Primjena grafičkih metoda u nastavi matematike

Jakulj, Petra

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Jakulj

PRIMJENA GRAFIČKIH METODA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Zagreb, 2019

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Jakulj

PRIMJENA GRAFIČKIH METODA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Maja Starčević

Zagreb, rujan, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mami i tati na beskrajnoj ljubavi, podršci i savjetovanju
Hvala Doris i Davoru na ljubavi, podršci i razumijevanju

Sadržaj

Uvod

Osjetilo vida je odgovorno za čak 90% informacija koje primamo iz svoje okoline. Osim velike uloge koju ima u našem svakodnevnom životu ono nam pomaže da stvaramo mentalne slike i predodžbe koje doprinose boljem razumijevanju, povezivanju i pamćenju. Znanstvenici iz područja matematike i psihologije u svojim radovima pišu kako vid i vizualizacija nisu korisni samo u geometrijskim problemima, već ističu njihov potencijal i primjenu u svim područjima matematike. Zimmermann i Cunningham ([33]) u uvodu svog zbornika vizualizaciju u matematici opisuju kao proces stvaranja ili korištenja geometrijskih ili grafičkih reprezentacija matematičkih koncepata, principa ili problema. Opisuju i razliku između vida i vizualizacije koja je posebno istaknuta u matematici jer se tu mogu vizualizirati pojmovi koji se nikad nisu i neće moći vidjeti. U uvodu ističu važnost korištenja vizualizacije jer ona podrazumijeva dubinsko shvaćanje pojma koje proizlazi iz slika koje pojedinac stvara u umu. Naglašavaju kako za postizanje potpunog shvaćanja vizualizacija ne smije biti izdvojena od ostatka matematike već treba biti povezana s ostalim oblicima mišljenja i predočavanja koji se koriste. Potrebno je naučiti kako istu ideju predočiti simbolički, numerički i grafički te kako prelaziti iz jednog oblika u drugi. Zimmermann i Cunningham smatraju kako je potrebno rukovati sa sva tri načina reprezentacije, prepoznati koji je najbolji za pojedini problem i biti svjestan ograničenja svakoga od njih.
Postoje mnogi stručni radovi i istraživanja na temu vizualizacije u matematici. Većina potiče veću upotrebu vizualizacije u poučavanju matematike i važnost razvijanja sposobnosti takvog načina razmišljanja. U svom istraživanju Norma Presmeg ([29]) iskazuje važnost daljnjeg istraživanja vizualizacije u nastavi matematike te na kraju rada postavlja niz pitanja koja mogu usmjeriti buduća istraživanja. Upravo ta pitanja mogu koristiti pojedinim nastavnicima u njihovoj želji da razviju učeničku sposobnost vizualizacije i njeno korištenje u rješavanju problema. Prema Presmeg ([29]) pažnju treba usmjeriti na:

- elemente razredne kulture koji promiču upotrebu vizualizacije u matematici;
- utjecaj različitih prikaza i vizualizacija u rješavanju problema na različitim razinama razvoja učenika;
- utjecaj gesti u matematičkoj vizualizaciji;

- pomoć nastavnika pri prijelazu sa vizualizacije na matematičke simbole;
- korištenje vizualizacije za apstrakciju i generalizaciju.

U praksi se grafička metoda najčešće koristi kao nadopuna ili provjera algebarske metode ili pak za lakše postavljanje i razumijevanje zadanog problema. Cilj ovog rada je kroz niz zadataka iz udžbenika za osnovne i srednje škole usmjeriti nastavnike na korištenje vizualizacije, odnosno grafičkih prikaza i grafičkih metoda rješavanja zadataka koji su se do sada većinom rješavali drugim metodama. U zadacima ćemo usporediti klasičnu metodu i grafičku metodu rješavanja te ukazati na prednosti grafičke metode u pojedinim zadacima. Pod grafičkom metodom rješavanja smatra se korištenje grafičkog prikaza (crtanog rukom ili uz pomoć računala) matematičkih pojmova, koncepata i problema.

Poglavlje 1

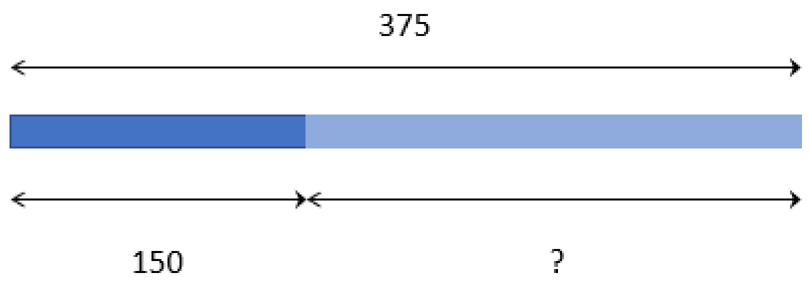
Grafičke metode u osnovnoj školi

1.1 Niži razredi osnovne škole

U nižim razredima osnovne škole učenici još nemaju razvijen apstraktni oblik mišljenja stoga je bitno koristiti razne metode i alate za lakše razumijevanje pojmova i problema. Zanimljiv pristup vizualizaciji i rješavanju problema u nižim razredima imaju singapurski udžbenici ([24]) u kojima se metoda linije (*engl. bar model*) provlači kroz cijelo obrazovanje i postepeno nadopunjuje. Na početku se metoda koristi za vizualizaciju jednostavnih matematičkih operacija poput zbrajanja, oduzimanja i usporedbe, a potom se prelazi na teže probleme. Zahvaljujući toj metodi singapurski učenici uspješno rješavaju probleme s razlomcima već u nižim razredima osnovne škole. U sljedećim primjerima prikazano je kako se model koristi na jednostavnim zadacima što se može primijeniti i u našim školama, a primjer s razlomcima prikazan je u sljedećem odlomku jer hrvatski učenici uče razlomke tek u petom razredu osnovne škole.

Primjer 1.1.1. *Doris i Jasenka imaju 375 bombona. Doris ih ima 150. Tko ima više bombona? Koliko više ih ima ta osoba?*

Rješenje. U rješavanju zadatka koristit ćemo jednu liniju i *model dio-cjelina* (*engl. part-whole model*) koji se spominje u [24]. Cijela linija (Slika 1.1) predstavlja ukupan broj bombona, a dva dijela linije predstavljaju Dorisin i Jasenkin dio bombona. Uočimo kako dva dijela zajedno daju cijelu liniju. Koristeći ovaj model učenici lakše uočavaju kako oduzimanje vodi do rješenja problema. Jasenka ima $375 - 150 = 225$ bombona pa ih ima više nego Doris. Za određivanje koliko više bombona ima Jasenka trebamo odrediti za koliko je svijetlo plavi dio duži od tamnog plavog dijela (Slika 1.1). Sada uočavamo da ponovno oduzimanje vodi do rješenja, odnosno Jasenka ima $225 - 150 = 75$ bombona više nego Doris.

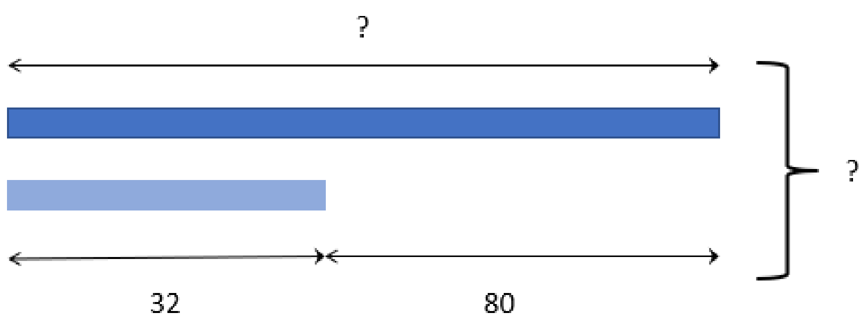


Slika 1.1: Model dio-cjelina

Sljedeći primjer prikazuje korištenje dvije linije za rješavanje problema s dva koraka. Uočimo kako uz ranu implementaciju modela linije učenici već u nižim razredima mogu rješavati kompleksnije zadatke koristeći samo jednostavne računske operacije nad brojevima.

Primjer 1.1.2. *Katarina ima 80 kuna više od Dine, a Dina ima 32 kune. Koliko kuna ima Katarina? Koliko kuna imaju Katarina i Dina zajedno?*

Rješenje. Kao što je već rečeno, u zadatku ćemo koristiti dvije linije. Prva tamnoplava linija predstavlja količinu kuna koju ima Katarina, a druga svjetloplava linija količinu koju ima Dina (Slika 1.2). Zagrada sa strane obje linije predstavlja drugi dio zadatka u kojem nas zanima koliko ukupno kuna imaju djevojke. Iz nacrtanog modela se lako uočava da se do rješenja dolazi zbrajanjem. Katarina ima $80 + 32 = 112$ kuna pa djevojke zajedno imaju $112 + 32 = 144$ kune.

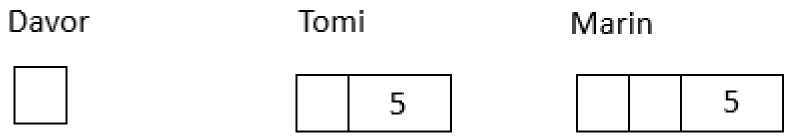


Slika 1.2: Model s dvije linije

Sličan pristup rješavanju problemskih zadataka u nižim razredima osnovne škole može se provesti i zamjenom nepoznanice s nekim objektom ([32]), naprimjer kvadratom.

Primjer 1.1.3. *Tri brata Davor, Tomi i Marin imaju zajedno 54 godine. Davor je 5 godina mlađi od Tomija, a Marin ima godina koliko Davor i Tomi zajedno. Koliko godina imaju braća?*

Rješenje. Iz teksta zadatka uočavamo da je Davor najmlađi brat, Tomi srednji, a Marin najstariji. Označimo Davorov broj godina s jednim kvadratom. Iz teksta zadatka slijedi da broj godina koje ima Tomi možemo prikazati pomoću jednog kvadrata i još 5 godina (na Slici 1.3 prikazano pravokutnikom s brojem 5), a broj godina koje ima Marin možemo prikazati pomoću svih prethodno nacrtanih elemenata, odnosno dva kvadrata i 5 godina (Slika 1.3).



Slika 1.3: Grafički prikaz nepoznanica

Znamo da su na Slici 1.3 ukupno prikazane 54 godine koje su predstavljene s 4 kvadrata i dva pravokutnika koji predstavljaju broj 5. Iz toga slijedi da 4 kvadrata odgovaraju broju $54 - 5 - 5 = 44$, odnosno jedan kvadrat predstavlja $44 : 4 = 11$ godina. Zaključujemo, Davor ima 11 godina, Tomi ima $11 + 5 = 16$ godina, a Marin $11 + 11 + 5 = 27$ godina.

1.2 Peti razred

U ovom odlomku pokazat ćemo mogućnosti vizualizacija nekih od temeljnih pojmova koje učenici trebaju savladati u petom razredu osnovne škole. Na problemske zadatke u nastavnoj cjelini *Prirodni brojevi* mogu se primijeniti modeli koji su spomenuti u prethodnom odlomku, a po potrebi se mogu i nadograditi kako bi obuhvatili veći broj mogućnosti i problema. Unutar cjeline *Djeljivost prirodnih brojeva* javljaju se problemi određivanja najmanjeg zajedničkog višekratnika i najvećeg zajedničkog djelitelja dva prirodna broja. Za pronalazak najvećeg zajedničkog djelitelja dva broja najčešće se koriste dvije metode. U prvoj se oba broja rastavljaju na proste faktore te se potom faktori u rastavu uspoređuju.

Najveći zajednički djelitelj je umnožak brojeva koji se nalaze u rastavu oba broja (računajući kratnosti). Druga metoda pronalazi najveći zajednički djelitelj paralelnim dijeljenjem oba broja dok više ne možemo dijeliti oba broja istim brojem (Tablica 1.1). Najveći zajednički djelitelj je broj koji se dobije kao umnožak brojeva s desne strane crte. U primjeru iz tablice najveći zajednički djelitelj je broj $2 \cdot 2 = 4$.

$$\begin{array}{r|l} 100, 52 & 2 \\ 50, 26 & 2 \\ 25, 13 & \end{array}$$

Tablica 1.1: Pronalazak najvećeg zajedničkog djelitelja

Još jedan način određivanja najvećeg zajedničkog djelitelja je Euklidov [1] algoritam koji se eksplicitno ne spominje u osnovnoj školi no neke njegove vizualizacije mogu se pokazati učenicima i u petom razredu. Jedna od njih je vizualizacija pomoću površine pravokutnika koja se efektno može pokazati i animacijom u GeoGebri ([23]).

Teorem 1.2.1 (Euklidov algoritam)**.** *Neka su $b, c \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je uzastopnom primjenom teorema o dijeljenju s ostatkom dobiven niz jednakosti:*

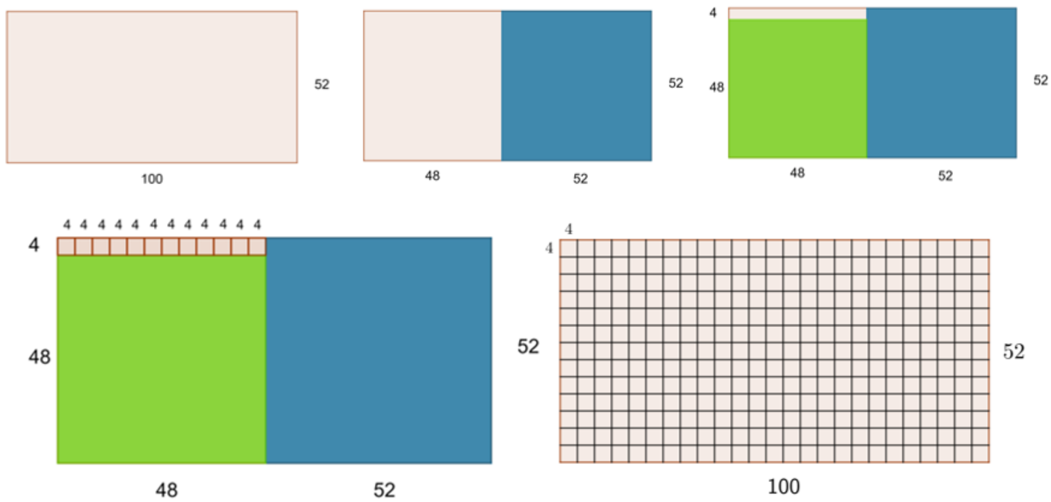
$$\begin{aligned} b &= cq_1 + r_1,\ 0 < r_1 < c, \\ c &= r_1q_2 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2, \\ &\vdots \\ r_{j-2} &= r_{j-1}q_j + r_j,\ 0 < r_j < r_{j-1}, \\ r_{j-1} &= r_jq_{j+1}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Tada je $(b, c) = r_j$, odnosno r_j je najveći zajednički djelitelj brojeva b i c.

Pokušajmo si vizualizirati gore opisan Euklidov algoritam. Ukoliko imamo pravokutnik sa stranicama duljine b i c, tada nam broj q_1 govori koliko kvadrata dimenzija $c \times c$ možemo smjestiti u naš pravokutnik. Nakon toga ostat će nam nepopunjeni pravokutnik dimenzija $c \times r_1$. Sada možemo promatrati taj pravokutnik na isti način i zaključiti da u njega možemo postaviti q_2 kvadrata dimenzija $r_1 \times r_1$ i da će nam ostati pravokutnik dimenzija $r_1 \times r_2$. Postupak nastavljamo analognim razmišljanjem dok ne popunimo cijeli početni pravokutnik. Nakon predzadnjeg koraka ostat će nam pravokutnik dimenzija $r_{j-1} \times r_j$ za popuniti no r_{j-1} je djeljiv s r_j pa taj pravokutnik možemo u potpunosti prekriti s q_{j+1} kvadrata dimenzija $r_j \times r_j$. Dakle, u početni pravokutnik dimenzija $b \times c$ redom smještamo

[1] Euklid (oko 330. pr. Kr. - oko 275. pr. Kr.)

kvadrate sa stranicama duljina $c, r_1, r_2, ..., r_j$ tako da svaki smjestimo najveći mogući broj puta. Brojevi $q_1, q_2, ..., q_{j+1}$ nam redom govore koliko kojih kvadrata možemo smjestiti. Također, možemo zaključiti da s najmanjim kvadratom koji smo koristili možemo popločati cijeli početni pravokutnik. Duljina stranica tog kvadrata je najveći zajednički djelitelj brojeva b i c.
Primijenimo gore opisanu vizualizaciju na primjer iz Tablice 1.1 te odredimo najveći zajednički djelitelj brojeva grafičkim prikazom Euklidovog algoritma.



Slika 1.4: Vizualizacija Euklidovog algoritma

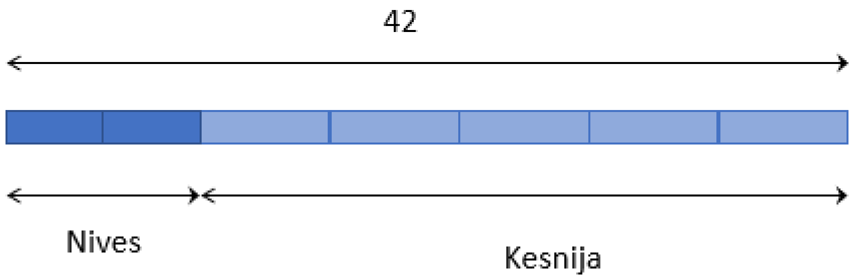
Konstruirajmo pravokutnik sa stranicama duljina 100 i 52. Potom u pravokutnik smjestimo najveći mogući broj kvadrata dimenzija 52×52. U ovom slučaju stane samo jedan kvadrat. Ostat će nam pravokutnik dimenzija 52×48. Sada u preostali pravokutnik smještamo najveći mogući broj kvadrata duljine stranice jednake manjoj stranici preostalog pravokutnika (tj. kvadrata 48×48). Možemo smjestiti samo jedan takav kvadrat te nam ostaje pravokutnik dimenzija 48×4. U taj pravokutnik sada smještamo kvadrate dimenzija 4×4 te uočavamo da nam stane točno 12 takvih kvadrata i da oni u potpunosti pokrivaju pravokutnik dimenzija 48×4. Na kraju postupka uočavamo kako cijeli početni pravokutnik dimenzija 100×52 možemo popločati s kvadratima 4×4. Duljina stranice kvadrata s kojim možemo popločati cijeli pravokutnik je zajednički djelitelj brojeva koji su duljine stranica početnog pravokutnika, a duljina stranice najvećeg takvog kvadrata je najveći zajednički djelitelj tih brojeva i upravo je to kvadrat kojim smo popločavali na samom kraju. Algebarski zapisano, Euklidov algoritam za brojeve 100 i 52 daje sljedeće:

$$
\begin{aligned}
100 &= 52 \cdot 1 + 48, \\
52 &= 48 \cdot 1 + 4, \\
48 &= 4 \cdot 12.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

U petom razredu učenici se po prvi puta susreću s razlomcima. Računaju s razlomcima jednakih nazivnika te proširuju i skraćuju razlomke. U problemskim zadacima ponovno se može primijeniti već naučeni model linije iz prethodnog odlomka. Liniju sada dijelimo na onoliko jednakih dijelova koliki je je nazivnik razlomka koji promatramo. Zanimljivo je napomenuti da sljedeći primjer singapurski učenici znaju riješiti već u četvrtom razredu osnovne škole.

Primjer 1.2.2. *([24]) Ksenija je ispekla 42 kolačića. $\frac{2}{7}$ kolačića je dala Nives, a ostale je spremila. Koliko je kolačića ostalo Kseniji?*

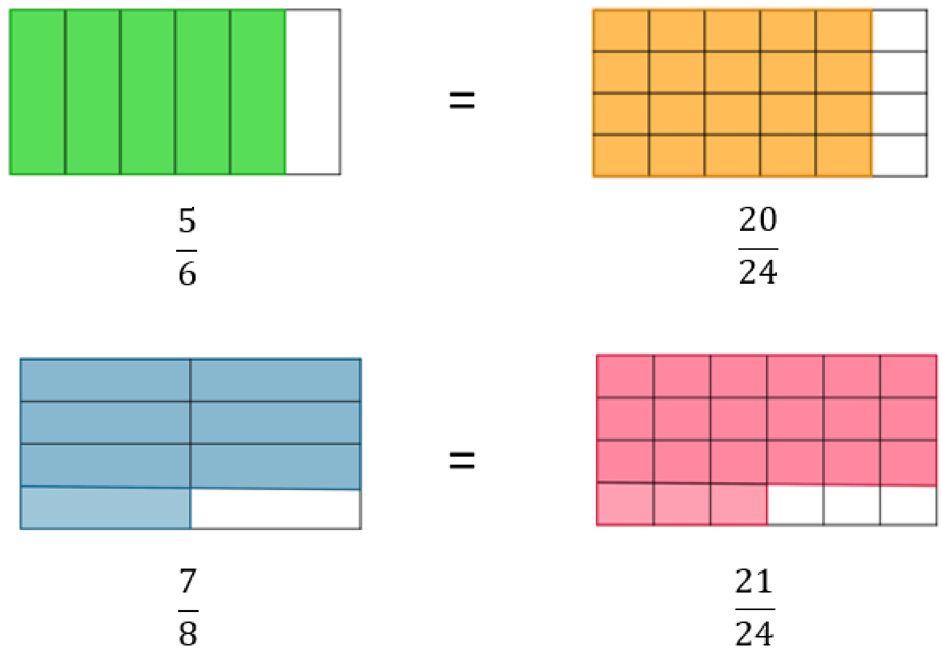
Rješenje. Riješimo problem koristeći model linije. Nazivnik razlomka $\frac{2}{7}$ je 7 pa podijelimo liniju na 7 jednakih dijelova. Uočimo kako cijela linija predstavlja 42 kolačića (Slika 1.5). Sedam dijelova čini cjelinu od 42 kolačića pa jedan dio predstavlja $42 : 7 = 6$ kolačića. Ksenija je Nives dala 2 takva dijela (na Slici 1.5 označena tamno plavom bojom) pa joj je ostalo 5 dijelova, odnosno $5 \cdot 6 = 30$ kolačića.



Slika 1.5: Model linije na razlomcima

1.3 Šesti razred

Početak šestog razreda direktno se nadovezuje na kraj petog, jer učenici počinju računati s razlomcima različitih nazivnika. Razlomci učenicima predstavljaju veliki problem pa nastavnici u praksi uvijek koriste mnoge vizualne reprezentacije razlomaka i time ih pokušavaju približiti učenicima. Slika 1.6 prikazuje ilustraciju svođenja razlomaka na zajednički nazivnik napravljenu prema ilustraciji iz udžbenika za šesti razred osnovne škole [1].



Slika 1.6: Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik

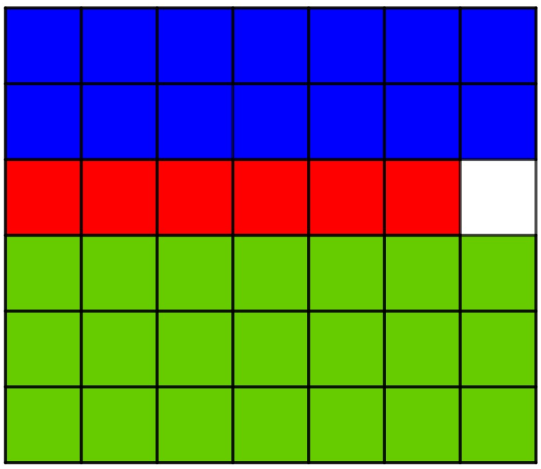
Nakon što nauče svoditi razlomke na zajednički nazivnik, učenici mogu početi računati s razlomcima različitih nazivnika. Za zbrajanje razlomaka različitih nazivnika možemo se poslužiti modelom površine. Nakon pronalaska najmanjeg zajedničkog nazivnika konstruirat ćemo pravokutnik površine jednake zajedničkom nazivniku i podijelit ćemo ga na jedinične kvadrate. Dobivena mreža će nam pomoći u vizualizaciji zbrajanja razlomaka različitih nazivnika. Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 1.3.1. *Ivana je isplanirala "put oko svijeta" s avionom, autom, vlakom i pješice. Vlakom će prijeći $\frac{1}{3}$ puta, autom $\frac{1}{7}$ puta i avionom $\frac{1}{2}$ puta. Koliki dio puta će Ivana prijeći pješice?*

Rješenje. Budući da su nazivnici 2, 3 i 7 relativno prosti brojevi, njihov najveći zajednički višekratnik je njihov umnožak $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. Konstruirajmo pravokutnik površine 42 i podijelimo ga na jedinične kvadrate. Duljinu i širinu pravokutnika možemo proizvoljno odabrati. Neka je pravokutnik dimenzija 7×6. Pravokutnik predstavlja cijeli put, a jedinični kvadrati jednake dijelove puta. Obojimo dijelove koji odgovaraju prijeđenom putu u pojedinom prijevoznom sredstvu. Ivana je vlakom prošla $\frac{1}{3}$ puta što na konstruiranom pravokutniku predstavlja dva reda kvadratića jer je visina pravokutnika 6, a $\frac{1}{3}$ od 6 je 2. Obojimo te kvadratiće plavom bojom (Slika 1.7). Ivana je autom prešla $\frac{1}{7}$ puta što odgovara jednom stupcu pravokutnika (6 kvadratića) jer je širina pravokutnika 7. Obojimo taj broj kvadratića crvenom bojom. Ivana je pola puta prešla avionom pa pola kvadratića obojimo zelenom bojom. Obojanih kvadratića ima ukupno 41 pa slijedi

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{41}{42}.$$

Vidimo da nam je ostao jedan neobojani kvadratić pa možemo zaključiti da je Ivana pješice prešla $\frac{1}{42}$ puta.



Slika 1.7: Zbrajanje razlomaka

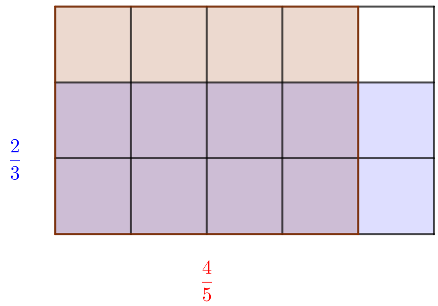
Modifikaciju gornjeg modela površine možemo upotrijebiti i pri množenju razlomaka što je pokazano u sljedećem primjeru koji je preuzet iz udžbenika [1], ali je riješen grafički.

Grafički prikaz množenja razlomaka rijetko se koristi u školi, ali uvelike može olakšati učenicima razumijevanje sadržaja jer povezuje razlomke s površinom koju dobro razumiju.

Primjer 1.3.2. *([1]) Poljoprivrednik Luka odlučio je u svoj vrt posaditi jagode. Duljina gredice je $\frac{4}{5}$ duljine vrta, a širina gredice $\frac{2}{3}$ širine vrta. Koliki dio vrta zauzima gredica u kojoj će zasaditi jagode?*

Rješenje. Nacrtajmo pravokutnik sa stranicama duljina jednakima nazivnicima razlomaka, odnosno pravokutnik dimenzija 5×3. Podijelimo dulju stranicu na pet jednakih dijelova, a potom i površinu pravokutnika na isti broj dijelova te osjenčajmo 4 dijela. Analogno podijelimo manju stranicu na tri jednaka dijela i površinu pravokutnika na trećine te osjenčajmo 2 od 3 dobivena dijela (Slika 1.8). Uočimo da smo time pravokutnik podijelili na 15 jednakih dijelova (dimenzija 1×1) od kojih je 8 dijelova dva puta osjenčano. Dio koji je dva puta osjenčan predstavlja umnožak dva početna razlomka. Sada možemo zaključiti da je

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$



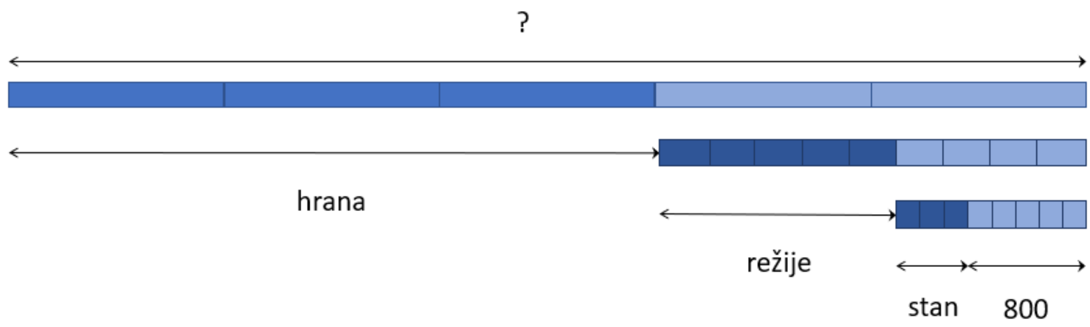
Slika 1.8: Umnožak razlomaka

Gornjim prikazima učenike se može uvoditi u računanje s razlomcima, ali slabijim učenicima i učenicima s poteškoćama to može biti jedan od glavnih alata kojima će savladati ovaj sadržaj.

Za problemske zadatke ponovno se možemo poslužiti prilagođenim modelom linije. U sljedećem primjeru promotrimo zadatak iz udžbenika [1] koji je riješen grafičkim prikazom kakav se ne koristi u našim školama.

Primjer 1.3.3. *([1]) Jedna obitelj troši $\frac{3}{5}$ mjesečne zarade na hranu, $\frac{5}{9}$ ostatka novca na režije, a $\frac{3}{8}$ preostalog novca za stanarinu. Za ostale potrebe preostane im 800 kn. Koliki je mjesečni prihod te obitelji?*

Rješenje. Poslužimo se modelom linije. Prva linija predstavlja cijeli prihod obitelji. Podijelimo je na 5 jednakih dijelova jer znamo da tada 3 dijela obitelj troši na hranu (na slici označeno tamno plavom bojom). Sada preostala dva (svjetloplava) dijela trebamo podijeliti na 9 dijelova pa radi preglednosti crtamo novu liniju odmah ispod pripadnog dijela. Znamo da 5 od tih 9 dijelova obitelj potroši na režije pa ostaju 4 dijela koja sada analognim razmišljanjem dijelimo na 8 dijelova (koje opet prikazujemo pomoću nove linije). Od novih 8 dijelova obitelj 3 dijela troši na stan, a 5 dijelova ostaje za ostale potrebe (Slika 1.9).



Slika 1.9: Model linije na razlomcima

Iz Slike 1.9 sada unatrag možemo izračunati traženi podatak. Budući da je obitelji ostalo 800 kn što na skici predstavlja 5 dijelova zadnje linije, znamo da jedan dio zadnje linije predstavlja $800 : 5 = 160$ kn pa cijela zadnja linija predstavlja $160 \cdot 8 = 1280$ kn. Zadnja linija predstavlja 4 dijela srednje linije pa analognim računom $1280 : 4 = 320$ i $320 \cdot 9 = 2880$ dolazimo do zaključka da srednja linija predstavlja 2880 kn. Za kraj nam ostaje samo odrediti vrijednost prve linije. Nju dobivamo iz $2880 : 2 = 1440$ i $1440 \cdot 5 = 7200$, odnosno mjesečni prihod obitelji je 7200 kn.

Ovakav način vizualizacije i razmišljanja postavlja dobre temelje za uvođenje nepoznanica i prijelaz na simbolički zapis preko varijabli. Krajem šestog razreda učenici se počinju baviti linearnim jednadžbama, a korištenje modela linije prije prijelaza na zapis preko varijabli učenicima može omogućiti lakši prijelaz i dublje razumijevanje koncepta nepoznanice. Učenike treba poticati da zadatke riješene modelom linije probaju formalno zapisati i riješiti algebarskom metodom nakon lekcije o linearnim jednadžbama. U primjeru 1.3.3. bi tada s x označili mjesečni prihod obitelji iz čega bi dobili sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}\cdot x\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8} &= 800,\\
\frac{1}{9}x &= 800,\\
x &= 800 : \frac{1}{9},\\
x &= 7200.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Korištenje grafičkog prikaza učenicima uvelike olakšava proces postavljanja zadatka i razumijevanje prve jednakosti iz (1.3).

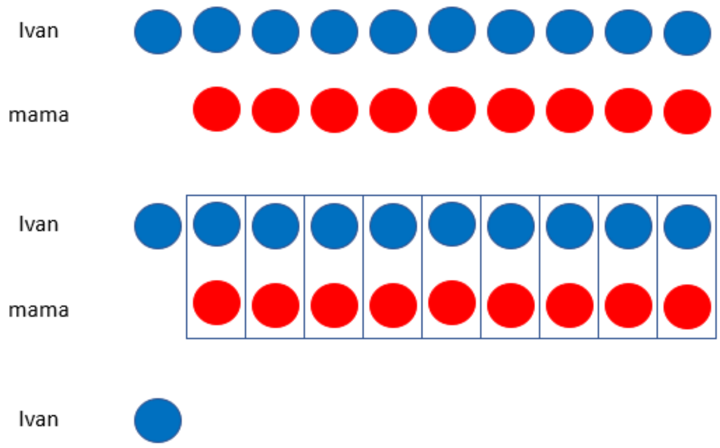
U šestom razredu je bitno postaviti dobre temelje računanja s cijelim brojevima. Osim pomicanjem po brojevnom pravcu, operacije zbrajanja i oduzimanja cijelih brojeva možemo grafički prikazati i pomoću crvenih i plavih žetona. Ideja ovog modela je jednostavna; crveni žetoni predstavljaju pozitivne brojeve, a plavi negativne. Kada želimo zbrajati, pripadne žetone dodajemo, a kod oduzimanja mičemo. Na početku jedan crveni žeton predstavlja broj 1, dok plavi predstavlja broj -1, ali model možemo mijenjati tako da jedan crveni žeton predstavlja unaprijed istaknuti broj, npr. 5, 10 ili 1000. Važno je uočiti da jedan crveni i jedan plavi žeton zajedno daju 0, odnosno poništavaju se jer predstavljaju suprotne brojeve. U sljedećim primjerima je korišten model sa žetonima.

Primjer 1.3.4. *([2]) Ivan je dužan Tomislavu 100 kn. Ako mu je majka dala 90 kn, koliko je novaca ostalo Ivanu nakon što je vratio dug?*

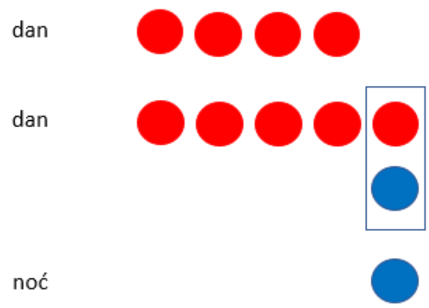
Rješenje. Neka nam jedan crveni žeton predstavlja 10 kn, a jedan plavi -10 kn. Ivan je dužan 100 kn pa je onda u minusu, odnosno njemu možemo pridružiti 10 plavih žetona. Mama mu je dala 90 kn što možemo prikazati s 9 crvenih žetona. Uočimo kako jedan plavi i jedan crveni žeton zajedno daju 0 pa devet parova crvenih i plavih žetona možemo maknuti. Ivanu dakle ostaje jedan plavi žeton što znači da ima -10 kn, odnosno nije do kraja vratio dug i dužan je Tomislavu još 10 kuna (Slika 1.10).

Primjer 1.3.5. *U Sahari je danju temperatura 40°, a noću temperatura padne za 50°. Koliko je stupnjeva noću u Sahari?*

Rješenje. Ponovno se poslužimo žetonima koji predstavljaju 10° i -10°. Dnevnu temperaturu tada možemo predočiti sa 4 crvena žetona. Budući da noću temperatura pada za 50°, trebamo oduzeti 5 crvenih žetona no nemamo ih dovoljno. Uočimo kako dodavanjem jednog crvenog i jednog plavog žetona ne mijenjamo vrijednost žetona na slici jer oni zajedno daju 0°. Sada imamo dovoljno crvenih žetona za maknuti, njih 5. Ostaje jedan plavi žeton koji predstavlja noćnu temperaturu nakon pada za 50° pa možemo zaključiti da noću temperatura padne na -10° (Slika 1.11).



Slika 1.10: Cijeli brojevi prikazani žetonima



Slika 1.11: Cijeli brojevi prikazani žetonima

1.4 Sedmi razred

Početkom sedmog razreda učenici se upoznaju s koordinatnim sustavom i time stvaraju temelje za novi oblik grafičke metode koja se naziva metoda koordinata. Metodu koordinata utemeljio je Rene Descartes[2], a danas je metoda poznatija pod nazivom analitička geometrija. Osnovna ideja metode je točke u prostoru i ravnini prikazati pomoću koordinata, a ostale objekte pomoću jednadžbi. Koordinatna metoda geometrijske probleme rješava algebarski, ali u ovom radu ćemo istaknuti kako algebarske probleme možemo rješavati geometrijski (grafički) pa ćemo zapravo metodu koristiti obrnuto od njene početne ideje. Već krajem sedmog razreda učenici mogu metodu koordinata koristiti za postavljanje i rješa-

[2]francuski filozof, fizičar, matematičar i utemeljitelj analitičke geometrije, 1596.-1650.

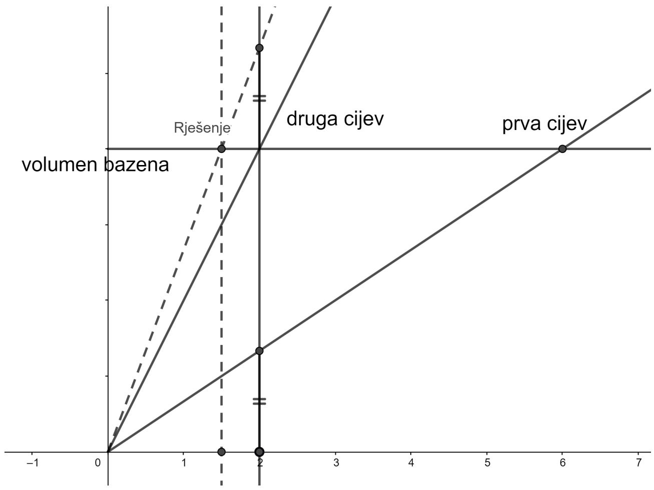
vanje problema koji u pozadini imaju linearne jednadžbe i sustave linearnih jednadžbi. Pri tome učenici koriste činjenicu da je u koordinatnom sustavu skup točaka koji zadovoljava linearnu jednadžbu predočen pravcem. U sljedećim primjerima prikazana je koordinatna metoda rješavanja zadataka koji se algebarskom metodom rješavaju postavljanjem linearne jednadžbe ili sustava linearnih jednadžbi.

Primjer 1.4.1. *Jedna cijev za jedan sat napuni šestinu bazena, a druga polovinu. Koliko vremena treba da obje cijevi zajedno napune bazen?*

Rješenje. U koordinatnom sustavu na osi apscisa označimo vrijeme tako da jedinična dužina predstavlja jedan sat, a na osi ordinata proizvoljno izaberimo pozitivnu vrijednost *volumenbazena* koja će predstavljati volumen bazena. Punjenje bazena prvom cijevi opišimo polupravcem iz točke $(0,0)$ kroz točku $(6, volumenbazena)$ jer će prva cijev samostalno napuniti bazen za 6 sati. Analogno, punjenje bazena drugom cijevi opišimo polupravcem iz točke $(0,0)$ kroz točku $(2, volumenbazena)$. Povucimo polupravac paralelan s osi apscisa kroz točku $(0, volumenbazena)$ koji predstavlja puni bazen (Slika 1.12). Preostaje nam opisati punjenje bazena s obje cijevi. Povucimo okomicu na x os npr. u točki $(2,0)$. Iz presjeka okomice s polupravcima koji predstavljaju punjenje bazena pojedinim cijevima možemo očitati volumen koji je za 2 sata napunila svaka cijev zasebno. Volumen koji je napunila prva cijev možemo nadodati (po okomici) na volumen koji je napunila druga cijev te time dobijemo volumen koje su cijevi napunile zajedno u dva sata. Ta točka pripada polupravcu koji opisuje punjenje bazena s obje cijevi istovremeno i znamo da taj polupravac također prolazi kroz ishodište pa ga sada možemo nacrtati (isprekidani polupravac na Slici 1.12). Sada promotrimo presjek dobivenog polupravca s pravcem $y = volumenbazena$. Prva koordinata presjeka jednaka je 1.5 i to je vrijeme u kojem će obje cijevi napuniti bazen. Dakle, bazen će se s obje cijevi napuniti za 1 sat i 30 minuta.

Algebarskom metodom zadatak bi riješili na idući način. Prva će cijev u jednom satu napuniti $\frac{1}{6}$ bazena, a druga $\frac{1}{2}$ bazena pa će obje cijevi zajedno u jednom satu napuniti $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ bazena. Neka je x broj sati za koje će se bazen napuniti kroz obje cijevi. Vrijedi:

$$\begin{aligned} x\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) &= 1, \\ \frac{2}{3}x &= 1, \\ x &= \frac{3}{2}, \\ x &= 1.5 \text{ h}. \end{aligned}$$

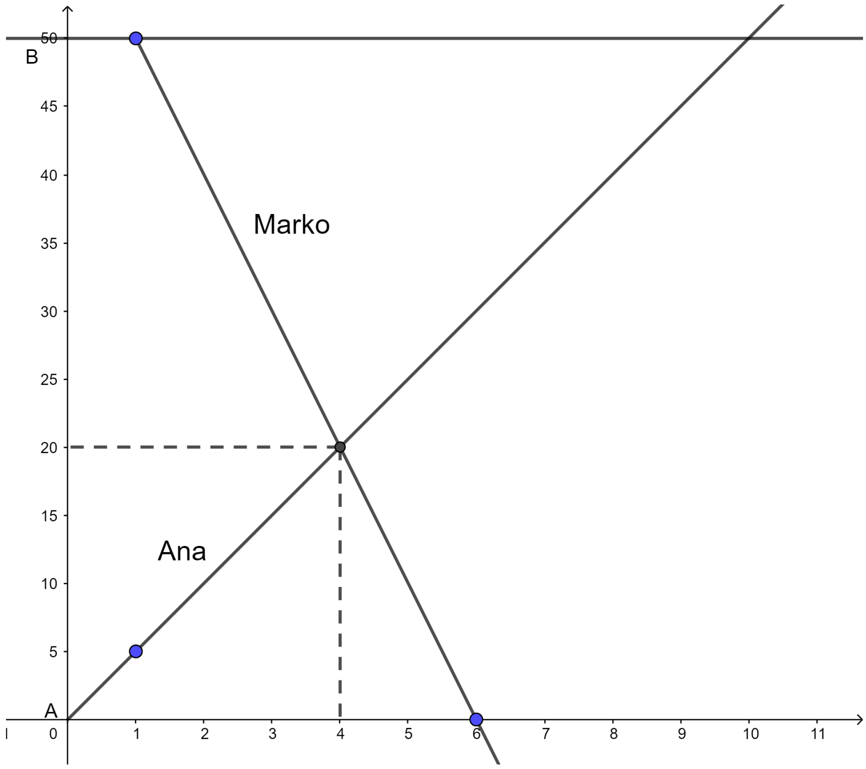


Slika 1.12: Rješavanje linearne jednadžbe koordinatnom metodom

Primjer 1.4.2. *Iz grada A prema gradu B, koji su udaljeni 50 km, Ana je krenula pješice i svakog sata prijeđe 5 km. Prema njoj je iz grada B jedan sat kasnije krenuo Marko trčeći brzinom od 10 km na sat. Kada će se i na kojoj udaljenosti od grada A oni sresti?*

Rješenje. Skicirajmo njihovo kretanje u koordinatnom sustavu. Neka nam vrijednosti na osi ordinata predstavljaju udaljenost od grada A, a vrijednosti na osi apscisa vrijeme koje je prošlo od Aninog polaska iz grada A. Neka na osi apscisa jedinična dužina predstavlja 1 sat, a na osi ordinata 5 km. Polupravcom iz točke $(0, 0)$ kroz točku $(1, 5)$ opisujemo Anino kretanje jer će za jedan sat ona prehodati 5 km. Polupravac iz točke $(1, 50)$ kroz točku $(6, 0)$ opisuje Markovo kretanje jer je on krenuo sat vremena kasnije i na početku svog puta nalazi se 50 km udaljen od grada A, a cijelu udaljenost će prijeći za $50 : 10 = 5$ sati pa slijedi da će nakon $5 + 1 = 6$ sati od početka Aninog kretanja biti u gradu A (Slika 1.13). Ana i Marko će se sresti u točki presjeka dva polupravca. Prva koordinata presjeka nam pokazuje nakon koliko vremena od kada je Ana krenula će se ona i Marko sresti, a druga koordinata na kojoj udaljenosti od grada A će se oni sresti. Točka presjeka ima koordinate $(4, 20)$ pa će Ana sresti Marka nakon četiri sata hoda i srest će se 20 km od grada A.

Jedno od mogućih algebarskih rješenja je sljedeće. Neka je x vrijeme koje je Ana pješačila dok nije susrela Marka. U x sati Ana će prijeći $5x$ kilometara, a Marko $10(x - 1)$ kilometara jer je on krenuo sat vremena kasnije. Ana i Marko će ukupno prije susreta



Slika 1.13: Rješavanje linearne jednadžbe koordinatnom metodom

prijeći 50 km jer je to njihova početna udaljenost. Sada imamo:

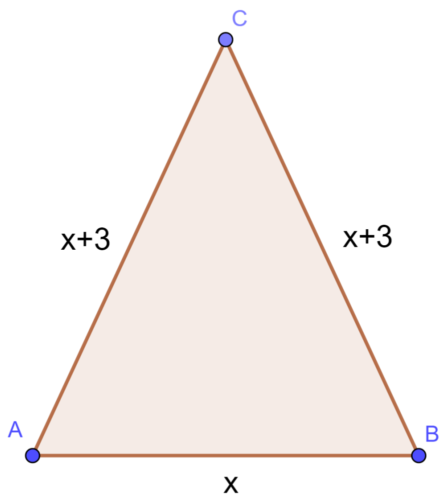
$$\begin{aligned} 5x + 10(x-1) &= 50, \\ 5x + 10x - 10 &= 50, \\ 15x &= 60, \\ x &= 4 \text{ h}. \end{aligned}$$

Dakle, Ana je srela Marka nakon 4 sata hoda, a budući da Ana hoda brzinom od 5 km/h, susreli su se $4 \cdot 5 = 20$ km od grada A.

Iako je algebarsko rješenje kraće, učenici imaju velikih problema sa postavljanjem prve jednakosti pa grafički prikaz može olakšati razumijevanje problema, a točnost podataka sa grafa može se provjeriti algebarskom metodom. Neke zadatke u kojima se pojavljuje sustav linearnih jednadžbi učenici će intuitivno riješiti grafički bez postavljanja sustava (primjer 1.4.3.) dok će neke sustave trebati postaviti, a potom se odlučiti za grafičku ili algebarsku metodu rješavanja (primjer 1.4.4.). Koordinatna metoda učenicima može poslužiti i kao procjena rješenja ili kao provjera algebarskog rješenja. Ukoliko se koordinate traženog presjeka ne mogu lako očitati sa slike, rješenja treba pronaći algebarski. Bitno je učenicima osvijestiti povezanost između grafičke i algebarske metode kako bi razvijali oba aspekta razmišljanja i zaključivanja te razvili sposobnost lakog prelaska iz jedne u drugu metodu. U sljedećem primjeru pogledajmo rješavanje zadatka preko skice uz pomoć koje se izbjegne postavljanje sustava dvije jednadžbe.

Primjer 1.4.3. *([11]) Opseg jednakokračnog trokuta je 21 cm, a razlika duljina kraka i osnovice je 3 cm. Kolike su duljine stranica trokuta?*

Rješenje. U ovakvim zadacima s geometrijskim likovima najprije crtamo skicu i označavamo poznate podatke (Slika 1.14). Iz skice sada možemo postaviti samo jednu jednadžbu (a ne sustav) i riješiti zadatak.



Slika 1.14: Skica trokuta

Opseg trokuta jednak je 21 cm pa iz oznaka na Slici 1.14 slijedi:

$$\begin{aligned} x+3+x+3+x &= 21, \\ 3x+6 &= 21, \\ 3x &= 15, \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Dakle, osnovica trokuta je duljine 5 cm, a krakovi duljine $5 + 3 = 8$ cm. Algebarsko rješenje zadatka bez postavljanja skice izvelo bi se na sljedeći način. Neka je x duljina osnovice trokuta, a y duljina krakova. Budući da je opseg trokuta jednak 21 cm, slijedi

$x+2y = 21$, a iz uvjeta da je razlika duljina kraka i osnovice jednaka 3 cm vrijedi $y-x = 3$, čime dobivamo sustav

$$\begin{cases} x + 2y = 21 \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Riješimo ga metodom supstitucije:

$$\begin{aligned} y &= 3 + x, \\ x + 2(3 + x) &= 21, \\ x + 6 + 2x &= 21, \\ 3x &= 15, \\ x &= 5, \\ y &= 3 + x = 3 + 5 = 8. \end{aligned}$$

Dakle, osnovica je duga 5 cm, a krakovi 8 cm.

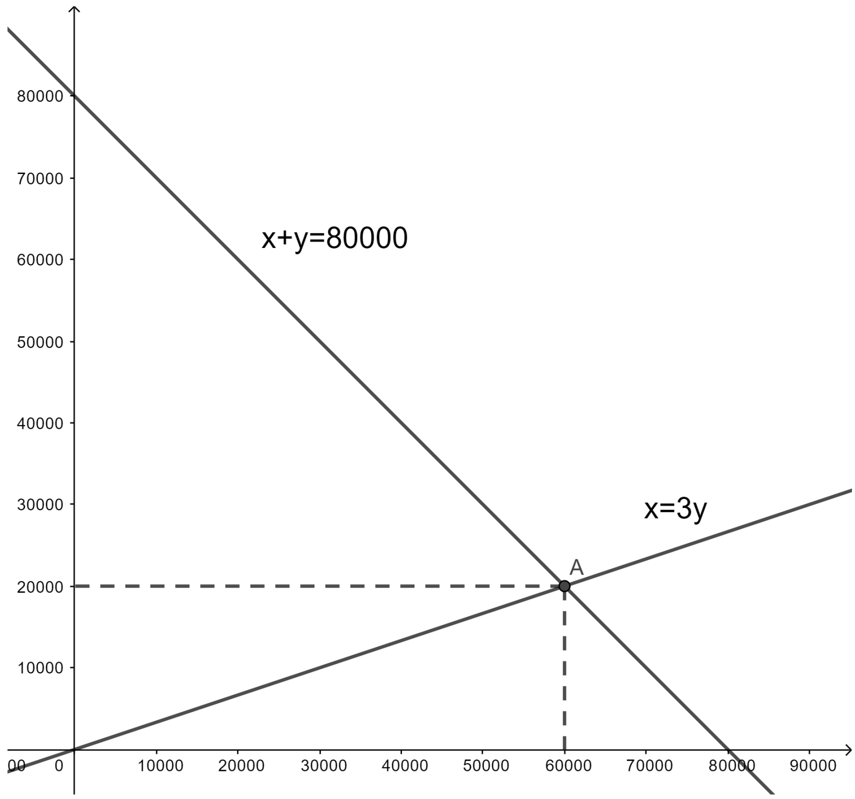
Promotrimo još jedan primjer iz udžbenika koji učenici u školama rješavaju postavljanjem sustava jednadžbi, a ovdje je riješen kombinacijom algebarske i grafičke metode.

Primjer 1.4.4. *([11]) U dvjema knjižnicama ima ukupno 80000 knjiga. Kada iz jedne knjižnice premjestimo 20% knjiga u drugu, u prvoj ima $\frac{3}{2}$ puta više knjiga nego u drugoj knjižnici. Koliko je knjiga bilo u svakoj knjižnici prije premještanja?*

Rješenje. Analizirajmo tekst zadatka i postavimo jednadžbe. Neka je x količina knjiga u prvoj, a y u drugoj knjižnici prije premještanja. Iz prve rečenice zadatka slijedi $x + y = 80000$. Kada iz prve knjižnice premjestimo 20% knjiga, u njoj ostaje 80% knjiga, odnosno $0.8x$ knjiga. Iz druge rečenice zadatka tada slijedi da je ta količina $\frac{3}{2}$ puta veća od količine knjiga u drugoj knjižnici koja je sada uvećana za 20% knjiga iz prve knjižnice ($0.2x$ knjiga) pa vrijedi $0.8x = \frac{3}{2}\cdot(y+0.2x) \iff x = 3y$. Sada imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice pa postavimo sustav

$$\begin{cases} x + y = 80000 \\ x = 3y. \end{cases}$$

Dobiveni sustav možemo riješiti grafički u koordinatnom sustavu (Slika 1.15) ili algebarski (metodom supstitucije), analogno prethodnom primjeru. Radi lakšeg crtanja možemo odrediti da jedinična dužina na koordinatnim osima predstavlja 10000 knjiga. Rješenje sustava je presjek dva pravca (na Slici 1.15 označen s A). Sada iz skice (Slika 1.15) možemo očitati da se u prvoj knjižnici prije premještanja nalazilo 60000 knjiga, a u drugoj 20000 knjiga.



Slika 1.15: Rješavanje sustava linearnih jednadžbi koordinatnom metodom

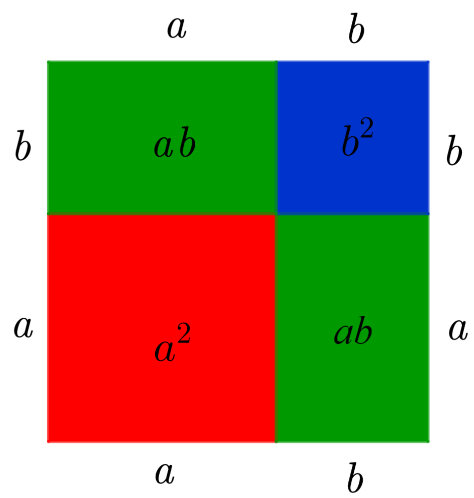
U sedmom se razredu učenici prvi puta susreću i s pojmovima omjera, proporcionalnosti i postotka za što se često koristi model površine koji predstavlja jasnu sliku navedenih pojmova. Kasnije se mnogi učenici vraćaju na neke od slikovnih prikaza kada se trebaju prisjetiti određenih pojmova, a koriste ih i u geometrijskim zadacima. Za probleme koji uključuju postotke možemo lako primijeniti i model linije na način na koji smo ga koristili za prikaz razlomaka (Primjer 1.3.3.).

Učenici se u hrvatskim školama tek na kraju sedmog razreda upoznaju s pojmom linearne funkcije i jednadžbe pravca te s osnovnim svojstvima tih pojmova pa većina učenika ipak neće primjer 1.4.4. riješiti grafičkom metodom. Ipak, učenici time stječu mnoge alate kojima mogu nadograđivati svoje grafičke metode rješavanja zadataka koje će primjenjivati u daljnjem obrazovanju te im treba ukazati pažnju na mogućnost rješavanja sustava i tom metodom.

1.5 Osmi razred

Početkom osmog razreda učenici se po prvi puta susreću s pojmom algebarskog izraza i mnogi napamet uče razne formule (poput onih za kvadrat binoma i razliku kvadrata) bez razumijevanja istih. Postoji nekoliko načina na koje je moguće geometrijski interpretirati spomenute jednakosti preko površine pravokutnika što učenicima može pomoći u razumijevanju spomenutih jednakosti. Na slikama je prikazana grafička interpretacija kvadrata zbroja (Slika 1.16), kvadrata razlike (Slika 1.17) i razlike kvadrata (Slika 1.18). Kub binoma se može analogno pokazati preko volumena kvadra. Promotrimo Sliku 1.16. Stranica velikog kvadrata je duljine $a+b$ pa je površina tog kvadrata jednaka $(a+b)^2$. Veliki kvadrat se sastoji od crvenog i plavog kvadrata redom površina a^2 i b^2 te dva zelena pravokutnika površina ab. Sada iz slike slijedi da je površina velikog kvadrata jednaka zbroju površina dva mala kvadrata i dva pravokutnika pa vrijedi

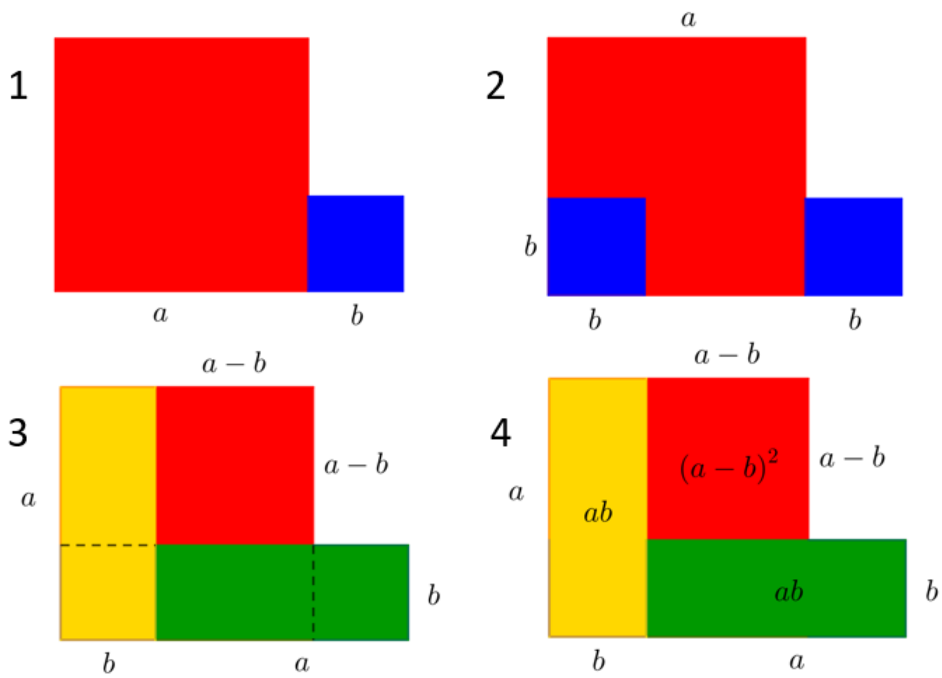
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Slika 1.16: Kvadrat zbroja

Promotrimo grafički prikaz kvadrata razlike na Slici 1.17. Konstruirajmo dva kvadrata (crveni i plavi) duljina stranica a i b jedan do drugog kao na Slici 1.17.1. Primijetimo kako smo dobili šesterokut čija je površina jednaka zbroju površina dva kvadrata, odnosno $a^2 + b^2$. U dva koraka (Slika 1.17.2 i 1.17.3) podijelimo dobiveni šesterokut na dva pravokutnika (žuti i zeleni) i jedan kvadrat (crveni). Uočimo kako su duljine stranica pravokutnika jednake a i b pa je površina ta dva pravokutnika zajedno jednaka $2ab$. Duljina stranice nastalog kvadrata jednaka je $a - b$ pa je površina kvadrata jednaka $(a - b)^2$. Površinu nastalog crvenog kvadrata možemo dobiti ako od površine početnog šesterokuta oduzmemo površine žutog i zelenog pravokutnika (Slika 1.17.4) čime dobivamo jednakost $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. Sređivanjem jednakosti dobivamo prepoznatljivi izraz za kvadrat razlike:

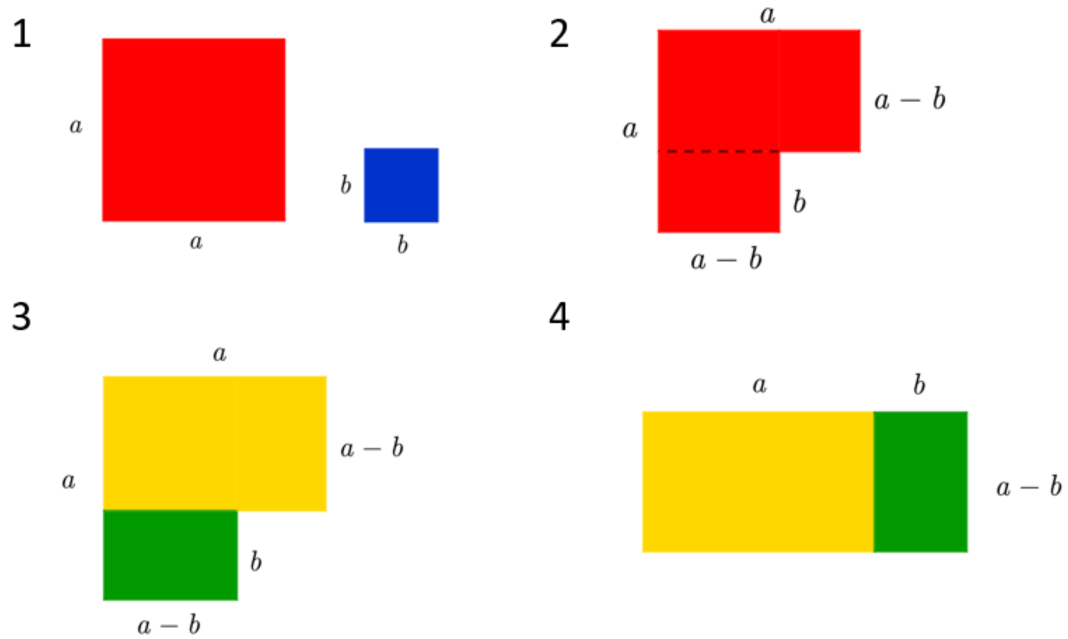
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$



Slika 1.17: Kvadrat razlike

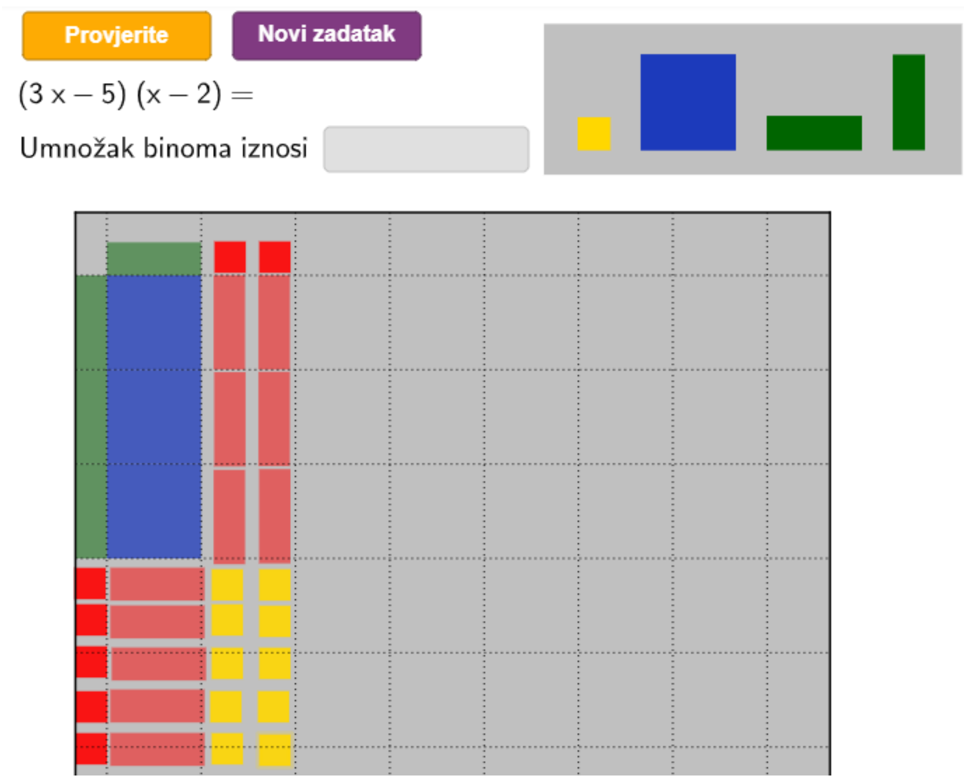
Ostaje nam još pojasniti grafički prikaz za razliku kvadrata sa Slike 1.18. Slično kao kod kvadrata razlike, za početak konstruirajmo crveni i plavi kvadrat sa stranicama duljina a i b redom (Slika 1.18.1). Od površine crvenog kvadrata oduzmimo površinu plavog kvadrata. Dobit ćemo lik na Slici 1.18.2 čija je površina jednaka $a^2 - b^2$. Dobiveni lik možemo podijeliti na dva pravokutnika (Slika 1.18.3), jedan ima stranice duljina $a - b$ i b, a drugi stranice duljina $a - b$ i a. Dva pravokutnika možemo presložiti tako da im se stranice jednakih duljina $a - b$ dodiruju čime dobivamo pravokutnik sa stranicama duljina $a - b$ i $a + b$ (Slika 1.18.4). Površina tog pravokutnika je jednaka $(a - b)(a + b)$. Budući da su površine likova sa Slika 1.18.2 i 1.18.4 jednake, vrijedi

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$



Slika 1.18: Razlika kvadrata

Osim zbrajanja i oduzimanja, binome možemo i množiti, a za vizualizaciju će nam poslužiti algebarske pločice ([26]). Algebarske se pločice mogu slagati na papiru ukoliko imamo potrebni materijal ili pomoću aplikacije na računalu ([8]). Učenici ovako uvježbavaju množenje algebarskih izraza koristeći se metodom površine. Veće kvadratne pločice plave boje predstavljaju x^2, pravokutne pločice zelene boje predstavljaju x, a manje kvadratne pločice žute boje predstavljaju 1. Zelene pravokutnike možemo postaviti okomito ili vodoravno pa su, radi lakšeg slaganja, u aplikaciji ponuđena dva položaja koja reprezentiraju istu vrijednost. Ukoliko je neki od izraza negativan, koristimo pločicu istih dimenzija, ali crvene boje. U aplikaciji [8] su tri vrste pločica obojane u tri različite nijanse crvene boje. Pločicama možemo promijeniti boju klikom na njih. Pločice koje odgovaraju zadanim binomima postavljamo uz lijevi i gornji rub papira, odnosno plohe za crtanje, a potom površinu koju one određuju popunjavamo s ostalim pločicama. Površinu popunjavamo tako da rubovi pločice koju postavljamo veličinom odgovaraju rubovima pločica točno iznad i točno lijevo od pločice koju postavljamo (Slika 1.19). Rješenje dobijemo prebrojavanjem pločica koje smo složili, a koje se ne nalaze na lijevom i gornjem rubu. Na Slici 1.19 prikazano je rješenje dobiveno pomoću algebarskih pločica, koristeći alat [8] na računalu, za izraz $(3x-5)(x-2) = 3x^2 - 11x + 10$. U prvom retku preko pločica predstavimo izraz $x-2$ tako što x označimo jednim zelenim pravokutnikom, a -2 s dva crvena mala kvadratića jer je $-1 - 1 = -2$. Analogno u prvom stupcu izraz $3x - 5$ predstavimo s tri zelena pravokutnika što označava $3x$ i pet crvenih malih kvadratića što označava -5. Ostaje nam popuniti prostor koji određuju prvi redak i stupac. Zeleni pravokutnik u prvom retku i prvi zeleni pravokutnik u prvom stupcu zajedno određuju površinu veličine velikog plavog kvadrata pa analognim razmišljanjem u drugi stupac možemo staviti još dva plava kvadrata. Ostatak drugog stupca trebamo popuniti s pet likova koji su određeni pravokutnikom na gornjem rubu i kvadratićima na lijevom rubu, a to je upravo pet pravokutnika, no oni moraju biti crveni jer su kvadratići crveni i znamo da množenje pozitivnog i negativnog broja rezultira negativnim brojem. Analognim zaključivanjem možemo popuniti ostatak površine, ali uočimo da dva crvena kvadratića daju žuti kvadratić jer množenjem dva negativna broja dobivamo pozitivni. Prebrojavanjem složenih likova (3 plava kvadrata, 11 crvenih pravokutnika i 10 žutih kvadratića) dobit ćemo vrijednost $3x^2 - 11x + 10$ što je rješenje umnoška binoma $(3x-5)(x-2)$.



Slika 1.19: Algebarske pločice ([8])

Unutar cjeline *Realni brojevi* učenici se upoznaju s osnovnim oblikom kvadratne funkcije i funkcije korijena te s njihovim grafovima. Nadogradnjom ovih pojmova u srednjoj školi učenici će nadopuniti svoje znanje koje mogu koristiti u grafičkoj metodi rješavanja zadataka što je prikazano u idućem poglavlju ovog rada.

Poglavlje 2

Grafičke metode u srednjoj školi

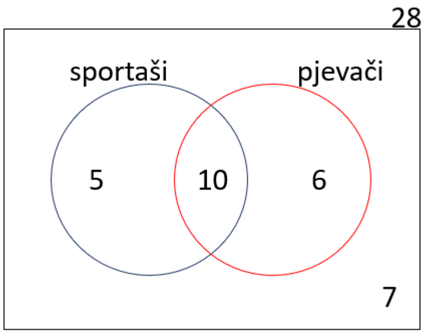
Prelaskom u srednju školu učenici ulaze u zadnji ciklus svog obrazovanja prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu. Neki učenici će nastaviti svoje obrazovanje na raznim fakultetima, a neki će ući u svijet rada. Bez obzira na njihovo usmjerenje u srednjoj školi trebaju osvježiti postojeće matematičke kompetencije i steći nove kompetencije koje će im koristiti u budućnosti. Matematička kompetencija definira se kao osposobljenost učenika za razvijanje matematičkog mišljenja i njegovu primjenu u rješavanju problema u nizu različitih svakodnevnih situacija ([7]). U ovom poglavlju prikazan je niz zadataka iz udžbenika za srednje škole koji mogu pridonijeti stjecanju spomenutih kompetencija kroz primjenu grafičke metode. Pri rješavanju zadataka koristit ćemo znanje stečeno u osnovnoj školi, ali i preskakati lekcije te koristiti neka znanja koja se u srednjoj školi uče tek nakon lekcije u kojoj se nalazi pojedini zadatak. Cilj je osvijestiti različite poglede na probleme i zadatke koji će rezultirati boljim razumijevanjem problema, rješenja, ali i razvijati sposobnost analize problema iz različitih gledišta.

2.1 Prvi razred

Na samom početku srednjoškolskog obrazovanja učenici ponavljaju sadržaje osnovne škole i produbljuju znanje o pojedinim pojmovima i konceptima. Već u prvoj cjelini *Brojevi* učenici najveći zajednički djelitelj uče nalaziti pomoću Euklidovog algoritma. Osim standardnog algoritma dijeljenjem ovdje se može pokazati i grafička interpretacija algoritma prikazana u prvom poglavlju (Slika 1.4). Učenici se po prvi puta susreću i s pojmom skupa i skupovnim operacijama. Do sada su taj pojam koristili isključivo kao dio naučene sintagme (primjer za to je skup prirodnih brojeva), a sada se uče služiti skupovima kao matematičkim objektima. U udžbenicima za gimnazije spominju se samo unija i presjek skupova te relacija *biti podskup*. Ipak, iako se formula uključivanja i isključivanja ne uči i nije naznačena u kurikulumu, neke zadatke koji zahtijevaju njeno korištenje učenici mogu riješiti grafičkom metodom.

Primjer 2.1.1. *U nekom je razredu 28 učenika. U razne sportske aktivnosti uključeno je njih 15, a 16 učenika pjeva u pjevačkom zboru škole. Sedam učenika tog razreda niti su među sportašima, niti su članovi pjevačkog zbora. Koliko je učenika ovog razreda uključeno u obje aktivnosti?*

Rješenje. Skicirajmo problem koristeći se Vennovim[1] dijagramima. Jednom kružnicom označimo skup sportaša, a drugom skup pjevača te kružnice smjestimo u pravokutnik koji označava cijeli razred. Znamo da se sedam učenika nalazi izvan obje kružnice jer oni nisu ni sportaši ni pjevači. Sada nam ostaje $28 - 7 = 21$ učenik za rasporediti u dvije kružnice tako da je unutar prve 15, a unutar druge 16 učenika. Očito će neki učenici biti u obje kružnice, odnosno u presjeku pripadnih krugova. Kada 15 učenika smjestimo u sportsku kružnicu, ostaje nam $21-15 = 6$ učenika u pjevačkoj kružnici koji nisu u sportskoj kružnici. S obzirom da 16 učenika pjeva u zboru, nedostaje nam još njih 10 (Slika 2.1) koji se onda nalaze u presjeku. Sada možemo zaključiti da se 10 učenika bavi i sportom i pjevanjem.



Slika 2.1: Vennovi dijagrami

Sljedeći novi pojam s kojim se učenici susreću je nejednadžba. Kod rješavanja nejednadžbi nerijetko dolazi do rastavljanja problema na slučajeve što se lako može zakomplicirati i učenici često izgube dijelove rješenja u procesu. Grafička metoda rješavanja nejednadžbi i sustava nejednadžbi može smanjiti broj slučajeva i olakšati učenicima pronalazak cjelovitog rješenja. Kod rješavanja nejednadžbi grafička metoda se najčešće koristi barem u završnom dijelu određivanja rješenja i to predstavlja primjer nadopunjavanja algebarske i grafičke metode rješavanja. Pri rješavanju nejednadžbi važno je primijeniti znanje iz skupovnih operacija i razlikovati značenje unije i presjeka pri traženju rješenja. Pogledajmo primjer iz udžbenika [14] koji je u tom udžbeniku riješen kombinacijom algebarske

[1]John Venn, engleski logičar i filozof, 1834.-1923.

i grafičke metode, a ovdje ćemo ga riješiti na dva načina: na brojevnom pravcu i u koordinatnom sustavu.

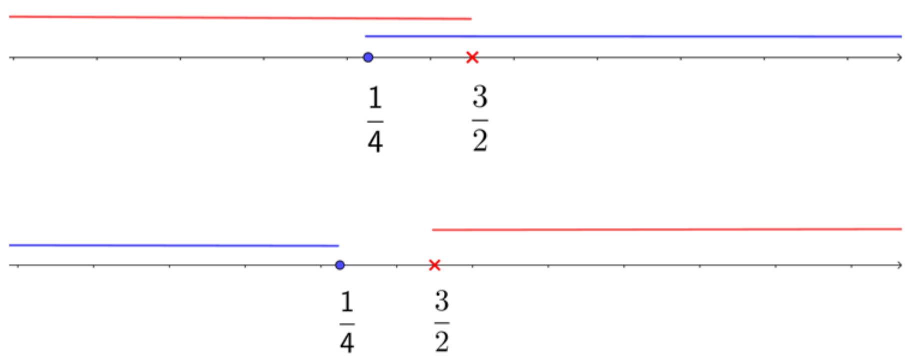
Primjer 2.1.2. *Riješimo nejednadžbu*

$$\frac{x+1}{3-2x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Rješenje.
Prvi način. Nejednadžbu prvo moramo svesti na jednostavniji oblik. Oduzimanjem $\frac{1}{2}$ s obje strane nejednadžbe, a potom sređivanjem dobivamo

$$\frac{4x-1}{2(3-2x)} \geqslant 0.$$

Ovakvu nejednadžbu sada znamo riješiti. Uočimo kako je razlomak veći od 0 ako su brojnik i nazivnik istog predznaka, te je jednak 0 ako je brojnik jednak nuli (u ovom slučaju za $x = \frac{1}{4}$). Također, nazivnik ne smije biti nula pa $x = \frac{3}{2}$ ne smije biti rješenje. Ako brojnik nije nula, imamo dva slučaja: ili su i brojnik i nazivnik pozitivni ili su oba negativni. Nacrtajmo dva brojevna pravca i označimo točke u kojima su brojnik i nazivnik jednaki 0 (Slika 2.2). Brojnik smije biti nula, ali nazivnik ne smije pa ćemo $\frac{3}{2}$ prekrižiti na oba brojevna pravca. Oba izraza su veća od nule kada se vrijednosti od x nalaze desno od $\frac{1}{4}$ i lijevo od $\frac{3}{2}$, odnosno za $x \in \left\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{2} \right\rangle$. Obrnuto, oba izraza su manja od nule kada se vrijednosti od x nalaze lijevo od $\frac{1}{4}$ i desno od $\frac{3}{2}$, no uočimo da takve vrijednosti od x ne postoje pa ovaj slučaj nema rješenja. Rješenje nejednadžbe je unija dobivenog intervala $\left\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{2} \right\rangle$ i vrijednosti $\frac{1}{4}$, odnosno interval $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{2} \right\rangle$.

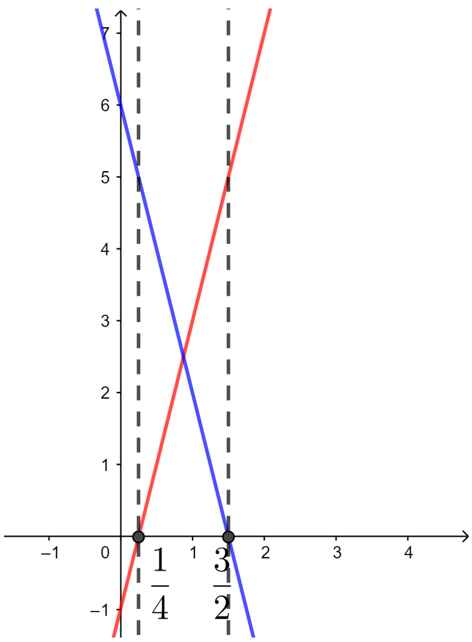


Slika 2.2: Grafičko rješavanje nejednadžbe

Drugi način. Riješimo zadatak u koordinatnom sustavu. Ponovno ćemo koristiti sređeni oblik početne nejednadžbe

$$\frac{4x-1}{2(3-2x)} \geqslant 0.$$

Uvjeti navedeni u prvom načinu i ovdje moraju biti zadovoljeni. Razlomak je veći od 0 ako su brojnik i nazivnik istog predznaka, te je jednak 0 ako je brojnik jednak nuli (u ovom slučaju za $x = \frac{1}{4}$). Također, nazivnik ne smije biti nula pa $x = \frac{3}{2}$ ne smije biti rješenje. Nacrtajmo pravce definirane brojnikom i nazivnikom gornjeg razlomka u istom koordinatnom sustavu. Na Slici 2.3 pravac $y = 4x - 1$ označen je crvenom bojom, a pravac $y = 6 - 4x$ označen je plavom bojom. Sada iz položaja pravaca i njihovih presjeka s osi x možemo lako odrediti za koje vrijednosti od x oba izraza poprimaju vrijednosti istog predznaka, tj. kada se oba pravca nalaze s iste strane osi x. Radi preglednosti u točkama njihovih presjeka s x-osi povukli smo okomice na os x. Uočimo kako se između dvije okomice oba pravca nalaze iznad osi x, a lijevo i desno od okomica se pravci nalaze na suprotnim stranama osi x. Budući da nas zanimaju dijelovi koordinatnog sustava u kojima se oba pravca nalaze s iste strane osi x, možemo zaključiti da je rješenje početne nejednadžbe $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right\rangle$. Na kraju trebamo paziti na uključenost rubova intervala. Na početku smo zaključili da zadani izraz može biti nula jer nejednakost nije stroga pa je $\frac{1}{4}$ uključeno u rješenje, a nazivnik ne smije biti nula pa $\frac{3}{2}$ nije uključeno u rješenje.



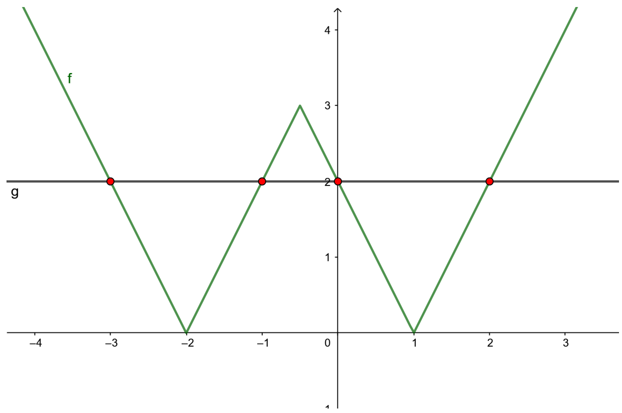
Slika 2.3: Grafičko rješavanje nejednadžbe

U prvom razredu učenici uče rješavati jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima, ali grafički prikaz funkcije apsolutne vrijednosti uče tek nakon spomenute lekcije. To je razlog zbog kojeg učenici vjerojatno jednadžbe s apsolutnim vrijednostima neće rješavati grafički. Ipak, vrijedno je vratiti se na ove zadatke nakon naučenog grafičkog prikaza i riješiti ih pomoću grafičkog prikaza budući da rješenja već znaju odrediti algebarski. Promotrimo kako bi takve zadatke iz udžbenika riješili grafičkom metodom nakon naučenog grafa funkcije apsolutne vrijednosti.

Primjer 2.1.3. *([14]) Riješi jednadžbu*

$$||2x + 1| - 3| = 2.$$

Rješenje. Definirajmo funkcije $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sa $f(x) = ||2x + 1| - 3|$ i $g(x) = 2$. Sada smo rješenje jednadžbe sveli na traženje vrijednosti od x za koje vrijedi $f(x) = g(x)$, odnosno na traženje sjecišta grafova funkcija. Nacrtajmo grafove funkcija f i g u istom koordinatnom sustavu (Slika 2.4). Graf funkcije f crtamo postepeno. Prvo crtamo graf funkcije $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirane s $f_1(x) = 2x + 1$, potom dio tog grafa ispod x-osi zrcalimo s obzirom na x-os čime dobivamo graf funkcije $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirane s $f_2(x) = |2x + 1|$. Sada graf funkcije f_2 translatiramo za -3 po y-osi i ponovno dio ispod x-osi zrcalimo s obzirom na x-os čime dobivamo graf funkcije f. Graf funkcije g je pravac paralelan s osi x koji prolazi točkom $(0, 2)$. Iz slike vidimo da postoje četiri sjecišta grafova funkcija f i g pa možemo zaključiti da postoje četiri vrijednosti za x koje zadovoljavaju početnu jednadžbu. Konačna rješenja su apscise dobivenih sjecišta: $x = -3,\ x = -1,\ x = 0,\ x = 2$.



Slika 2.4: Grafičko rješavanje jednadžbe s apsolutnom vrijednosti

Ukoliko rješenja ne možemo precizno očitati s grafa, treba ih pronaći algebarski, a graf nam tada služi za procjenu točnog rješenja i provjeru broja rješenja.

Sljedeći primjer učenici mogu grafički riješiti prije naučenog grafa funkcije apsolutne vrijednosti jer za rješavanje koriste samo svojstva apsolutne vrijednosti, kružnice te brojevni pravac.

Primjer 2.1.4. *([15]) Odredi sve realne brojeve x koji zadovoljavaju sustav nejednadžbi*

$$\frac{2}{3} < \left|3x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{3}{4}.$$

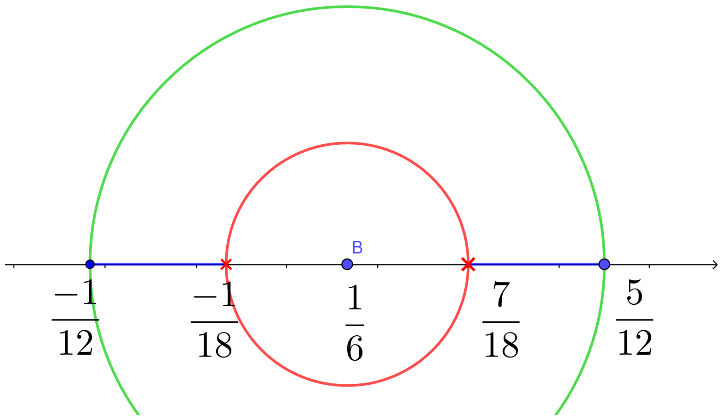
Rješenje. Sredimo nejednadžbu tako da je uz x koeficijent 1:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} < \left|3x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{2}{3} < 3\left|x - \frac{1}{6}\right| \leqslant \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{2}{9} < \left|x - \frac{1}{6}\right| \leqslant \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Uočimo kako izraz $\left|x - \frac{1}{6}\right|$ označava udaljenost točaka $A = A(x)$ i $B = B(\frac{1}{6})$ na brojevnom pravcu. Sada rješavanje sustava nejednadžbi svodimo na traženje točaka A koje su od točke B udaljene za više od $\frac{2}{9}$, a manje ili jednako od $\frac{1}{4}$. Označimo na brojevnom pravcu točku B. Točke jednako udaljene od točke B leže na nekoj kružnici sa središtem u točki B pa točke udaljene za $\frac{2}{9}$ i $\frac{1}{4}$ možemo naći konstruiranjem kružnica s pripadnim radijusima i središtem u točki B, redom crvene i zelene boje (Slika 2.5). Točke udaljene za više od $\frac{2}{9}$ od točke B nalaze se na brojevnom pravcu izvan crvene kružnice, a točke udaljene za manje ili jednako od $\frac{1}{4}$ nalaze se na brojevnom pravcu unutar zelene kružnice i na zelenoj kružnici. Dakle, rješenja su brojevi na pravcu između dvije kružnice i na zelenoj kružnici, odnosno rješenje sustava nejednadžbi je $x \in \left[-\frac{1}{12}, -\frac{1}{18}\right\rangle \cup \left\langle\frac{7}{18}, \frac{5}{12}\right]$.

Gore prikazana metoda zasnovana je na definiciji apsolutne vrijednosti i ne zahtjeva algebarsko rješavanje sustava. Algebarsko rješenje provodi se rastavom na dva slučaja te potom traženjem unije rješenja ili rješavanjem dvije nejednadžbe zasebno pa traženjem presjeka rješenja.

Učenici se u prvom razredu opet susreću sa sustavom linearnih jednadžbi koje sada bez problema mogu rješavati i grafički i algebarski kao u primjeru 1.4.4..



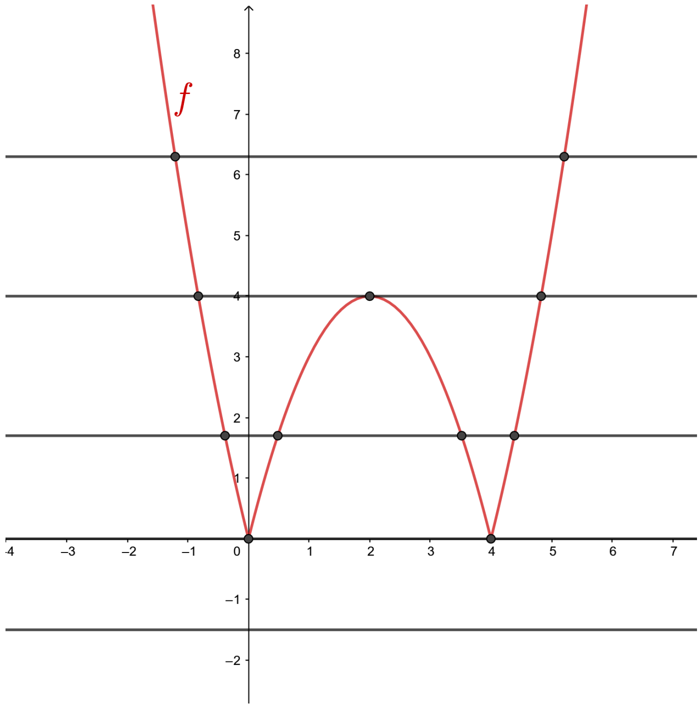
Slika 2.5: Grafičko rješavanje sustava nejednadžbi s apsolutnom vrijednosti

2.2 Drugi razred

Nakon što učenici u drugom razredu srednje škole nauče osnovne karakteristike grafa kvadratne funkcije, napokon mogu početi modelirati kvadratnom funkcijom i grafički rješavati probleme. Učenici sada mogu grafički rješavati sustav linearne i kvadratne jednadžbe te grafički prikazati kompoziciju kvadratne funkcije i funkcije apsolutne vrijednosti. U drugom razredu se javlja i pojam kvadratne nejednadžbe koja se u praksi uvijek rješava kombinacijom algebarske i grafičke metode što predstavlja još jedan primjer međusobne povezanosti dviju spomenutih metoda.

Primjer 2.2.1. *Za svaki $c \in \mathbb{R}$ odredite koliko pripadna jednadžba $\left|x^2 - 4x\right| = c$ ima realnih rješenja.*

Rješenje. Nacrtajmo graf funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = \left|x^2 - 4x\right|$. Prvo nacrtajmo graf funkcije $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirane s $f_1(x) = x^2 - 4x$, a potom dio grafa ispod x-osi zrcalno preslikajmo s obzirom na x-os. Tim smo postupkom dobili graf funkcije f (Slika 2.6). Kako bismo odredili broj rješenja za pojedini $c \in \mathbb{R}$, trebamo odrediti koliko vrijednosti od x zadovoljava jednadžbu $f(x) = g(x)$ gdje je $g(x) = c$. Dakle, za svaki $c \in \mathbb{R}$ trebamo pronaći broj presjeka pravca $y = c$ s grafom funkcije f. U ovom zadatku graf funkcije f nije potrebno posve precizno nacrtati, ali je važno točno nacrtati nultočke i točku ekstrema (što se može izračunati pomoću formula) kako bi broj presjeka u određenim intervalima bio točan. Sa slike možemo vidjeti da za $c \in \langle 4, \infty\rangle$ pravac siječe graf funkcije f u dvije točke, za $c = 4$ pravac siječe graf u tri točke, za $c \in \langle 0, 4\rangle$ pravac siječe graf u četiri točke, za $c = 0$ u dvije, a za $c \in \langle -\infty, 0\rangle$ pravac ne siječe graf pa jednadžba nema rješenja.



Slika 2.6: Kompozicija kvadratne funkcije i funkcije apsolutne vrijednosti

U drugom polugodištu drugog razreda učenici upoznaju grafove eksponencijalne i logaritamske funkcije te time proširuju svoje mogućnosti korištenja grafičke metode rješavanja zadataka. Učenici sada raspolažu grafičkim prikazima linearne funkcije, funkcije apsolutne vrijednosti, kvadratne funkcije, eksponencijalne i logaritamske funkcije te sada mogu grafički rješavati probleme koji sadrže razne kompozicije navedenih funkcija. U sljedećim primjerima prikazana su rješenja zadataka iz udžbenika za gimnazije ([17]) dobivena grafičkom metodom. Iako je u udžbeniku prikazana i grafička metoda rješavanja zadataka, ona se rijetko koristi i zadaci se većinom rješavaju algebarskom metodom.

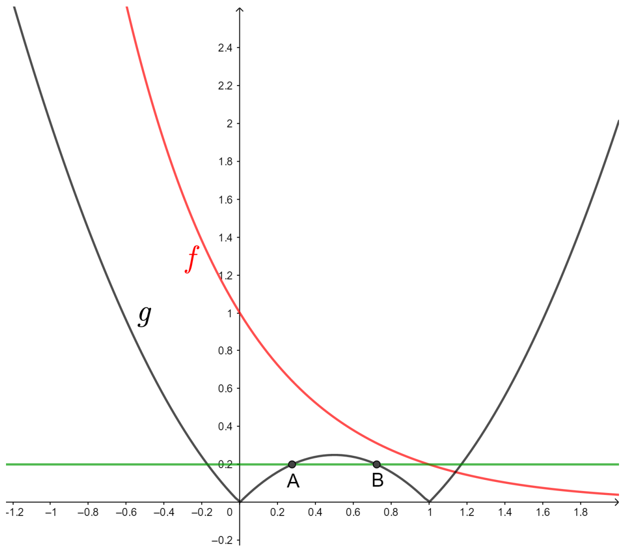
Primjer 2.2.2. *([17]) Koliko rješenja ima jednadžba*

$$(0.2)^x = \left|x - x^2\right| \,?$$

Rješenje. Riješimo zadatak grafički. U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo grafove funkcija $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = (0.2)^x$ i $g(x) = \left|x - x^2\right|$. Graf funkcije g ćemo nacrtati u dva koraka. Prvo nacrtajmo graf funkcije $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirane s $g_1(x) = x - x^2$. To je parabola koja siječe x-os u točkama $(0, 0)$ i $(1, 0)$, okrenuta je prema dolje i ima tjeme u točki $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Kako bismo dobili graf funkcije g, dio grafa funkcije g_1 koji se nalazi ispod x-osi trebamo zrcalno preslikati s obzirom na x-os (Slika 2.7). Eksponencijalna funkcija f

je padajuća jer joj je baza manja od 1, graf joj prolazi točkom $(0, 1)$ i asimptota joj je x-os kada x ide u $+\infty$. Prvo primijetimo da je $f(0) = 1$, a $g(0) = 0$, odnosno $f(0) > g(0)$. Kako je f eksponencijalna funkcija, a g_1 polinom, funkcija f će puno brže padati na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$ od funkcije g te se stoga pripadni grafovi neće sjeći na tom intervalu. Dalje se pitamo koliko brzo funkcija f pada na intervalu $[0, 1]$, odnosno hoće li se grafovi funkcija f i g sijeći na tom intervalu. Vrijedi $f(1) = 0.2$ pa povucimo pravac $y = 0.2$ (na Slici 2.7 označen zelenom bojom). Apscise presjeka pravca $y = 0.2$ i grafa funkcije g rješenja su jednadžbe

$$\begin{aligned} g(x) &= 0.2 \\ \Leftrightarrow\ \left|x - x^2\right| &= 0.2 \\ \Leftrightarrow\ x - x^2 = 0.2 \ \text{ ili } \ x - x^2 &= -0.2. \end{aligned}$$



Slika 2.7: Grafičko rješavanje jednadžbe

Nas zanimaju presjeci na intervalu $[0, 1]$ pa nam je dovoljno promatrati jednadžbu

$$\begin{aligned} & x - x^2 = 0.2 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 + x - 0.2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot (-0.2)}}{-2} \\ \Leftrightarrow\ & x_1 \approx 0.28 \text{ i } x_2 \approx 0.72. \end{aligned}$$

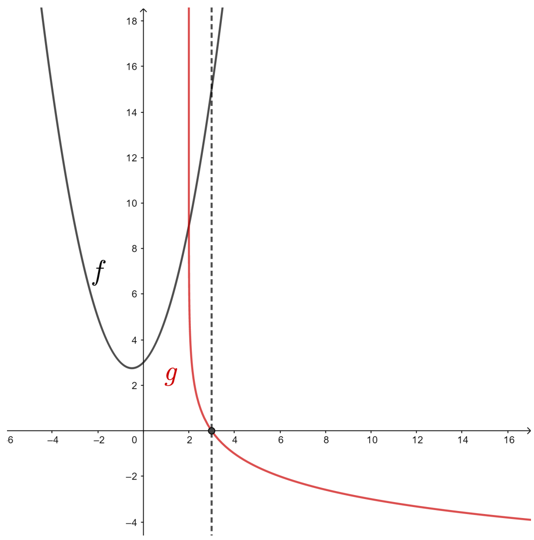
Na Slici 2.7 označene su točke presjeka $A = (0.28, 0.2)$ i $B = (0.72, 0.2)$. Promotrimo ponašanje grafova funkcija f i g na intervalu $[0, 1]$. Za x između 0.72 i 1 grafovi funkcija

f i g se očito ne sijeku jer vrijednosti od f padaju prema 0.2, a vrijednosti od g padaju od 0.2. Za x između 0 i 0.72 je $f(x) > f(0.72) \approx 0.31$, a $g(x) < g(0.5) = 0.25$. Kako je $g(0.5) < f(0.72)$, grafovi funkcija f i g se ne sijeku ni na tom intervalu. Dakle pokazali smo da se grafovi funkcija f i g ne sijeku na intervalu $[0, 1]$. Sada možemo skicirati i graf funkcije f (Slika 2.7) te uočavamo da se grafovi funkcija f i g sijeku u samo jednoj točki, čija se apscisa nalazi u intervalu $\langle 1, \infty\rangle$, odnosno početna jednadžba ima samo jedno rješenje.

Primjer 2.2.3. *([17]) Riješite nejednadžbu*

$$\frac{x^2 + x + 3}{log_{\frac{1}{2}}(x-2)} < 0.$$

Rješenje. Definirajmo funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \langle 2, \infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ s $f(x) = x^2 + x + 3$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Nacrtajmo grafove funkcija f i g u istom koordinatnom sustavu. Graf funkcije f u potpunosti se nalazi iznad osi x jer funkcija f nema realnih nultočki, a graf funkcije g siječe x-os u točki $(3, 0)$ i funkcija g je padajuća jer je baza logaritma manja od 1. Početna nejednadžba je zadovoljena kada vrijednosti izraza u nazivniku i brojniku imaju suprotne predznake, odnosno kada vrijednosti funkcija f i g imaju suprotne predznake. U grafičkom prikazu funkcije imaju vrijednosti suprotnog predznaka kada su grafovi funkcija sa suprotne strane osi x. Sa Slike 2.8 vidimo da to vrijedi za $x > 3$ pa je rješenje početne nejednadžbe $x \in \langle 3, \infty\rangle$.



Slika 2.8: Grafičko rješavanje nejednadžbe

U prirodoslovno-matematičkim gimnazijama u drugom razredu osnovne škole učenici uče i linearno programirati. Linearno programiranje bavi se optimizacijom nekog procesa uz zadana ograničenja. Jednostavniji problemi u linearnom programiranju mogu se lagano prikazati pomoću pravaca i poluravnina u koordinatnom sustavu pa predstavljaju zanimljivi primjer korištenja grafičke metode pri rješavanju problema. U sljedećem primjeru prikazan je jedan takav problem.

Primjer 2.2.4. *Slastičarnica "Pojest ću sve" isporučuje torte i pakete kolača za razna događanja. Očekivane narudžbe svakog dana su barem 80 torti i barem 100 paketa kolača. Slastičarnica svaki dan može proizvesti ograničen broj slastica i to najviše 170 torti i 200 paketa kolača. Ukupno slastičarnica svaki dan isporučuje barem 200 proizvoda, što torti, što paketa kolača. Paketi kolača se prodaju s 20 kn gubitka, a torte s 50 kn dobitka. Koliko kojih slastica slastičarnica treba napraviti u nekom danu da bi u tom danu dobit bila maksimalna?*

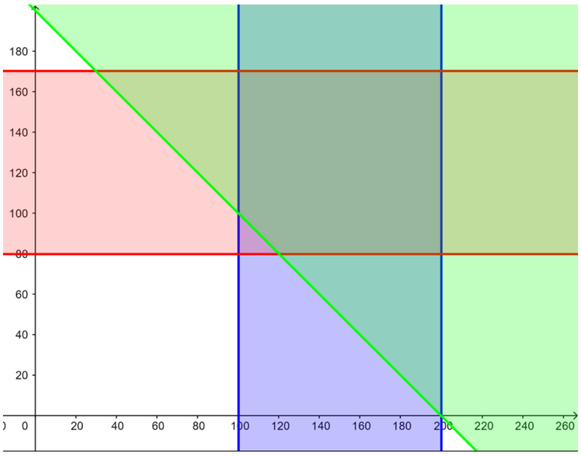
Rješenje. Označimo s x broj proizvedenih paketa kolača i s y broj proizvedenih torti koje slastičarnica napravi u nekom danu. Sada je s $f(x, y) = -20x + 50y$ dana funkcija zarade slastičarnice. Nas zanima za koje je x i y vrijednost od f najveća moguća uz uvjete

$$\begin{aligned} 100 \leqslant x &\leqslant 200, \\ 80 \leqslant y &\leqslant 170, \\ x + y &\geqslant 200. \end{aligned} \tag{2.2}$$

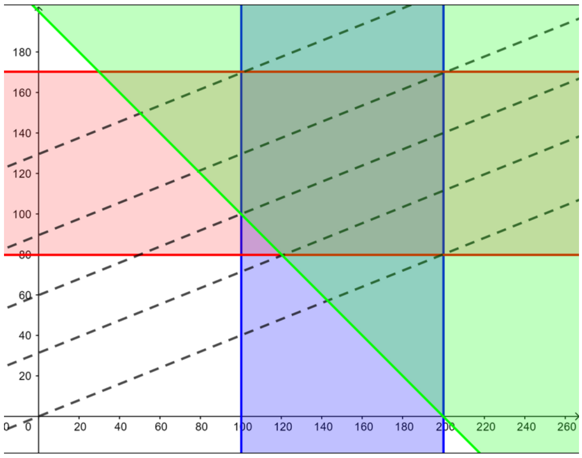
Nacrtajmo zadane uvjete u koordinatnom sustavu (Slika 2.9). Prva dva uvjeta u koordinatnom sustavu predstavljaju dvije pruge, prva je paralelna s osi y, a druga s osi x, na slici označene s plavom i rozom bojom. Poluravninu $x + y \geqslant 200$ dobit ćemo crtanjem pravca $x+y = 200$ koji dijeli ravninu koordinatnog sustava na dvije poluravnine te provjeravanjem koja od dvije poluravnine zadovoljava gornju nejednakost. Ta je poluravnina označena zelenom bojom na slici. Dio ravnine koji zadovoljava sva tri uvjeta (obojan je sa sve tri boje) naziva se područje izvedivosti. Maksimalnu zaradu sada grafički možemo odrediti na dva načina.

Neka za x_M paketa kolača i y_M torti slastičarnica ima najveću dobit. Tada je $f(x_M, y_M) = c$, za neki $c \in \mathbb{R}$, odnosno točka (x_M, y_M) pripada pravcu $y = \frac{2}{5}x + \frac{c}{50}$ za neki c, pri čemu je taj c maksimalni mogući uz zadane uvjete (2.2). Promotrimo sve takve pravce koji prolaze kroz područje izvedivosti. Svi ti pravci su međusobno paralelni jer imaju isti koeficijent smjera $\frac{2}{5}$. Sa Slike 2.10 sada vidimo da pravac s najvećim c prolazi kroz vrh u točki s koordinatama $(100, 170)$ pa možemo zaključiti da će slastičarnica ostvariti najveću dobit ako u promatranom danu proizvede 100 paketa kolača i 170 torti. Ta zarada će iznositi $-20 \cdot 100 + 50 \cdot 170 = 6500$ kn.

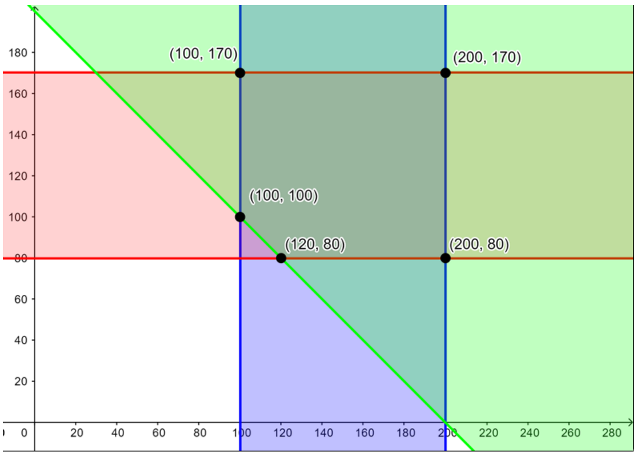
U drugom načinu iz Slike 2.11 možemo odrediti sve vrhove područja izvedivosti i za svaki



Slika 2.9: Područje izvedivosti



Slika 2.10: Traženje maksimuma preko paralelnih pravaca



Slika 2.11: Traženje maksimuma preko vrhova

vrh izračunati zaradu slastičarnice iz formule $f(x, y) = -20x + 50y$. Vrh u kojem se postiže najveća vrijednost je rješenje problema. Uočimo kako je prvi način brži, zahtjeva manje računanja i iz njega jasnije vidimo zašto se u dobivenom vrhu postiže maksimalna zarada.

2.3 Treći razred

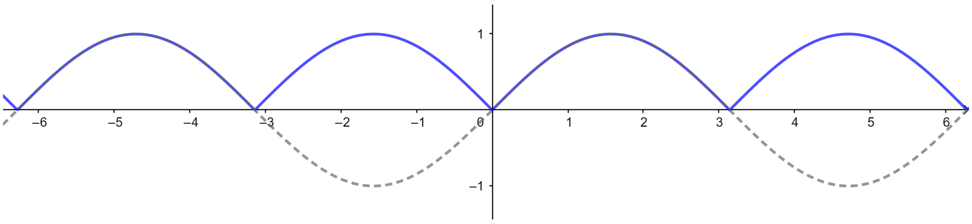
Prvo polugodište trećeg razreda srednje škole učenicima prolazi u znaku trigonometrije. U drugom razredu učenici su naučili trigonometriju pravokutnog trokuta, a sada upoznaju brojevnu kružnicu, trigonometrijske funkcije i identitete te rješavaju probleme s trigonometrijskim jednadžbama i nejednadžbama. U drugom polugodištu učenici uče o vektorima i detaljnije analiziraju pravce, kružnice i krivulje drugog reda. U skup funkcija koje sada znaju koristiti učenici mogu dodati četiri nove (trigonometrijske) funkcije. Sada se učenici znaju koristiti grafovima skoro svih funkcija (osim racionalne) koje mogu koristiti u rješavanju raznih jednadžbi i modeliranju problema iz svakodnevnog života. U sljedećem primjeru prikazana je grafička metoda za određivanje perioda trigonometrijskih funkcija. Primjenom znanja o transformaciji grafa funkcije lako možemo odrediti period funkcije na dobivenoj slici.

Primjer 2.3.1. *Odredite temeljni period funkcija* $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *zadanih s* $f_1(x) = |\sin x|$, $f_2(x) = \sin|x|$, $f_3(x) = |\cos x|$, $f_4(x) = \cos|x|$.

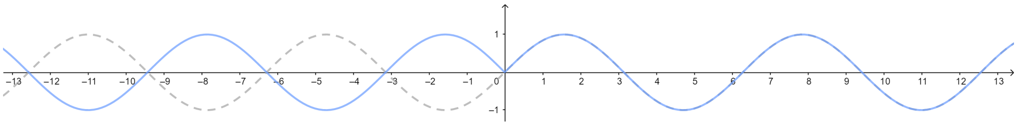
Rješenje. Riješimo zadatak grafički transformacijom grafova funkcija *sinus* i *kosinus*. Graf funkcije f_1 nastaje transformacijom grafa funkcije *sinus* tako da se dio grafa ispod osi x zrcali osno simetrično s obzirom na os x. Na Slici 2.12a plavom je bojom istaknut graf funkcije f_1, a iscrtkano je označen graf funkcije *sinus*. Iz grafa sada vidimo da je temeljni period funkcije f_1 jednak pola temeljnog perioda funkcije *sinus*, odnosno temeljni period je π.
Kako bismo odredili period funkcije f_2, rastavimo njezinu definiciju na dijelove:

$$f_2(x) = \sin|x| = \begin{cases} \sin x, & x \geqslant 0 \\ \sin(-x), & x < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

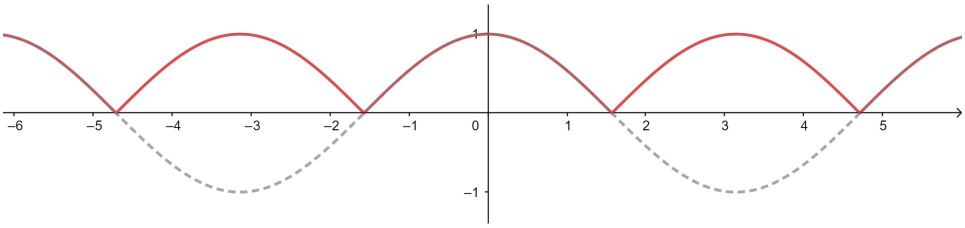
Uočimo kako će vrijednost funkcije f_2 biti ista za svaki x i $-x$ pa ćemo graf funkcije f_2 dobiti zrcaljenjem dijela grafa funkcije *sinus* koji se nalazi desno od y-osi s obzirom na y-os. Na Slici 2.12b vidimo da dobivena funkcija izgleda perodično ako se promatra samo dio grafa lijevo od osi y ili ako se promatra samo dio grafa desno od osi y, ali primjećujemo da se dio grafa oko ishodišta nikad ne ponovi pa funkcija f_2 nije periodična.
Graf funkcije f_3 dobit ćemo analogno kao graf funkcije f_1, zrcaljenjem dijela grafa funkcije *kosinus* koji se nalazi ispod osi x s obzirom na os x. Iz Slike 2.12c vidimo da je period funkcije f_3 jednak pola perioda funkcije *kosinus*, odnosno π.
Definiciju funkcije f_4 možemo rastaviti analogno kao funkciju f_2 no uočimo kako je *kosinus* parna funkcija pa je njezin graf već osno simetričan s obzirom na os y te je graf funkcije f_4 jednak grafu funkcije *kosinus* (Slika 2.12d) pa stoga funkcija f_4 ima i isti period 2π.



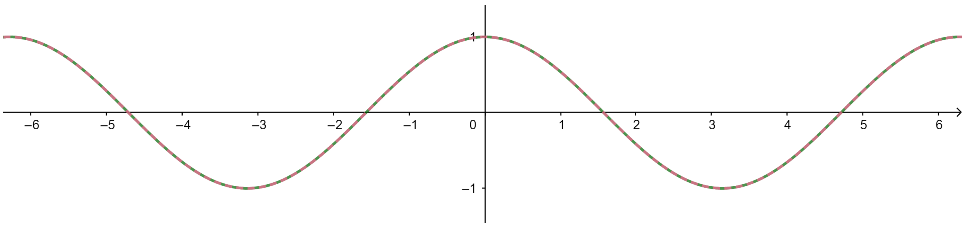
(a) $f_1(x) = |\sin x|$



(b) $f_2(x) = \sin |x|$



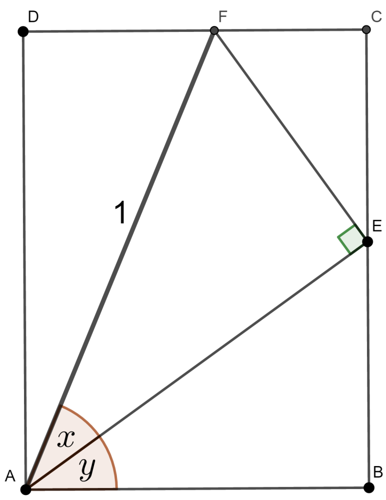
(c) $f_3(x) = |\cos x|$



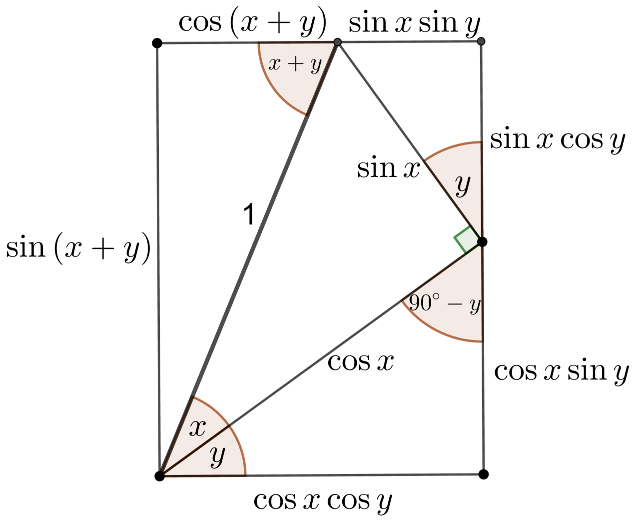
(d) $f_4(x) = \cos |x|$

Slika 2.12: Grafičko određivanje perioda

Mnogi se trigonometrijski identiteti i pravila (poput formula redukcije) mogu pokazati i zapamtiti grafički pomoću brojevne kružnice, no oni koji učenicima zadaju najviše problema, poput adicijskih formula i formula dvostrukog i polovičnog kuta, često se izvode algebarskim metodama. Na Slici 2.14 je prikazana zanimljiva grafička metoda kojom se na brz i efikasan način mogu pronaći formule dvostrukog kuta i adicijske formule. Na Slici 2.14 je prikazano izvođenje adicijskih formula jer su one općenitije, dok se formule za dvostruki kut mogu dobiti tako da uvrstimo $y = x$. Na početku imamo pravokutnik $ABCD$ u koji je upisan pravokutan trokut AEF s hipotenuzom duljine 1 čije stranice donji lijevi kut pravokutnika dijele na kutove veličina $90° - (x + y)$, x i y (Slika 2.13). Ovaj dokaz vrijedi samo za kutove za koje je $0 < x, y < 90°$ i $0 < x + y < 90°$. Također, primijetimo da duljine stranica pravokutnika $ABCD$ ovise o izboru kutova x i y. U pravokutnom trokutu sinus nekog kuta jednak je omjeru duljina nasuprotne katete i hipotenuze, a kosinus nekog kuta jednak je omjeru duljina priležeće katete i hipotenuze. Koristeći se tom činjenicom sada možemo izvesti duljine stranica svih pravokutnih trokuta na Slici 2.13. Pravokutan trokut AEF tada ima katete duljina $|AE| = \cos x$ i $|EF| = \sin x$. Sada možemo odrediti i duljine kateta pravokutnog trokuta ABE čija hipotenuza $\overline{AE}$ ima duljinu $\cos x$. Ponovno iz definicije sinusa i kosinusa kuta pravokutnog trokuta slijedi da je duljina katete $\overline{BE}$, koja je nasuprotna kutu mjere y, jednaka $\cos x \sin y$, dok priležeća kateta $\overline{AB}$ ima duljinu $\cos x \cos y$. Kut pri vrhu E u trokutu ABE jednak je $90° - y$ iz čega slijedi da je kut u trokutu ECF pri vrhu E jednak $180° - (90° - y) - 90° = y$. Sada analognim zaključivanjem dolazimo do duljina kateta pravokutnog trokuta ECF koje su $|CF| = \sin x \sin y$ i $|EC| = \sin x \cos y$. Preostaje nam odrediti katete trokuta ADF. Kut uz vrh F jednak je $x + y$ jer pravac AF možemo promatrati kao presječnicu paralelnih pravaca AB i DC. Sada analognim razmišljanjem za trokut AFD s hipotenuzom duljine 1 i jednim kutom jednakim $x + y$ slijedi da je duljina katete $\overline{AD}$ jednaka $\sin(x + y)$, a duljina kateta $\overline{FD}$ jednaka je $\cos(x + y)$. Adicijske formule sada možemo iščitati iz stranica pravokutnika $ABCD$. Budući da su nasuprotne stranice pravokutnika jednakih duljina, iz lijeve i desne stranice pravokutnika sa Slike 2.14 slijedi $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, a iz gornje i donje stranice pravokutnika dobivamo $\cos(x + y) + \sin x \sin y = \cos x \cos y$ iz čega slijedi $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.



Slika 2.13: Postavljanje slike



Slika 2.14: Grafička reprezentacija adicijskih formula

Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe još su jedan dobar primjer nadopunjavanja algebarske i grafičke metode rješavanja zadataka jer se gotovo svi problemi tog tipa rješavaju uz pomoć brojevne kružnice i pripadnih grafova. Pojedini zadaci se mogu grafičkom metodom riješiti na nekoliko načina. Promotrimo primjer iz jednog udžbenika za srednju školu ([18]) gdje je jedna trigonometrijska nejednadžba riješena na tri različita grafička načina, pomoću brojevne kružnice i pomoću grafa funkcije.

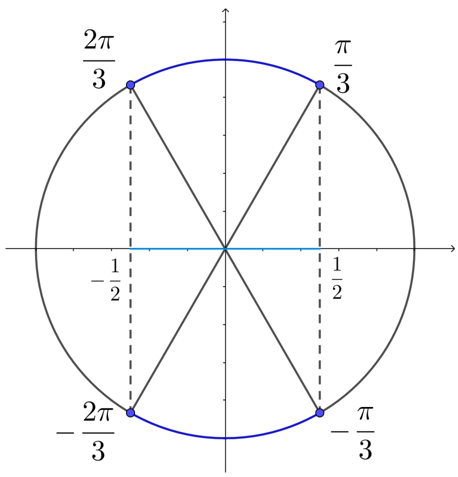
Primjer 2.3.2. *Riješimo nejednadžbu*

$$|\cos x| < \frac{1}{2}.$$

Rješenje.
Prvi način. Iz zadane nejednadžbe dobivamo da je

$$-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}.$$

Period funkcije *kosinus* je 2π pa najprije riješimo nejednadžbu na intervalu duljine 2π. Uzmimo interval $[-\pi, \pi]$. Na brojevnoj kružnici označimo vrijednosti x za koje vrijedi $\cos x = \frac{1}{2}$ i $\cos x = -\frac{1}{2}$ (Slika 2.15). To su $x = \pm\frac{\pi}{3}$ i $x = \pm\frac{2\pi}{3}$. Potom na brojevnoj kružnici označimo lukove koji pripadaju kutovima kojima je vrijednost kosinusa između $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$. Na Slici 2.15 lukovi su označeno plavom bojom.



Slika 2.15: Rješenje pomoću brojevne kružnice

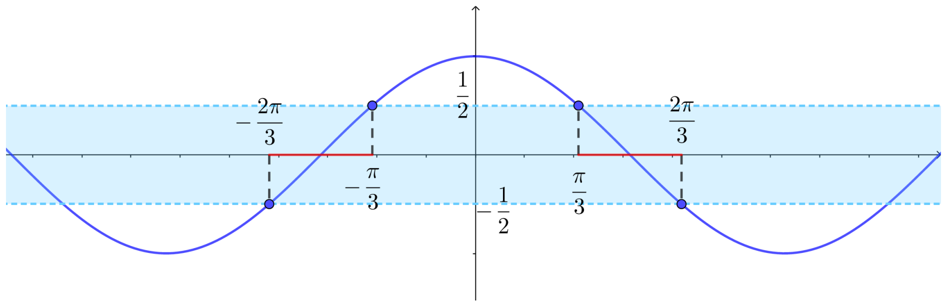
Sada sa slike vidimo da je rješenje jednadžbe na odabranom intervalu $[-\pi, \pi]$ skup realnih brojeva za koje vrijedi

$$-\frac{2\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{3} \text{ ili } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}.$$

Budući da je *kosinus* periodična funkcija s periodom 2π, konačno rješenje nejednadžbe bit će skup

$$\left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{2.4}$$

Drugi način. Nacrtajmo graf funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = \cos x$ u koordinatnom sustavu (Slika 2.16). Iz sustava nejednadžbi $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$ sada slijedi da nas zanimaju dijelovi grafa za čije točke (x, y) vrijedi $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$. Oni se nalaze unutar pruge koja sadrži točke koje su od x-osi udaljene za manje od $\frac{1}{2}$ što je na Slici 2.16 grafički prikazano plavom prugom. Preostaje očitati intervale u kojima je graf funkcije f unutar pruge. Intervali rješenja su na Slici 2.16 označeni crvenom bojom na osi x. Uočimo kako je dovoljno promatrati vrijednosti na jednom periodu jer je funkcija periodična, a praktično je promatrati period oko ishodišta, odnosno interval $[-\pi, \pi]$. Dobivamo isto rješenje (2.4) kao i u prvom načinu rješavanja.



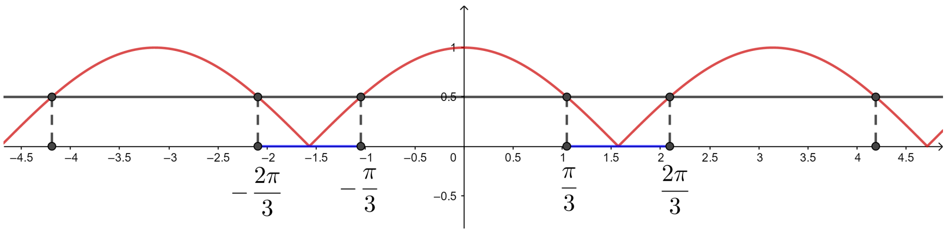
Slika 2.16: Rješenje pomoću grafa funkcije *kosinus*

Treći način. Nacrtajmo grafove funkcija $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = |\cos x|$ i $g(x) = \frac{1}{2}$ u koordinatnom sustavu. Sada promatramo dio grafa funkcije f koji se nalazi strogo ispod grafa funkcije g (Slika 2.17). Primijetimo kako je na ovoj slici lako uočiti da rješenje nejednadžbe zapravo možemo zapisati pomoću jednog skupa

$$\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\},$$

jer je periodično s periodom π. Iako je na prvi pogled ovo rješenje drugačije od rješenja iz prva dva načina, i u gornjim načinima smo ga mogli tako zapisati, ali je na Slici 2.17 lakše uočiti periodičnost s periodom π nego na Slikama 2.15 i 2.16 gdje nam se nameće period 2π.

Trigonometrijske funkcije su izuzetno zanimljive jer se pomoću njih mogu modelirati mnoge pojave iz svakodnevnog života poput duge, zvučnog vala, napona zavojnice, valnog



Slika 2.17: Rješenje pomoću grafa funkcije $f(x) = |\cos x|$

gibanja i kružnog gibanja ([27]). U sljedećem primjeru učenici na temelju podataka o vremenu plime i oseke modeliraju visinu mora trigonometrijskom funkcijom. Graf funkcije u ovakvim zadacima pridonosi boljem razumijevanju problema i bržem uočavanju traženih vrijednosti.

Primjer 2.3.3. *([27]) Tablica 2.1 pokazuje vremena plime i oseke. Oznake na mjernoj postaji zaljeva pokazale su za prethodni dan plimu dubine 2.13 m, a oseku dubine 1.22 m.*

1. *Kolika je srednja dubina vode u zaljevu? Kolika je amplituda varijacije od prosječne dubine?*
2. *Koliko traje jedan krug plime?*
3. *Napišite funkciju koja modelira vezu između dubine vode i vremena u danu.*
4. *Pretpostavite da vaš brod treba barem 1.55 m dubine da biste prešli zaljev. Između kojih vremena u danu trebate ići preko zaljeva?*

plima/oseka	**vrijeme**
plima	4:03
oseka	10:14
plima	16:25
oseka	22:36

Tablica 2.1: Tablica plime i oseke

Rješenje. Modelirajmo zadani problem funkcijom. Uočimo kako će funkcija imati maksimum (dubinu mora u vrijeme plime) i minimum (dubinu mora u vrijeme oseke) koji se redom izmjenjuju otprilike svakih 6 sati. Ti uvjeti nas podsjećaju na trigonometrijske funkcije *sinus* i *kosinus* s periodom jednakim 12 sati. Budući da mjerenja u tablici počinju od plime, kada je more najdublje, zgodno je uzeti funkciju *kosinus* zbog njenog grafa koji postiže najveću vrijednost za $x = 0$. Neka varijabla x predstavlja vrijeme koje je prošlo od prve plime u danu, odnosno neka trenutak $x = 0$ predstavlja trenutak prve plime u danu. Naša funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ će tada imati oblik $f(x) = a\cos(bx + c) + d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Iz podataka ćemo odrediti koeficijente tražene funkcije kako bismo mogli nacrtati njen graf.

1. Iz činjenice da je najveća dubina vode 2.13 m, a najmanja 1.22 m slijedi da je srednja dubina vode aritmetička sredina ta dva podatka, tj. jednaka je $\frac{2.13+1.22}{2} = 1.675$ m. Sada možemo zaključiti da središnja linija sinusoide (linija koja označava srednju vrijednost između dva ekstrema) neće biti $y = 0$, već $y = 1.675$ (na Slici 2.18 i 2.19 označena iscrtkano) pa vrijedi $d = 1.675$. Amplituda je najveći pomak od prosječne dubine, tj. razlika u dubini između maksimuma i srednje dubine pa ona iznosi $2.13 - 1.675 = 0.455$ m. Dakle, za funkciju f vrijedi $a = 0.455$.

2. Jedan krug plime traje od početka prve do početka druge plime što iz tablice možemo lako izračunati: $16 : 25 - 4 : 03 = 12 : 22$. Pretvorimo li sate u minute, dobit ćemo 742 minute. Tada je period naše funkcije jednak 742 te pomoću njega možemo izračunati koeficijent b jer vrijedi:

$$T = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{742} = \frac{\pi}{371}.$$

   Važno je napomenuti da u stvarnom životu svaki krug plime ima drugačije vrijeme trajanja. Gornji račun je proveden za podatke iz tablice za određeni dan. Ukoliko imamo više različitih vremena trajanja plime, za modeliranje funkcije možemo uzeti srednju vrijednost svih vremena ili neku drugu aproksimaciju vremena.

3. Budući da smo problem modelirali funkcijom *kosinus* i da iz teksta zadatka znamo da je na početku dubina mora najveća, možemo zaključiti da nema pomaka po osi x, odnosno vrijedi $c = 0$. Uvrštavanjem svih izračunatih vrijednosti u funkciju f imamo

$$f(x) = 0.455\cos\left(\frac{\pi}{371}x\right) + 1.675. \tag{2.5}$$

   Nacrtajmo graf funkcije f (Slika 2.18).

4. Zanimaju nas periodi u danu kada je more u zaljevu duboko 1.55 m ili dublje od toga. Oni odgovaraju dijelovima grafa funkcije f koji se nalaze iznad pravca $y = 1.55$. Na Slici 2.19 je taj pravac označen crvenom bojom. Označeni su i njegovi presjeci s grafom funkcije f iz kojih ćemo odrediti tražene dijelove dana. Ukoliko graf nacrtamo u programu poput GeoGebre, x koordinate točaka presjeka možemo prezicno očitati s grafa i zaključiti kako je graf funkcije f iznad pravca $y = 1.55$ na intervalima $[-218.37, 218.37]$ i $[523.62, 960.37]$. Ako smo graf crtali na papiru, tada je

potrebno izračunati koordinate točaka presjeka pomoću funkcije *arccos*. Uvrštavanjem $f(x) = 1.55$ u funkciju (2.5) dobivamo:

$$\begin{aligned} & 1.55 = 0.455\cos\left(\frac{\pi}{371}x\right) + 1.675 \\ \Leftrightarrow\ & -0.125 = 0.455\cos\left(\frac{\pi}{371}x\right) \\ \Leftrightarrow\ & -0.27473 = \cos\left(\frac{\pi}{371}x\right) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\pi}{371}x = \arccos(-0.27473) + 2k\pi \ \text{ ili} \qquad (2.6a) \\ & \frac{\pi}{371}x = -\arccos(-0.27473) + 2k\pi. \qquad (2.6b) \end{aligned}$$

Nas zanimaju vrijednosti za x koje pripadaju promatranom danu, odnosno koje su između 0 h i 24 h. Primijetimo da vremenu 0 sata odgovara $x = -243$, a vremenu 24 sata odgovara $x = 1197$. Sada ćemo pronaći koje od točaka koje zadovoljavaju (2.6a) i (2.6b) pripadaju tom intervalu. Prvo iz jednadžbe (2.6b) za $k = 0$ dobivamo

$$x_1 = -\frac{371}{\pi} \cdot \arccos(-0.27473) = -218.366. \qquad (2.7)$$

Prvu sljedeću točku dobivamo iz (2.6a) za $k = 0$, odnosno vrijedi

$$x_2 = \frac{371}{\pi} \cdot \arccos(-0.27473) = 218.366.$$

Sljedeću točku dobivamo iz (2.6b) za $k = 1$ te vrijedi

$$x_3 = \frac{371}{\pi}(-\arccos(-0.27473) + 2\pi) = 523.634,$$

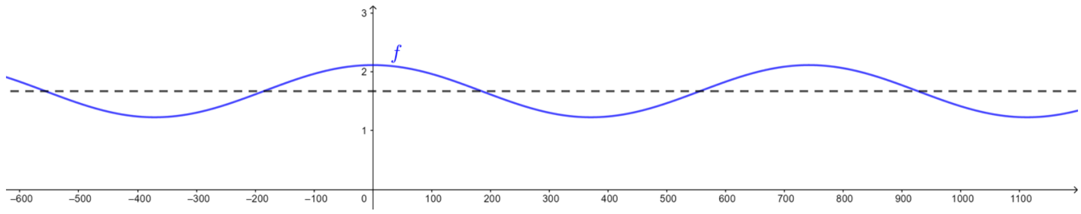
iduću iz (2.6a) za $k = 1$:

$$x_4 = \frac{371}{\pi}(\arccos(-0.27473) + 2\pi) = 960.366,$$

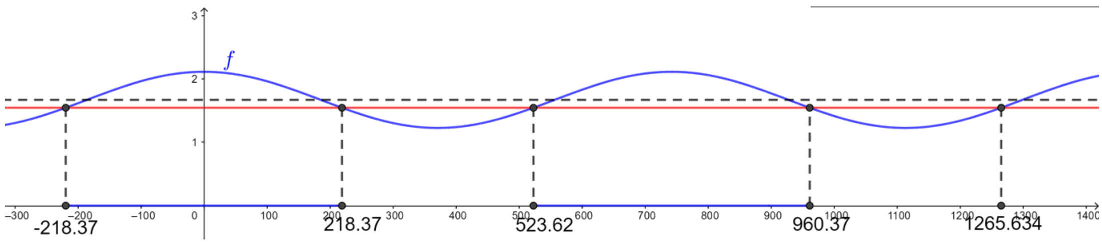
a petu iz (2.6b) za $k = 2$:

$$x_5 = \frac{371}{\pi}(-\arccos(-0.27473) + 4\pi) = 1265.634.$$

Uočimo kako ne trebamo tražiti daljnje točke jer smo s točkom $x_5 = 1265.634$ ušli u vrijeme drugog dana. Pretvorimo rubove intervala u sate i minute: $-218.37 \approx -3 : 38$, $218.37 \approx 3 : 38$, $523.63 \approx 8 : 44$, $960.37 \approx 16$, $1265.634 \approx 21 : 06$. Budući da smo mjerenje započeli u 4:03, intervali u kojima možemo prijeći zaljev su sada $[0 : 25, 7 : 41]$ i $[12 : 47, 20 : 03]$.



Slika 2.18: Modeliranje trigonometrijskom funkcijom



Slika 2.19: Modeliranje trigonometrijskom funkcijom

Osim trigonometrijskih funkcija, učenici u trećem razredu upoznaju analitičke pojmove vezane za pravac i kružnicu te se po prvi puta susreću s konikama. Mnogi zadaci ispituju odnos konika i pravaca te u nastavku slijedi primjer u kojem nam grafički prikaz i zaključivanje na temelju njega mogu smanjiti analitički dio računa.

Primjer 2.3.4. *([19]) Za koje vrijednosti realnog parametra k pravac $y = kx + 2$ siječe parabolu $y^2 = 4x$ u dvjema točkama, za koje k je njezina tangenta, a za koje k pravac i parabola nemaju zajedničkih točaka?*

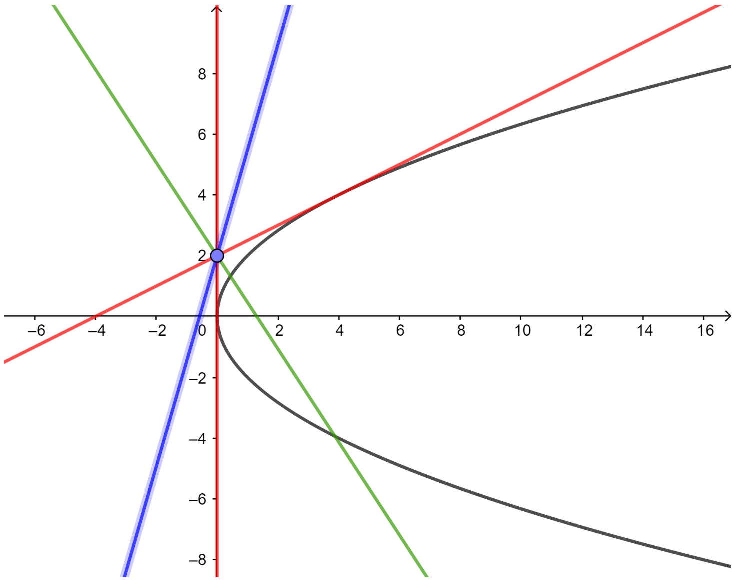
Rješenje. U koordinatnom sustavu nacrtajmo zadanu parabolu. Iz eksplicitne jednadžbe pravca $y = kx + 2$ znamo da pravac prolazi točkom $(0, 2)$ pa i nju ucrtajmo u koordinatni sustav (Slika 2.20). Trebamo odrediti položaj pravca i parabole za različite koeficijente smjera pravca $y = kx + 2$. Rubni slučaj su tangente koje su na slici označene crvenom bojom. Odmah uočavamo da je jedna tangenta os y, odnosno pravac $x = 0$, a koeficijent smjera druge tangente izračunajmo algebarski. Pravac je tangenta kada sustav

$$\begin{cases} y = kx + 2 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

ima jedno rješenje. Uvrštavanjem izraza za y iz prve jednadžbe u drugu dobivamo kvadratnu jednadžbu $k^2x^2 + 4kx + 4 = 4x \Leftrightarrow k^2x^2 + 4(k-1)x + 4 = 0$. Početni sustav ima jedno rješenje kada dobivena kvadratna jednadžba ima jedno rješenje, odnosno kada joj je diskriminanta D jednaka 0. Sada imamo

$$D = 16(k-1)^2 - 4 \cdot k^2 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow -32k + 16 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Dakle, za $k = \frac{1}{2}$ pravac $y = kx + 2$ je tangenta parabole. Iz Slike 2.20 sada vidimo da pravac koji se nalazi između dvije tangente u dijelu ravnine kojem pripada i plavi pravac ne siječe parabolu, a onaj koji se nalazi između tangenti u dijelu ravnine kao i zeleni pravac siječe parabolu u dvije točke. Uočimo da će za sve pravce poput plavog vrijediti $k \in \langle \frac{1}{2}, \infty \rangle$ te pravac $y = kx + 2$ neće sjeći parabolu. Uočimo kako će za pravce poput zelenog vrijediti $k \in \langle -\infty, \frac{1}{2} \rangle$ te će ti pravci $y = kx + 2$ sjeći parabolu u dvije točke.



Slika 2.20: Odnos pravca i parabole

2.4 Četvrti razred

U četvrtom razredu učenici otkrivaju glavne osobine nizova. Učenici su se već susretali s raznim nizovima u svom obrazovanju, ali ih nikada nisu dublje analizirali i opisivali. Glavni pojam koji učenici trebaju savladati u lekciji *Nizovi* je limes niza. Iako je učenicima u početku možda teško vizualizirati limes niza, jednostavni digitalni alati, poput Excela kojim se učenici već znaju dobro služiti, nude mogućnost grafičke reprezentacije i otkrivanja pojma limesa. Korištenje Excela u vizualizaciji limesa niza prikazano je u idućem primjeru. Uz pomoć računala možemo i grafički odrediti limes niza, ali ipak je preciznije odrediti ga računski koristeći pravila računanja limesa.

Primjer 2.4.1. *Odredite limes sljedećih nizova:*

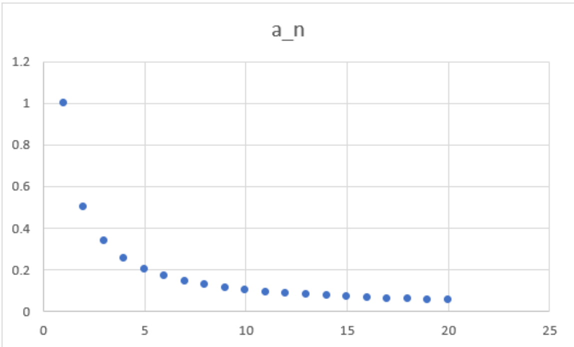
$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Rješenje. Odredimo vrijednosti niza za nekoliko malih $n \in \mathbb{N}$ i nekoliko relativno velikih tako što ćemo popuniti tablicu u Excelu (Slika 2.21).

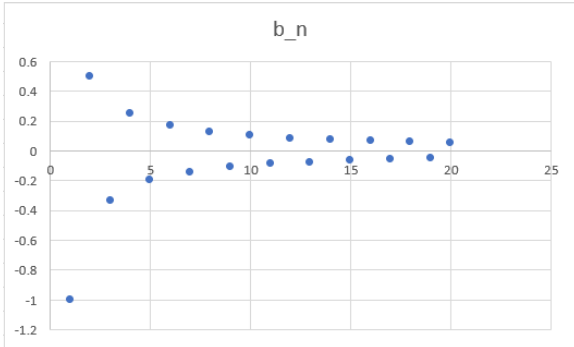
n	a_n	b_n
1	1	-1
2	0.5	0.5
3	0.33333333	-0.33333333
4	0.25	0.25
5	0.2	-0.2
6	0.16666667	0.16666667
7	0.14285714	-0.14285714
8	0.125	0.125
9	0.11111111	-0.11111111
10	0.1	0.1
11	0.09090909	-0.09090909
12	0.08333333	0.08333333
13	0.07692308	-0.07692308
14	0.07142857	0.07142857
15	0.06666667	-0.06666667
16	0.0625	0.0625
17	0.05882353	-0.05882353
18	0.05555556	0.05555556
19	0.05263158	-0.05263158
20	0.05	0.05
100	0.01	0.01
1000	0.001	0.001
10000	0.0001	0.0001
100000	0.00001	0.00001

Slika 2.21: Generiranje nizova u Excelu

Iz tablice vidimo kako oba niza teže u 0, ali vrijednosti niza b_n skaču iz pozitivnog u negativno. Prikažimo vrijednosti grafički, točkastim dijagramom u Excelu (Slika 2.22 i Slika 2.23). Sada je lako uočiti da će se oba niza približavati nuli, ali ne na isti način. Ovim načinom sve nizove možemo ispitati i grafički prikazati kako bi učenicima što lakše približili koncept limesa. Koncepti niza i limesa iznimno su važni za izgradnju pojma funkcije te kasnije derivacije i integrala.



Slika 2.22: Niz a_n



Slika 2.23: Niz b_n

Funkcije su jedan od glavnih pojmova u matematici, ali učenici se tek u četvrtom razredu detaljno bave njima. Važno je da učenici razumiju detaljnu analizu funkcija i njihov prikaz jer manipuliranje funkcijama predstavlja jedno od temeljnih znanja matematike. Funkcijama se koristimo gotovo kroz čitavo obrazovanje pa smo ih tako često koristili i u ovom radu, ali tek se u ovoj lekciji na kraju srednje škole detaljno obrađuju svi aspekti tog pojma. Svaka je funkcija usko povezana sa svojim grafičkim prikazom i često se miješa pojam funkcije i grafa funkcije. Promotrimo sljedeće definicije u svrhu razlikovanja spomenutih pojmova.

Definicija 2.4.2. *Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Funkcija $f : D \longrightarrow K$ je pridruživanje koje svakom elementu $x \in D$ pridružuje točno jedan element $y \in K$.*

Definicija 2.4.3. *([20]) Graf Γ_f funkcije f skup je svih točaka $(x, f(x))$, za sve x iz domene D funkcije f:*

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in D, y = f(x)\}.$$

Grafički prikaz funkcije često koristimo pri modeliranju i rješavanju problema. Ako graf funkcije crtamo na računalu, tada ćemo svojstva funkcije poput domene, kodomene, parnosti, periodičnosti, monotonosti i neprekidnosti lako moći uočiti iz grafa, no ako graf crtamo na papiru, tada su nam ta svojstva potrebna da bismo uopće nacrtali graf pa ih prvo trebamo računski odrediti. Funkcija je parna ukoliko je njen graf simetričan s obzirom na os y, a neparna ukoliko joj je graf simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Periodičnost funkcije vidljiva je u grafu tako što je i graf periodičan. Monotonost i neprekidnost funkcije lako se uočavaju iz grafa. Ako funkcija raste, raste i njezin graf. Ako graf ima prekid u nekoj točki, onda funkcija nije neprekidna u toj točki (kod elementarnih funkcija se to svojstvo lako uočava, kod nekih drugih funkcija nije ponekad posve jasno sa slike imamo li prekid). Ukoliko funkcijom modeliramo problem, tada njena uočena svojstva možemo primijeniti i na početni problem. Promotrimo nekoliko primjera u kojima zadatke možemo riješiti crtanjem grafa funkcije.

Primjer 2.4.4. *([20]) Je li funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana s*

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \ x < 0 \\ -x+1, \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1, \ x > 1 \end{cases}$$

bijekcija?

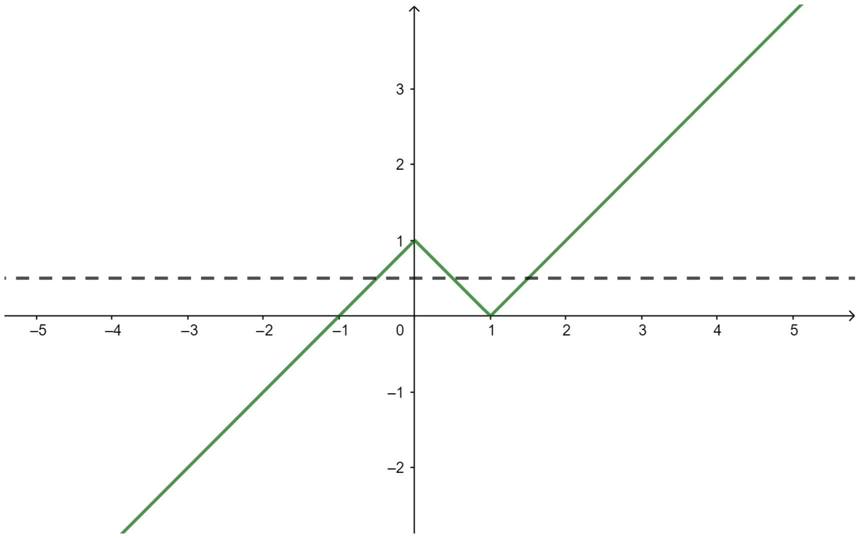
Rješenje. Nacrtajmo graf funkcije f. Za $x < 0$ nacrtajmo pravac $y = x+1$, za $0 \leqslant x \leqslant 1$ pravac $y = -x+1$ te za $x > 1$ pravac $y = x-1$ (Slika 2.24). Funkcija je bijekcija ako i samo ako je injekcija i surjekcija. Injektivnost funkcije na njenom grafu provjeravamo horizontalnim testom. Znamo da je funkcija injektivna ako svaki pravac paralelan s osi x siječe njen graf u najviše jednoj točki. Uočimo kako za $k \in \langle 0, 1\rangle$ pravac $y = k$ siječe graf funkcije f u čak tri točke pa funkcija nije injekcija te odmah možemo zaključiti da nije niti bijekcija. Kada bi funkcija bila injekcija, surjektivnost bismo provjerili tako da provjerimo siječe li svaki pravac paralelan s osi x graf funkcije f. Ukoliko kodomena funkcije f nije cijeli $\mathbb{R}$, već neki skup $K \subset \mathbb{R}$, onda promatramo samo pravce oblika $y = k,\ k \in K$, odnosno promatramo samo one pravce paralelne s osi x na visini koja je neki broj iz kodomene. Ako svaki takav pravac siječe graf funkcije f, onda je funkcija surjekcija. Sada možemo uočiti da funkcija f je surjekcija, ali nije injekcija pa nije ni bijekcija.

Primjer 2.4.5. *U skupu $\mathbb{R}$ riješi jednadžbu $(f \circ g)(x) = x$ ako je $f(x) = \left|x^2 - 4\right| - 1$ i $g(x) = x - 1$.*

Rješenje. Riješimo jednadžbu grafički crtajući graf funkcije $f \circ g$ i pravac $y = x$ u istom koordinatnom sustavu. Prvo moramo odrediti pravilo pridruživanja za funkciju $f \circ g$:

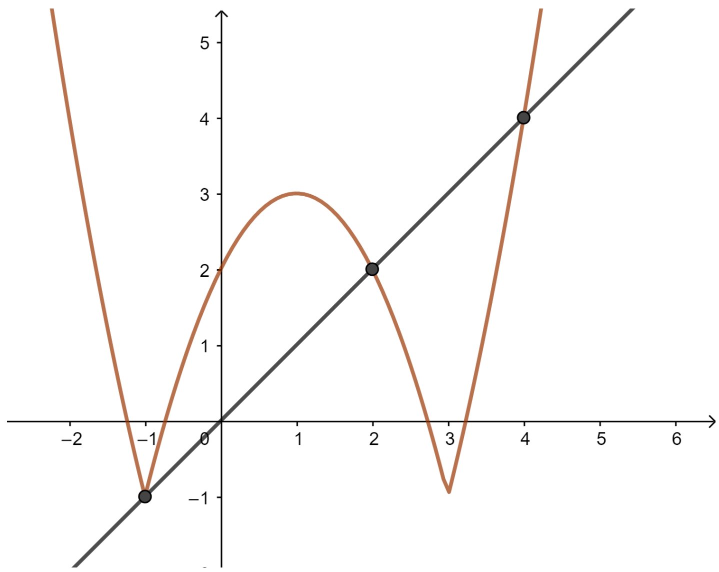
$$(f \circ g)(x) = f(x-1) = \left|(x-1)^2 - 4\right| - 1 = \left|x^2 - 2x - 3\right| - 1.$$

Graf funkcije možemo crtati na računalu ili u nekoliko koraka na papiru. Prvo nacrtajmo parabolu $y = x^2 - 2x - 3$ te potom njen dio ispod osi x osno simetrično preslikajmo s obzirom na os x. Dobiveni graf translatirajmo po osi y za jedan prema dolje. Time smo dobili graf funkcije $f \circ g$. Rješenje početne jednadžbe dobit ćemo pomoću presjeka dobivenog



Slika 2.24: Grafičko ispitivanje bijekcije

grafa i pravca $y = x$ (Slika 2.25). Iz slike sada vidimo da jednadžba ima tri rješenja koja su apscise točaka presjeka $(-1, -1)$, $(2, 2)$ i $(4, 4)$. Ručno crtanje parabole može biti neprecizno pa je rješenja korisno provjeriti direktnim uvrštavanjem. Ukoliko se grafovi crtaju u programu dinamičke geometrije, presjeci se mogu lako naći pa je očitavanje koordinata puno preciznije, a rješenja se opet mogu provjeriti uvrštavanjem.



Slika 2.25: Grafički prikaz kompozicije funkcija

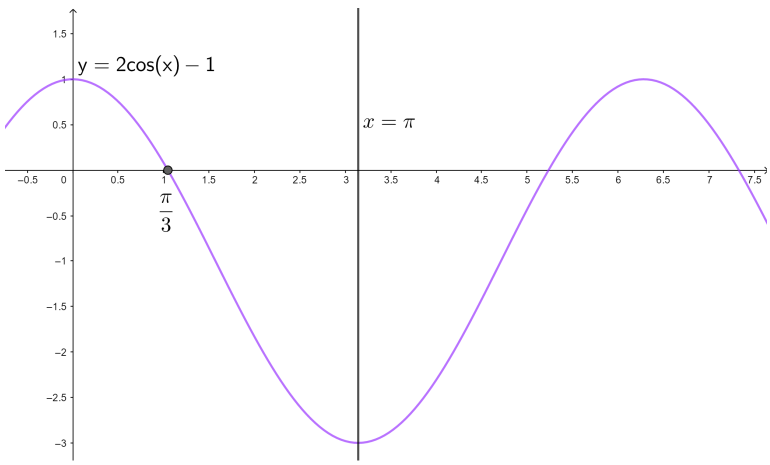
U drugom polugodištu četvrtog razreda učenici se bave derivacijama i integralima. Učenici koji upišu tehničke i znanstvene fakultete upravo će se time najviše služiti u fakultetskoj matematici. Derivacija funkcije je bitna za opisivanje tijeka funkcije što nam pomaže u crtanju njezinog grafa. Crtanjem grafa funkcije i računanjem integrala možemo izračunati površine likova omeđenih krivuljama i volumene rotacijskih tijela. U sljedećim primjerima prikazana je primjena integrala u računanju površina i volumena.

Primjer 2.4.6. *Izračunaj površinu lika omeđenog krivuljama $y = 2\cos x - 1$, $x = 0$, $x = \pi$ i $y = 0$.*

Rješenje. Nacrtajmo krivulje u istom koordinatnom sustavu. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s $f(x) = 2\cos x - 1$. Krivulja $y = 2\cos x - 1$ je sada graf funkcije f koji se dobiva iz grafa funkcije *kosinus* tako da se amplituda poveća na 2 i da se dobiveni graf pomakne za -1 po osi y. Izračunajmo točke u kojima graf funkcije f siječe os x:

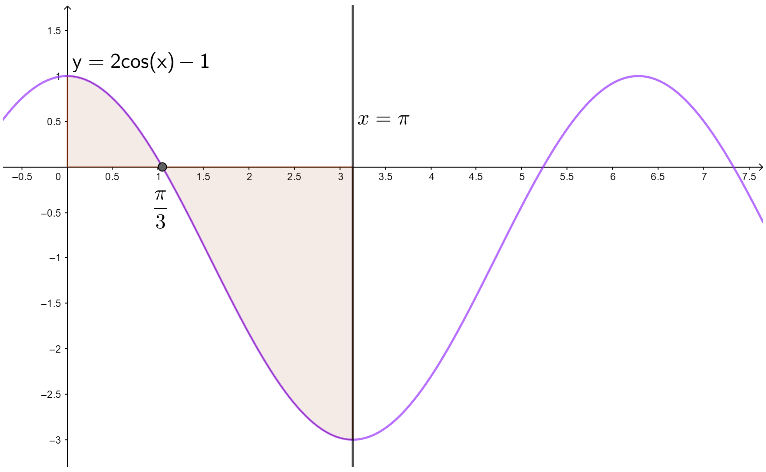
$$\begin{aligned} 2\cos x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Na intervalu $[0, \pi]$ graf funkcije f siječe os x samo u točki $x = \frac{\pi}{3}$. Pravci $x = 0$ i $y = 0$ su redom y-os i x-os, a pravac $x = \pi$ je pravac okomit na os x koji prolazi točkom $(\pi, 0)$ (Slika 2.26).



Slika 2.26: Određivanje površine preko integrala

Promotrimo lik omeđen grafom funkcije f, koordinatnim osima i pravcem $x = \pi$ (Slika 2.27). Dio površine lika se nalazi iznad osi x, a dio ispod. Prisjetimo se da integriranjem funkcije na nekom intervalu dobivamo površinu lika ispod grafa funkcije (omeđenog s osi x), ali samo u slučaju kada je čitav graf na tom intervalu iznad osi x. Ukoliko se graf funkcije nalazi ispod osi x, tada integriranjem dobivamo negativan broj, čija je apsolutna vrijednost jednaka površini između grafa funkcije i osi x. Lik sa Slike 2.27 sada možemo podijeliti na dva dijela (ispod i iznad osi x) te svakom dijelu izračunati njegovu površinu koristeći integral.



Slika 2.27: Određivanje površine preko integrala

Površina dijela iznad osi x jednaka je integralu od 0 do $\frac{\pi}{3}$ funkcije f:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)\, dx = (2\sin x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \left(2\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - (2\sin 0 - 0) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Površina dijela ispod osi x jednaka je negativnom integralu od $\frac{\pi}{3}$ do π funkcije f:

$$\begin{aligned} P_2 &= -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (2\cos x - 1)\, dx = -(2\sin x - x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \\ &= -\left[(2\sin\pi - \pi) - \left(2\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = -(-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}) = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ukupna površina lika je sada zbroj dviju dobivenih povšina, odnosno:

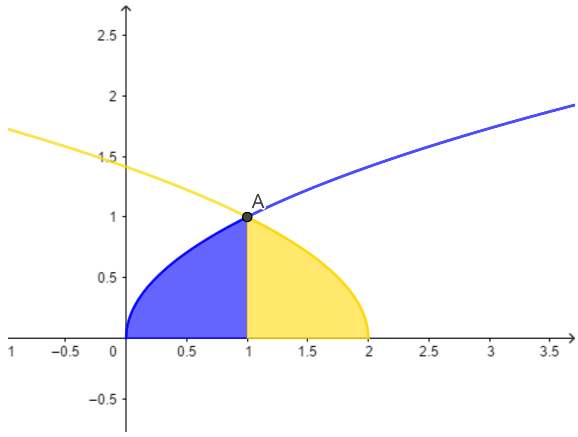
$$P = P_1 + P_2 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}.$$

Primjer 2.4.7. *([21]) Izračunaj volumen rotacijskog tijela koje nastaje rotacijom oko osi* x *lika omeđenog krivuljama* $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2-x}$ *i* $y = 0$.

Rješenje. U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo krivulje $y = \sqrt{x}$ i $y = \sqrt{2-x}$. Krivulju $y = \sqrt{2-x}$ (na Slici 2.28 označenu žutom bojom) dobivamo kada zrcalno preslikamo krivulju $y = \sqrt{x}$ (na Slici 2.28 označenu plavom bojom) s obzirom na os y te dobivenu krivulju translatiramo za 2 po osi x. Pronađimo prvo presjek dviju krivulja:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2-x} = y = \sqrt{x} \\ \Rightarrow &2 - x = x \\ \Leftrightarrow &x = 1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dakle, presjek je točka $(1, 1)$, na Slici 2.28 označena slovom A. Zadani lik možemo podijeliti na dva dijela. Na Slici 2.28 plavi dio lika se nalazi ispod krivulje $y = \sqrt{x}$ za $x \in [0, 1]$, a žuti dio se nalazi ispod krivulje $y = \sqrt{2-x}$ za $x \in [1, 2]$.



Slika 2.28: Određivanje volumena rotacijskog tijela preko integrala

Rotacijom lika omeđenog krivuljama oko osi x dobivamo tijelo na Slici 2.29. Njegov volumen možemo izračunati kao zbroj volumena nastalog rotacijom plavog i žutog lika sa Slike 2.28. Krivulje rotiramo oko osi x pa one trebaju biti zapisane u obliku $y = f(x)$ jer onda možemo iskoristiti formulu

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

Rotacijom krivulje $y = \sqrt{x}$ za $x \in [0, 1]$ oko osi x dobivamo tijelo volumena

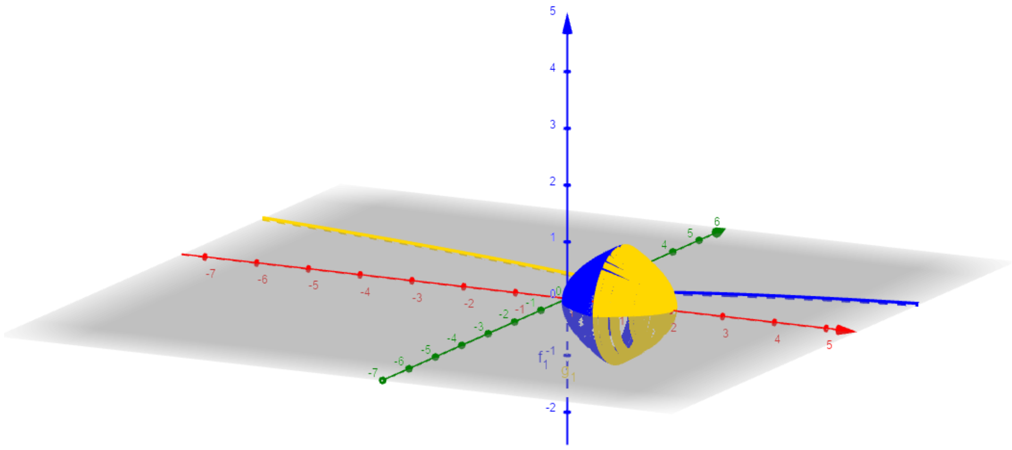
$$V_1 = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^1 x \, dx = \frac{\pi}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \tag{2.12}$$

Rotacijom krivulje $y = \sqrt{2-x}$ za $x \in [1, 2]$ oko osi x dobivamo tijelo volumena

$$V_2 = \pi \int_1^2 (\sqrt{2-x})^2 \, dx = \pi \int_1^2 (2-x) \, dx = \pi(2x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_1^2 = \pi(2 - \frac{3}{2}) = \frac{\pi}{2}. \qquad (2.13)$$

Primijetimo da je $V_1 = V_2$. To smo mogli zaključiti i ranije jer je krivulja $y = \sqrt{x}$ simetrična krivulji $y = \sqrt{2-x}$ s obzirom na pravac $x = 1$. Sada volumen tijela sa Slike 2.29 možemo dobiti kao zbroj gornja dva volumena. Dakle, volumen tijela omeđenog krivuljama $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2-x}$ i $y = 0$ jednak je

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$



Slika 2.29: Rotacijsko tijelo

Bibliografija

[1] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, P. Brkić, M. Karlo i N. Zvelf, *Matematika 6, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u šestom razredu osnovne škole, 1. dio*, Školska knjiga, 2014.

[2] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, P. Brkić, M. Karlo i N. Zvelf, *Matematika 6, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u šestom razredu osnovne škole, 2. dio*, Školska knjiga, 2014.

[3] B. Antunović Piton, T. Djaković, L. Havranek Bijuković, I. Matić i T. Rodiger, *Matematika 8, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u osmom razredu osnovne škole, 1. dio*, Školska knjiga, 2014.

[4] B. Antunović Piton, T. Djaković, L. Havranek Bijuković, I. Matić i T. Rodiger, *Matematika 8, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u osmom razredu osnovne škole, 2. dio*, Školska knjiga, 2014.

[5] B. Antunović Piton, M. Kuliš, I. Matić i N. Zvelf, *Matematika 5, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u petom razredu osnovne škole, 1. dio*, Školska knjiga, 2014.

[6] B. Antunović Piton, M. Kuliš, I. Matić i N. Zvelf, *Matematika 5, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u petom razredu osnovne škole, 2. dio*, Školska knjiga, 2015.

[7] Grupa autora, *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje*, Republika Hrvatska, 2010, `https://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf`.

[8] DOS autori, *Algebarske pločice*, `https://www.geogebra.org/m/EU6KVdzc`.

[9] I. Balković, *Vizualizacija i istraživanje pomoću računala u nastavi matematike*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2014.

[10] A. Bogner Boroš, P. Brkić, L. Havranek Bijuković, M. Karlo i M. Kuliš, *Matematika 7, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u sedmom razredu osnovne škole, 1. dio*, Školska knjiga, 2014.

[11] A. Bogner Boroš, P. Brkić, L. Havranek Bijuković, M. Karlo i M. Kuliš, *Matematika 7, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u sedmom razredu osnovne škole, 2. dio*, Školska knjiga, 2014.

[12] Ž. Brčić, *Sustavi jednadžbi kroz osnovnu školu*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike **14** (2013), br. 54, 28–36.

[13] B. Brežnjak, *Funkcije i njihov grafički prikaz u osnovnoškolskoj nastavi matematike*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2017.

[14] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 1. dio*, Element, 2014.

[15] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 2. dio*, Element, 2014.

[16] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 1. dio*, Element, 2014.

[17] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 2. dio*, Element, 2014.

[18] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 1. dio*, Element, 2014.

[19] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 2. dio*, Element, 2014.

[20] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 1. dio*, Element, 2014.

[21] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 2. dio*, Element, 2014.

[22] D. Glasnović Gracin, *Prelazak sa zbrajanja prirodnih na zbrajanje cijelih brojeva*, Matematika i škola: časopis za nastavu matematike **15** (2014), br. 75, 202–209.

[23] J. Golden, *Euclid's GCD Algorithm*, `https://www.geogebra.org/m/JstAZYHG`.

[24] J. Hoven i B. Garelick, *Singapore math: Simple or complex?*, Educational Leadership **65** (2007), br. 3, 28.

[25] D. Jelenčić i M. Starčević, *Grafičko rješavanje sustava jednadžbi s apsolutnim vrijednostima*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike **17** (2016), br. 66, 14–23.

[26] D. Kezerić, *Didaktički modeli i situacije u nastavi matematike*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2018.

[27] J. Lukač, *Periodičnost u svijetu oko nas*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike **15** (2014), br. 57, 30–39.

[28] P. Mladinić, *Koordinatna metoda i rješavanje problema*, Matka: časopis za mlade matematičare **26** (2018), br. 104, 273–277.

[29] N. Presmeg, *Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology*, Handbook of research on the psychology of mathematics education, Brill Sense, 2006, str. 205–235.

[30] A. I. Robold, *Poučavanje koncepata razlomaka i racionalnih brojeva pomoću modela površine*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike **12** (2011), br. 45, 62–65.

[31] B. Rösken i K. Rolka, *A picture is worth a 1000 words–the role of visualization in mathematics learning*, Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, sv. 4, Citeseer, 2006, str. 457–464.

[32] S. Varošanec, *Neke metode rješavanja problemskih zadataka*, Poučak **1** (2002), 32–38.

[33] W. Zimmermann i S. Cunningham, *Editor's introduction: What is mathematical visualization*, Visualization in teaching and learning mathematics (1991), 1–7.

Sažetak

Mozak većinu informacija usvaja preko vizualnog kanala. Usprkos tome, metode poučavanja matematike često zanemaruju tu činjenicu te prednost daju algebarskim metodama nad grafičkim. Ovaj rad proučava primjenu grafičkih metoda u rješavanju problema iz raznih područja matematike kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje. Kroz spektar tema od prvog razreda do državne mature uspoređuje se efikasnost i metodička korisnost grafičke metode s obzirom na druge metode te se razmatraju nove primjene i mogućnosti. Cilj rada je nastavnicima dati uvid u razne primjene grafičkih metoda te ih potaknuti na njihovo korištenje tokom poučavanja i planiranja aktivnosti kako bi se odmakli od standardnih načina rješavanja zadataka.

Summary

The brain receives most of the information through the visual channel. Nonetheless, the methods of teaching mathematics often ignore this fact and give advantage to algebraic methods over graphical ones. This paper looks into the application of graphical methods in solving problems from different areas of mathematics through elementary and high school education. Through the spectrum of topics from the first grade to the high school diploma, it compares the efficiency and methodical benefit of graphical methods with other methods and considers new applications and opportunities. The aim is to give teachers the insight into the various applications of graphical methods so that they can use them during teaching and planning activities in order to move away from standard task solving methods.

Životopis

Rođena sam 23. studenog 1994. godine u Zagrebu. Osnovnu školu Ivana Cankara u Zagrebu završila sam 2009. godine nakon čega sam upisala II. gimnaziju. Maturirala sam 2013. godine s prosjekom 4.9 nakon čega sam odlučila upisati inženjerski smjer Matematičkog odsjeka PMF-a. Prve dvije godine studija uz fakultet sam se aktivno bavila plesom i radom s djecom te sam tako otkrila svoju strast prema radu s djecom i poučavanju. Zbog toga sam se 2015. godine prebacila na nastavnički smjer matematičkog odsjeka PMF-a gdje sam 2017. godine postala sveučilišna prvostupnica edukacije matematike (univ. bacc. educ. math).