=4$	Cjelokupna	$1.7209 \cdot 10^9$	$-3.9588 \cdot 10^7$		$2.9021 \cdot 10^{10}$	$-2.9026 \cdot 10^{10} *$	$1.6820 \cdot 10^9$	$1.6880 \cdot 10^9$	-0.355
	Konzistentna	$1.7209 \cdot 10^9$	$-3.9588 \cdot 10^7$	$-1.9863 \cdot 10^7 *$			$1.6614 \cdot 10^9$		-1.575
	Konzistentna koncentrirana masa	$1.7346 \cdot 10^9$	0.0	$-2.1990 \cdot 10^7$			$1.7126 \cdot 10^9$		1.457
Posrtanje $i=j=5$	Cjelokupna	$8.3199 \cdot 10^{11}$	$1.3976 \cdot 10^8$		$2.8805 \cdot 10^{10}$	$2.9322 \cdot 10^{10}$	$8.3073 \cdot 10^{11}$	$8.2020 \cdot 10^{11}$	1.283
	Konzistentna	$8.3199 \cdot 10^{11}$	$1.3976 \cdot 10^8$	$2.7184 \cdot 10^8$			$8.3240 \cdot 10^{11}$		1.487
	Konzistentna koncentrirana masa	$8.1667 \cdot 10^{11}$	0.0	$2.1990 \cdot 10^7$			$8.1669 \cdot 10^{11}$		-0.428

\*Korigirana vrijednost

U slučaju poniranja broda doprinos povratnoj krutosti ostvaren je jedino koeficijentom tlaka,  $C_{33}^p$ , čija vrijednost je vrlo bliska analitičkoj. Tako je u slučaju prve dvije formulacije relativno odstupanje  $\varepsilon = 1.067\%$ , a u slučaju treće  $\varepsilon = 0.638\%$  u odnosu na analitičku vrijednost.

Neznatno veće odstupanje vidljivo je kod valjanja broda,  $\varepsilon = -1.575\%$  za konzistentnu i  $\varepsilon = 1.457\%$  za konzistentnu formulaciju s masom u čvorovima elemenata. Posebnu pažnju valja obratiti na koeficijent povratne krutosti dobiven primjenom cjelokupne formulacije. Naime, koeficijent rubnog naprezanja,  $k_{ij}^{S0}$ , i koeficijent geometrijske krutosti,  $k_{ij}^G$ , su dvije bliske vrijednosti koje se međusobno poništavaju, prilog B, te su u slučaju brodske konstrukcije za red veličine veći od koeficijenta tlaka. Također, zbog složenosti proračuna koeficijenta geometrijske krutosti i njegove ovisnosti o naprezanju unutar strukture, nije moguće postići apsolutnu jednakost koeficijentu rubnog naprezanja. Stvarna vrijednost dobivena proračunom za valjanje broda iznosi  $k_{44}^G = -2.9902 \cdot 10^{10}$ , što je za svega 3% veće od vrijednosti koeficijenta rubnog naprezanja. Uzimajući u obzir navedene činjenice, očito je da će i vrlo mala razlika između ta dva koeficijenta uzrokovati veliku razliku u konačnoj vrijednosti koeficijenta povratne krutosti. Prema tome, moguće je zaključiti da je cjelokupna formulacija, iako fizikalno utemeljena, numerički nestabilna. Iz navedenih razloga, vrijednost dana u tablici 7-4 za koeficijent geometrijske krutosti kod valjanja,  $k_{44}^G$ , je korigirana kako bi se poništila s  $k_{ij}^{S0}$  i tako omogućila mjerodavnija usporedba odziva broda u frekventnom području. Iz istog je razloga korigiran i koeficijent sprege valjanja i posrtanja koji je zbog numeričke nestabilnosti znatno veći od dijagonalnog elementa matrice te zbog toga uzrokuje efekt "napuhane" krivulje prijenosne funkcije modalnog koeficijenta za valjanje broda.

Osim toga, dodatnu pažnju treba posvetiti analizi koeficijenta mase. Iz analitičkih izraza za koeficijente povratne krutosti proizlazi da je, ukoliko su kruti modovi razvijeni oko težišta mase plovnog objekta, vrijednost koeficijenta mase jednaka nuli. Taj uvjet je ostvaren kod barže, tablica 7-2, u slučaju kontinuirane mase i mase koncentrirane u čvorovima te za brod u slučaju koncentrirane mase. Ono što, između ostalog, razlikuje

brodsku konstrukciju od konstrukcije barže je istovremeno postojanje oba pristupa, tj. masa strukture je raspodijeljena po strukturnim elementima dok je masa tereta, koja čini gotovo 70% ukupne mase, koncentrirana u čvorovima. Shodno tome, doprinos koeficijentu mase od strane koncentrirane mase je vrlo senzitivna na udaljenost pojedinog čvora od težišta broda, te i vrlo malena zanemarenja učinjena tijekom izrade modela imaju veliki utjecaj na njegovu konačnu vrijednost. Zbog toga je vrijednost koeficijenta mase  $C_{ij}^m$  korigirana translacijom pojedinih čvorova koncentriranih masa za 180 mm u pozitivnom smjeru osi  $z$ . Uzimajući u obzir da je visina broda 27.3 m, proizlazi da korekcija od približno 0.5% visine broda ima znatan utjecaj na vrijednost koeficijenta mase čija vrijednost, umjesto prvotne  $C_{44}^m = -1.714 \cdot 10^8$ , iznosi  $C_{44}^{m*} = -1.9863 \cdot 10^7$ . U odnosu na koeficijent tlaka, potonja vrijednost koeficijenta mase je na razini numeričke greške te nema značajan utjecaj na konačnu vrijednost koeficijenta povratne krutosti. Jednak zaključak vrijedi i za koeficijent normale i moda.

Povratna krutost u slučaju posrtanja nije toliko senzitivna kao u slučaju valjanja broda te su odstupanja dobivenih koeficijenata u odnosu na analitička prihvatljiva za sve tri primijenjene formulacije.

Koeficijenti povratne krutosti konzistentne formulacije s koncentriranom masom određeni su numeričkom integracijom preko Gauss-ovih točaka (postupak implementiran u komercijalnom programskom paketu HOMER). Kod relativno grube mreže elemenata oplakane površine, koja je primijenjena u slučaju barže, uočene su značajne razlike u vrijednostima koeficijenata određenim integracijom pomoću Gauss-ovih točaka u odnosu na koeficijente određene analitičkom integracijom funkcija oblika. Međutim, u slučaju broda, mreža elemenata oplakane površine je inicijalno dovoljno gusta, te stoga nije uočen utjecaj izabrane metode integracije na konačni rezultat.

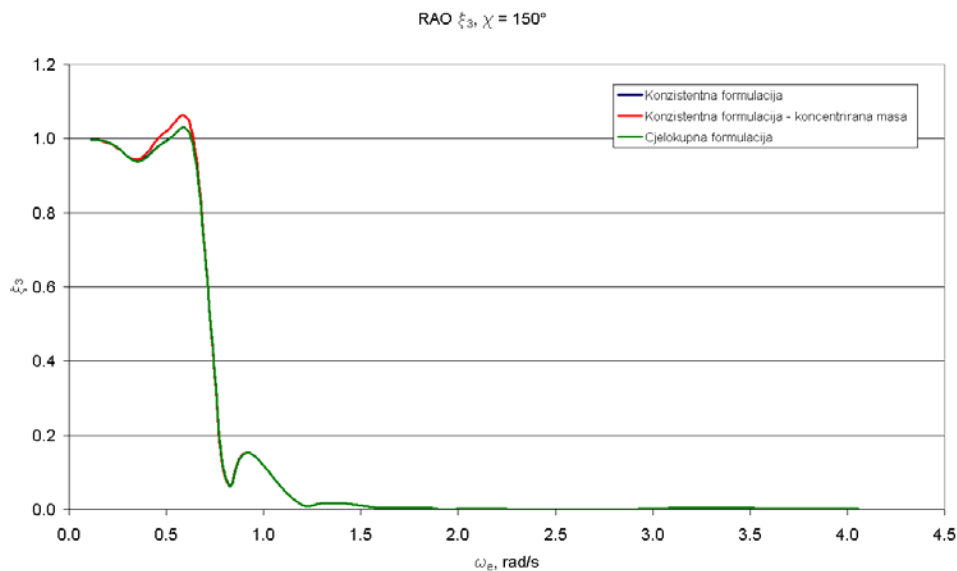
#### 7.2.4 Odziv broda

Hidrodinamičke veličine potrebne za formiranje jednadžbe dinamičke ravnoteže određene su za dva nailazna kuta valova  $\chi_1 = 150^\circ$  i  $\chi_2 = 180^\circ$  za brzinu plovidbe  $v = 12.86$  čv i valnu amplitudu  $\zeta_a = 1$  m. Hidrodinamičke karakteristike, dodana masa,

hidrodinamičko prigušenje i valna uzbuda dobiveni su rješavanjem problema rubnih vrijednosti programom HYDROSTAR. Strukturno prigušenje zadano je izrazom (7.1) s koeficijentima danim izrazima (7.2).

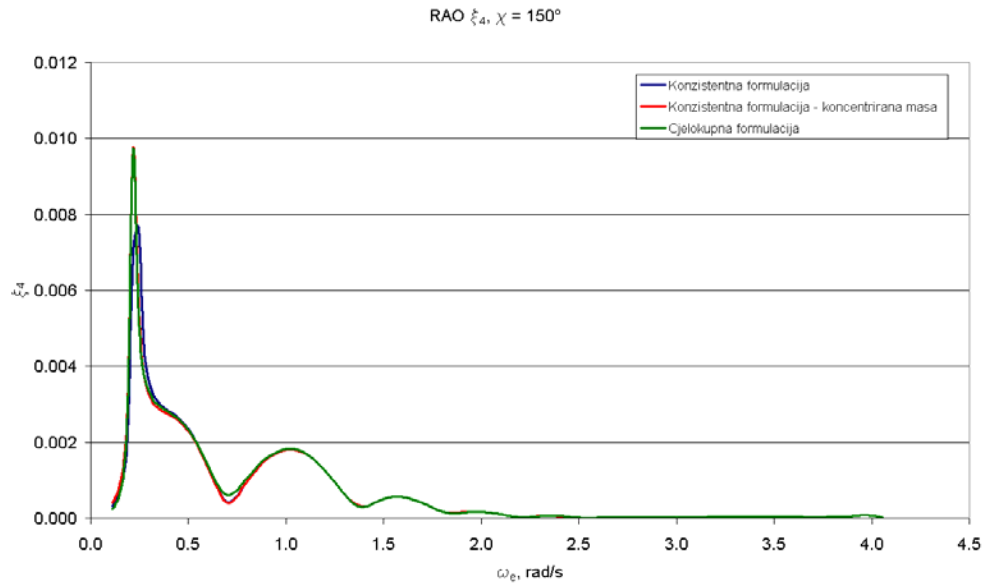
Jednadžba dinamičke ravnoteže riješena je za svaku od tri ranije navedene formulacije povratne krutosti. Rješenje jednadžbe predstavljeno je u obliku prijenosnih funkcija modalnih koeficijenata,  $\xi$ . Prijenosne funkcije modalnih koeficijenata za oba nailazna kuta dane su slikama 7-51 – 7-59.

Analizom prijenosnih funkcija modalnih koeficijenata uočljivo je vrlo dobro slaganje između rezultata određenih primjenom cjelokupne, konzistentne ili konzistentne formulacije s koncentriranom masom. Kao i u slučaju barže, utjecaj povratne krutosti na rezultate analize opada s povećanjem frekvencije vala jer u tom području dominantnu ulogu ima konvencionalna povratna krutost.

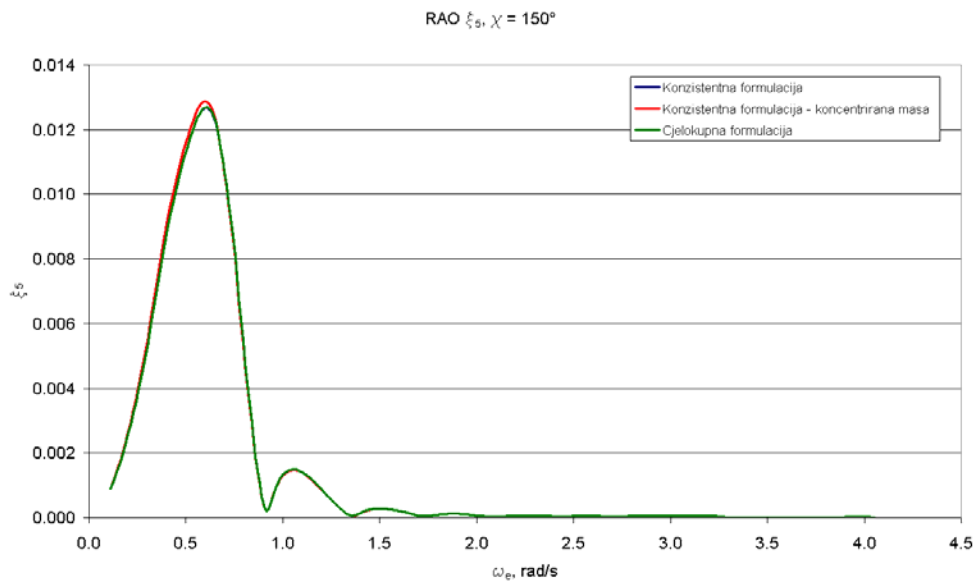


Slika 7-51 Prijenosna funkcija koeficijenta poniranja,  $\chi = 150^\circ$

Također, vrlo dobro poklapanje rezonantnih frekvencija postignuto je u slučaju svih prijenosnih funkcija. To je osobito važno kod valjanja, slika 7-52, jer je valjanje mod koji je vrlo senzitiv na primijenjenu formulaciju povratne krutosti zbog relativno male vrijednosti koeficijenta tlaka.

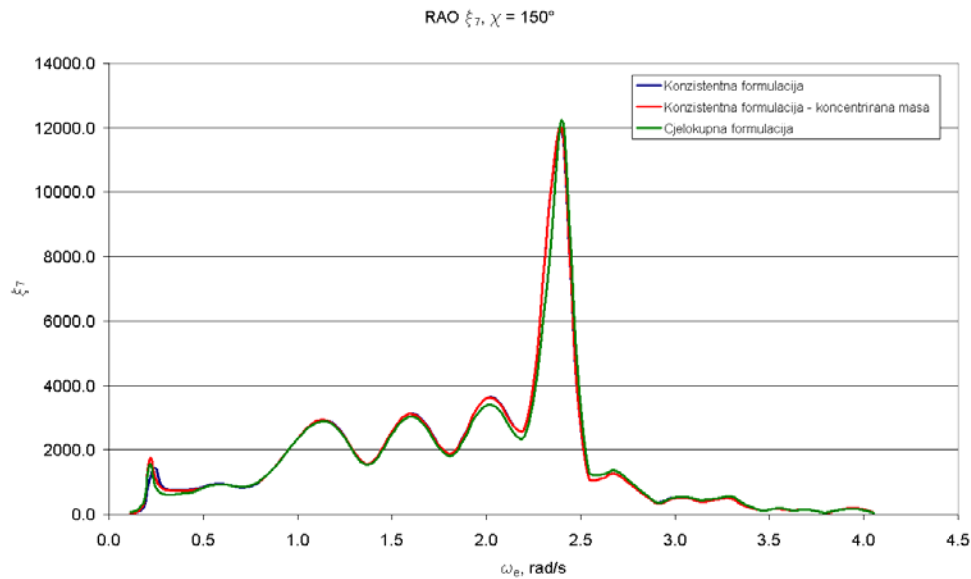


Slika 7-52 Prijenosna funkcija koeficijenta valjanja,  $\chi = 150^\circ$

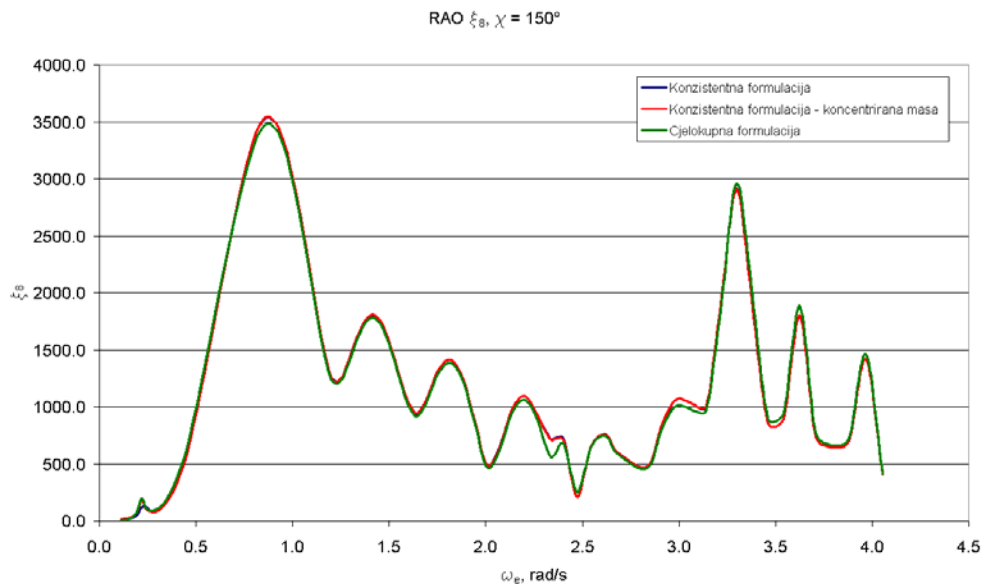


Slika 7-53 Prijenosna funkcija koeficijenta posrtanja,  $\chi = 150^\circ$

Osim toga, potrebna konvergencija krivulja ka statičkom pomaku s opadanjem frekvencije vala u nulu ostvarena je kod svih prijenosnih funkcija. Razlike između prijenosnih funkcija u području utjecaja povratne krutosti rezultat su različitih vrijednosti vandijagonalnih elemenata matrice povratne krutosti koje nastaju uslijed uvođenja primjerice koeficijenta rubnog napreznja i geometrijske krutosti umjesto koeficijenta mase.

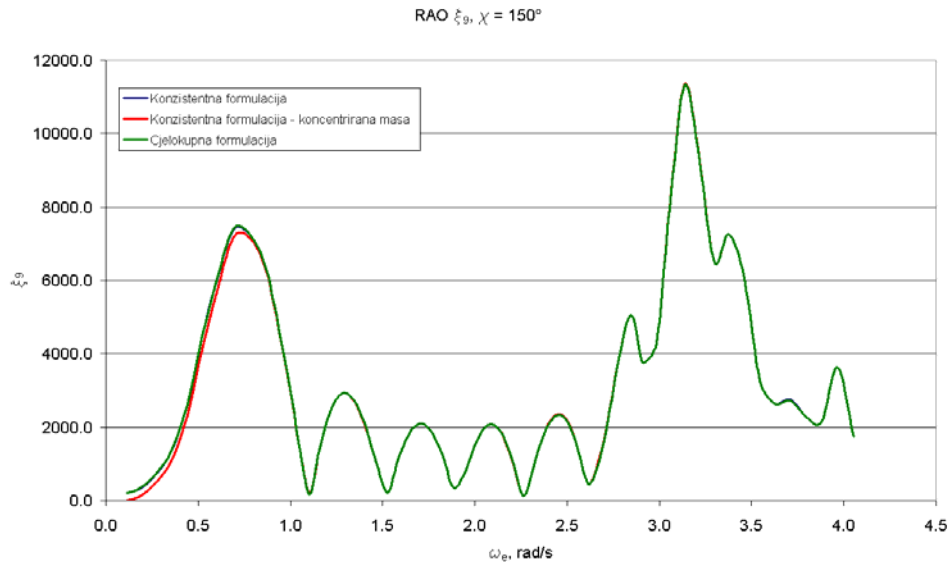


Slika 7-54 Prijenosna funkcija koeficijenta moda H1+T1,  $\chi = 150^\circ$

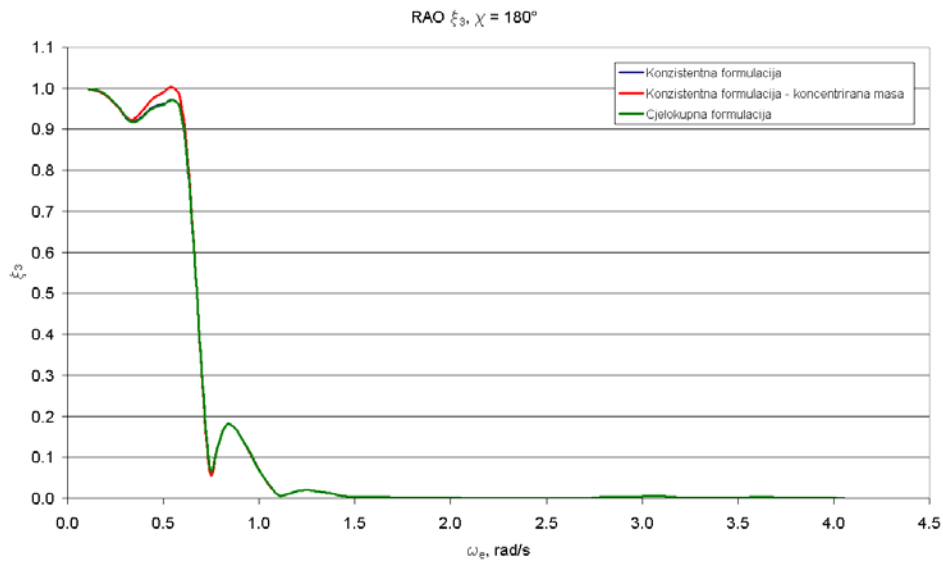


Slika 7-55 Prijenosna funkcija koeficijenta moda V1,  $\chi = 150^\circ$

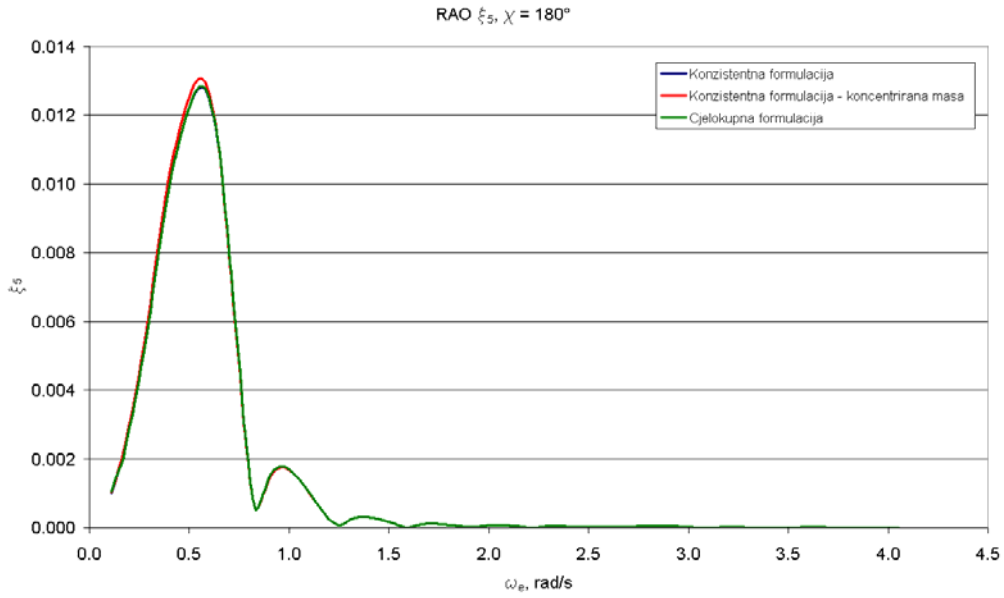
Dodatni razlog pojave razlika između pojedinih odzivnih krivulja može se pronaći i u činjenici da se prilikom modeliranja mase strukture masom u čvorovima nužno zanemaruje doprinos smične deformacije koeficijentu mase, jednačba (5.150). Iznimno dobro poklapanje različitih formulacija povratne krutosti vidljivo je u slučaju nailaska valova pod kutem  $\chi = 180^\circ$ , slike 7-57 – 7-59.



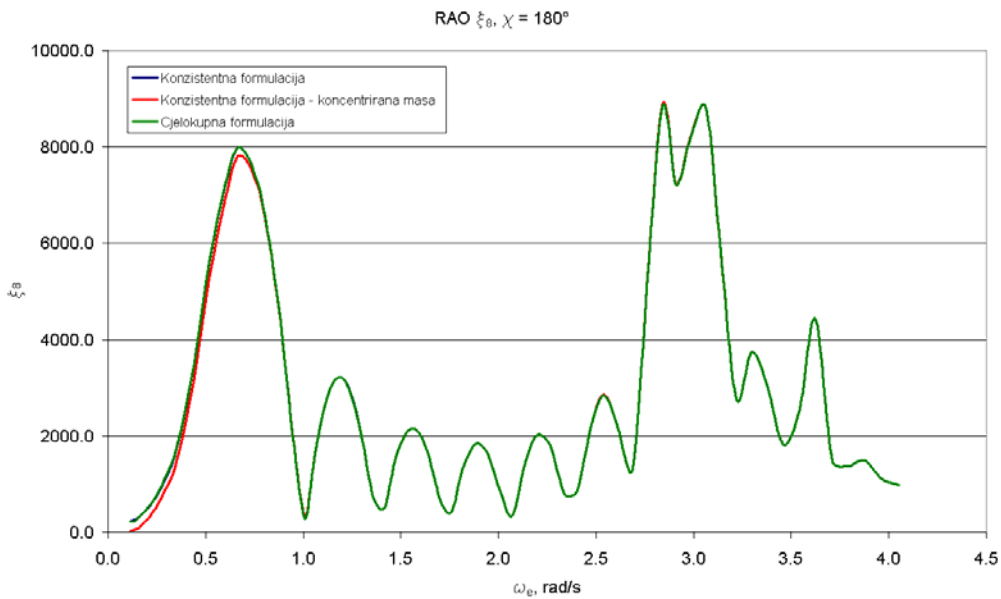
Slika 7-56 Prijenosna funkcija koeficijenta moda H1+T2,  $\chi = 150^\circ$



Slika 7-57 Prijenosna funkcija koeficijenta poniranja,  $\chi = 180^\circ$



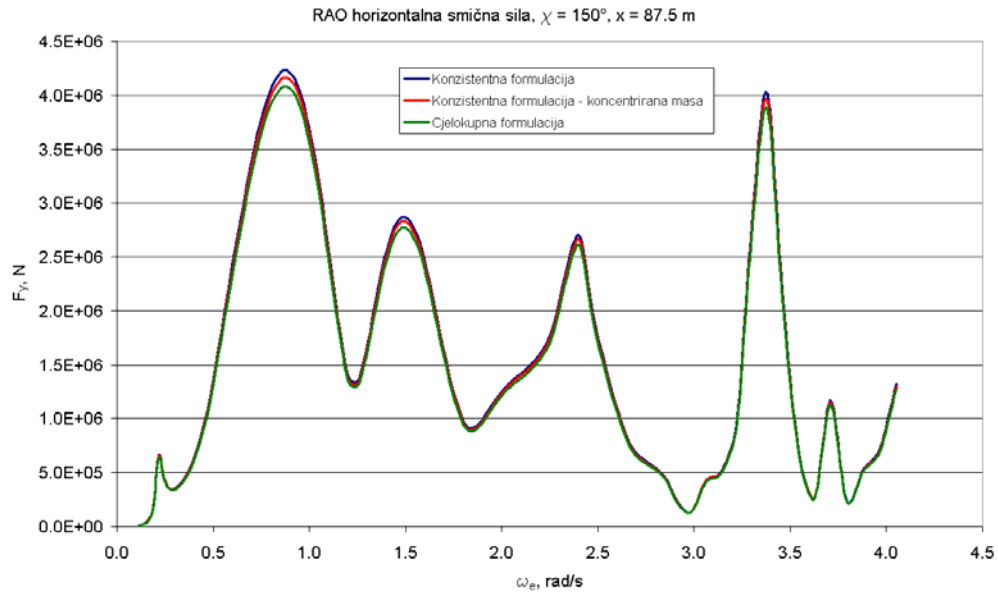
Slika 7-58 Prijenosna funkcija koeficijenta posrtanja,  $\chi = 180^\circ$



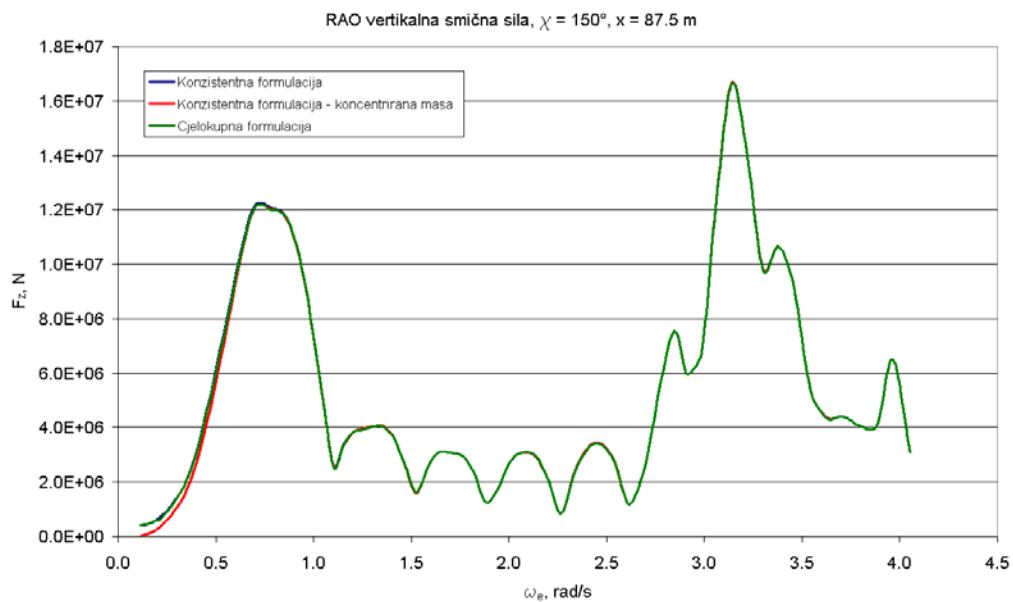
Slika 7-59 Prijenosna funkcija koeficijenta moda V1,  $\chi = 180^\circ$

Prijenosne fukcije smičnih sila i momenata savijanja kojima je opterećenja pomorska konstukcija određene su izrazima (7.3) te su prikazane slikama 7-60 – 7-66 za odabrane presjeke i slučajeve opterećenja.



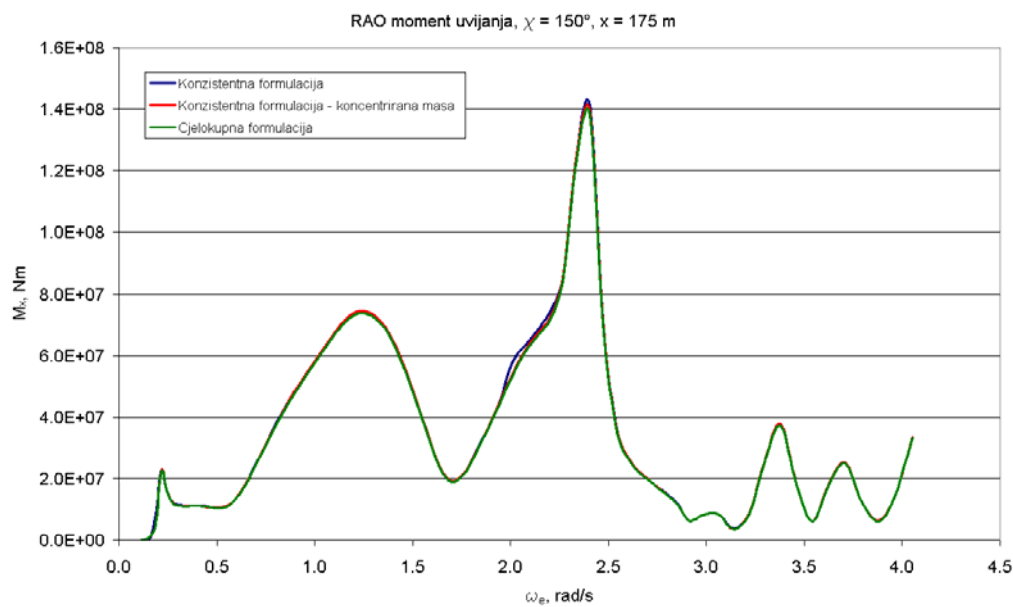


Slika 7-60 Prijenosna funkcija horizontalne smične sile,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 87.5$  m

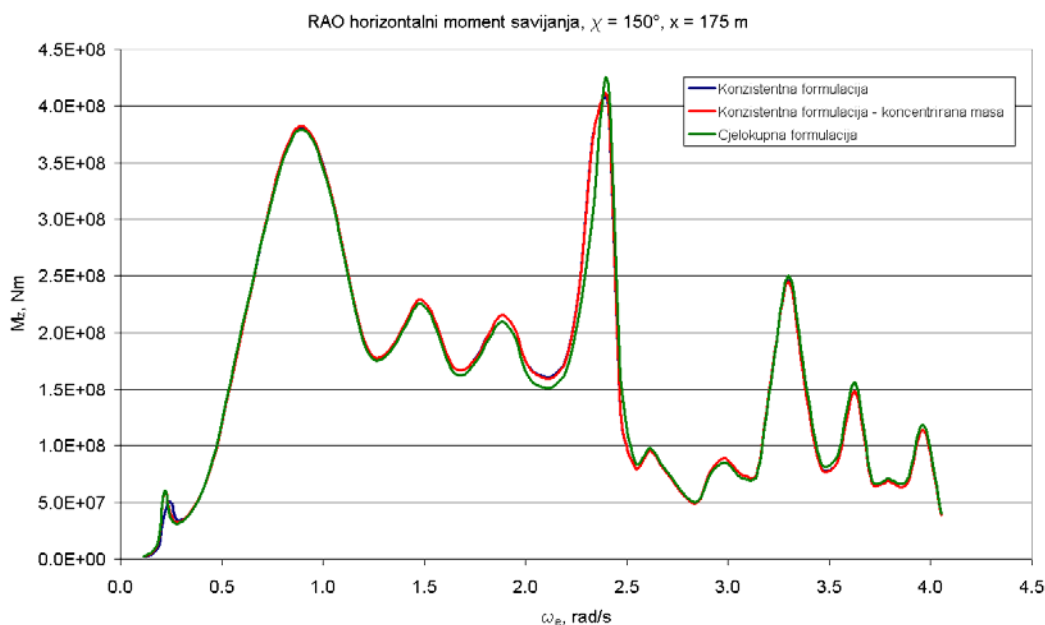


Slika 7-61 Prijenosna funkcija vertikalne smične sile,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 87.5$  m

Kao i u slučaju modalnih koeficijenata, analizom prijenosnih funkcija poprečnih sila i momenata savijanja i uvijanja uočljivo je vrlo dobro slaganje između rezultata određenih primjenom cjelokupne, konzistentne ili konzistentne formulacije s koncentriranom masom.



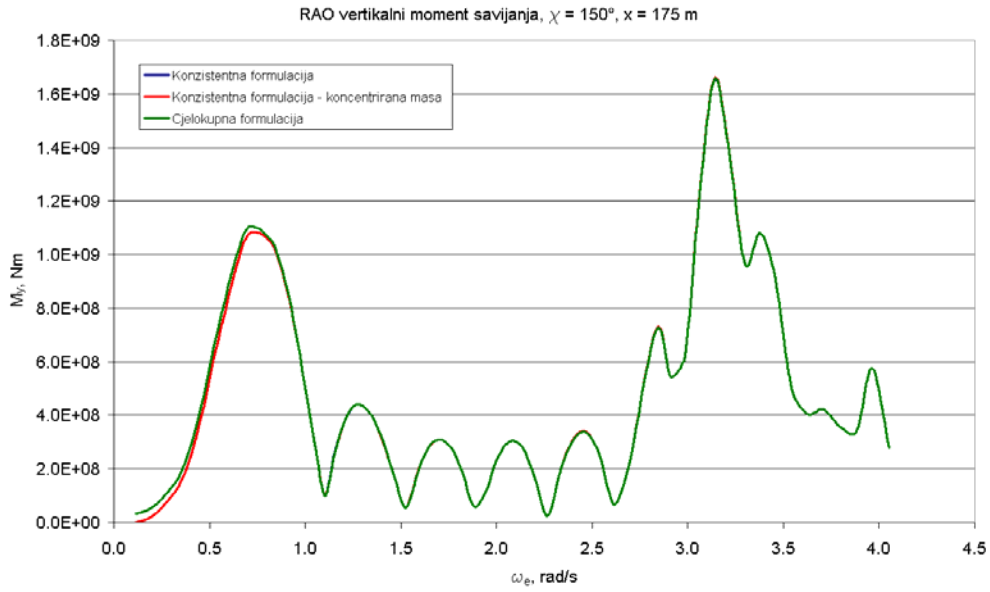
Slika 7-62 Prijenosna funkcija momenta uvijanja,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 175.0$  m



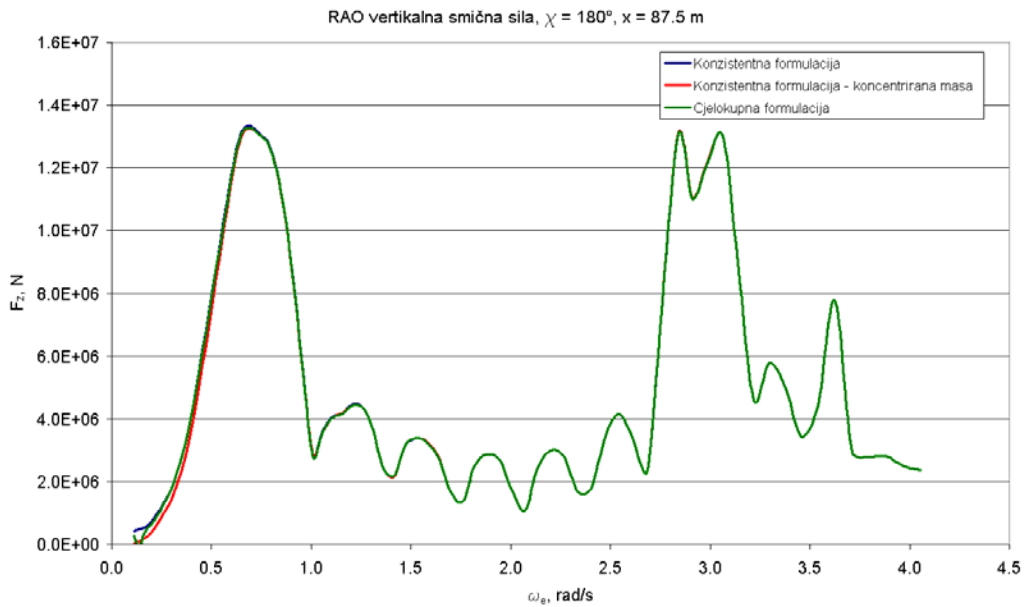
Slika 7-63 Prijenosna funkcija horizontalnog momenta savijanja,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 175.0$  m

Utjecaj povratne krutosti na prijenosne funkcije je neznan u području nižih frekvencija te opada sa povećanjem frekvencije vala jer u tom području dominantnu ulogu ima konvencionalna povratna krutost. Važno je istaknuti da je konvergencija

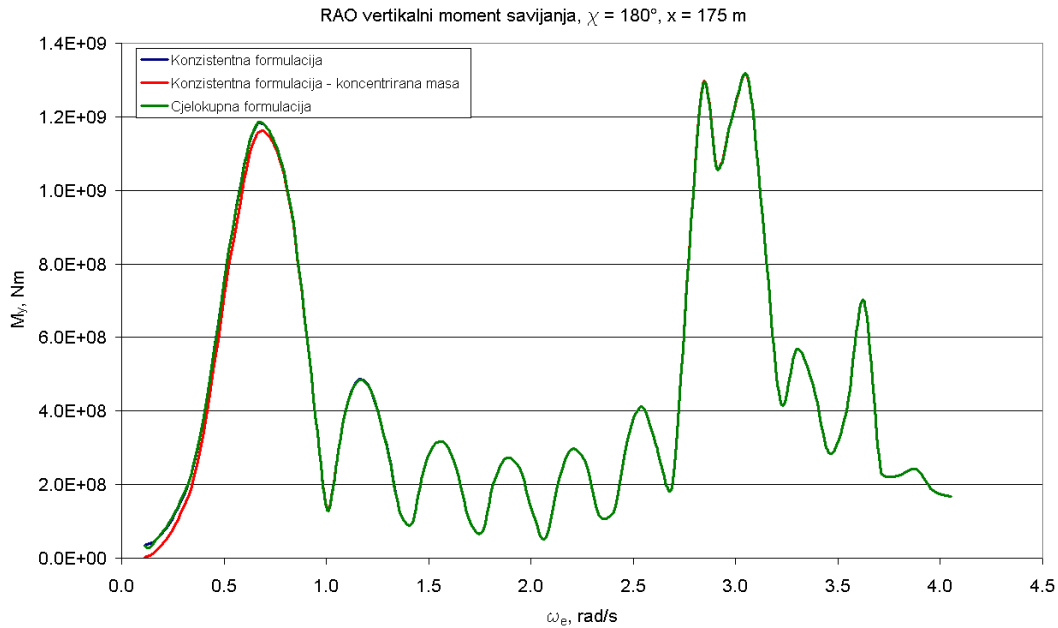
prijenosnih funkcija k nuli s opadanjem valne frekvencije ostvarena u slučaju svih primijenjenih formulacija kao nužan uvjet ostvarene statičke ravnoteže.



Slika 7-64 Prijenosna funkcija vertikalnog momenta savijanja,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 175.0$  m

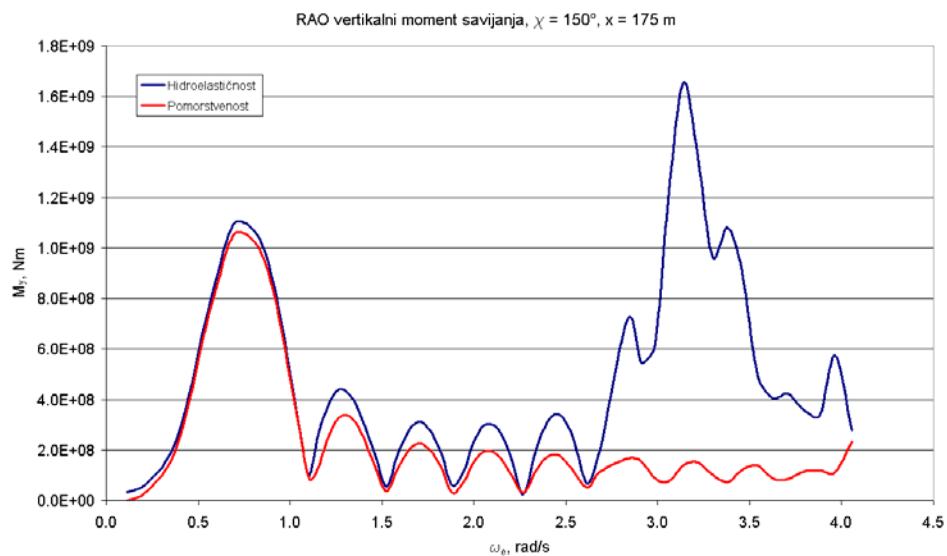


Slika 7-65 Prijenosna funkcija vertikalne smične sile,  $\chi = 180^\circ$ ,  $x = 87.5$  m



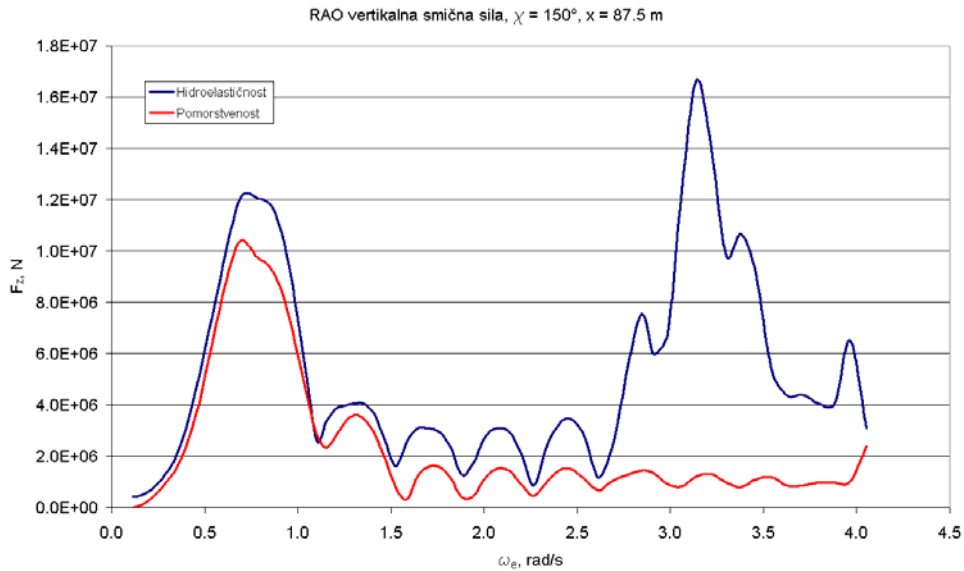
Slika 7-66 Prijenosna funkcija vertikalnog momenta savijanja,  $\chi = 180^\circ$ ,  $x = 175.0$  m

Slikama 7-67 – 7-71 prikazana je usporedba prijenosnih funkcija vertikalnih i horizontalnih smičnih sila, te vertikalnih i horizontalnih momenata savijanja i momenata uvijanja određenih primjenom hidroelastične analize i klasične teorije pomorstvenosti.

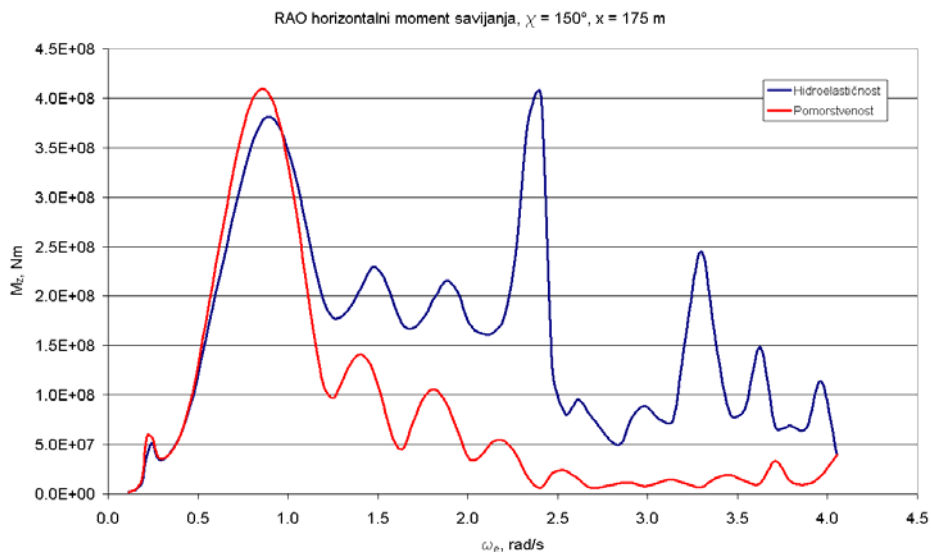


Slika 7-67 RAO vertikalnog momenta savijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 175.0$  m

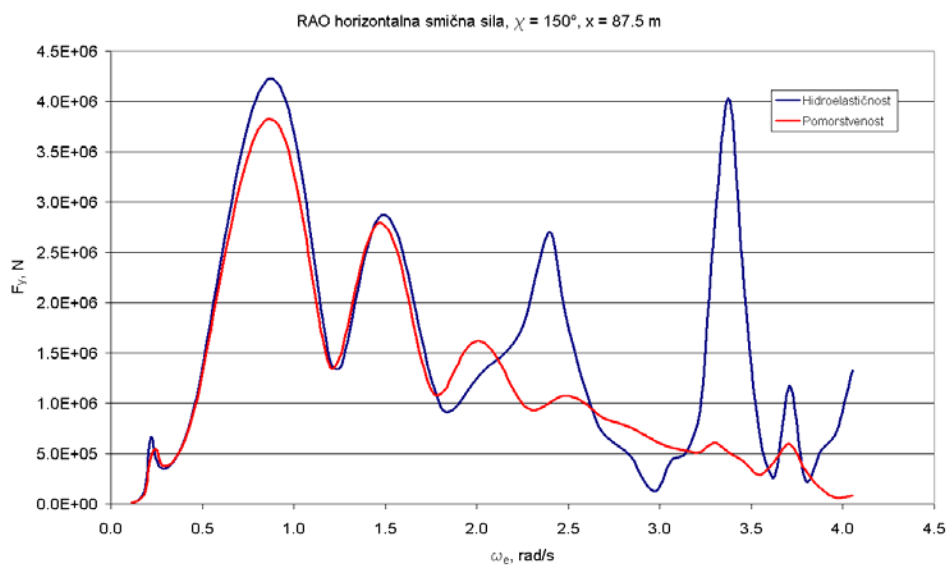
Usporedbom prikazanih rezultata uočljiva je uloga i važnost hidroelastične analize brodskih konstrukcija povećane fleksibilnosti, poput brodova za prijevoz kontejnerskog tereta. U području nižih frekvencija prijenosne funkcije imaju slične vrijednosti i trend, no s porastom susretne frekvencije raste utjecaj elastičnih modova na rezultat.



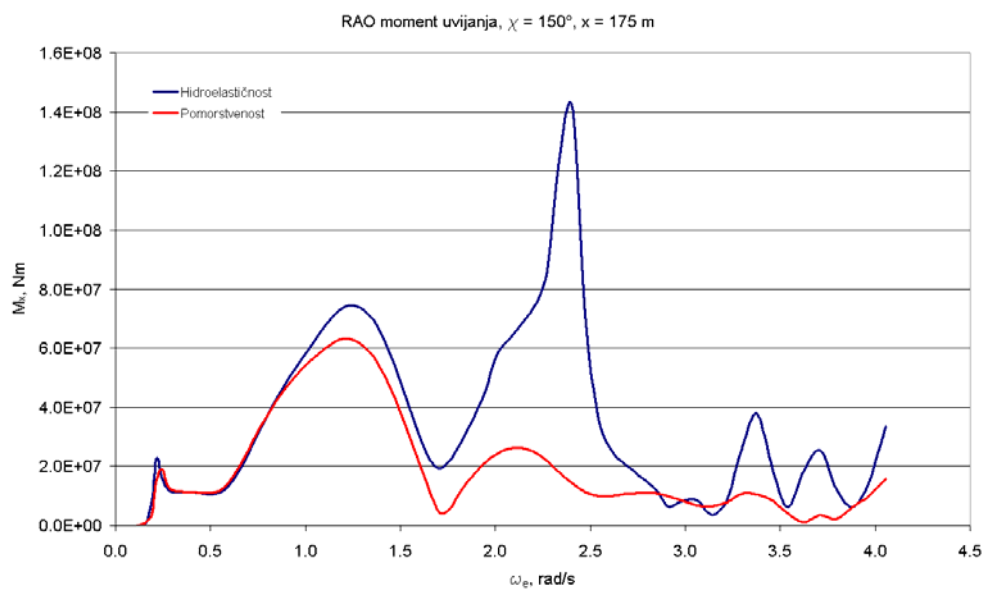
Slika 7-68 RAO vertikalne smične sile, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 87.5$  m



Slika 7-69 RAO horizontalnog momenta savijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 175.0$  m



Slika 7-70 RAO horizontalne smične sile, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 87.5$  m



Slika 7-71 RAO momenta uvijanja, hidroelastičnost i pomorstvenost,  $\chi = 150^\circ$ ,  $x = 175.0$  m

## 8 ZAKLJUČAK DOKTORSKOG RADA

Kontejnerizacija transporta, globalizacija, jačanje međunarodne trgovine te velika uloga pomorskog transporta u ukupnom svjetskom transportu robe i dobara samo su neki od čimbenika koji su svrstali moderne vrlo velike kontejnerske brodove u samo središte globalnih transportnih lanaca. Kontinuirani rast svjetske ekonomije i trgovine desetljećima je utjecao na rast veličine i kapaciteta kontejnerskih brodova zbog čega su se kontejnerski brodovi našli u rubnom području propisa klasifikacijskih društava te je neizbježno prilikom projektiranja takvih brodova pribjeći direktnim numeričkim proračunima.

Jedna od nepoželjnih fizikalnih pojava koja karakterizira moderne brodove za prijevoz kontejnera je pojava pruženja broda, koje se može okarakterizirati kao rezonantno gibanje, a manifestira se kao periodički odziv brodske konstrukcije uslijed valne uzbude. Takav prirodni fenomen moguće je matematički opisati i analizirati primjenom teorije hidroelastičnosti koja, najkraće rečeno, modalnim pristupom proširuje teoriju pomorstvenosti i na elastične modove.

Matematički model hidroelastičnosti sastoji se od strukturnog, hidrodinamičkog i hidrostatičkog modela te ga je moguće formulirati na različitim razinama složenosti, ovisno o specifičnim potrebama analize. Formulacije povratne krutosti, obuhvaćene hidrostatičkim modelom, pritom predstavljaju poseban problem zbog nejasnoća oko potrebe uključivanja pojedinih članova u analizu, njihovih karakteristika, te također same metodologije analize povratne krutosti. Prema tome, očigledno je da postoji potreba za izvođenjem matematički i fizikalno transparentne formulacije povratne krutosti kako bi se osigurao pouzdan pristup rješavanju samog problema.

Osim proširenja i unapređenja područja primjene pojedinih formulacija povratne krutosti, ovim se radom predlaže i nova metodologija analize povratne krutosti plovniha objekata koja se temelji na primjeni metode konačnih elemenata i uporabi 3D FEM modela kao domene integracije relevantnih veličina.

Za potrebu provođenja analize povratne krutosti izrađen je program RESTAN kojim se, na temelju modalnih pomaka strukturnih čvorova i stanja naprezanja na mirnoj vodi određuju elementi matrice modalne povratne krutosti za unaprijed odabranu

formulaciju. Na taj su način, na temelju prikazane teorije izvedeni i formulirani konačni elementi za proračun povratne krutosti. Takav pristup predstavlja unapređenje teorije hidroelastičnosti te omogućuje korištenje postojećih strukturnih modela za provođenje dodatnih analiza, analizu potrebne razine točnosti hidrostatičkog modela, vjerodostojnije modeliranje fizikalnih pojava i, u konačnici, omogućuje lakšu komercijalnu upotrebu.

U sklopu rada izveden je i izraz za proračun modalne geometrijske krutosti koji se temelji na primjeni integracije pojednostavljenih funkcija oblika (translacije čvorova) te koji po svojoj točnosti zadovoljava potrebe hidroelastične analize. Istaknuto je kako takva formulacija u sebi, osim progiba, uključuje i membranske pomake elemenata te stoga geometrijska krutost, određena komercijalnim paketima za analizu stabilnosti konstrukcija, nije dostatna za hidroelastičnu analizu.

Analiza povratne krutosti primjenom različitih formulacija (konzistentna, cjelokupna i objedinjena) i njihov utjecaj na odziv plovnih objekata ispitan je za dva slučaja: pravilnu tankostijenu baržu i vrlo veliki kontejnerski brod. Pravilna barža je vrlo pogodan primjer za kontrolu točnosti rezultata, jer je moguće rezultate analize usporediti s dostupnim analitičkim vrijednostima. U oba slučaja je pokazana pouzdanost predložene metodologije analize povratne krutosti. Također, rezultati analize su pokazali vrlo dobro podudaranje s analitičkim vrijednostima, uz iznimku numeričke nestabilnosti cjelokupne formulacije koja do velikog izražaja dolazi prilikom analize valjanja broda. Osim toga, zaključeno je kako je područje primjene objedinjene povratne krutosti analiza povratne krutosti samo homogenih plovnih objekata.

Utjecaj pojedine formulacije na odziv plovnog objekta (pravilne barže i velikog kontejnerskog broda) je zanemariv te su pokazana vrlo dobra podudaranja između vrijednosti prijenosnih funkcija smičnih sila i momenata savijanja i uvijanja. Također, analitička integracija relevantnih veličina pomoću funkcija oblika daje bolje rezultate od numeričke integracije pomoću Gauss-ovih točaka samo u slučaju vrlo rijetke mreže konačnih elemenata.

U konačnici može se zaključiti da je proračun povratne krutosti korištenjem cjelokupne krutosti vrlo zahtjevan i opsežan, a zbog numeričke nestabilnosti ne daje očekivano povećanje točnosti. Zbog toga ova formulacija povratne krutosti nije prikladna za praktičnu uporabu u hidroelastičnoj analizi brodova. S druge strane, konzistentna



krutost izračunata preko koncentriranih masa i pomaka čvorova daje vrlo dobre rezultate. Budući da su navedene mase i pomaci rezultat proračuna suhih slobodnih vibracija te je postupak proračuna ovako definirane povratne krutosti znatno pojednostavljen, konzistentna krutost s masom koncentriranom u čvorovima se može preporučiti za praktičnu uporabu kao pouzdano približno rješenje.

## 8.1 Smjernice za daljnja istraživanja

Daljnje istraživanje u području analize povratne krutosti plovnih objekata nastaviti će se u nekoliko smjerova. Prije svega, prijenosne funkcije gibanja, smičnih sila i momenata savijanja valja dodatno verificirati usporedbom s rezultatima modelskih ispitivanja te rezultatima mjerenja u naravi koja se provode u sklopu EU FP7 projekta TULCS za brod Rigoletto koji se koristi kao ilustrativan primjer u ovom radu. Mjerenja u naravi intenzivno se provode kroz duži period pomoću sofisticiranog sustava za mjerenja u naravi, instaliranom na brodu Rigoletto, te se u sklopu istog projekta, intenzivno provodi modelsko ispitivanje kontejnerskog broda u BGO – FIRST Basin za modelska ispitivanja u Toulonu i bazenu za modelska ispitivanja CEHIPAR u Madridu.

Osim toga, razvijenu metodologiju proračuna povratne krutosti moguće je proširiti i na područje hidroelastične analize u vremenskoj domeni te na taj način utvrditi utjecaj pojedine formulacije na odziv broda.

Još jedno od znanstvenih područja, u kojima je doprinos pojedinih komponenata povratne krutosti značajan, je analiza ponašanja pučinskih objekata na morskim valovima, osobito naftne platforme s prednapregnutim tendonima (TLP – *Tension Leg Platform*) kod kojih geometrijska krutost ima osobitu ulogu u ukupnoj povratnoj krutosti.

Kako bi se osigurala točnost i pouzdanost rezultata hidroelastične analize, osobitu pažnju valja posvetiti i složenim postupcima sprežanja hidrodinamičkih i strukturnih modela.

## LITERATURA

- [1] M. Levison, *The Box. How the Shipping Container Made the World Smaller and the World Economy Bigger*, Princeton University Press, New Jersey, 2006.
- [2] ..., *An Evaluation of Maritime Policy in Meeting the Commercial and Security Needs of the United States*, IHS Global Insight, Inc., 2009.
- [3] ..., *Global Macroeconomic Scenarios and World Trade Statistics and Forecast for the Panama Canal Authority*, HIS Global Insight, 2005.
- [4] ..., *Regional Shipping and Port Development (Container Traffic Forecast)*, Economic and Social Commission for Asia and the Pacific (ESCAP), United Nations, New York, 2007.
- [5] R. Robinson, *Liner Shipping Strategy, Network Structuring and Competitive Advantage: a Chain System Perspective*, Shipping Economics, Elsevier, 2005.
- [6] K. Kuroda, M. Takebayashi, T. Tsuji, *International Container Transportation Network Analysis Considering Post-Panamax Class Container Ships*, Global Competition in Transportation Markets: Analysis and Policy Making, Elsevier, 2005.
- [7] B. Slack, C. Comtois, R. McCalla, *Strategic alliances in the container shipping industry: a global perspective*, Maritime Policy & Management, Taylor & Francis, 2002.
- [8] Y. Hu, D. Zhu, *Empirical analysis of the worldwide maritime transportation network*, Physica A, Elsevier, 2009.
- [9] D. Tozer, A. Penfold, *Ultra-Large Container Ships (ULCS) designing to the limit of current and projected terminal infrastructure capabilities*, Lloyd's Register of Shipping, 2001.
- [10] B. Shi, D. Liu, C. Wiernicki, P. Tang-Jensen, *Technology Advances in Design and Operation of Large Container Carriers*, Design & Operation of Container Ships, London, 2006.

- [11] S. Tomašević, *Hidroelastični model dinamičkog odziva kontejnerskih brodova na valovima*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2007.
- [12] Z. J. Wang, R. P. Li, Z. Shu, *A study on hydroelastic response of box-type very large floating structures*, China Ocean Engineering, 2001, 15 (3), 345-354.
- [13] T. S. Phan, P. Temarel, *Hydroelastic responses of pontoon and semi-submersible types of very large floating structure in regular head waves*, Proceedings of the International Conference on Offshore mechanics and arctic engineering – OMAE, ASME, 2002, 2, 753-763.
- [14] R. P. Li, Z. Shu, Z. J. Wang, *A study on the hydroelastic behavior of box-typed very large floating structure in waves*, Proceedings of the Third Conference on New ship and marine technology, Kobe, Japan, 2002, 41-48.
- [15] J. Lundgren, W. G. Price, Y. S. Wu, *A hydroelastic investigation into the behavior of a floating “dry” dock in waves*, Spring Meeting of RINA, London, 1998.
- [16] S. E. Hirdaris, W. G. Price, P. Temarel, *Two- and three-dimensional hydroelastic modeling of a bulker in regular waves*, Marine Structures, 2003, 16 (8), 627-658.
- [17] C. Tian, Y. S. Wu, Y. Q. Chen, *Numerical predictions on the hydroelastic response of a large bulk carrier in waves*, Proceedings of the Fifth International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology, Southampton, UK, 2009.
- [18] Y. S. Wu, W. C. Cui, *Advances in the three-dimensional hydroelasticity of ships*, Proc. IMechE Vol. 223 Part M: Journal of Engineering for the Maritime Environment, doi: 10.1243/14750902JEME159, 331-348.
- [19] W. G. Price, Y. S. Wu, *Structural responses of a SWATH of multi-hulled vessel traveling in waves*, Proceedings of the International Conference on SWATH ships and advanced multi-hulled vessels, RINA, London, 1985.
- [20] Y. S. Wu, C. Tian, *The second-order hydrodynamic actions on flexible SWATH ships in random waves*, Proceedings of Eighth International Conference on Hydrodynamics, Nantes, France, 2008.
- [21] Y. N. Fu, W. G. Price, P. Temarel, *The “dry and wet” towage of a jack-up in regular and irregular waves*, RINA Transactions, 1987, 129, 149-159.

- [22] Š. Malenica, F. Bigot, X. B. Chen, S. Bralić, *Global hydroelastic model for LNG ships*, IWWF, Athens, 2011.
- [23] I. Senjanović, N. Hadžić, M. Tomić, *Investigation of restoring stiffness in the hydroelastic analysis of slender marine structures*, Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering.
- [24] W. G. Price, Y. S. Wu, *Hydroelasticity of marine structures*, The 16<sup>th</sup> International Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Lyngby, Denmark, 1985.
- [25] J. N. Newman, *Wave effects on deformable bodies*, Applied Ocean Research, 1994, 16, 47-59.
- [26] H. R. Riggs, *Hydrostatic stiffness of flexible floating structure*, Proceedings of the International Workshop on Very large floating structures, Hayama, Japan, 1996, 229-234.
- [27] L. L. Huang, H. R. Riggs, *The hydrostatic stiffness of flexible floating structures for linear hydroelasticity*, Marine Structures, 2000, 13, 91-106.
- [28] Š. Malenica, *Some Aspects of Hydrostatic Calculations in Linear Seakeeping*, Proceedings of 14<sup>th</sup> NAV Conference, Palermo, Italy.
- [29] Š. Malenica, B. Molin, F. Remy, I. Senjanović, *Hydroelastic response of a barge to impulsive and non-impulsive wave loads*, Proceedings of the Third International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology, Oxford, UK, 2003. 107-115.
- [30] I. Senjanović, M. Tomić, S. Tomašević, *An explicit formulation for restoring stiffness and its performance in ship hydroelasticity*, Ocean Engineering, 2009, 35, pp. 1322-1338.
- [31] H. R. Riggs, *Discussion on "Investigation of ship hydroelasticity" by Senjanovic, Malenica and Tomasevic*, Ocean Engineering, 2008, 35, 1285-1286.
- [32] I. Senjanović, *Reply to Professor Riggs's discussion on paper "Investigation of ship hydroelasticity" by Senjanovic, Malenica and Tomasevic*, Ocean Engineering, 2008, 35, 1287-1288.

- [33] I. Senjanović, N. Vladimir, M. Tomić, *Formulation of consistent restoring stiffness in ship hydroelastic analysis*, Journal of Engineering Mathematics, 2011, DOI 10.1007/s10665-011-9468-2.
- [34] I. Senjanović, N. Hadžić, N. Vladimir, *Restoring stiffness in the hydroelastic analysis of marine structures*, Brodogradnja, 2011, 62, pp. 265-279.
- [35] Y. S. Wu, W. C. Cui, *Advances in the three-dimensional hydroelasticity of ships*, Proc. IMechE Vol. 223 Part M: Journal of Engineering for the Maritime Environment, doi: 10.1243/14750902JEME159, 331-348.
- [36] R. R. D. Bishop, W. G. Price, *Hydroelasticity of Ships*, Cambridge University Press, 1979.
- [37] I. Senjanović, N. Vladimir, N. Hadžić, *Some aspects of geometric stiffness modeling in ship hydroelastic analysis*, Transactions of FAMENA XXXIV – 4 (2010).
- [38] J. Prpić – Oršić, V. Čorić, *Teorija pomorstvenosti*, Sveučilište u Rijeci, Rijeka 2006.
- [39] E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, John Wiley & Sons, New Jersey, 1993.
- [40] I. N. Bronštejn i dr., *Matematički priručnik*, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [41] I. Alfirević, *Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma*, Golden marketing, Zagreb, 2003.
- [42] J. Sorić, *Metoda konačnih elemenata*, Golden marketing, Zagreb, 2004.
- [43] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [44] O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw - Hill, London, 1971.
- [45] M. Sekulović, *Metoda konačnih elemenata*, Građevinska knjiga, Beograd, 1984.
- [46] T. J. R. Huges, *The Finite Element Method*, Dover Publications, Inc., New York, 2000.
- [47] O. F. Hughes, *Ship Structural Design*, SNAME, John Wiley & Sons, New Jersey 1988.

- [48] U. Kuttler, W. A. Wall, *Strong coupling schemes for fluid – structure interaction*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 2008.
- [49] Mathematica, Wolfram Research Inc., 2005.
- [50] SESAM, *User's manual*, Det Norske Veritas, Høvik, 2007.
- [51] K. Kilroy, *MSC/NASTRAN, Quick Reference Guide*, The MacNeal-Schwendler Corporation, 1997.
- [52] Z. Drmač, V. Hari, M. Marušić, M. Rogina, S. Singer, S. Singer, *Numerička analiza*, PMF – Matematički odjel, Zagreb 2003.
- [53] Z. Dovedan, M. Smilevski, J. Divjak Zalokar, *Fortran 77 i programiranje*, Don, Zagreb, 1991.
- [54] BV, *AMG User's and Example manual*
- [55] BV, *MFRT Users and Example manual*
- [56] BV, *HOMER Users manual*
- [57] I. Senjanović, N. Vladimir, D. S. Cho, *A simplified geometric stiffness in stability analysis of thin – walled structures by the finite element method*, Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering (poslano na objavljivanje).

## KRATKI ŽIVOTOPIS

Neven Hadžić rođen je 03.11.1984. godine u Zagrebu. Osnovnu i srednju školu klasičnog smjera završio je u Zagrebu.

U školskoj godini 2003/2004 upisao je Sveučilišni preddiplomski studij brodogradnje na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu koji je završio radom *Određivanje faktora forme serije punih brodova velike širine i malog gaza*. Školske godine 2007/2008 upisao je Sveučilišni dodiplomski studij na istoimenom fakultetu koji je završio radom *Optimizacija konstrukcije CONRO broda korištenjem sandwich panela u palubama nadgrađa*. U školskoj godini 2008/2009 upisao je poslijediplomski doktorski studij, smjer Brodogradnja i pomorska tehnika, na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu.

Od veljače 2008. godine zaposlen je u Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu kao stručni suradnik na europskim projektima FP6 DeLight i FP6 IMPROVE. U studenom 2009. godine dobio je stalno radno mjesto kao asistent na istoimenoj katedri i drži nastavu u sklopu kolegija Teorija konstrukcija.

Pod vodstvom akademika Ive Senjanovića sudjeluje u znanstveno istraživačkim projektima Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta, *Opterećenje i odziv brodskih konstrukcija*, te u nekoliko studija i analiza provedenih na Katedri za konstrukciju plovniha objekata za potrebe domaćih i stranih naručitelja. Također, sudjeluje u europskom projektu FP7 *Tools for Ultra Large Container Ships (TULCS)*.

Autor je i koautor više od 15 znanstvenih i stručnih radova. Govori engleski, talijanski i španjolski jezik. Neven Hadžić živi u Zagrebu sa svojom supugom Jelenom i četvero djece.

## SHORT BIOGRAPHY

Neven Hadžić was born on November 3<sup>rd</sup>, 1984. He completed primary and secondary school in Zagreb.

In the academic year 2003/2004 he started a seven semester undergraduate course in naval architecture at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, where he graduated with the thesis *Form factor determination of the full, large breadth and shallow draught ship series*. In the academic year 2007/2008 he started a three semester master study at the same Faculty, where he graduated with the thesis *Structural optimization of CONRO ship using sandwich panels in the superstructure decks*. In the academic year 2008/2009 he enrolled a six semester postgraduate study in naval architecture and marine engineering at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture.

In February 2008, he was employed at the Department of Naval Architecture and Marine Engineering of the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture in Zagreb as junior researcher at the EU projects FP6 DeLight and FP6 IMPROVE. In November 2009, he was employed at the same Department as an associate researcher.

Under the supervision of Prof. Ivo Senjanović he participates in scientific projects of the Ministry of Education, Science and Sport, *Loading and Response of Ship Structures*, as well as in some studies and analyses at the Chair of Ship Structure Design for home and foreign clients and in an EU project FP7 *Tools for Ultra Large Container Ships*, (TULCS).

As author and co-author he published more than 15 scientific and expert papers. He speaks English, Italian and Spanish. Neven Hadžić lives in Zagreb together with his wife Jelena and their four children.



## PRILOG A – RAZVOJ FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI U TAYLOROV RED

Jednadžba (3.8) predstavlja funkciju  $F = d(dW_c)$  ovisnu o varijablama  $Z$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{t}$  i  $S$ , što se simbolički izražava u višedimenzionalnom prostoru

$$F = F(Z, \mathbf{N}, \mathbf{t}, S) = F(Z, N_x, N_y, N_z, t_x, t_y, t_z, S). \quad (\text{A1})$$

Prema [40] Taylorova formula za funkcije više varijable razvijene oko točke  $P$  s koordinatama  $Z + h, N_x + k, \dots, S + l$  uzimajući u obzir samo prvu derivaciju glasi

$$F(Z + h, N_x + k, \dots, S + l) \approx F(Z, N_x, \dots, S) + \frac{\partial F(Z, N_x, \dots, S)}{\partial Z} h + \frac{\partial F(Z, N_x, \dots, S)}{\partial N_x} k + \dots + \frac{\partial F(Z, N_x, \dots, S)}{\partial S} l. \quad (\text{A2})$$

Izraz (A2) se može zapisati u vektorskoj notaciji kao

$$F(Z + h, N_x + k, \dots, S + l) \approx F(Z, N_x, \dots, S) + \left[ \frac{\partial F(Z, N_x, \dots, S)}{\partial Z} \mathbf{e}_h + \frac{\partial F(Z, N_x, \dots, S)}{\partial N_x} \mathbf{e}_k + \dots + \frac{\partial F(Z, N_x, \dots, S)}{\partial S} \mathbf{e}_l \right] \cdot (\mathbf{h}\mathbf{e}_h + \mathbf{k}\mathbf{e}_k + \dots + \mathbf{l}\mathbf{e}_l), \quad (\text{A3})$$

odnosno

$$F(Z + h, N_x + k, \dots, S + l) \approx F(Z, N_x, \dots, S) + \nabla F(Z, N_x, \dots, S) \cdot \mathbf{c}. \quad (\text{A4})$$

gdje je  $\nabla$  diferencijalni operator višedimenzionalnog prostora,

$$\mathbf{c} = \mathbf{h}\mathbf{e}_h + \mathbf{k}\mathbf{e}_k + \dots + \mathbf{l}\mathbf{e}_l. \quad (\text{A5})$$

a  $\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_k, \dots, \mathbf{e}_l$  jedinični vektori višedimenzionalnog prostora. Zahvaljujući komutativnosti skalarnog produkta vrijedi

$$F(Z+h, N_x+k, \dots, S+l) \approx F(Z, N_x, \dots, S) + \mathbf{c} \cdot \nabla F(Z, N_x, \dots, S). \quad (\text{A6})$$

Drugi pribrojnik izraza (A6) predstavlja derivaciju skalarnog polja  $F(Z, N_x, \dots, S)$  u smjeru vektora  $\mathbf{c}$  te se može pisati

$$F(Z+h, N_x+k, \dots, S+l) \approx F(Z, N_x, \dots, S) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{c}}(Z, N_x, \dots, S). \quad (\text{A7})$$

## PRILOG B – ANALITIČKI IZRAZI KOEFICIJENATA POVROTNE KRUTOSTI ZA SLUČAJ HOMOGENOG PONTONA I TANKONSTIJENE KONSTRUKCIJE

Detaljan prikaz izvoda analitičkih izraza koeficijenata povratne krutosti za slučaj homogenog pontona i tankostijene konstrukcije barže dan je, radi kompaktnosti rada, samo za slučaj valjanja, a konačni izrazi navedeni su i za poniranje i posrtanje.

### Homogeni ponton

Kruti modovi u analitičkom obliku za slučaj poniranja, valjanja i posrtanja dani su izrazima

$$\text{Poniranje: } H_z^3 = 1, \quad (B1)$$

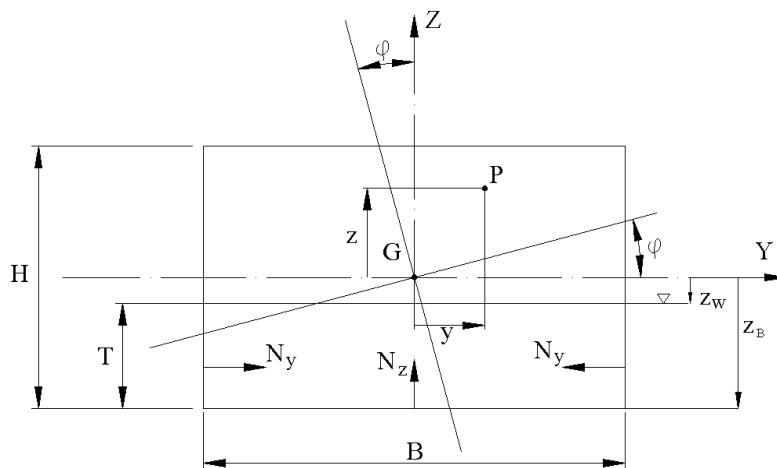
$$\text{Valjanje: } H_y^4 = -z\varphi, \quad (B2)$$

$$H_z^4 = y\varphi, \quad (B3)$$

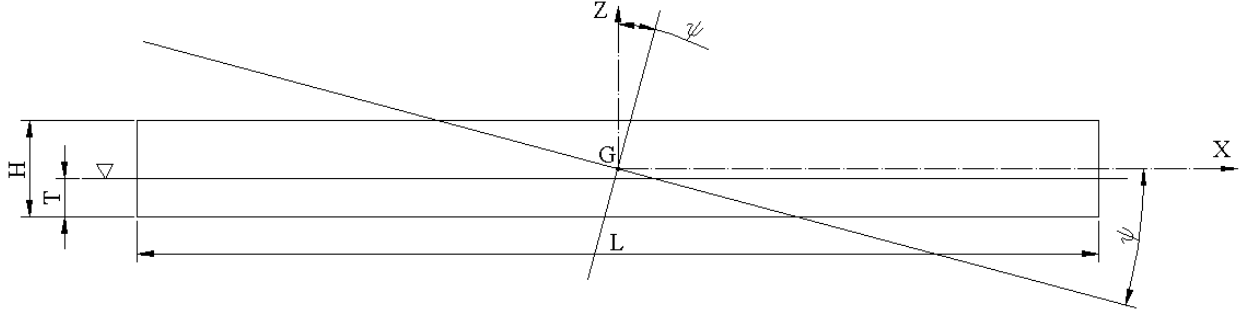
$$\text{Posrtanje } H_x^5 = z\psi, \quad (B4)$$

$$H_z^5 = -x\psi, \quad (B5)$$

gdje su  $y$  i  $z$  koordinate proizvoljne točke homogenog pontona, a  $\varphi$  je kut rotacije koji je u slučaju krutih modova jednak 1 rad, slika B1 i B2.



Slika B-1 Valjanje homogenog pontona



Slika B-2 Posrtanje homogenog pontona

Koeficijent tlaka, izraz (4.3a), u razvijenom obliku za slučaj valjanja,  $i = 4$  i  $j = 4$ , glasi

$$C_{44}^p = \rho g \iint_S H_x^4 H_z^4 N_x dS + \rho g \iint_S H_y^4 H_z^4 N_y dS + \rho g \iint_S H_z^4 H_z^4 N_z dS. \quad (B6)$$

Uvrštavanjem izraza za krute modalne pomake, (B2) i (B3) slijedi

$$C_{44}^p = \rho g \iint_S (-yz\varphi^2 N_y) dS + \rho g \iint_S y^2\varphi^2 N_z dS, \quad (B7)$$

gdje prvi pribrojnik predstavlja doprinos bokova, a drugi dna pontona. Uvrštavanjem  $\varphi = 1$ ,  $y = B/2$  i  $N_y = -1$  za lijevi i  $y = -B/2$  i  $N_y = 1$  za desni bok te  $N_z = 1$  za dno pontona slijedi

$$C_{44}^p = \rho g L \frac{B}{2} \int_{-H/2}^{-(H/2-T)} z dz + \rho g L \frac{B}{2} \int_{-H/2}^{-(H/2-T)} z dz + \rho g L \int_{-B/2}^{B/2} y^2 dy, \quad (B8)$$

što nakon integriranja i sređivanja daje

$$C_{44}^p = \rho g \frac{LB^3}{12} - \rho g \frac{LBT}{2}(H-T). \quad (B9)$$

Izraz (B9) daje se lako svesti na izraz za koeficijent povratne krutosti u slučaju valjanja,  $\rho g \nabla \overline{M_0 G}$ , poznat iz teorije pomorstvenosti. Uvrštavanjem (B2) i (B3) u izraze za koeficijent normale i moda, (4.3b), koeficijent mase, (4.3c), i koeficijent gravitacijskog naprezanja, (3.91), proizlazi da su njihove vrijednosti jednake nuli. Na isti način za koeficijent rubnog naprezanja (Huang i Riggs), (4.1d), i koeficijent rubnog naprezanja (3.90) u slučaju valjanja nalazimo

$$-k_{44}^{S0} = \rho g L B T \frac{H}{2} + \rho g \frac{L B T^2}{2}, \quad (\text{B10})$$

$$-k_{44}^{SZ} = \rho g L B T \frac{H}{2} + \rho g \frac{L B T^2}{2}. \quad (\text{B11})$$

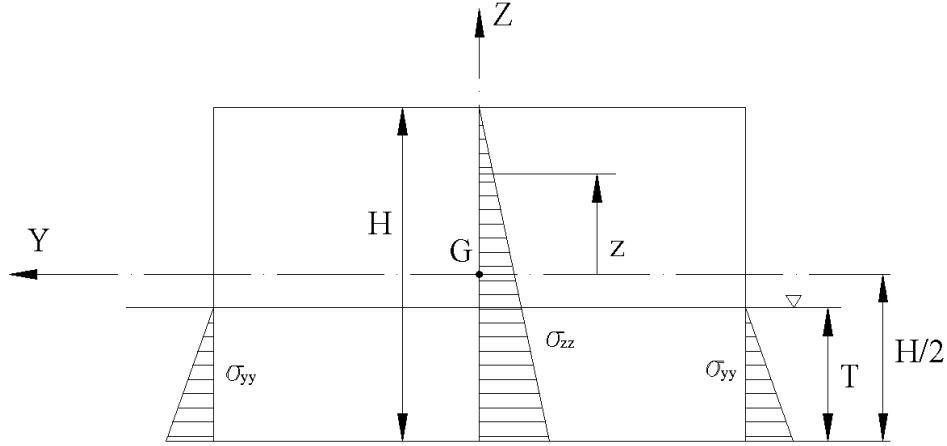
Koeficijent geometrijske krutosti, (4.1e), u sebi uključuje naprezanje koje je potrebno definirati prije uvrštavanja izraza (B2) i (B3). Naprezanje unutar pontona u slučaju valjanja postoji uslijed hidrostatskog tlaka u poprečnom smjeru i akumuliranja mase pontona u vertikalnom smjeru, slika B3, te je zadano kao

$$\sigma_{yy} = \rho g \left( z - \frac{H}{2} + T \right), \quad (\text{B12})$$

$$\sigma_{zz} = -\rho_s g \left( \frac{H}{2} - z \right). \quad (\text{B13})$$

Budući da ne postoji pomak u smjeru  $X$  osi u slučaju valjanja pontona, naprezanje uslijed progiba pontona,  $\sigma_{xx}$ , ne doprinosi geometrijskoj krutosti. Također, radi jednostavnosti, pretpostavlja se da je raspodjela naprezanja  $\sigma_{yy}$  unutar pontona jednaka raspodjeli na bokovima pontona.

Uvrštavanjem (B12), (B13), (B2) i (B3) u (4.1e) proizlazi da je koeficijent geometrijske krutosti jednak



Slika B-3 Homogeni ponton – naprezanje u vertikalnom i poprečnom smjeru

$$k_{44}^G = \iiint_V \rho g \left( z - \frac{H}{2} + T \right) \varphi^2 dV + \iiint_V \left[ -g \rho_s \left( \frac{H}{2} - z \right) \right] \varphi^2 dV, \quad (\text{B14})$$

odnosno

$$k_{44}^G = \rho g L B \int_{-H/2}^{-(H/2-T)} \left( z - \frac{H}{2} + T \right) dz + \rho_s g L B \int_{-H/2}^{H/2} \left( \frac{H}{2} - z \right) dz, \quad (\text{B15})$$

što nakon integriranja daje

$$k_{44}^G = -\rho g L B T \frac{H}{2} - \rho g \frac{L B T^2}{2}. \quad (\text{B16})$$

Analitički izrazi za koeficijente povratne krutosti homogenog pontona za slučaj poniranja, valjanja i posrtanja navedeni su u tablici B1.

Tablica B-1 Analitičke vrijednosti koeficijenata povratne krutosti za homogeni ponton

	<i>Poniranje</i>	<i>Valjanje</i>	<i>Posrtanje</i>
$C_{ij}^p$	$\rho g A_{WL}$	$\rho g \frac{LB^3}{12} - \rho g \frac{LBT}{2}(H-T)$	$\rho g \frac{L^3 B}{12} + \rho g \frac{LBT}{2}(H-T)$
$C_{ij}^{nh}$	0	0	0
$C_{ij}^m$	0	0	0
$-k_{ij}^{S0}$	0	$\rho g LBT \frac{H}{2} + \rho g \frac{LBT^2}{2}$	$\rho g LBT \frac{H}{2} + \rho g \frac{LBT^2}{2}$
$k_{ij}^G$	0	$-\rho g LBT \frac{H}{2} - \rho g \frac{LBT^2}{2}$	$-\rho g LBT \frac{H}{2} - \rho g \frac{LBT^2}{2}$
$-k_{ij}^{SZ}$	0	$\rho g LBT \frac{H}{2} + \rho g \frac{LBT^2}{2}$	$\rho g LBT \frac{H}{2} + \rho g \frac{LBT^2}{2}$
$k_{ij}^{VZ}$	0	0	0

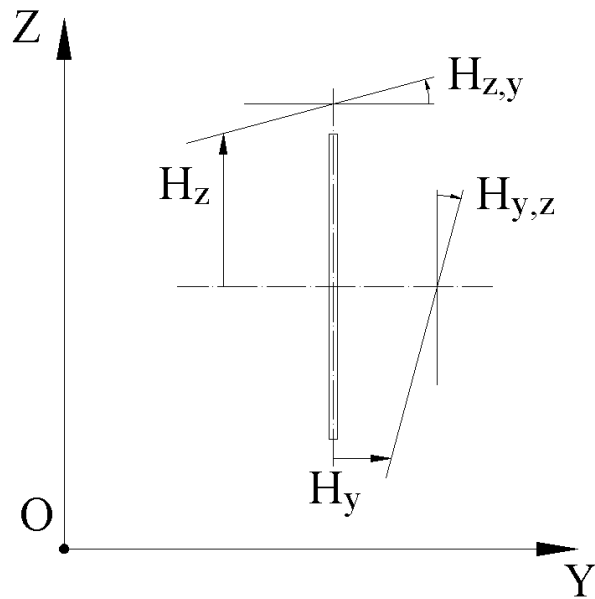
### Tankostijena konstrukcija pravilne barže

U slučaju pravilne barže svi koeficijenti povratne krutosti, osim koeficijenata rubnog i gravitacijskog naprezanja,  $k_{ij}^{SZ}$  i  $k_{ij}^{VZ}$ , definirani su izrazima navedenim u tablici B1. Koeficijente  $k_{ij}^{SZ}$  i  $k_{ij}^{VZ}$  potrebno je razmotriti zasebno.

Koeficijent rubnog naprezanja,  $k_{ij}^{SZ}$ , jednadžba (3.90), u razvijenom obliku za slučaj valjanja glasi

$$k_{44}^{SZ} = \rho g \iint_S ZH_y^4 H_{y,z}^4 N_z dS + \rho g \iint_S ZH_z^4 H_{z,y}^4 N_z dS, \quad (B17)$$

gdje prvi pribrojnik predstavlja doprinos dna, a drugi doprinos bokova barže ukupnoj vrijednosti koeficijenta rubnog naprezanja. Međutim, vrijednost drugog pribrojnika izraza (B17) je nemoguće odrediti za slučaj tankostijene konstrukcije jer je derivacija  $H_{z,y}^i$  nepoznata, slika B4.



Slika B-4 Derivacija modalnih pomaka u slučaju tankostijene konstrukcije

To se isto odnosi i na koeficijent gravitacijskog naprezanja,  $k_{ij}^{VZ}$ , jednačba (3.91), koji u razvijenom obliku za slučaj valjanja glasi

$$k_{44}^{VZ} = g \iiint_V \rho_S H_y^4 H_{y,z}^4 dV . \quad (B18)$$

Uočljivo je da je derivaciju  $H_{y,z}^i$  nemoguće odrediti za primjerice oplatu dna ili paluba u slučaju tankostijene konstrukcije. U konačnici, koeficijenti povratne krutosti za pravilnu baržu svode se na jednačbu (4.1) odnosno (4.3), te su prikazani tablicom B2. Pri tome je uočljivo da su  $-k_{ij}^{S0}$  i  $k_{ij}^G$  identični, pa ukupnu povratnu krutost čini samo koeficijent tlaka  $C_{ij}^p$ .



Tablica B-2 Analitičke vrijednosti koeficijenta povratne krutosti za pravilnu baržu

	<i>Poniranje</i>	<i>Valjanje</i>	<i>Posrtanje</i>
$C_{ij}^p$	$\rho g A_{wl}$	$\rho g \frac{LB^3}{12} - \rho g \frac{LBT}{2}(H-T)$	$\rho g \frac{L^3 B}{12} + \rho g \frac{LBT}{2}(H-T)$
$C_{ij}^{nh}$	0	0	0
$C_{ij}^m$	0	0	0
$-k_{ij}^{s0}$	0	$\rho g LBT \frac{H}{2} + \rho g \frac{LBT^2}{2}$	$\rho g LBT \frac{H}{2} + \rho g \frac{LBT^2}{2}$
$k_{ij}^G$	0	$-\rho g LBT \frac{H}{2} - \rho g \frac{LBT^2}{2}$	$-\rho g LBT \frac{H}{2} - \rho g \frac{LBT^2}{2}$

## PRILOG C – UTJECAJ POJEDNOSTAVLJENE GEOMETRIJSKE KRUTOSTI NA TOČNOST REZULTATA

Analiza izvijanja i prirodnih vibracija su s matematičkog stanovišta jednaki problemi, koji spadaju u klasu problema svojstvenih vrijednosti. Međutim, analiza izvijanja je nešto kompleksniji problem zbog ovisnosti geometrijske krutosti o opterećenju. Zbog toga je korisno istražiti utjecaj pretpostavke mase u čvorovima (engl. *lumped mass*) na rezultat analize prirodnih vibracija te potom isti princip diskretizacije primjeniti na problem izvijanja.

Analiza prirodnih vibracija jednostavnih modela provodi se relativno jednostavno i brzo primjenom komercijalnih programa. Zbog toga se za potrebnu analizu koristi jednostavni gredni model koji je jednostavno izraditi. Osim toga za takav model u literaturi postoje poznata analitička rješenja. Utjecaj uvedenih pojednostavljenja razmatra se za nekoliko prvih modova, jer je to dostatno za provedbu hidroelastične analize.

### Utjecaj modeliranja mase na analizu prirodnih vibracija

Analiza savojnih prirodnih vibracija slobodne grede vrši se rješavanjem problema svojstvenih vrijednosti koji glasi

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\delta} = 0, \quad (\text{C1})$$

gdje je  $\mathbf{K}$  globalna matrica krutosti,  $\mathbf{M}$  globalna matrica masa,  $\boldsymbol{\delta}$  vektor pomaka, a  $\omega$  prirodna frekvencija. Rješenje problema (C1) predstavljeno je svojstvenim vrijednostima i svojstvenim vektorima koji se interpretiraju kao prirodne frekvencije i pridruženi prirodni oblici vibriranja. Rješenje problema dobiva se iz uvjeta

$$\text{Det}(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (\text{C2})$$

Konzistentne matrice krutosti i masa konačnog elementa izvedene pomoću funkcija oblika koje se temelje na polinomima trećeg stupnja (Hermitteovi polinomi),

$$w = a_0 + a_1 \frac{x}{l} + a_2 \frac{x^2}{l} + a_3 \frac{x^3}{l}, \quad (\text{C3})$$

glase

$$\mathbf{k} = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ & 2l^2 & -3l & l^2 \\ & & 6 & -3l \\ \text{Sim.} & & & 2l^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{C4})$$

$$\mathbf{m}_1 = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ \text{Sim.} & & & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{C5})$$

gdje je  $l$  duljina elementa, a  $m$  masa po jedinici duljine.

Pojednostavljena matrica masa može se odrediti koristeći funkcije oblika koje su polinomi prvog stupnja i predstavljaju linearnu aproksimaciju progiba

$$w = a_0 + a_1 \frac{x}{l}. \quad (\text{C6})$$

U tom slučaju slijedi da je matrica masa

$$\mathbf{m}_2 = \frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 \\ \text{Sim.} & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C5})$$

Također, moguće je matricu masa formirati direktno, tj. kao masu u čvorovima (engl. *lumped mass*)

$$\mathbf{m}_3 = \frac{ml}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ Sim. & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (C6)$$

Za potrebe numeričkog rješavanja problema svojstvenih vrijednosti neophodno je, zbog stabilnosti postupka, definirati neku vrlo malenu vrijednost za dijagonalne elemente matrice masa koji su vezani uz kutne pomake.

Primjena triju različitih definicija matrice masa ilustrirana je na primjeru slobodne grede sa značajkama danim u tablici C-1.

Tablica C-1 Značajke grede

Duljina	$L = 40 \text{ m}$
Širina	$B = 2 \text{ m}$
Visina	$H = 1 \text{ m}$
Površina poprečnog presjeka	$A = 2 \text{ m}^2$
Moment tromosti poprečnog presjeka	$I = 0.1667 \text{ m}^4$
Masa	$M = 6.28 \cdot 10^5 \text{ kg}$
Modul elastičnosti	$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

Greda je podijeljena na 8 konačnih elemenata, te je problem svojstvenih vrijednosti riješen primjenom proračunskog koda izvedenog u programu Mathematica, [49]. Rješenja za svaki od opisanih slučajeva dana su u tablici C-2 koja u sebi sadrži i prirodne frekvencije određene analitički primjenom jednadžbe

$$\omega_n = \frac{\left(\frac{\beta_n L}{2}\right)^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (C7)$$

čiji korijeni za simetrične modove iznose

$$\beta_0 L/2 = 0, \quad \beta_2 L/2 = 2.365, \quad \beta_4 L/2 = 5.497, \quad (C8)$$

a za antisimetrične

$$\beta_1 L/2 = 0, \quad \beta_3 L/2 = 3.925, \quad \beta_5 L/2 = 7.068. \quad (C9)$$

Prikaz odstupanja rezultata različitih načina modeliranja mase od analitičkog rješenja je također dan u Tablici C-2 iz koje je vidljivo da je odstupanje  $\mathbf{m}_2$  u slučaju zadnjeg moda znatno veće nego je to za  $\mathbf{m}_1$ . Međutim, u slučaju prvog moda, koji je vrlo važan za analizu hidroelastičnosti, odsupanje je prihvatljivo, što motivira na primjenu jednake logike i prilikom formiranja matrice geometrijske krutosti.

Budući da su frekvencije za slobodnu gredu za slučaj  $\mathbf{m}_2$  uvijek niže od analitičkih, a za slučaj  $\mathbf{m}_3$  uvijek više, moguće je formirati i hibridnu matricu masa,

$\mathbf{m}_{23} = (\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3)/2$ . Odsupanja prirodnih frekvencija od analitičkih u slučaju  $\mathbf{m}_{23}$  znatno su manja.

Tablica C-2 Prirodne frekvencije savojnih vibracija grede s 8 konačnih elemenata,  $\omega_i$ ,

[Hz]

Mod.	Konzistentna masa $\mathbf{m}_1$	Pojednostavljena masa $\mathbf{m}_2$	Koncentrirana masa $\mathbf{m}_3$	Hibridna masa $\mathbf{m}_{23}$	Analitičko rješenje	Odstupanje			
						$\delta_1$ (%)	$\delta_2$ (%)	$\delta_3$ (%)	$\delta_{23}$ (%)
1	3.323	3.374	3.171	3.268	3.323	0	1.51	-4.79	-1.70
2	9.165	9.687	8.481	9.025	9.151	0.15	5.53	-7.90	-1.40
3	17.994	20.149	16.180	17.834	17.951	0.24	10.90	-10.95	-0.66
4	29.841	35.746	26.079	29.749	29.678	0.55	16.98	-13.80	0.24

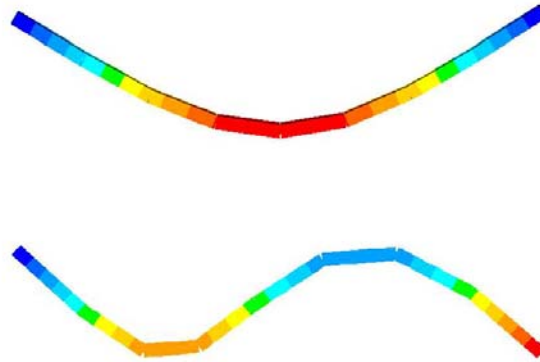
Analiza prirodnih vibracija grede provedena je i primjenom komercijalnih programskih paketa SESAM, [50], i NASTRAN, [51], uzimajući u obzir konzistentnu definiciju mase, masu u čvorovima te također spregnutu (engl. *coupled*) masu koja je definirana kao

$$\mathbf{m}_{13} = (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3) / 2. \quad (\text{C10})$$

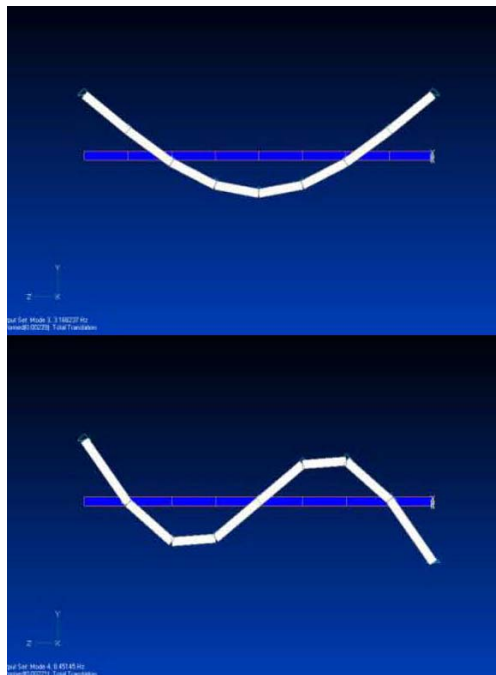
Greda je diskretizirana u 8 konačnih elemenata, a rezultati analize dani su u tablici C-3 prema kojoj je vidljivo da primjena spregnute definicije mase,  $\mathbf{m}_{13}$ , daje prirodne frekvencije koje su, u usporedbi s definicijom mase u čvorovima,  $\mathbf{m}_3$ , neznatno bliže analitičkom rješenju problema. Mnogo bolji rezultati postižu se primjenom hibridne mase,  $\mathbf{m}_{23}$ . Prva dva prirodna oblika vibriranja određena programima NASTRAN i SESAM prikazani su slikom C-1 i slikom C-2.

Tablica C-3 Prirodne frekvencije savojnih vibracija grede s 8 konačnih elemenata,  $\omega_i$ , [Hz], određene u SESAM-u i NASTRAN-u

Mod	SESAM				NASTRAN	
	Konzistentna masa, $\mathbf{m}_1$	Koncentrirana masa, $\mathbf{m}_3$	Odstupanje $\delta_1$ (%)	Odstupanje $\delta_3$ (%)	Spregnuta masa, $\mathbf{m}_{13}$	Odstupanje $\delta_{13}$ (%)
1	3.319	3.123	-0.12	-6.40	3.168	-4.89
2	9.125	8.239	-0.28	-11.07	8.451	-8.28
3	17.832	15.338	-0.67	-17.04	16.052	-11.83
4	29.394	24.224	-0.97	-22.51	25.692	-15.51



Slika C-1 Prvi i drugi prirodni oblik vertikalnih vibracija grede, SESAM



Slika C-2 Prvi i drugi prirodni oblik vertikalnih vibracija grede, NASTRAN

Kako bi se pokazala konvergencija numerički određenih rezultata k analitičkom rješenju, analiza prirodnih vibracija provedena je za istu gredu s dvostuko većim brojem konačnih elemenata. Rezultati su prikazani u tablici C-4. Usporedbom odsupanja iz tablice C-4 s odsupanjima iz tablice C-3 očito je da su  $\delta_3$  i  $\delta_{13}$  znatno smanjeni, dok su se vrijednosti odsupanja  $\delta_1$  neznatno povećala.

Tablica C-4 Prirodne frekvencije savojnih vibracija grede sa 16 konačnih elemenata,  $\omega_i$ , [Hz], određene u SESAM-u i NASTRAN-u

Mod	SESAM				NASTRAN	
	Konzistentna masa, $\mathbf{m}_1$	Koncentrirana masa, $\mathbf{m}_3$	Odstupanje $\delta_1$ (%)	Odstupanje $\delta_3$ (%)	Spregnuta masa, $\mathbf{m}_{13}$	Odstupanje $\delta_{13}$ (%)
1	3.319	3.231	-0.12	-2.84	3.280	-1.31
2	9.118	8.696	-0.36	-5.23	8.944	-2.31
3	17.786	16.416	-0.93	-9.35	17.324	-3.62
4	29.211	26.240	-1.60	-13.10	28.248	-5.06

### Utjecaj modeliranja geometrijske krutosti na analizu izvijanja

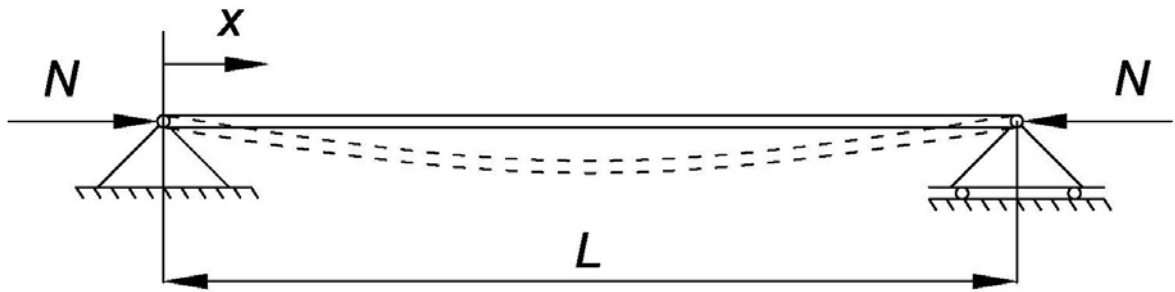
Analiza izvijanja grede vrši se rješavanjem problema svojstvenih vrijednosti koji glasi

$$(\mathbf{K} - \eta \mathbf{K}_G) \delta = 0, \quad (\text{C11})$$

gdje je  $\mathbf{K}_G$  globalna matrica geometrijske krutosti. Matrica geometrijske krutosti je funkcija geometrijskih karakteristika grede i narinutog opterećenja (uzdužne tlačne sile)  $N$ , slika C-3, te za slučaj konstantne sile duž grede i primjene polinoma trećeg stupnja za funkcije oblika glasi

$$\mathbf{k}_{G1} = \frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ & & 36 & -3l \\ \text{Sim.} & & & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C12})$$





Slika C-3 Izvijanje grede

Zanemarenjem rotacijskih stupnjeva slobode, odnosno korištenjem polinoma prvog stupnja za funkcije oblika, izraz za geometrijsku krutost grednog elementa može se izraziti jednostavnije kao

$$\mathbf{k}_{G2} = \frac{N}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ Sim. & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (C13)$$

Za potrebe numeričkog rješavanja problema svojstvenih vrijednosti neophodno je definirati neku vrlo malenu vrijednost za dijagonalne elemente matrice geometrijske krutosti koji su vezani uz kutne pomake. Rješavanjem problema (C11) određuju se svojstvene vrijednosti  $\eta$  koje predstavljaju omjer kritične sile i narinutog opterećenja,  $N$ . Za potrebu razmatranja mogućnosti uvođenja pojednostavljene definicije matrice geometrijske krutosti problem (C11) je riješen za slučaj konzistentne i pojednostavljene definicije matrice. Rezultati su prikazani tablicom C-5. Također dobiveni rezultati su uspoređeni s analitičkim rješenjem istog problema, gdje je vrijednost  $\eta$  određena prema

$$\eta = \frac{N_n}{N}, \quad (C14)$$

gdje je

$$N_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}, \quad (C15)$$

a  $n$  je redni broj moda izvijanja. Sve karakteristike grede korištene u svrhu analize su istovjetne onima korištenim prilikom analize modeliranja mase, tablica C-1, uz dodatak definicije aksijalnog opterećenja,  $N$ , koje iznosi 10 kN.

Analizom rezultata, tablica C-5, vidljiva je zanemariva razlika odstupanja rezultata dobivenih pomoću matrica  $\mathbf{k}_{G1}$  i  $\mathbf{k}_{G2}$  od analitičkog rješenja. U potonjem slučaju odstupanje raste s porastom rednog broja moda. Ta razlika je značajno smanjena za slučaj dvostruko gušće mreže konačnih elemenata, tablica C-6.

Tablica C-5 Faktor izvijanja grede,  $\eta$ , sa 8 konačnih elemenata

Mod	$\mathbf{k}_{G1}$	$\mathbf{k}_{G2}$	Analitika	Odstupanje	
				$\delta_1$ (%)	$\delta_2$ (%)
1	21591	21869	21570	0.09	1.37
2	86403	90883	86280	0.14	5.06
3	194793	217631	194130	0.34	10.80
4	348035	420000	345120	0.84	17.82

Tablica C-6 Faktor izvijanja grede,  $\eta$ , sa 16 konačnih elemenata

Mod	$\mathbf{k}_{G1}$	$\mathbf{k}_{G2}$	Analitika	Odstupanje	
				$\delta_1$ (%)	$\delta_2$ (%)
1	21589	21695	21570	0.088	0.412
2	86363	87474	86280	0.095	1.365
3	194340	199988	194130	0.108	2.929
4	345613	363532	345120	0.143	5.065

Na temelju prikazanih rezultata analize moguće je zaključiti da se rotacije mogu isključiti iz formulacije matrice geometrijske krutosti za izvjesne slučajeve, poput analize

hidroelastičnosti. Na taj se način znatno pojednostavnjuje formulacija složenih komponenata matematičkog modela objedinjene povratne i geometrijske krutosti bez značajnog utjecaja na rezultat. Točnost rezultata analize hidroelastičnosti uvelike ovisi o gustoći mreže konačnih elemenata kojima se diskretizira brodski trup i po kojima se provodi numerička integracija relevantnih veličina. Tako je za zadovoljavajuću točnost analize prirodnih vibracija broskog trupa potrebno koristiti barem 10 konačnih elemenata između nultočaka najvišeg prirodnog oblika vibriranja uključenog u analizu.

Pouzdanost pojednostavljene formulacije geometrijske krutosti može se primjeniti i na izvijanje ploča što je prikazano u [57].

## PRILOG D – ISPITIVANJE KODA PROGRAMA RESTAN

Numeričko testiranje koda programa RESTAN vršeno je tijekom kodiranja u nekoliko navrata. Osnova testiranja je usporedba matrica povratne krutosti određenih numeričkom integracijom podintegralnih funkcija izraza za povratnu krutost (RESTAN) i procjenom srednje vrijednosti istih funkcija (DYANA), [11]. Pri tome valja istaknuti da modalni čvorni pomaci u slučaju numeričke integracije odgovaraju modalnim pomacima čvorova 3D modela izrađenog u programu NASTRAN, a u slučaju procjene srednje vrijednosti modalnim čvornim pomacima grednog modela raspršenim u čvorove elemenata oplakane površine. Osim toga, u prvom je slučaju oplakana površina predstavljena mrežom konačnih elemenata 3D strukturnog modela, a u potonjem mrežom oplakane površine koja se koristi u okviru hidrodinamičkog modela.

Usporedba dviju matrica povratnih krutosti relativno je jednostavna, ako se razmatraju samo dijagonalni elementi. Međutim usporedba vandijagonalnih elemenata je vrlo otežana te je zbog toga prikladno usporediti svojstvene vrijednosti problema

$$\left( [C_{ij}^{p*}] + [C_{ij}^{nh*}] - \Omega^2 [M_{ij}^*] \right) \{ \delta \} = \{ 0 \}, \quad (D1)$$

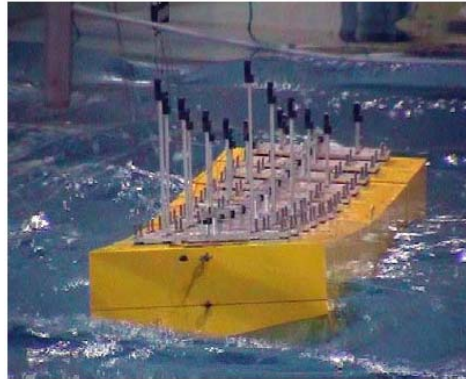
i problema

$$\left( [C_{ij}^p] + [C_{ij}^{nh}] - \Omega^2 [M_{ij}] \right) \{ \delta \} = \{ 0 \}, \quad \dots(D2)$$

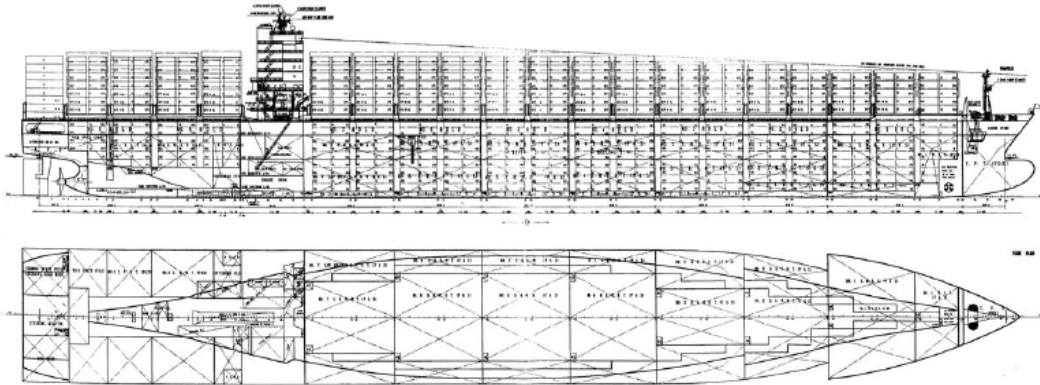
gdje \* označuje vrijednosti određene programom DYANA. U gornjim izrazima izostavljena je matrica konvencionalne krutosti, kako bi utjecaj različitih matrica povratne krutosti bio što izraženiji.

U ispitivanju točnosti rutina za proračun vrijednosti koeficijenata povratne krutosti u programima RESTAN i DYANA korišteni su isti modalni čvorni pomaci temeljeni na grednom modelu i raspršeni u čvorove iste oplakane površine. Ispitivanje je

provedeno za slučaj segmentirane barže i velikog kontejnerskog broda TEU 11400, slika D1 i D2. Usporedba rezultata prikazana je tablicama D1 i D2.



Slika D-1 Segmentirana elastična barža



Slika D-2 Opći plan velikog kontejnerskog broda, TEU 11400

Tablica D-1 Usporedba svojstvenih vrijednosti za slučaj barže,  $\Omega$  [rad/s]

Barža – kruti modovi			Barža – vertikalni modovi			Barža – spregnuti modovi		
Mod	Procjena srednje vrijednosti podintegralne funkcije	Numerička integracija	Mod	Procjena srednje vrijednosti podintegralne funkcije	Numerička integracija	Mod	Procjena srednje vrijednosti podintegralne funkcije	Numerička integracija
1	0.0	0.0	7	3.476i	3.527i	12	1.153i	1.166i
2	0.0	0.0	8	3.264	3.354	13	0.5i	0.549i
3	9.217	9.16	9	8.793	8.717	14	2.045i	2.037i
4	5.532	5.531	10	8.991	8.979	15	0.014+2.907i	0.006-2.8i
5	8.649	8.631	11	9.809	9.654	16	0.014-2.907i	0.006+2.8i
6	0.0	0.0				17	4.054	4.009
						18	5.754	5.747
						19	6.11	6.103
						20	6.63	6.517
						21	9.593	9.532

Tablica D-2 Usporedba svojstvenih vrijednosti za slučaj TEU 11400,  $\Omega$  [rad/s]

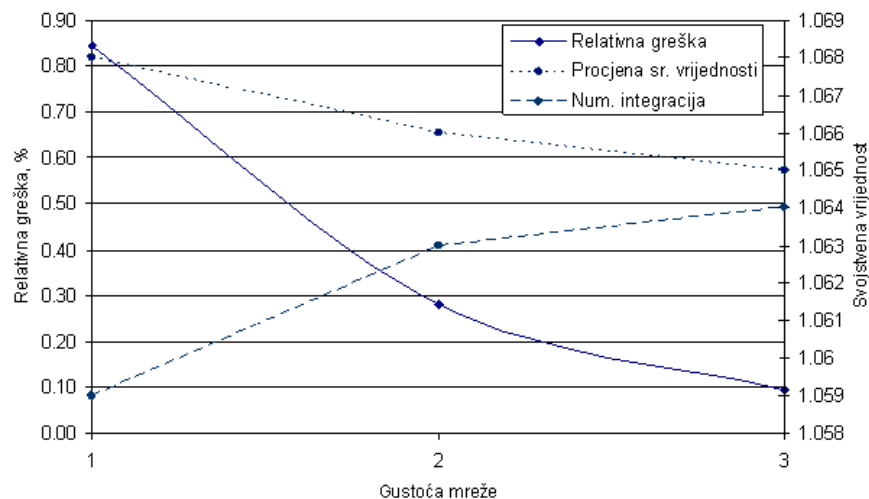
TEU 11400 – kruti modovi			TEU 11400 – vertikalni modovi			TEU 11400 – spregnuti modovi		
Mod	Procjena srednje vrijednosti podintegralne funkcije	Numerička integracija	Mod	Procjena srednje vrijednosti podintegralne funkcije	Numerička integracija	Mod	Procjena srednje vrijednosti podintegralne funkcije	Numerička integracija
1	0.0	0.0	7	0.475	0.472	12	0.166i	0.1626i
2	0.0	0.0	8	0.853	0.851	13	0.455i	0.453i
3	0.232	0.253	9	0.863	0.864	14	0.363	0.357
4	0.845	0.841	10	0.883	0.878	15	0.42-0.06i	0.41-0.04i
5	0.954	0.949	11	1.068	1.059	16	0.42+0.06i	0.41+0.04i
6	0.0	0.0				17	0.45+0.009i	0.44+0.003i
						18	0.45-0.009i	0.44-0.003i
						19	0.487	0.472
						20	0.541-0.035i	0.539-0.036i
						21	0.541+0.035i	0.539+0.036i

Usporedbom rezultata problema svojstvenih vrijednosti, izraz (D1) i (D2), prikazanim u tablicama D-1 i D-2 za baržu i brod uočljive su zanemarive razlike između svojstvenih vrijednosti za pojedine modove. Također, neke svojstvene vrijednosti su kompleksne, tj. uključuju imaginarni dio zbog toga što problemi svojstvenih vrijednosti (D1) i (D2) ne sadrže cjelokupnu jednadžbu dinamičke ravnoteže, nego samo djelomičnu, pa na taj način ne opisuju stvarnu fizikalnu pojavu.

Utjecaj gustoće mreže elemenata oplakane površine na razliku između svojstvenih vrijednosti problema (D1) i (D2) ispitan je na primjeru velikog kontejnerskog broda za tri različite gustoće mreže (broj uzdužnih elemenata x broj poprečnih elemenata):

1. 50 x 15 elemenata
2. 150 x 30 elemenata
3. 200 x 40 elemenata.

Slika D-3 prikazuje smanjenje relativne greške s povećanjem gustoće mreže elemenata, što znači da se smanjenjem gustoće elemenata procijenjena vrijednost podintegralne funkcije izraza za koeficijente povratne krutosti približava vrijednosti određenoj numeričkom integracijom.



Slika D-3 Utjecaj gustoće mreže elemenata na svojevrsnu vrijednost i relativnu grešku

Na istom je primjeru izvršeno ispitivanje rada programa RESTAN koristeći mrežu konačnih elemenata iz 3D NASTRAN modela te modalne čvorne pomake proizašle iz analize slobodnih vibracija broda u istoimenom programu. Rezultati proračuna uspoređeni su s odgovarajućim rezultatima određenim programom DYANA. Osnovni problem prilikom usporedbe je razlika oblika vibriranja krutih modova određenih u NASTRAN-u i DYANI, pri čemu su prvi spregnuti, a potonji nespregnuti. Stoga je potrebno prije usporedbe spregnute modove raspregnuti primjenom rubnih uvjeta pomoću kojih se omogućuje odziv u samo, primjerice, vertikalnoj ravnini. Neki od uspoređenih koeficijenata povratne krutosti dani su u tablici D-3.

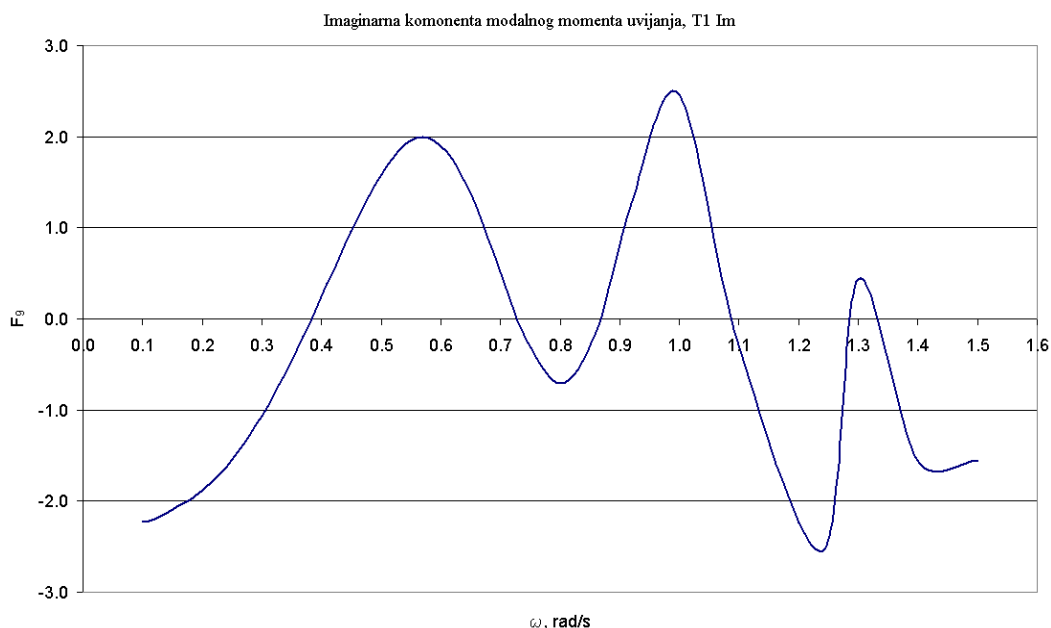
Tablica D-3 Usporedba koeficijenta povratne krutosti DYANA – RESTAN\*

	Zalijetanje		Poniranje		Vert. vib., 1. mod		Vert. vib., 2. mod	
	D	R	D	R	D	R	D	R
$C_{ij}^p$	0.0	0.0	$1.38 \cdot 10^8$	$1.38 \cdot 10^8$	$1.34 \cdot 10^7$	$1.39 \cdot 10^7$	$9.74 \cdot 10^6$	$1.08 \cdot 10^7$
$C_{ij}^{nh}$	0.0	0.0	0.0	0.0	$1.41 \cdot 10^5$	$1.80 \cdot 10^5$	$3.74 \cdot 10^5$	$3.94 \cdot 10^5$

\*D – DYANA, R – RESTAN

## PRILOG E – KOREKCIJA REZULTATA PRORAČUNA HIDRODINAMIČKIH KARAKTERISTIKA BARŽE

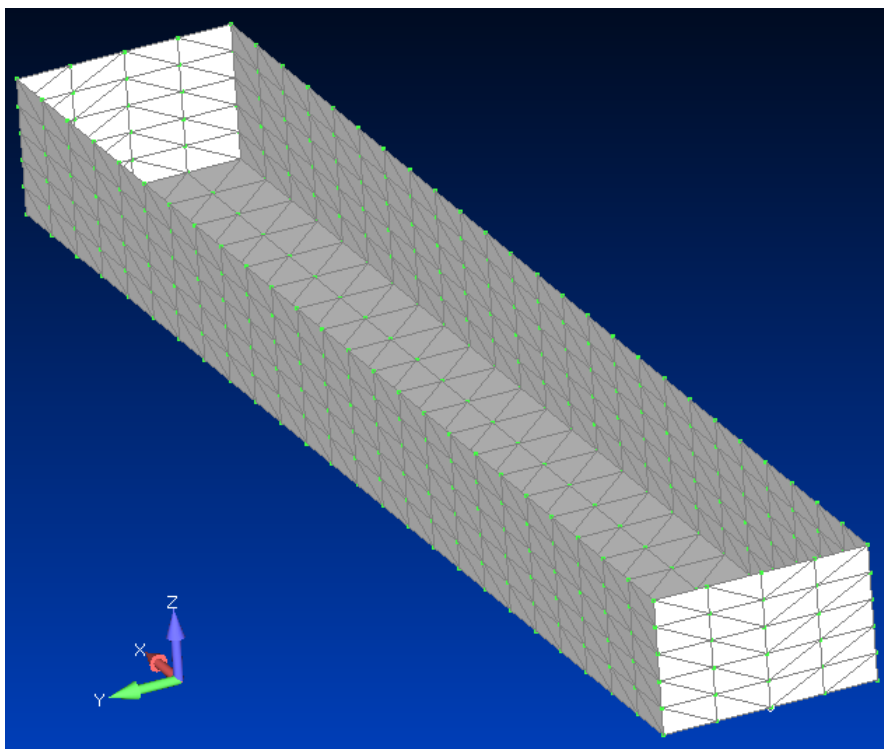
Prilikom analize rezultata proračuna hidrodinamičkih karakteristika barže, koja je korištena kao testni primjer u sklopu ovog rada, poglavlje 7.1, uočeno je da vrijednosti imaginarnih komponenti izračunatih modalnih momenata uvijanja ne konvergiraju ka nuli s opadanjem susretne frekvencije za prvi i treći torzijski mod vibriranja barže, slika E1.



Slika E1 – Imaginarna komponenta modalnog momenta uvijanja prvog torzijskog moda

Spomenuti problem nastaje uslijed pogrešne interpolacije modalnih pomaka na hidrodinamičkoj mreži, odnosno uslijed pogrešnog transfera podataka sa strukturnog modela na hidrodinamički. Budući da se interpolacija modalnih pomaka vrši nakon podjele hidrodinamičke mreže na trokutaste elemente, problem je djelomično riješen formiranjem modela barže s trokutastim elementima na oplakanoj površini, čime se izbjegla pogrešna interpolacija pomaka. Oplakana površina modificiranog modela barže prikazana je slikom E2.





Slika E2 Oplakana površina modificirane barže

Međutim, problem s prijenosom podataka nije u cijelosti riješen, jer su takvom modifikacijom modovi vertikalnog vibriranja barže promijenili predznak te u konačnici matrica povratne krutosti i hidrodinamički podaci nisu bili kompatibilni.

Problem je riješen na način da su prijenosne funkcije smičnih sila i momenata savijanja vezane uz horizontalnu i vertikalnu ravninu vibriranja određene primjenom hidrodinamičkog rješenja prije modifikacije barže, a prijenosne funkcije momenata uvijanja korištenjem podataka nakon modifikacije. Budući da se u sklopu rada koristi modalna metoda koja počiva na principu ortogonalnosti prirodnih oblika vibriranja, takav pristup ne narušava vjerodostojnost rezultata hidroelastične analize.