Sferna geometrija

Rak, Sunčica

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Sunčica Rak

Sferna geometrija

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, svibanj 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Zahvaljujem svojim roditeljima, braći i prijateljima koji su mi pomogli i uljepšali ovih sedam godina studiranja. Zahvaljujem svom mentoru izv. prof. dr. sc. Vedranu Krčadincu koji me je vodio u izradi ovog rada. Ovaj diplomski rad posvećujem Bogu koji mi je bio najveći oslonac u studentskim danima.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom diplomskom radu obradit ćemo osnovne rezultate sferne geometrije. Model sfere izgradit ćemo u trodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$. Sferna geometrija je interesantna jer se primjenjujuje u astronomiji i navigaciji. Zemlju često promatramo kao kuglu pa je u tom slučaju njezina površina sfera.

U drugom poglavlju ponovit ćemo pojmove iz linearne algebre poput skalarnog produkta, norme, vektorskog produkta i vezu između njih. Svi rezultati napravljeni su na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ i potrebni su za dokaze u ostalim poglavljima.

U trećem poglavlju obradit ćemo osnovne pojmove modela sfere. Napravit ćemo parametrizaciju sfere, definirati sferu, veliku kružnicu, antipodalne točke i udaljenost između dviju točaka. U ovom poglavlju želimo odrediti što je to pravac na sferi, sijeku li se pravci i u koliko točaka? Na Zemaljskoj kugli je Sjeverni pol najudaljenija točka od Južnog pola. Što je karakteristično za takve dvije točke? Ako putujemo najkraćim putem od Zagreba do Pariza, krećemo li se po dužini ili po nekoj krivulji? Kako možemo odrediti udaljenost između tih gradova?

U četvrtom poglavlju definirat ćemo sferni trokut i proći kroz sfernu trigonometriju. Glavni rezultati ovog poglavlja su analogoni kosinusova, sinusova i Pitagorina poučka. Uz to ćemo dokazat nekoliko trigonometrijskih identiteta za pravokutni sferni trokut. Na samom kraju poglavlja dokazat ćemo dualni teorem o kosinusu po kojem iz danih mjera kutova trokuta možemo odrediti duljine stranica.

U petom poglavlju obradit ćemo grupu izometrija sfere. Definirat ćemo izometriju, ortogonalno preslikavanje i pokazat ćemo da je grupa izometrija sfere izomorfna ortogonalnoj grupi na $\mathbb{R}^3$. Zatim ćemo definirat osnu simetriju i pokazat da se svaka izometrija sfere može prikazati kao kompozicija najviše tri osne simetrije. Na samom kraju poglavlja pokazat ćemo poučke o sukladnosti sfernih trokuta. Osim standardnih poučaka o sukladnosti trokuta koji vrijede u euklidskoj geometriji, u sfernoj geometriji vrijedi i KKK poučak o sukladnosti.

2 Vektorski prostor $\mathbb{R}^3$

U drugoj cjelini ponovit ćemo pojmove iz linearne algebre koje ćemo koristiti u dokazima u sfernoj geometriji. Za potrebe diplomskog rada možemo se ograničiti na trodimenzionalni relani vektorski prostor $\mathbb{R}^3$.

Definicija 2.1. *Skalarni produkt je funkcija* $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *koja svakom uređenom paru vektora* $x, y \in \mathbb{R}^3$ *pridružuje skalar* $\langle x, y \rangle$ *sa sljedećim svojstvima:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0,$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3,$
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R},$
5. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3.$

Definicija 2.2. *Norma je funkcija* $\|.\| : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *koja svakom vektoru* $x \in \mathbb{R}^3$ *pridružuje realan broj* $\|x\|$ *sa sljedećim svojstvima:*

1. $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0,$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R},$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3.$

Propozicija 2.3. *Neka je funkcija* $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *skalarni produkt. Tada vrijedi*

1. $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R},$
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3.$

Dokaz. Primjenom 3. i 4. svojstva definicije skalarnog produkta, vrijedi

$$\langle x, \lambda y \rangle = \langle \lambda y, x \rangle = \lambda \langle y, x \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$$

Primjenom 3. i 5. svojstva definicije skalarnog produkta, vrijedi

$$\langle x, y + z \rangle = \langle y + z, x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

□

Teorem 2.4. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}^3$ vektori. Tada za sve x, y vrijedi nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog:*

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x i y kolinearni.

Dokaz. Pretpostavimo da je jedan od vektora nulvektor. Bez smanjenja općenitosti, neka je $x = 0$. Tada je $\langle x, y\rangle = \langle x, x\rangle = 0$ pa je na lijevoj i desnoj strani 0 i nejednakost vrijedi.

Pretpostavimo da su $x, y \neq 0$. Definirajmo funkciju $f(t) = \langle x+ty, x+ty\rangle$, $t \in \mathbb{R}$. Po definiciji skalarnog produkta i propoziciji 2.3 slijedi

$$\begin{aligned}
f(t) &= \langle x + ty, x + ty\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, ty\rangle + \langle ty, x\rangle + \langle ty, ty\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, ty\rangle + \langle x, ty\rangle + tt\langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + 2\langle x, ty\rangle + t^2\langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle.
\end{aligned}$$

Dobili smo da je $f(t)$ kvadratni polinom. Kako smo $f(t)$ definirali kao skalarni produkt vektora $x + ty$ sa samim sobom, po 1. svojstvu definicije 2.1 je $f(t) \geq 0$, za svaki $t \in \mathbb{R}$. Stoga je diskriminanta $D \leq 0$, tj.

$$\begin{aligned}
4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle &\leq 0 \\
\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle &\leq 0 \\
\langle x, y\rangle^2 &\leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.
\end{aligned}$$

Preostaje nam dokazati karakterizaciju jednakosti. Vidimo da je postizanje jednakosti ekvivalentno s time da za diskriminantu kvadratnog polinoma $f(t)$ vrijedi da je $D = 0$. To je ekvivalentno postojanju $t \in \mathbb{R}$ za koji je $f(t) = 0$. Stoga po 2. svojstvu definicije 2.1 vrijedi

$$\langle x + ty, x + ty\rangle = 0 \iff x + ty = 0 \iff x = -ty.$$

Stavimo $\lambda = -t$ pa je $x = \lambda y$. Zaključujemo da su x i y kolinearni. Time je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 2.5. *Neka je $x \in \mathbb{R}^3$ i neka je $\langle ., .\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ skalarni produkt. Tada je funkcija $\|.\| : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ koja svakom vektoru pridružuje skalar $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ norma.*

Dokaz. Želimo pokazati da je $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ norma, tj. da zadovoljava svojstva iz definicije 2.2. Funkcija drugog korijena definirana je za nenegativne brojeve. Kako je $\langle x, x\rangle \geq 0$, zaključujemo da je $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ dobro definiran. Dokažimo da je dana funkcija norma.

1. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$ jer funkcija drugog korijena nenegativna.

2. U dokazu ovog svojstva koristimo $\sqrt{0} = 0$ i 2. svojstvo definicije 2.1: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \iff \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0.$

3. Primjenom 4. svojstva definicije 2.1 i 1. svojstva propozicije 2.3 imamo $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle}.$

4. Po definiciji skalarnog produkta 2.1, propoziciji 2.3 i nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog iz teorema 2.4 slijedi

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

   Kako je norma nenegativna, a funkcija drugog korijena rastuća, korjenovanjem $\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ dobivamo $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$\square$

Dokazivanjem propozicije 2.5 zaključili smo da postoji veza između skalarnog produkta i norme. Ako tu vezu primijenimo na nejednakost iz teorema 2.4, imamo sljedeći zapis

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle &\iff \langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 \\
&\iff |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.
\end{aligned}$$

Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog možemo zapisati kao

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|. \tag{2.1}$$

Ovaj zapis koristit ćemo za određivanje kuta između dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^3$. Neka su $x, y \neq 0$. Podijelimo nejednakost (2.1) s $\|x\|\|y\|$. Kako je norma nenegativna, slijedi

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

tj. vrijedi

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1.$$

Stoga zaključujemo da postoji jedinstven kut $\varphi \in [0, \pi]$ takav da je

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Definicija 2.6. *Kut φ između dvaju vektora $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x, y \neq 0$ dan je relacijom*

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Definicija 2.7. *Vektorski produkt $x \times y$ dvaju vektora $x, y \in \mathbb{R}^3$ je jedinstven vektor definiran relacijom*

$$\langle x \times y, z\rangle = det(z, x, y), \quad \forall z \in \mathbb{R}^3.$$

Zašto postoji takav vektor $x \times y$? Preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ koje je zadano pravilom pridruživanja $f(z) = det(z, x, y)$ za odabrane vektore x, y je linearni funkcional, tj. $\forall z, w \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(z + w) &= f(z) + f(w), \\ f(\lambda z) &= \lambda f(z). \end{aligned}$$

Vektor je u $\mathbb{R}^3$ jedinstveno određen svojim koordinatama $x = (x_1, x_2, x_3)$. Pogledajmo desnu stranu prve jednakosti. Raspišimo prvo $f(z)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= det(z, x, y) \\ &= \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} z_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Analogno se pokaže da je $f(w)$ jednako

$$f(w) = w_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Njihova suma je jednaka

$$f(z) + f(w) = (z_1 + w_1) \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - (z_2 + w_2) \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + (z_3 + w_3) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Raspišimo sada lijevu stranu prve jednakosti:

$$\begin{aligned}
f(z+w) &= det(z+w,x,y)\\
&= \begin{vmatrix} z_1+w_1 & z_2+w_2 & z_3+w_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\\
&= (z_1+w_1)\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix} - (z_2+w_2)\begin{vmatrix} x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix} + (z_3+w_3)\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da su lijeva i desna strana jednake pa je $f(z+w) = f(z)+f(w)$. Preostaje nam pokazati da je $f(\lambda z) = \lambda f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(\lambda z) &= det(\lambda z,x,y)\\
&= \begin{vmatrix} \lambda z_1 & \lambda z_2 & \lambda z_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\\
&= \lambda z_1\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix} - \lambda z_2\begin{vmatrix} x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix} + \lambda z_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\\
&= \lambda\left(z_1\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix} - z_2\begin{vmatrix} x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\right)\\
&= \lambda\left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\right)\\
&= \lambda det(z,x,y)\\
&= \lambda f(z).
\end{aligned}$$

S druge strane, za linearni funkcional f postoji jedinstven vektor a takav da je f reprezentiran skalarnim produktom $f(z) = \langle a, z\rangle$. Uzmimo $a = x \times y$ iz čega slijedi da je $det(z,x,y) = \langle x \times y, z\rangle$. Stoga je vektor $x \times y$ dobro definiran.

Propozicija 2.8. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Vektorski produkt zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $\langle x \times y, x\rangle = \langle x \times y, y\rangle = 0$,
2. $x \times y = -y \times x$,
3. $\langle x \times y, z\rangle = \langle x, y \times z\rangle$,
4. $(x \times y) \times z = \langle x, z\rangle y - \langle y, z\rangle x$.

Dokaz. Pokažimo da vektorski produkt zadovoljava gore navedena svojstva.

1. Po definiciji vektorskog produkta je $\langle x \times y, x\rangle = det(x, x, y)$. Uočimo da determinanta ima dva jednaka retka pa je $det(x, x, y) = 0$. Stoga slijedi da je $\langle x \times y, x\rangle = 0$. Analogno se pokaže da je $\langle x \times y, y\rangle = 0$.

2. Ako determinanti zamjenimo dva retka, ona će promijeniti predznak. Stoga za svaki $z \in \mathbb{R}^3$ vrijedi

$$\langle x \times y, z\rangle = det(z, x, y) = -det(z, y, x) = -\langle y \times x, z\rangle = \langle -y \times x, z\rangle.$$

   Slijedi da je $x \times y = -y \times x$.

3. Po definiciji vektorskog produkta je $\langle x\times y, z\rangle = det(z, x, y)$. Zamijenimo retke determinante:

$$det(z, x, y) = -det(x, z, y) = -(-det(y, z, x)) = det(y, z, x).$$

   Stoga je

$$\langle x \times y, z\rangle = det(z, x, y) = det(y, z, x) = \langle y \times z, x\rangle = \langle x, y \times z\rangle.$$

4. Neka su $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$ vektori standardne baze od $\mathbb{R}^3$. Tada vrijedi $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ i $e_3 \times e_1 = e_2$. Vektorski produkt vektora $e_1 \times e_2$ i e_3 jednak je

$$(e_1 \times e_2) \times e_3 = e_3 \times e_3 = 0.$$

   Desna strana tražene jednakosti jednaka je

$$\langle e_1, e_3\rangle e_2 - \langle e_2, e_3\rangle e_1 = 0 \cdot e_2 - 0 \cdot e_1 = 0.$$

   Pogledajmo čemu je jednak vektorski produkt vektora $e_2 \times e_3$ i e_3:

$$(e_2 \times e_3) \times e_3 = e_1 \times e_3 = -e_2.$$

   Desna strana jednakosti jednaka je

$$\langle e_2, e_3\rangle e_3 - \langle e_3, e_3\rangle e_2 = 0 \cdot e_3 - 1 \cdot e_2 = -e_2.$$

   Analogno se pokaže da je

$$(e_3 \times e_1) \times e_3 = e_2 \times e_3 = e_1,$$
$$\langle e_3, e_3\rangle e_1 - \langle e_1, e_3\rangle e_3 = 1 \cdot e_1 - 0 \cdot e_3 = e_1.$$

Pokazali smo da vrijedi

$$\begin{aligned}(e_1 \times e_2) \times e_3 &= \langle e_1, e_3 \rangle e_2 - \langle e_2, e_3 \rangle e_1,\\(e_2 \times e_3) \times e_3 &= \langle e_2, e_3 \rangle e_3 - \langle e_3, e_3 \rangle e_2,\\(e_3 \times e_1) \times e_3 &= \langle e_3, e_3 \rangle e_1 - \langle e_1, e_3 \rangle e_3.\end{aligned}$$

Zbog linearnosti, za vektore x i y vrijedi

$$(x \times y) \times e_3 = \langle x, e_3 \rangle y - \langle y, e_3 \rangle x.$$

Analogno se pokaže da prethodne realcije vrijede kada zamjenimo e_3 s e_1 ili e_2. Stoga, zbog linearnosti vrijedi

$$(x \times y) \times w = \langle x, w \rangle y - \langle y, w \rangle x.$$

□

Propozicija 2.9. *Neka su $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$. Tada vrijedi:*

1. $x \times y = 0$ *ako i samo ako su vektori x i y proporcionalni,*

2. $\langle x \times y, z \times w \rangle = \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle y, z \rangle \langle x, w \rangle,$

3. $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2.$

Dokaz. Pokažimo da vektorski produkt zadovoljava svojstva iz propozicije:

1. Neka je $x \times y = 0$. Tada iz definiciji vektorskog produkta slijedi da je $\langle 0, z \rangle = det(z, x, y) = 0$, za svaki $z \in \mathbb{R}^3$. Determinanta je jednaka 0 ako i samo ako su vektori x i y proporcionalni.

2. Po definiciji 2.7 je $\langle x \times y, z \times w \rangle = det(z \times w, x, y)$. Zamijenimo prvi redak determinante s drugim i zatim treći redak s prvim. Tada je

   $$det(z \times w, x, y) = -det(x, z \times y, y) = -(-det(y, z \times w, x)) = det(y, z \times w, x).$$

   Sada po definiciji vektorskog produkta imamo

   $$det(z \times w, x, y) = det(y, z \times w, x) = \langle (z \times w) \times x, y \rangle.$$

   Primjenom 4. svojstva iz propozicije 2.8 i svojstava skalarnog produkta imamo

   $$\begin{aligned}\langle (z \times w) \times x, y \rangle &= \langle \langle z, x \rangle w - \langle w, x \rangle z, y \rangle\\&= \langle \langle z, x \rangle w, y \rangle - \langle \langle w, x \rangle z, y \rangle\\&= \langle z, x \rangle \langle w, y \rangle - \langle w, x \rangle \langle z, y \rangle\\&= \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle y, z \rangle \langle x, w \rangle.\end{aligned}$$

   Time smo pokazali da je $\langle x \times y, z \times w \rangle = \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle y, z \rangle \langle x, w \rangle$.

   Ovaj rezultat ćemo iskoristiti za dokazivanje posljednjeg svojstva.

3. Po propoziciji 2.5 je $\|x \times y\|^2 = \langle x \times y, x \times y\rangle$. Iz prethodnog svojstva slijedi

$$\langle x \times y, x \times y\rangle = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle y, x\rangle\langle x, y\rangle = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2.$$

□

Neka je φ kut između vektora x i y, $x, y \neq 0$. Duljina vektora $x \times y$ jednaka je

$$\|x \times y\| = \|x\|\|y\| \sin\varphi, \quad \varphi \in [0, \pi]. \tag{2.2}$$

Zašto vrijedi formula (2.2)? Po propozicijama 2.5 i 2.9 vrijedi

$$\|x \times y\| = \sqrt{\langle x \times y, x \times y\rangle} = \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2}.$$

Iz definicije 2.6 vidimo da je

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos\varphi.$$

Stoga imamo

$$\begin{aligned} \|x \times y\| &= \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \cos^2\varphi} \\ &= \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2(1 - \cos^2\varphi)} \\ &= \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 \sin^2\varphi}. \end{aligned}$$

Kako je $\varphi \in [0, \pi]$, slijedi

$$\|x \times y\| = \|x\|\|y\| \sin\varphi.$$

3 Model sfere

Uvedimo najprije osnovne pojmove. U prvom poglavlju smo definirali skalarni produkt kao preslikavanje $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ koja zadovoljava svojstva definicije 2.1. Za sve vektore $X = (x_1, x_2, x_3)$ i $Y = (y_1, y_2, y_3)$ možemo definirati skalarni produkt kao

$$\langle X, Y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \tag{3.1}$$

Naime, $\langle X, X \rangle = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \geq 0$. Ova jednakost je jednaka nuli ako i samo ako je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Nadalje, zbog komutativnosti množenja je

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = \langle Y, X \rangle.$$

Zbog asocijativnosti množenja i distributivnosti za svaki realni skalar λ je

$$\begin{aligned}
\langle \lambda X, Y \rangle &= (\lambda x_1) y_1 + (\lambda x_2) y_2 + (\lambda x_3) y_3 \\
&= \lambda (x_1 y_1) + \lambda (x_2 y_2) + \lambda (x_3 y_3) \\
&= \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \\
&= \lambda \langle X, Y \rangle.
\end{aligned}$$

Primjenom distributivnosti i komutativnosti zbrajanja vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle x + y, z \rangle &= (x_1 + y_1) z_1 + (x_2 + y_2) z_2 + (x_3 + y_3) z_3 \\
&= x_1 z_1 + y_1 z_1 + x_2 z_2 + y_2 z_2 + x_3 z_3 + y_3 z_3 \\
&= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) + (y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3) \\
&= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.
\end{aligned}$$

Prema tome, $\langle X, Y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ je zaista skalarni produkt.

3.1 Definicija i parametrizacija sfere

Definicija 3.1. *Jedinična sfera je skup točaka za koje vrijedi*

$$S^2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : \|X\| = 1\}.$$

Sada možemo odrediti jednadžbu sfere. Po propoziciji 2.5 vrijedi da je $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$. Stoga iz jednakosti (3.1) slijedi $\|X\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$. Norma vektora $\|X\|$ jednaka je 1 pa je

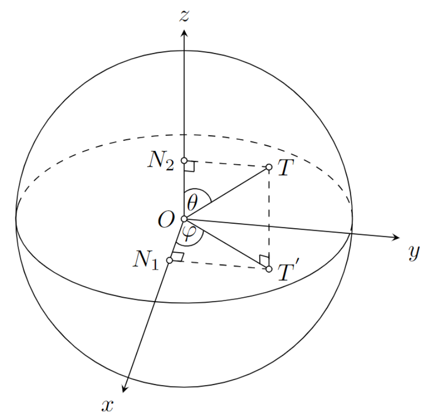
$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1.$$

Kvadriranjem jednakosti dobijemo jednadžbu jedinične sfere

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

U literaturi se često korsti točka s koordinatama $X = (x, y, z)$ pa je poznata jednadžba sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Središte sfere (nulvektor u $\mathbb{R}^3$) označit ćemo s O i napravit ćemo parametrizaciju. Neka je $T \in S^2$ proizovljna točka i $T^{'}$ ortogonalna projekcija točke T na ravninu xy. Neka je $\varphi \in [0, 2\pi]$ kut što ga vektor $T^{'}$ zatvara s pozitivnim dijelom x-osi i neka je $\theta \in [0, \pi]$ kut što ga vektor T zatvara s pozitivnim dijelom z-osi. Označimo nožiste okomice iz točke $T^{'}$ na x-os s N_1 i nožiste okomice iz točke T na z-os s N_2.



Slika 1: Sfera

Uočimo da je trokut $\triangle OTN_2$ pravokutan pa slijedi

$$\cos\theta = \frac{|\overline{ON_2}|}{|\overline{OT}|} = \frac{z}{1} = z.$$

Trokut $\triangle OTT^{'}$ je pravokutan i mjera kuta $\measuredangle T^{'}OT$ jednaka je $\frac{\pi}{2} - \theta$. Vrijedi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{|\overline{OT^{'}}|}{|\overline{OT}|} \iff \sin\theta = |\overline{OT^{'}}| \tag{3.2}$$

Trokut $\triangle OT^{'}N_1$ je pravokutan pa imamo

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{N_1T^{'}}|}{|\overline{OT^{'}}|} = \frac{y}{|\overline{OT^{'}}|} \iff y = |\overline{OT^{'}}|\sin\varphi.$$

Iz jendakosti (3.2) slijedi

$$y = \sin\theta\sin\varphi.$$

Analogno,

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{ON_1}|}{|\overline{OT'}|} = \frac{x}{|\overline{OT'}|} \iff x = |\overline{OT'}|\cos\varphi \iff x = \sin\theta\cos\varphi.$$

Parametrizacija sfere za kutove $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ dana je sa

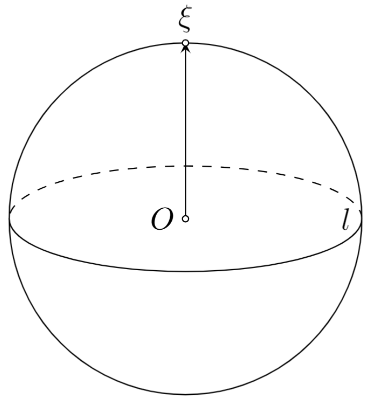
$$\begin{aligned} x &= sin\theta\cos\varphi \\ y &= \sin\theta\sin\varphi \\ z &= \cos\theta. \end{aligned}$$

3.2 Velike kružnice

Definicija 3.2. *Presjek sfere i bilo koje ravnine koja prolazi središtem sfere (tj. dvodimenzionalnim potprostorom od $\mathbb{R}^3$) nazivamo velikom kružnicom l, tj.*

$$l = \{X \in S^2 : \langle X, \xi\rangle = 0\}$$

pri čemu je ξ jedinični vektor. Vektor ξ zovemo polom velike kružnice l.



Slika 2: Velika kružnica

Velika kružnica je zapravo pravac na sferi i određena je vektorom normalne ravnine u kojoj je sadržana. Stoga je $\langle X, \xi\rangle = 0$ u definiciji 3.2 dobro definirano, pri čemu je ξ vektor normale ravnine. Drugim riječima, velika kružnica je određena svojim polom.

Geometrijski gledano, velika kružnica obuhvaća sve točke koje su kao vektori okomite na pol ξ. Za razliku od pravaca u euklidskoj geometriji, velike kružnice u sfernoj geometriji se uvijek sijeku u dvije točke. Kako ravnina ima dva jedinična vektora normale, tako i velika kružnica ima dva pola $\pm\xi$.

Definicija 3.3. *Za točke $P, Q \in S^2$ kažemo da su antipodalne ako vrijedi $P = -Q$.*

Antipodalne točke nazivamo još dijametralno suprotnim točkama. Primijetimo da su dva pola iste velike kružnice antipodalna. Ako se vratimo na primjer Zemaljske kugle, njezine dvije najpoznatije antipodalne točke su Sjeverni i Južni pol. Velike kružnice koje sadrže polove nazivamo meridijanima.

Propozicija 3.4. *Za svaki par točaka od S^2 koje nisu antipodalne, postoji jedinstvena velika kružnica koji sadrži te točke.*

Dokaz. Neka su $P, Q \in S^2$ točke koje nisu antipodalne. Da bismo odredili veliku kružnicu koja sadrži te točke, trebamo odrediti njezin pol. Također, iz definicije 3.2 znamo da pol velike kružnice treba biti ortogonalan s vektorima P i Q te njegova duljina treba biti jednaka 1. Iz 1. svojstva propozicije 2.8 vidimo da je $\langle P \times Q, P\rangle = \langle P \times Q, Q\rangle = 0$, tj. vektor $P \times Q$ je ortogonalan s vektorima P i Q. Normiranjem vektora $P \times Q$ dobivamo pol velike kružnice

$$\frac{P \times Q}{\|P \times Q\|}.$$

Iz pretpostavke da točke P i Q nisu antipodalne slijedi da su vektori P i Q nekolinearni. Stoga je po 1. svojstvu propozicije 2.9 $P \times Q \neq 0$.

Preostaje nam dokazati da je velika kružnica određena polom $\frac{P\times Q}{\|P\times Q\|}$ jedinstvena, tj. da je $\frac{P\times Q}{\|P\times Q\|}$ jedinstven do na predznak. Pretpostavimo da postoji neki drugi pol ξ'. Tada je $\langle P, \xi'\rangle = \langle Q, \xi'\rangle = 0$. Iz 4. svojstva propozicije 2.8 slijedi

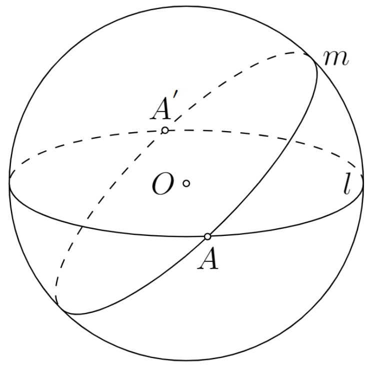
$$(P \times Q) \times \xi' = \langle P, \xi'\rangle Q - \langle Q, \xi'\rangle P = 0 \cdot Q - 0 \cdot P = 0.$$

Stoga su vektori $P \times Q$ i ξ' kolinearni. Kako je ξ' jedinični slijedi da je $\xi' = \pm\frac{P\times Q}{\|P\times Q\|}$. Time smo pokazali da postoji jedinstvena velika kružnica koja sadrži točke P i Q. $\square$

Propozicija 3.5. *Neka su $l, m \in S^2$ dvije različite velike kružnice. Tada je presjek velikih kružnica l i m par antipodalnih točaka.*

Dokaz. Neka su $l, m \in S^2$ dvije velike kružnice takve da je $l \neq m$. Tada za pol ξ od l i pol ξ' od m vrijedi $\xi \neq \pm\xi'$. Stoga polovi velikih kružnica l i m nisu kolinearni pa je $\xi \times \xi' \neq 0$. Definirajmo sada

$$A := \frac{\xi \times \xi'}{\|\xi \times \xi'\|} \quad \text{i} \quad A' := -\frac{\xi \times \xi'}{\|\xi \times \xi'\|}.$$



Slika 3: Presjek dviju različitih velikih kružnica

Iz definicije skalarnog produkta 2.1 i 1. svojstva propozicije 2.8 slijedi

$$\langle A, \xi \rangle = \langle \frac{\xi \times \xi^{'}}{\|\xi \times \xi^{'}\|}, \xi \rangle = \frac{1}{\|\xi \times \xi^{'}\|} \langle \xi \times \xi^{'}, \xi \rangle = 0.$$

Analogno, vrijedi

$$\langle A, \xi^{'} \rangle = \langle \frac{\xi \times \xi^{'}}{\|\xi \times \xi^{'}\|}, \xi^{'} \rangle = \frac{1}{\|\xi \times \xi^{'}\|} \langle \xi \times \xi^{'}, \xi^{'} \rangle = 0.$$

Time smo pokazali da se točka A nalazi u presjeku velikih kružnica l i m. Analogno se pokaže da se točka $A^{'}$ također nalazi u presjeku od l i m. Iz definicije točaka A i A' vidimo da je $A = -A^{'}$ pa slijedi da su one antipodalne.

Kako znamo da ne postoji više od dvije točke presjeka? Kada bi postojala još jedna točka presjeka B, onda ona ne bi bila antipodalna s točkama A i $A^{'}$. Po propoziciji 3.4 znamo da su svake dvije točke koje nisu antipodalne sadržane u jedinstvenoj velikoj kružnici. Kako su l i m različite velike kružnice, točka B ne postoji. □

Kroz dvije antipodalne točke prolazi beskonačno mnogo velikih kružnica. Iz propozicije 3.4 vidimo da za veliku kružnicu koja sadrži dvije točke P i Q koje nisu antipodalne, možemo uvesti oznaku PQ.

Korolar 3.6. *Ne postoje velike kružnice na S^2 koje se ne sijeku.*

Čemu je jednak kut između dvije velike kružnice? Neka je $l \in S^2$ velika kružnica, ξ njezin pol i $P \in S^2$ točka koja pripada velikoj kružnici. Tada je $\langle P, \xi \rangle = 0$, tj. vektori P i ξ su ortogonalni. Vektor $P \times \xi$ leži u ravnini kojom je određena velika kružnica l i ortogonalan je s vektorom P. Stoga je vektor $P \times \xi$ jednak tangencijalnom vektoru na l u točki P. Kut između dvije velike kružnice jednak je kutu između njihovih tangencijalnih vektora u točki presjeka. Neka je $m \in S^2$ velika kružnica s polom $\xi^{'}$. Tada je po definiciji 2.6 kut između velikih kružnica l i m jednak

$$\cos\measuredangle(l,m) = \cos\measuredangle(P\times\xi, P\times\xi^{'}) = \frac{\langle P\times\xi, P\times\xi^{'}\rangle}{\|P\times\xi\|\|P\times\xi^{'}\|}.$$

Iz jednakosti (2.2) slijedi

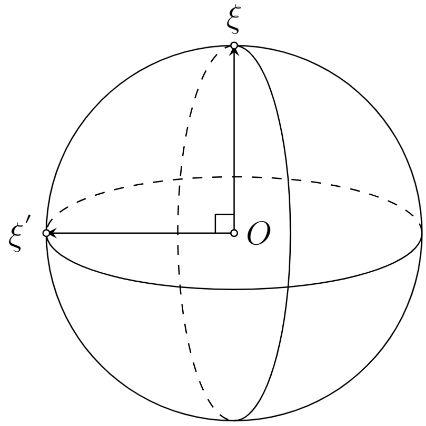
$$\|P\times\xi\| = \|P\|\|\xi\|\sin\measuredangle(P,\xi) = 1\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Analogno se pokaže da je $\|P\times\xi^{'}\| = 1$. Stoga je $\cos\measuredangle(l,m) = \langle P\times\xi, P\times\xi^{'}\rangle$. Po propozicijama 2.9 i 2.5 imamo

$$\langle P\times\xi, P\times\xi^{'}\rangle = \langle P,P\rangle\langle\xi,\xi^{'}\rangle - \langle\xi,P\rangle\langle P,\xi^{'}\rangle = \|P\|^2\langle\xi,\xi^{'}\rangle - 0 = \langle\xi,\xi^{'}\rangle.$$

Zaključujemo da je kut između tangencijalnih vektora u točki presjeka jednak kutu između polova.

Definicija 3.7. *Kut između dvije velike kružnice jednak je kutu između njihovih polova. Kažemo da su velike kružnice $l, m \in S^2$ okomite ako su im polovi ortogonalni.*



Slika 4: Okomite velike kružnice

3.3 Udaljenost točaka na sferi

Definicija 3.8. *Udaljenost dviju točaka $P, Q \in S^2$ definiramo kao*

$$d(P,Q) = \measuredangle(P,Q) = \arccos\langle P,Q\rangle.$$

U euklidskoj ravnini udaljenost između točaka P i Q jednaka je duljini dužine $\overline{PQ}$. Znamo da je to najkraća udaljenost između tih točaka. Najkraća udaljenost između dvije točke na S^2 je duljina kraćeg luka velike kružnice određene s tim točkama.

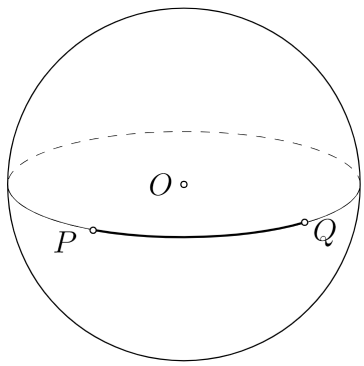
Zašto jednakosti u definiciji 3.8 imaju smisla? Radijanska mjera kuta jednaka je duljini pripadnog kružnog luka kružnice čiji je radijus 1. Stoga je udaljenost između P i Q jednaka mjeri kuta kojeg zatvaraju ta dva vektora. Iz definicije 2.6 imamo relaciju:

$$\cos \measuredangle(P, Q) = \frac{\langle P, Q \rangle}{\|P\| \|Q\|}.$$

Kako su P i Q točke jedinične sfere, njihova norma je jednaka 1. Slijedi da je $\cos \measuredangle(P, Q) = \langle P, Q \rangle$.

Kao što je velika kružnica pravac na sferi, tako su i kružni lukovi dužine sfere. Primijetimo da je π maksimalna udaljenost između dviju točaka na S^2.

Sada vidimo da je udaljenost između dva grada jednaka duljini luka velike kružnice na kojoj ti gradovi leže.



Slika 5: Udaljenost između dvije točke

Teorem 3.9. *Funkcija udaljenosti d iz definicije 3.8 je metrika, tj. za sve točke $P, Q, R \in S^2$ vrijedi*

1. $d(P, Q) \geq 0$,
2. $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$,
3. $d(P, Q) = d(Q, P)$,
4. $d(P, R) + d(R, Q) \geq d(P, Q)$.

Dokaz. Pokažimo da funkcija d zadovoljava svojstva metrike.

1. Po definiciji 3.8 vrijedi $d(P, Q) = \arccos \langle P, Q\rangle \in [0, \pi]$. Slijedi $d(P, Q) \geq 0$.

2. Pretpostavimo da je $d(P, Q) = 0$. Po definiciji 3.8 vrijedi

$$d(P, Q) = \measuredangle(P, Q) = 0.$$

   Iz $\measuredangle(P, Q) = 0$ slijedi da vektori P i Q imaju jednak smjer i orijentaciju. Kako su $P, Q \in S^2$, duljina vektora P i Q jednaka je 1. Zaključujemo da su vektori jednaki te slijedi $P = Q$.

   Pokažimo da vrijedi obrat. Pretpostavimo da je $P = Q$. Tada je mjera kuta između njih jednaka 0. Po definiciji 3.8 je $d(P, Q) = \measuredangle(P, Q) = 0$.

3. Korištenjem definicije 3.8 imamo

$$d(P, Q) = \measuredangle(P, Q) = \measuredangle(Q, P) = d(Q, P).$$

4. Za dokazivanje nejednakosti trokuta koristit ćemo nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog iz teorema 2.4 zapisanu kao nejednakost (2.1) iz drugog poglavlja:

$$\langle P \times Q, R \times Q\rangle^2 \leq \|P \times Q\|^2 \|R \times Q\|^2. \tag{3.3}$$

   Zbog jednostavnosti uvodimo oznake

$$d(P, Q) = a, \quad d(P, R) = b, \quad d(R, Q) = c.$$

   Prisjetimo se da vektorski produkt zadovoljava svojstvo iz propozicije 2.9:

$$\langle P \times Q, R \times Q\rangle = \langle P, R\rangle\langle Q, Q\rangle - \langle P, Q\rangle\langle Q, R\rangle.$$

   Raspisivanjem lijeve strane nejednakosti (3.3) i primjenom definicije 3.8 dobivamo

$$\begin{aligned}(\langle P, R\rangle\langle Q, Q\rangle - \langle P, Q\rangle\langle Q, R\rangle)^2 &= (\langle P, R\rangle - \langle P, Q\rangle\langle Q, R\rangle)^2 \\ &= (\cos b - \cos a \cos c)^2.\end{aligned}$$

   Iz propozicije 2.9 primijenimo sljedeće svojstvo:

$$\|P \times Q\|^2 = \|P\|^2\|Q\|^2 - \langle P, Q\rangle^2.$$

Stoga je desna strana nejednakosti (3.3) jednaka

$$\begin{aligned}\|P \times Q\|^2 \|R \times Q\|^2 &= (\|P\|^2\|Q\|^2 - \langle P, Q\rangle^2)(\|R\|^2\|Q\|^2 - \langle R, Q\rangle^2)\\ &= (1 - \langle P, Q\rangle^2)(1 - \langle R, Q\rangle^2)\\ &= (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 c)\\ &= \sin^2 a \sin^2 c.\end{aligned}$$

Nakon raspisivanja lijeve i desne strane nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}(\cos b - \cos a \cos c)^2 &\leq \sin^2 a \sin^2 c\\ \cos b - \cos a \cos c &\leq \sin a \sin c\\ \cos b &\leq \cos a \cos c + \sin a \sin c\\ \cos b &\leq \cos (a - c).\end{aligned}$$

Kako je funkcija kosinus padajuća na intervalu $[0, \pi]$, slijedi

$$\begin{aligned}b &\geq a - c\\ b + c &\geq a\\ d(P, R) + d(R, Q) &\geq d(P, Q).\end{aligned}$$

Što ako je $a - c > \pi$ ili $a - c < 0$? Kako su $a, c \leq \pi$, njihova razlika mora biti manja od π. Stoga je $a - c > \pi$ nemoguće. Ako je $a - c < 0$, onda vrijedi $a < c \leq c + b$.

□

Korolar 3.10. *Neka su $P, Q, R \in S^2$. Ako je $d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q)$, onda točke P, Q i R pripadaju istoj velikoj kružnici.*

Dokaz. Iz pretpostavke vrijedi da je $d(P, R) = d(P, Q) - d(R, Q)$. Stoga su vektori $P \times Q$ i $R \times Q$ kolinearni. Ako je $P \times Q = 0$, onda točke P, Q i R pripadaju istoj velikoj kružnici. Pretpostavimo da je $P \times Q \neq 0$. Tada je vektor $P \times Q$ kolinearan s polom velike kružnice PQ. Stoga je i vektor $R \times Q$ je kolinearan s polom velike kružnice PQ. Zaključujemo da je točka $R \in PQ$, tj. točke P, Q i R pripadaju istoj velikoj kružnici. □

Propozicija 3.11. *Točke $P, Q \in S^2$ su antipodnalne ako i samo ako je $d(P, Q) = \pi$.*

Dokaz. Pretpostavimo da su točke $P, Q \in S^2$ antipodalne. Želimo pokazati da je tada $d(P, Q) = \pi$. Iz definicije 3.3 slijedi da je $P = -Q$. Po definiciji

3.8 za udaljenost dviju točaka i 4. svojstvu definicije 2.1 skalarnog produkta imamo

$$d(P,Q) = \arccos\langle -Q, Q\rangle = \arccos\left(-\langle Q,Q\rangle\right) = \arccos(-1) = \pi.$$

Dokažimo obrat. Neka je $d(P,Q) = \pi$. Želimo pokazati da su točke $P, Q \in S^2$ antipodalne. Pogledajmo čemu je jednak skalarni produkt vektora $P + Q$ sa samim sobom. U dokazu teorema 2.4 vidimo da je

$$\langle P+Q, P+Q\rangle = \|P\|^2 + 2\langle P,Q\rangle + \|Q\|^2.$$

Norma vektora P i Q jednaka je 1. Udaljnost točaka P i Q jednaka je $\arccos\langle P,Q\rangle$. Iz pretpostavke da je $d(P,Q) = \pi$ slijedi

$$\cos\pi = \langle P,Q\rangle \iff \langle P,Q\rangle = -1.$$

Stoga je

$$\langle P+Q, P+Q\rangle = 1 + 2(-1) + 1 = 0.$$

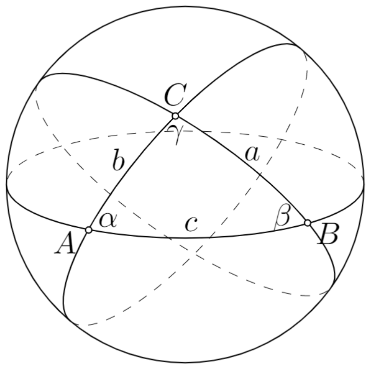
Po definiciji skalarnog produkta to vrijedi ako i samo ako je $P + Q = 0$, odnosno $P = -Q$. Zaključujemo da su točke $P, Q \in S^2$ antipodalne. $\square$

4 Sferna trigonometrija

U astronomiji se u svrhu određivanja položaja nebeskih tijela definira nebeska sfera. Riječ je o sferi proizvoljno velikog radijusa sa središtem u promatraču. Uzmemo li da je promatrač osoba koja se nalazi na površini Zemlje, jasno je da nam je potreban veliki radijus kako bismo mogli promatrati objekte koji se nalaze daleko u svemiru. Položaj nebeskog tijela se određuje tako da se tijelo projicira na nebesku sferu, pri čemu se uzima da je udaljenost svakog tijela od promatrača jednaka. Zatim se pomoću sfernog koordinatnog sustava određuje položaj danog tijela na nebeskoj sferi. Stoga se taj koordinatni sustav naziva još i nebeskim. Imamo pet različitih nebeskih koordinatnih sustava: horizontski, mjesni ekvatorski, nebeski ekvatorski, ekliptički i galaktički. Transformacijama možemo doći iz jednog nebeskog koordinatnog sustava u drugi tako da odredimo karakteristični sferni trokut i zatim primjenom sferne trigonometrije uspostavimo vezu između tih sustava. Više detalja o primjeni sferne trigonometrije u astronomiji i nebeskim koordinatnim sustavima mogu se pronaći na [6] i [12]. U ovom poglavlju definirat ćemo sferni trokut, pokazat ćemo poznate trigonometrijske analogone euklidske geometrije i trigonometrijske relacije pravokutnog sfernog trokuta.

4.1 Sferni trokut

Definicija 4.1. *Neka su $A, B, C \in S^2$ tri točke koje ne pripadaju istoj velikoj kružnici. Sferni trokut $\triangle ABC$ je skup $\{A,B,C\}$.*



Slika 6: Sferni trokut

Točke A, B i C su vrhovi sfernog trokuta $\triangle ABC$. Duljine stranica trokuta označavamo s $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ i $c = d(A, B)$. Iz definicije 3.8 slijedi

$$\cos a = \langle B, C\rangle, \quad \cos b = \langle A, C\rangle \quad \text{i} \quad \cos c = \langle A, B\rangle. \tag{4.1}$$

Maksimalna udaljenost između dviju točaka jednaka je π. Iz propozicije 3.11 vidimo da je udaljenost između dvije antipodalne točke jednaka π. Međutim, dvije točke sfernog trokuta ne mogu biti antipodalne. Naime, kroz dvije antipodalne točke prolazi beskonačno mnogo velikih kružnica. Tada bi treća točka bila sadržana u jednoj od njih, tj. sve tri točke bi pripadale istoj velikoj kružnici. Po definiciji sfernog trokuta to je nemoguće. Stoga vrijedi

$$0 < a, b, c < \pi.$$

Mjere kutova trokuta označavamo s $\alpha = \measuredangle(AB, AC)$, $\beta = \measuredangle(AB, BC)$ i $\gamma = \measuredangle(AC, BC)$. Vektore normale velikih kružnica AB, AC i BC označimo

$$\begin{aligned}
\xi_{AB} &:= A \times B, \\
\xi_{AC} &:= A \times C, \\
\xi_{BC} &:= B \times C.
\end{aligned}$$

Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
\|\xi_{AB}\| &= \|A \times B\| = \sin c, \\
\|\xi_{AC}\| &= \|A \times C\| = \sin b, \\
\|\xi_{BC}\| &= \|B \times C\| = \sin a.
\end{aligned}$$

Primijetimo da su kutovi trokuta jednaki kutovima između polova pripadnih velikih kružnica na kojima leže stranice trokuta. Slijedi:

$$\cos\alpha = \frac{\langle \xi_{AB}, \xi_{AC} \rangle}{\|\xi_{AB}\| \|\xi_{AC}\|} = \frac{\langle \xi_{AB}, \xi_{AC} \rangle}{\sin c \sin b} \iff \langle \xi_{AB}, \xi_{AC} \rangle = \cos\alpha \sin b \sin c. \tag{4.2}$$

Analogno vrijedi:

$$\begin{aligned}
\langle \xi_{AB}, \xi_{BC} \rangle &= \cos\beta \sin a \sin c, \\
\langle \xi_{BC}, \xi_{AC} \rangle &= \cos\gamma \sin a \sin b.
\end{aligned}$$

Čemu je jednak $\sin\alpha$? Iz formule (2.2) za duljinu vektorskog produkta dvaju vektora možemo izraziti sinus kuta:

$$\sin\alpha = \frac{\|\xi_{AB} \times \xi_{AC}\|}{\|\xi_{AB}\| \|\xi_{AC}\|}. \tag{4.3}$$

4.2 Trigonometrija sfernog trokuta

Teorem 4.2 (Poučak o kosinusu). *Neka je $\triangle ABC \in S^2$ trokut sa stranicama duljina a, b, c i kutovima mjera α, β, γ. Tada vrijedi:*

$$\cos a = \cos\alpha \sin b \sin c + \cos b \cos c.$$

Dokaz. Oduzimanjem $\cos b \cos c$ od jednakosti dobivamo

$$\cos\alpha \sin b \sin c = \cos a - \cos b \cos c.$$

Raspišimo lijevu stranu jednakosti koristeći relaciju (4.2), svojstvo vektorskog produkta iz propozicije 2.9 i jednakost (4.1):

$$\begin{aligned}
\cos\alpha \sin b \sin c &= \langle \xi_{AB}, \xi_{AC} \rangle \\
&= \langle A \times B, A \times C \rangle \\
&= \langle A, A \rangle \langle B, C \rangle - \langle B, A \rangle \langle A, C \rangle \\
&= \cos a - \cos c \cos b \\
&= \cos a - \cos b \cos c.
\end{aligned}$$

Pokazali smo da je lijeva strana jednaka desnoj i time smo dokazali traženu jednakost. □

Analogno se pokaže da vrijedi:

$$\begin{aligned}
\cos b &= \cos\beta \sin a \sin c + \cos a \cos c, \\
\cos c &= \cos\gamma \sin a \sin b + \cos a \cos b.
\end{aligned}$$

Teorem 4.3 (Poučak o sinusima). *Neka je $\triangle ABC \in S^2$ trokut sa stranicama duljina a, b, c i kutovima mjera α, β, γ. Tada vrijedi:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

Dokaz. Iz jednakosti (4.3) vrijedi

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\|\xi_{AB} \times \xi_{AC}\|}{\sin a \|\xi_{AB}\| \|\xi_{AC}\|} = \frac{\|(A \times B) \times (A \times C)\|}{\sin a \sin c \sin b}.$$

Primjenom 4. svojstva vektorskog produkta iz propozicije 2.8 imamo

$$(A \times B) \times (A \times C) = \langle A, A \times C \rangle B - \langle B, A \times C \rangle A.$$

Iz 1. svojstva propozicije 2.8 slijedi da je $\langle A, A \times C \rangle B = 0$. Nadalje, iz 3. i 2. svojstva vrijedi

$$\begin{aligned}
(A \times B) \times (A \times C) &= -\langle B \times A, C \rangle A \\
&= -\langle -A \times B, C \rangle A.
\end{aligned}$$

Po definiciji skalarnog produkta 2.1 i norme 2.2 početna jednadžba jednaka je

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\|\langle A \times B, C \rangle A\|}{\sin a \sin b \sin c} = \frac{|\langle A \times B, C \rangle| \|A\|}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Norma vektora $\|A\|$ jednaka je 1 pa slijedi

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{|\langle A\times B, C\rangle|}{\sin a\sin b\sin c}.$$

Analogno vrijedi

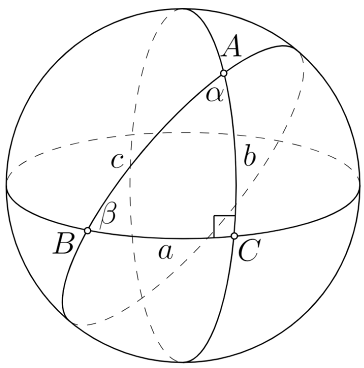
$$\begin{aligned}\frac{\sin\beta}{\sin b} &= \frac{\|\xi_{AB}\times\xi_{BC}\|}{\sin b\|\xi_{AB}\|\|\xi_{BC}\|}\\ &= \frac{\|(A\times B)\times(B\times C)\|}{\sin b\sin c\sin a}\\ &= \frac{\|\langle A, B\times C\rangle B-\langle B, B\times C\rangle A\|}{\sin a\sin b\sin c}\\ &= \frac{\|\langle A\times B, C\rangle B\|}{\sin a\sin b\sin c}\\ &= \frac{|\langle A\times B, C\rangle|\|B\|}{\sin a\sin b\sin c}\\ &= \frac{|\langle A\times B, C\rangle|}{\sin a\sin b\sin c}.\end{aligned}$$

Stoga vrijedi jednakost

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b}.$$

Analogno se pokaže jednakost i za $\frac{\sin\gamma}{\sin c}$ pa je time dokaz završen. □

Definicija 4.4. *Sferni trokut koji ima barem jedan pravi kut nazivamo pravokutnim trokutom.*



Slika 7: Pravokutni sferni trokut

Sferni trokut može imati jedan, dva ili tri prava kuta. U euklidskoj geometriji u pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ s katetama duljine a i b i hipotenuzom duljine c vrijede sljedeći identiteti:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \quad \cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Također, u pravokutom trokutu s pravim kutom u vrhu C vrijedi $c^2 = a^2+b^2$. Pogledajmo kako glasi Pitagorin teorem u sfernom trokutu.

Teorem 4.5 (Pitagorin poučak). *Trokut $\triangle ABC \in S^2$ je pravokutan s pravim kutom u vrhu C ako i samo ako je*

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Dokaz. Neka su duljine stranica i mjere kutova trokuta $\triangle ABC$ standarno označene. Neka je $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Tada iz kosinusova poučka za kut γ slijedi

$$\begin{aligned}
\cos c &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin a \sin b + \cos a \cos b\\
\cos c &= 0 \cdot \sin a \sin b + \cos a \cos b\\
\cos c &= \cos a \cos b.
\end{aligned}$$

Pokažimo obrat. Neka je $\cos c = \cos a \cos b$. Tada iz kosinusova poučka za kut γ dobijemo

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \cos\gamma \sin a \sin b + \cos a \cos b\\
0 &= \cos\gamma \sin a \sin b.
\end{aligned}$$

Duljine stranica sfernog trokuta su veće od 0 i manje od π. Stoga je $\sin a, \sin b \neq 0$. Zaključujemo da je $\cos\gamma = 0$. Kako je mjera kuta γ pozitivna, slijedi da je $\gamma = \frac{\pi}{2}$. □

Kako glase trigonometrijski identiteti u pravokutnom sfernom trokutu? Omjeri ostaju isti, ali se na brojnik i nazivnik primjenjuje odgovarajuća trigonometrijska funkcija. Trigonometrijske identitete pravokutnog sfernog trokuta iskazat i dokazat ćemo u iduća tri teorema. Prisjetimo se da je $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Teorem 4.6. *Neka je $\triangle ABC$ pravokutni sferni trokut s pravim kutom u vrhu C i neka su $a, b \neq \frac{\pi}{2}$. Tada vrijedi*

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} \quad i \quad \cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}.$$

Dokaz. Iz teorema 4.2 o kosinusu izrazimo $\cos\alpha$:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos\alpha\sin b\sin c + \cos b\cos c\\ \cos\alpha\sin b\sin c &= \cos a - \cos b\cos c.\end{aligned}$$

Za duljine stranica trokuta vrijedi $0 < a, b, c < \pi$ pa je $\sin b\sin c \neq 0$. Podijelimo gornju jednakost sa $\sin b\sin c$:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}. \tag{4.4}$$

Kako je $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom u vrhu C, po teoremu 4.5 slijedi da je $\cos c = \cos a\cos b$. Primijenimo li to na jednakost (4.4) imamo

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}\\ &= \frac{\cos a - \cos b\cos a\cos b}{\sin b\sin c}\\ &= \frac{\cos a - \cos a\cos^2 b}{\sin b\sin c}\\ &= \frac{\cos a(1-\cos^2 b)}{\sin b\sin c}\\ &= \frac{\cos a\sin^2 b}{\sin b\sin c}\\ &= \frac{\cos a\sin b}{\sin c}.\end{aligned}$$

Kako je $b \neq \frac{\pi}{2}$, iz $\cos c = \cos a\cos b$ slijedi da je $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$. Stoga imamo

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\cos c}{\cos b}\sin b}{\sin c} = \frac{\frac{\sin b}{\cos b}}{\frac{\sin c}{\cos c}} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}.$$

Analogno se pokaže da je $\cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$. □

Teorem 4.7. *Neka je $\triangle ABC$ pravokutni sferni trokut s pravim kutom u vrhu C. Tada vrijedi*

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \quad i \quad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Dokaz. Kako je trokut $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom u vrhu C, slijedi da je $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Stoga je $\sin\gamma = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Iz teorema 4.2 o sinusima slijedi

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin c}{1} \iff \sin\alpha\sin c = \sin a \iff \sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

Analogno vrijedi

$$\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{1} \iff \sin\beta\sin c = \sin b \iff \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

$\square$

Teorem 4.8. *Neka je $\triangle ABC$ pravokutni sferni trokut s pravim kutom u vrhu C i neka su $a, b \neq \frac{\pi}{2}$. Tada vrijedi*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b} \quad i \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}.$$

Dokaz. Znamo da je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$. Iz teorema 4.6 slijedi

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ &= \frac{\sin\alpha}{\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}}\\ &= \sin\alpha\frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b}\\ &= \sin\alpha\frac{\frac{\sin c}{\cos c}}{\frac{\sin b}{\cos b}}.\end{aligned}$$

Kako je trokut $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom u vrhu C i $b \neq \frac{\pi}{2}$, iz Pitagorina teorema slijedi da je $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$. Stoga je

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha\frac{\frac{\sin c}{\sin b}}{\frac{\cos c}{\cos b}} = \sin\alpha\frac{\frac{\sin c}{\sin b}}{\cos a}.$$

Sada iz teorema o sinusima slijedi

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha\frac{\frac{\sin c}{\sin b}}{\cos a} = \sin\alpha\frac{\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}}{\cos a}.$$

Kako je $\gamma = \frac{\pi}{2}$, slijedi da je $\sin\gamma = 1$ pa je

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha\frac{\frac{1}{\sin\beta}}{\cos a} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}{\cos a}.$$

Primijenimo još jednom teorem o sinusima:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sin a}{\sin b}}{\cos a} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a}}{\sin b} = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}.$$

Analogno se pokaže da je

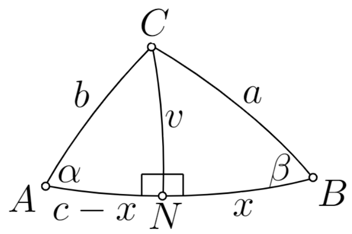
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}.$$

□

Teorem 4.9. *Neka je $\triangle ABC$ sferni trokut. Tada vrijedi*

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c.$$

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ sferni trokut. Neka je N nožište okomice iz vrha C na stranicu c. Označimo:



Slika 8: Nožište okomice sfernog trokuta

$$d(C,N) = v, \quad d(B,N) = x, \quad d(A,N) = c - x.$$

Kako su trokuti $\triangle BNC$ i $\triangle ACN$ pravokutni, po Pitagorinom poučku slijedi

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos v\cos x,\\ \cos b &= \cos v\cos(c-x).\end{aligned}$$

Pomnožimo međusobno jednadžbe i potom dobivenu jednakost pomnožimo s $\cos c$:

$$\cos a\cos b\cos c = \cos^2 v\cos x\cos(c-x)\cos c. \tag{4.5}$$

Po adicijskoj formuli za kosinus vrijedi

$$\cos c = \cos(x + (c-x)) = \cos x\cos(c-x) - \sin x\sin(c-x).$$

Uvrstimo prethodnu jednadžbu u lijevu stranu jednakosti (4.5):

$$\cos a\cos b(\cos x\cos(c-x) - \sin x\sin(c-x)) = \cos^2 v\cos x\cos(c-x)\cos c.$$

Podijelimo jednakost s $\cos x \cos (c-x)$:

$$\begin{aligned}\cos a \cos b\left(1-\frac{\sin x \sin (c-x)}{\cos x \cos (c-x)}\right) &= \cos^2 v \cos c \\ \cos a \cos b(1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(c-x)) &= (1-\sin^2 v) \cos c \\ \cos a \cos b-\cos a \cos b \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(c-x) &= \cos c-\sin^2 v \cos c.\end{aligned}$$

Preslagivanjem jednakosti dobivamo:

$$\cos a \cos b-\cos c=\cos a \cos b \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(c-x)-\sin^2 v \cos c.$$

Iz kosinusova poučka za kut γ slijedi

$$-\cos \gamma \sin a \sin b=\cos a \cos b \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(c-x)-\sin^2 v \cos c.$$

Podijelimo jednakost sa $-\sin a \sin b$:

$$\cos \gamma=-\frac{\cos a}{\sin a} \frac{\cos b}{\sin b} \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(c-x)+\frac{\sin^2 v}{\sin a \sin b} \cos c.$$

Raspisivanjem dobivamo

$$\cos \gamma=-\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \frac{\operatorname{tg}(c-x)}{\operatorname{tg} b}+\frac{\sin v}{\sin a} \frac{\sin v}{\sin b} \cos c. \tag{4.6}$$

Primjenom teorema 4.6 i 4.7 na trokut $\triangle BNC$ imamo

$$\cos \alpha=\frac{\operatorname{tg}(c-x)}{\operatorname{tg} b} \quad \text{i} \quad \cos \beta=\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}.$$

Primjenom tih teorema na trokut $\triangle ACN$ dobivamo

$$\sin \alpha=\frac{\sin v}{\sin b} \quad \text{i} \quad \sin \beta=\frac{\sin v}{\sin a}.$$

Stoga je jednakost (4.6) jednaka

$$\cos \gamma=-\cos \beta \cos \alpha+\sin \beta \sin \alpha \cos c.$$

□

Stoga možemo izračunati duljine stranica sfernog trokuta, ako su poznate mjere kutova. U euklidskoj geometriji ne postoji analogon teorema 4.9.

5 Grupa izometrija

5.1 Izometrija

Definicija 5.1. *Preslikavanje $T : S^2 \longrightarrow S^2$ je izometrija ako vrijedi*

$$d(T(X), T(Y)) = d(X, Y), \quad \forall X, Y \in S^2.$$

Skup svih izometrija sfere obzirom na kompoziciju čini grupu I koju zovemo grupom izometrija.

Teorem 5.2. *Neka su $P, Q, R \in S^2$ tri točke koje ne pripadaju jednoj velikoj kružnici. Ako izometrija T zadovoljava $T(P) = P$, $T(Q) = Q$ i $T(R) = R$, onda je T identiteta.*

Dokaz. Neka su P, Q i R tri fiksne točke izometrije T koje ne pripadaju istoj velikoj kružnici. Tada su vektori P, Q i R linearno nezavisni, tj. skup $\{P, Q, R\}$ čini bazu. Stoga se svaki vektor $A \in S^2$ može na jedinstven način prikazati kao

$$A = \alpha P + \beta Q + \gamma R.$$

Iz propozicije 2.3 slijedi da je

$$\begin{aligned} \langle P, A\rangle &= \langle P, \alpha P + \beta Q + \gamma R\rangle \\ &= \langle P, \alpha P\rangle + \langle P, \beta Q\rangle + \langle P, \gamma R\rangle \\ &= \alpha\langle P, P\rangle + \beta\langle P, Q\rangle + \gamma\langle P, R\rangle. \end{aligned}$$

Analogno se pokaže da vrijedi

$$\begin{aligned} \langle Q, A\rangle &= \alpha\langle P, Q\rangle + \beta\langle Q, Q\rangle + \gamma\langle Q, R\rangle, \\ \langle R, A\rangle &= \alpha\langle P, R\rangle + \beta\langle Q, R\rangle + \gamma\langle R, R\rangle. \end{aligned}$$

Sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice ima jedinstveno rješenje ako je matrica sustava regularna. Neka je

$$M = \begin{pmatrix} \langle P, P\rangle & \langle P, Q\rangle & \langle P, R\rangle \\ \langle P, Q\rangle & \langle Q, Q\rangle & \langle Q, R\rangle \\ \langle P, R\rangle & \langle Q, R\rangle & \langle R, R\rangle \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je M Gramova matrica linearno nezavisnog skupa vektora $\{P, Q, R\}$. Stoga je M regularna matrica pa sustav ima jedinstveno rješenje. Iz toga slijedi da je točka A jedinstveno određena sklarnim produktima $\langle P, A\rangle$, $\langle Q, A\rangle$ i $\langle R, A\rangle$. Po definiciji 3.8 za udaljenost dviju točaka vidimo da je točka A jedinstveno određena svojom udaljenošču od točaka P, Q i R. Kako je $T(P) = P$, $T(Q) = Q$ i $T(R) = R$, a T čuva udaljenost, slijedi da je $T(A) = A$ za svaku točku $A \in S^2$. Zaključujemo da je T identiteta. □

Korolar 5.3. *Neka su $P, Q, R \in S^2$ tri točke koje ne pripadaju istoj velikoj kružnici. Ako za dvije izometrije $T_1, T_2 \in I$ vrijedi $T_1(P) = T_2(P)$, $T_1(Q) = T_2(Q)$ i $T_1(R) = T_2(R)$, onda je $T_1 = T_2$.*

Dokaz. Iz pretpostavke da je $T_1(P) = T_2(P)$, $T_1(Q) = T_2(Q)$ i $T_1(R) = T_2(R)$ slijedi

$$(T_1^{-1} \circ T_2)(P) = T_1^{-1}(T_2(P)) = T_1^{-1}(T_1(P)) = P,$$
$$(T_1^{-1} \circ T_2)(Q) = T_1^{-1}(T_2(Q)) = T_1^{-1}(T_1(Q)) = Q,$$
$$(T_1^{-1} \circ T_2)(R) = T_1^{-1}(T_2(R)) = T_1^{-1}(T_1(R)) = R.$$

Kompozicija $T_1^{-1} \circ T_2$ je izometrija koja ima tri fiksne točke, pa po teoremu 5.2 slijedi da je $T_1^{-1} \circ T_2 = id$. Stoga je $T_1 = T_2$. □

Definicija 5.4. *Preslikavanje $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je ortogonalno ako vrijedi*

$$\langle T(X), T(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3.$$

Iz definicije 5.4 vidimo da ortogonalno preslikavanje čuva skalarni produkt. Skup svih ortogonalnih preslikavanja čini ortogonalnu grupu $O(3)$.

Teorem 5.5. *Neka je $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ preslikavanje koje čuva skalarni produkt. Tada je f linearni operator.*

Teorem 5.6. *Linearni operator $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je ortogonalan ako i samo ako f čuva normu.*

Teorem 5.7. *Linearni operator $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je ortogonalan ako i samo ako svaki jedinični vektor iz domene preslika u jedinični vektor kodomene.*

Teorem 5.8. *Linearni operator $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je ortogonalan ako i samo ako preslikava bar jednu ortonormiranu bazu domene u ortonormirani skup vektora kodomene.*

Iskazi i dokazi teorema 5.5-5.8 u općenitijem slučaju se nalaze u knjizi Linearna algebra od K.Horvatića [4].

Ako je $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ortogonalno preslikavanje, onda po teoremu 5.7 vrijedi $T(S^2) \subseteq S^2$. Za svake dvije točke $X, Y \in S^2$ vrijedi

$$d(X, Y) = \arccos \langle X, Y \rangle = \arccos \langle T(X), T(Y) \rangle = d(T(X), T(Y)).$$

Slijedi da je restrikcija $T|_{S^2} : S^2 \longrightarrow S^2$ izometrija.

Obratno, neka je $T : S^2 \longrightarrow S^2$ izometrija. Neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ kanonska baza od $\mathbb{R}^3$. Definirajmo

$$f_1 := T(e_1), \quad f_2 := T(e_2) \quad \text{i} \quad f_3 := T(e_3).$$

Budući da T čuva udaljenost, vrijedi

$$\begin{aligned} d(f_i, f_j) = d(e_i, e_j) &\iff \arccos \langle f_i, f_j \rangle = \arccos \langle e_i, e_j \rangle \\ &\iff \langle f_i, f_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je skup $\{f_1, f_2, f_3\}$ također ortonormiran.

Neka je $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jedinstveni linearni operator takav da je $A(e_1) = f_1$, $A(e_2) = f_2$ i $A(e_3) = f_3$. Po teoremu 5.8 je linearni operator A ortogonalan. Tada je restrikcija $A|_{S^2} : S^2 \longrightarrow S^2$ izometrija koja se podudara s izometrijom T u tri točke koje ne pripadaju na istoj velikoj kružnici. Po korolaru 5.3 je $A|_{S^2} = T$. Time smo dokazali ovaj teorem:

Teorem 5.9. *Grupa izometrija I na S^2 je izomorfna ortogonalnoj grupi $O(3)$.*

Primjer izometrije sfere je antipodalno preslikavanje koje definiramo na sljedeći način.

Definicija 5.10. *Preslikavanje $E : S^2 \longrightarrow S^2$ nazivamo antipodalnim preslikavanjem ako vrijedi:*

$$E(X) = -X, \quad \forall X \in S^2.$$

Preslikavanje E je očito restrikcija ortogonalnog operatora jer za sve vektore $X, Y \in \mathbb{R}^3$ vrijedi $\langle X, Y \rangle = \langle -X, -Y \rangle$. Samim time je E izometrija.

5.2 Osna simetrija sfere

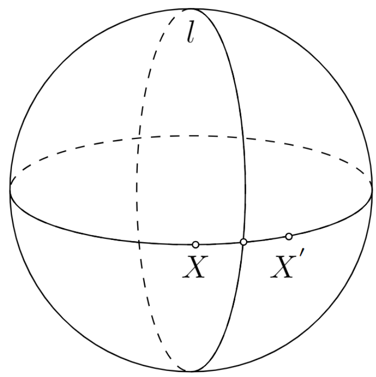
Osna simetrija sfere je također primjer izometrije. Svaka izometrija sfere može se prikazati kao kompozicija najviše triju osnih simetrija. Prije nego što dokažemo navedenu tvrdnju, definirat ćemo osnu simetriju sfere i dokazati njena svojstva.

Definicija 5.11. *Osna simetrija na sferi s obzirom na veliku kružnicu l s polom ξ je preslikavanje $\Omega_l : S^2 \longrightarrow S^2$ dano s*

$$\Omega_l(X) = X - 2\langle X, \xi \rangle \xi, \quad \forall X \in S^2.$$

Preslikavanje Ω_l ne ovisi o izboru pola velike kružnice l. Uzmemo li pol suprotan polu ξ vrijedi:

$$\Omega_l(X) = X - 2\langle X, -\xi \rangle (-\xi) = X + 2\langle X, \xi \rangle (-\xi) = X - 2\langle X, \xi \rangle \xi.$$



Slika 9: Osnosimetrična slika točke X s obrziom na veliku kružnicu l

Propozicija 5.12. *Neka je $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definirano sa $T(X) = X - 2\langle X, \xi\rangle\xi$, $\|\xi\| = 1$. Tada je T ortogonalni operator.*

Dokaz. Želimo pokazati da T čuva skalarni produkt. Po definiciji preslikavanja T vrijedi

$$\langle T(X), T(Y)\rangle = \langle X - 2\langle X, \xi\rangle\xi, Y - 2\langle Y, \xi\rangle\xi\rangle. \tag{5.1}$$

Primjenom definicije 2.1 i propozicije 2.3 slijedi da je desna strana jednakosti (5.1) jednaka

$$\langle X, Y\rangle + \langle -2\langle X, \xi\rangle\xi, Y\rangle + \langle X, -2\langle Y, \xi\rangle\xi\rangle + \langle -2\langle X, \xi\rangle\xi, -2\langle Y, \xi\rangle\xi\rangle.$$

Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}\langle T(X), T(Y)\rangle &= \langle X, Y\rangle - 2\langle X, \xi\rangle\langle \xi, Y\rangle - 2\langle Y, \xi\rangle\langle X, \xi\rangle + 4\langle X, \xi\rangle\langle Y, \xi\rangle\langle \xi, \xi\rangle \\ &= \langle X, Y\rangle - 2\langle X, \xi\rangle\langle Y, \xi\rangle - 2\langle X, \xi\rangle\langle Y, \xi\rangle + 4\langle X, \xi\rangle\langle Y, \xi\rangle \\ &= \langle X, Y\rangle - 4\langle X, \xi\rangle\langle \xi, Y\rangle + 4\langle X, \xi\rangle\langle Y, \xi\rangle \\ &= \langle X, Y\rangle.\end{aligned}$$

Time smo pokazali da osna simetrija čuva skalarni produkt, tj. da je T ortogonalni operator. □

Kako su preslikavanja T i Ω_l zadana istim pravilom, iz propozicije 5.12 slijedi $\langle \Omega_l(X), \Omega_l(X)\rangle = \langle X, X\rangle = 1$, tj. $\Omega_l(X) \in S^2$, za svaki $x \in S^2$. Što ako točka X pripada velikoj kružnici l? Tada vrijede ekvivalencije: $X \in l \iff \langle x, \xi\rangle = 0 \iff \Omega_l(X) = X - 2 \cdot 0 \cdot \xi = X$. Preslikavanje Ω_l je dobro definirano.

Kako smo preslikavanje T čija je domena $\mathbb{R}^3$ definirali istim pravilom kao i Ω_l na S^2, slijedi da je osna simetrija sfere restrikcija ortogonalnog operatora. Stoga je osna simetrija ujedno i izometrija.

Propozicija 5.13. *Osna simetrija $\Omega_l : S^2 \longrightarrow S^2$ je involucija, tj.*

$$\Omega_l \circ \Omega_l(X) = X, \quad \forall X \in S^2.$$

Dokaz. Kako je osna simetrija restrikcija ortgonalnog operatora, iz teorema 5.5 slijedi da je linearna. Stoga po definiciji 5.11 i definiciji 2.1 imamo:

$$\begin{aligned}
\Omega_l(\Omega_l(X)) &= \Omega_l(X - 2\langle X, \xi\rangle\xi) \\
&= (X - 2\langle X, \xi\rangle\xi) - 2\langle X - 2\langle X, \xi\rangle\xi, \xi\rangle\xi \\
&= X - 2\langle X, \xi\rangle\xi - 2\langle X, \xi\rangle\xi - 2\langle -2\langle X, \xi\rangle\xi, \xi\rangle\xi \\
&= X - 4\langle X, \xi\rangle\xi + 4\langle X, \xi\rangle\langle \xi, \xi\rangle\xi \\
&= X - 4\langle X, \xi\rangle\xi + 4\langle X, \xi\rangle\xi \\
&= X.
\end{aligned}$$

□

Lema 5.14. *Za svake dvije točke $X, Y \in S^2$ postoji osna simetrija Ω_l takva da je $\Omega_l(X) = Y$.*

Dokaz. Neka su $X, Y \in S^2$. Pretpostavimo da one nisu antipodalne. Tada po propoziciji 3.4 postoji jedinstvena velika kružnica m koja sadrži te točke čiji je pol jednak $\frac{X \times Y}{\|X \times Y\|}$.

Želimo pokazati da postoji osna simetrija $\Omega_l : S^2 \longrightarrow S^2$ takva da je $\Omega_l(X) = Y$. Za traženu os simetrije l vrijedi da je okomita na veliku kružnicu m i da je presjek $l \cap m = M$ polovište luka $\overset{\frown}{XY}$.

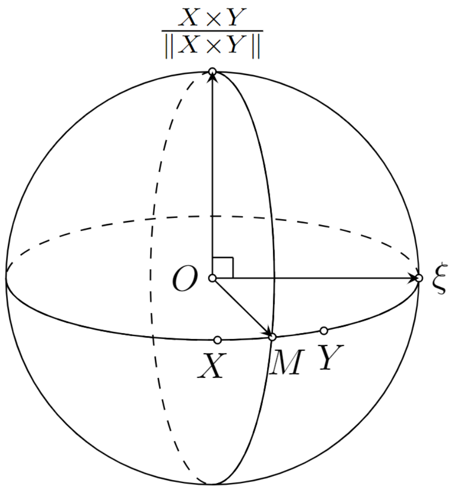
Odredimo prvo polovište M. Vektore X i Y zbrajamo po pravilu paralelograma pa je vektor $X + Y$ kolinearan s vektorom M. Normiranjem tog vektora dobit ćemo jedinični vektor pa je

$$M = \frac{X + Y}{\|X + Y\|} \in S^2.$$

Svaka velika kružnica jedinstveno je određena svojim polom. Neka je ξ pol velike kružnice l. Po definiciji 3.7 su dvije velike kružnice okomite ako su im polovi ortogonalni. Stoga, trebamo odrediti ξ takav da je $\langle \xi, X \times Y\rangle = 0$. Također, polovište M pripada velikoj kružnici l pa vrijedi $\langle \xi, M\rangle = 0$.

Kako je OM simetrala dužine $\overline{XY}$, slijedi da je vektor $\overrightarrow{XY}$ okomit na vektor $\overrightarrow{OM}$. Zbrajanjem vektora Y i $-X$ dobijemo vektor $Y - X$ koji je okomit na vektor M. Normiranjem dobijemo kandidata za ξ:

$$\xi = \frac{Y - X}{\|Y - X\|} \in S^2.$$



Slika 10: Konstrukcija osi simetrije l koja preslikava točku X u točku Y

Direktnom provjerom vidimo da je

$$\langle \xi, M\rangle = \langle \frac{Y-X}{\|Y-X\|}, \frac{X+Y}{\|X+Y\|}\rangle = \frac{1}{\|Y-X\|\|X+Y\|}\langle X+Y, X-Y\rangle.$$

Po definiciji 2.1 i propoziciji 2.3 vrijedi

$$\langle X+Y, X-Y\rangle = \langle X, X\rangle - \langle X, Y\rangle + \langle Y, X\rangle - \langle Y, Y\rangle = 1 - 0 - 1 = 0.$$

Također, direktnom provjerom vrijedi

$$\langle \xi, \frac{X\times Y}{\|X\times Y\|}\rangle = \langle \frac{Y-X}{\|Y-X\|}, \frac{X\times Y}{\|X\times Y\|}\rangle = \frac{1}{\|Y-X\|\|X\times Y\|}\langle Y-X, X\times Y\rangle.$$

Po definiciji 2.1 i propoziciji 2.8 vrijedi

$$\langle Y-X, X\times Y\rangle = \langle Y, X\times Y\rangle - \langle X, X\times Y\rangle = 0 - 0 = 0.$$

Pretpostavimo sada da su $X, Y \in S^2$ antipodalne točke. Tada postoji beskonačno mnogo velikih kružnica koje prolaze točkama X i Y, tj. postoji beskonačno mnogo polovišta koja čine os simetrije l. Kako su X i Y antipodalne, one su ujedno polovi velike kružnice l. Stoga je os simetrije određena s polovima $\pm X$. Uistinu, po definiciji 5.11 vrijedi

$$\Omega_l(X) = X - 2\langle X, X\rangle X = X - 2X = -X.$$

$\square$

Lema 5.15. *Neka je $\Omega_l : S^2 \longrightarrow S^2$ osna simetrija i $X, Y \in S^2$, $\Omega_l(Y) \neq Y$. Ako je $d(X,Y) = d(X, \Omega_l(Y))$, onda je $\Omega_l(X) = X$.*

Dokaz. Neka je $\Omega_l(Y) = Y_1$. Tada je $d(X,Y) = d(X,Y_1)$. Kako je funkcija arccos injektivna, slijedi da je $\langle X,Y\rangle = \langle X,Y_1\rangle$. Po propoziciji 2.3 vrijedi

$$\langle X,Y\rangle = \langle X,Y_1\rangle \iff \langle X,Y\rangle - \langle X,Y_1\rangle = 0 \iff \langle X, Y - Y_1\rangle = 0.$$

Ako točke Y i Y_1 nisu antipodalne, onda iz dokaza leme 5.14 slijedi da je $\frac{Y-Y_1}{\|Y-Y_1\|}$ pol velike kružnice l. Stoga je $X \in l$, odnosno $\Omega_l(X) = X$.

Ako su točke Y i Y_1 antipodalne, onda su iz dokaza leme 5.14 slijedi da su vektori Y i Y_1 polovi velike kružnice l. Stoga je $\langle X,Y\rangle = \langle X,Y_1\rangle = 0$. Slijedi da je X fiksna točka preslikavanja Ω_l. $\square$

Teorem 5.16. *Svaka izometrija sfere se može prikazati kao kompozicija najviše tri osne simetrije sfere.*

Dokaz. Neka su $A, B, C \in S^2$ točke koje ne pripadaju istoj velikoj kružnici i neka je $f : S^2 \longrightarrow S^2$ izometrija. Neka je $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$ i $f(C) = C_1$.

Kada bi A, B i C bile fiksne točke izometrije f, onda bi po teoremu 5.2 preslikavanje f bilo identiteta. Tada za osnu simetriju Ω_l s obzirom na bilo koji pravac $l \in S^2$ vrijedi $f = \Omega_l \circ \Omega_l$.

Pretpostavimo da barem jedna od točaka A, B i C nije fiksna točka preslikavanja f. Bez smanjenja općenitosti neka je $f(A) \neq A$. Tada po lemi 5.14 možemo definiratiti osnu simetriju $\Omega_1 : S^2 \longrightarrow S^2$ takvu da je $\Omega_1(A) = A_1$. Po propoziciji 5.13. vrijedi da je

$$(\Omega_1 \circ f)(A) = \Omega_1(f(A)) = \Omega_1(A_1) = A.$$

Slijedi da je A fiksna točka preslikavanja $\Omega_1 \circ f$. Kada bi B i C bile fiksne točke tog preslikavnja, onda bi po teoremu 5.2 vrijedilo da je $\Omega_1 \circ f$ identiteta. Kako je Ω_1 involucija, vrijedilo bi da je $\Omega_1 \circ f = id \iff f = \Omega_1$.

Pretpostavimo da barem jedna od točaka B i C nije fiksna točka preslikavanja $\Omega_1 \circ f$. Bez smanjenja općenitosti neka je $(\Omega_1 \circ f)(B) = B_2$, $B_2 \neq B$. Tada po lemi 5.14 možemo definirati osnu simetriju $\Omega_2 : S^2 \longrightarrow S^2$ takvu da je $\Omega_2(B) = B_2$. Tada po definiciji 5.1 vrijedi

$$d(A,B) \overset{f}{=} d(A_1, B_1) \overset{\Omega_1}{=} d(A, B_2).$$

Po lemi 5.15 slijedi da je A fiksna točka preslikavanja Ω_2. Po propoziciji 5.13. za točku B vrijedi:

$$(\Omega_2 \circ \Omega_1 \circ f)(B) = \Omega_2(\Omega_1(f(B))) = \Omega_2(\Omega_1(B_1)) = \Omega_2(B_2) = B.$$

Stoga su A i B fiksne točke preslikavanja $\Omega_2 \circ \Omega_1 \circ f$. Kada bi C bila fiksna točka tog preslikavanja, onda bi po teoremu 5.2 vrijedilo da je $\Omega_2 \circ \Omega_1 \circ f$ identiteta. Analogno prethodnom slučaju, kako su Ω_1 i Ω_2 involucije, vrijedilo bi $f = \Omega_1 \circ \Omega_2$.

Pretpostavimo sada da C nije fiksna točka preslikavanja $\Omega_2 \circ \Omega_1 \circ f$. Neka je $(\Omega_2 \circ \Omega_1 \circ f)(C) = C_3 \neq C$ i neka je $(\Omega_1 \circ f)(C) = C_2$. Tada po lemi 5.14 možemo definirati osnu simetriju $\Omega_3 : S^2 \longrightarrow S^2$ takvu da je $\Omega_2(C) = C_3$. Tada po definiciji 5.1 vrijedi

$$d(A,C) \stackrel{f}{=} d(A_1,C_1) \stackrel{\Omega_1}{=} d(A,C_2) \stackrel{\Omega_2}{=} d(A,C_3).$$

Analnogno vrijedi

$$d(B,C) \stackrel{f}{=} d(B_1,C_1) \stackrel{\Omega_1}{=} d(B_2,C_2) \stackrel{\Omega_2}{=} d(B,C_3).$$

Stoga su po lemi 5.15 točke A i B fiksne točke preslikavanja Ω_3. Po propoziciji 5.13. za točku C vrijedi:

$$\begin{aligned}(\Omega_3 \circ \Omega_2 \circ \Omega_1 \circ f)(C) &= \Omega_3(\Omega_2(\Omega_1(f(C)))) \\ &= \Omega_3(\Omega_2(\Omega_1(C_1))) \\ &= \Omega_3(\Omega_2(C_2)) \\ &= \Omega_3(C_3) \\ &= C.\end{aligned}$$

Stoga su A, B i C fiksne točka preslikavanja $\Omega_3 \circ \Omega_2 \circ \Omega_1 \circ f$. Po teoremu 5.2 vrijedilo da je $\Omega_3 \circ \Omega_2 \circ \Omega_1 \circ f$ identiteta. Analogno prethodnom slučaju, kako su Ω_1, Ω_2 i Ω_3 involucije, slijedi $f = \Omega_1 \circ \Omega_2 \circ \Omega_3$. □

5.3 Sukladnost sfernih trokuta

Sferni trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ su sukladni ako postoji izometrija koja trokut $\triangle ABC$ preslika u trokut $\triangle A_1B_1C_1$. Prisjetimo se da je izometrija prelikavanje koje čuva udaljenost. Za sferni trokut vrijede sljedeći teoremi o sukladosti:

Teorem 5.17 (SSS). *Ako se sfernim trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ podudaraju duljine odgovarajućih stranica, onda su oni sukladni.*

Dokaz 1. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ sferni trokuti takvi da je $d(A,B) = d(A_1,B_1)$, $d(A,C) = d(A_1,C_1)$ i $d(B,C) = d(B_1,C_1)$. Tvrdimo da postoji izometrija $f : S^2 \longrightarrow S^2$ takva da je $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$ i $f(C) = C_1$.

Neka je $A = A_1$, $B = B_1$ i $C = C_1$. Tada se trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ preklapaju.

Pretpostavimo sada da se bar jedna točka ne preklapa. Neka je $A \neq A_1$. Zbog leme 5.14 možemo definirati osnu simetriju $\Omega_l : S^2 \longrightarrow S^2$ takvu da je $\Omega_l(A) = A_1$. Kada bi vrijedilo da je $\Omega_l(B) = B_1$ i $\Omega_l(C) = C_1$, onda bi $f = \Omega_l$ bila tražena izometrija.

Pretpostavimo da je $\Omega_l(B) = B' \neq B_1$ i $\Omega_l(C) = C'$. Definirajmo sada osnu simetriju $\Omega_m : S^2 \longrightarrow S^2$ takvu da je $\Omega_m(B') = B_1$. Neka je $\Omega_m(C') = C''$. Što je osnosimetrična slika točke A_1 s obzirom na pravac m? Zbog osne simetrije Ω_l vrijedi

$$d(A, B) = d(A_1, B').$$

S druge strane, iz pretpostavke da je $d(A, B) = d(A_1, B_1)$ imamo jednakost

$$d(A_1, B') = d(A_1, B_1).$$

Stoga iz leme 5.15 slijedi da je $\Omega_m(A_1) = A_1$. Kada bi vrijedilo da je $\Omega_m(C') = C_1$, onda bi po teoremu 5.16 kompozicija $f = \Omega_l \circ \Omega_m$ bila tražena izometrija.

Pretpostavimo da je $\Omega_m(C') = C'' \neq C_1$. Definirajmo osnu simetriju $\Omega_n : S^2 \longrightarrow S^2$ takvu da je $\Omega_n(C'') = C_1$. Tada vrijedi

$$d(A, C) \overset{\Omega_l}{=} d(A_1, C') \overset{\Omega_m}{=} d(A_1, C'').$$

Kako je $d(A, C) = d(A_1, C_1)$, slijedi da je

$$d(A_1, C'') = d(A_1, C_1).$$

Po lemi 5.15 vrijedi $\Omega_n(A_1) = A_1$. Analogno se pokaže da je $\Omega_n(B_1) = B_1$.

Stoga kompozicija osnih simetrija $f = \Omega_n \circ \Omega_m \circ \Omega_l$ preslikava točke A, B i C redom u točke A_1, B_1 i C_1 pa je po teoremu 5.16 $f = \Omega_n \circ \Omega_m \circ \Omega_l$ tražena izometrija. □

Dokaz 2. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ sferni trokuti takvi da je $d(A, B) = d(A_1, B_1)$, $d(A, C) = d(A_1, C_1)$ i $d(B, C) = d(B_1, C_1)$. Tada je po definiciji 3.8 $\langle A, B\rangle = \langle A_1, B_1\rangle$, $\langle A, C\rangle = \langle A_1, C_1\rangle$ i $\langle B, C\rangle = \langle B_1, C_1\rangle$. Skup $\{A, B, C\}$ je baza pa možemo definirati jedinstveni linearni operator $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takav da je $T(A) = A_1$, $T(B) = B_1$ i $T(C) = C_1$. Pokažimo da je T ortogonalan.

Neka je $X \in \mathbb{R}^3$ proizvoljan vektor. Tada se X može na jedinstven način prikazati kao $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$. Iz toga slijedi

$$T(X) = T(\alpha A + \beta B + \gamma C) = \alpha T(A) + \beta T(B) + \gamma T(C) = \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1.$$

Nadalje, vrijedi $\|X\|^2 = \langle \alpha A + \beta B + \gamma C, \alpha A + \beta B + \gamma C \rangle$. Stoga iz definicije 2.1 i propozicije 2.3 slijedi

$$\begin{aligned} \|X\|^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\langle A, B\rangle + 2\alpha\gamma\langle A, C\rangle + 2\beta\gamma\langle B, C\rangle \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\langle A_1, B_1\rangle + 2\alpha\gamma\langle A_1, C_1\rangle + 2\beta\gamma\langle B_1, C_1\rangle \\ &= \|T(X)\|^2. \end{aligned}$$

Tada vrijedi $\|X\| = \|T(X)\|$, $\forall X \in \mathbb{R}^3$. Time smo pokazali da T čuva normu, pa iz teoremu 5.6 slijedi da je T ortogonalan. Stoga je $T|_{S^2} : S^2 \longrightarrow S^2$ tražena izometrija.

□

Teorem 5.18 (SKS). *Ako se sfernim trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ podudaraju duljine dviju stranica i mjera kuta kojeg te stranice određuju, onda su oni sukladni.*

Dokaz. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ sferni trokuti takvi da je $b = b_1$, $\alpha = \alpha_1$ i $c = c_1$. Koristimo standardne oznake oznake $b = d(A, C)$, $b_1 = d(A_1, C_1)$, $\alpha = \measuredangle BAC$, $\alpha_1 = \measuredangle B_1A_1C_1$, $c = d(A, B)$ i $c_1 = d(A_1, B_1)$. Tada po definiciji 3.8 vrijedi $\langle A, C\rangle = \langle A_1, C_1\rangle$ i $\langle A, B\rangle = \langle A_1, B_1\rangle$. Iz defincija 3.7 i 2.6 slijedi

$$\cos\alpha = \frac{\langle A \times B, A \times C\rangle}{\|A \times B\|\|A \times C\|} \quad \text{i} \quad \cos\alpha_1 = \frac{\langle A_1 \times B_1, A_1 \times C_1\rangle}{\|A_1 \times B_1\|\|A_1 \times C_1\|}.$$

Znamo da je $\|A \times B\| = \sin c = \sin c_1 = \|A_1 \times B_1\|$ i $\|A \times C\| = \sin b = \sin b_1 = \|A_1 \times C_1\|$. Izjednačavanjem $\cos\alpha = \cos\alpha_1$ slijedi $\langle A \times B, A \times C\rangle = \langle A_1 \times B_1, A_1 \times C_1\rangle$. Iz 2. svojstva propozicije 2.9 slijedi

$$\langle A \times B, A \times C\rangle = \langle A, A\rangle\langle B, C\rangle - \langle B, A\rangle\langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle - \langle A, B\rangle\langle A, C\rangle$$

Stoga iz pretpostavke slijedi

$$\begin{aligned} \langle B, C\rangle &= \langle A \times B, A \times C\rangle + \langle A, B\rangle\langle A, C\rangle \\ &= \langle A_1 \times B_1, A_1 \times C_1\rangle + \langle A_1, B_1\rangle\langle A_1, C_1\rangle \\ &= \langle B_1, C_1\rangle. \end{aligned}$$

Dobili smo da je $a = a_1$ pa po teoremu 5.17 slijedi da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ sukladni. □

Neka je $\triangle ABC$ sferni trokut. Polarni trokut $\triangle A'B'C'$ definiramo na sljedeći način. Neka je A' pol velike kružnice BC takav da se točke A i A' nalaze s iste strane te velike kružnice. Analogno definiramo točke B' i C'. Tada vrijedi

$$A' = \pm\frac{B\times C}{\|B\times C\|}, \quad B' = \pm\frac{C\times A}{\|C\times A\|} \quad \text{i} \quad C' = \pm\frac{A\times B}{\|A\times B\|}.$$

Pokazuje se da u sve tri jednakosti stoji predznak + ili u sve tri jednakosti stoji predznak − (ovisno o orijentaciji trokuta $\triangle ABC$). U nastavku ćemo pretpostaviti da je predznak +, a u suprotnom slučaju dokazi su analogni.

Teorem 5.19. *Neka su u trokutu $\triangle ABC$ duljine stranica i mjere kutova a, b, c i α, β, γ, a u odgovarajućem polarnom trokutu a', b', c' i α', β', γ'. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} a' &= \pi - \alpha, \quad & b' &= \pi - \beta, \quad & c' &= \pi - \gamma, \\ \alpha' &= \pi - a, \quad & \beta' &= \pi - b, \quad & \gamma' &= \pi - c. \end{aligned}$$

Dokaz. Iz definicije polarnog trokuta vrijedi

$$\begin{aligned} a' = d(B', C') &= \arccos\langle \frac{C\times A}{\|C\times A\|}, \frac{A\times B}{\|A\times B\|}\rangle \\ &= \arccos\left(-\langle \frac{A\times C}{\|A\times C\|}, \frac{A\times B}{\|A\times B\|}\rangle\right) \\ &= \pi - \arccos\langle \frac{A\times C}{\|A\times C\|}, \frac{A\times B}{\|A\times B\|}\rangle \\ &= \pi - \alpha. \end{aligned}$$

Analogno se pokaže da je $b' = \pi - \beta$ i $c' = \pi - \gamma$.

Neka je $\triangle A''B''C''$ polarni trokut od $\triangle A'B'C'$. Tada je $\triangle A''B''C''$ jednak polaznom trokutu $\triangle ABC$. Stoga je $a = a'' = \pi - \alpha'$. Iz toga slijedi da je $\alpha' = \pi - a$. Analogno se pokaže da je $\beta' = \pi - b$ i $\gamma' = \pi - c$. $\square$

Teorem 5.20 (KKK). *Ako se sfernim trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ podudaraju mjere svih kutova, onda su oni sukladni.*

Dokaz. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ sferni trokuti takvi da je $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ i $\gamma = \gamma_1$. Neka su $\triangle A'B'C'$ i $\triangle A_1'B_1'C_1'$ redom njihovi polarni trokuti. Tada po teoremu 5.19 vrijedi da je $a' = \pi - \alpha$ i $a_1' = \pi - \alpha_1$ pa je $a' = a_1'$. Analogno se pokaže da je $b' = b_1'$ i $c' = c_1'$. Stoga su po teoremu 5.17 trokuti $\triangle A'B'C'$ i $\triangle A_1'B_1'C_1'$ sukladni pa vrijedi $\alpha' = \alpha_1'$, $\beta = \beta_1'$ i $\gamma' = \gamma_1'$. Po teoremu 5.19 vrijedi $\alpha' = \pi - a$ i $\alpha_1' = \pi - a_1$ pa je $a = a_1$. Analogno se pokaže da je $b = b_1$ i $c = c_1$. Stoga su po teoremu 5.17 su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ sukladni. $\square$

Teorem 5.21 (KSK). *Ako se sfernim trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ podudara duljina jedne stranice i mjere kutova nad tom stranicom, onda su oni sukladni.*

Dokaz. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ sferni trokuti takvi da je $\alpha = \alpha_1$, $c = c_1$ i $\beta = \beta_1$. Neka su $\triangle A'B'C'$ i $\triangle A_1'B_1'C_1'$ redom njihovi polarni trokuti. Iz teorema 5.19 slijedi $a' = \pi - \alpha$ i $a_1' = \pi - \alpha_1$ pa je $a' = a_1'$. Analogno se pokaže da je $b' = b_1'$. Po istom teoremu slijedi da je $\gamma' = \pi - c$ i $\gamma_1' = \pi - c_1$ pa je $\gamma' = \gamma_1'$. Stoga su po teoremu 5.18 trokuti $\triangle A'B'C'$ i $\triangle A_1'B_1'C_1'$ sukladni pa vrijedi $\alpha' = \alpha_1'$, $c' = c_1'$ i $\beta' = \beta_1'$. Iz teorema 5.19 slijedi da je $a = a_1$, $\gamma = \gamma_1$ i $b = b_1$. Stoga su po teoremu 5.18 trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ sukladni. $\square$

U euklidskoj geometriji vrijede svi iskazani teoremi o sukladnosti trokuta osim teorema 5.20. Naime, KKK teorem o sukladnosti trokuta vrijedi samo za slične trokute euklidske geometrije. Po teoremu 4.9 u sfernom trokutu iz poznatih mjera kutova možemo odrediti duljine stranica, što u euklidskoj ravnini nije moguće.

Literatura

[1] I. Agricola, T. Friedrich, *Elementary Geometry*, American Mathematical Society, Providence, 2008.

[2] M. Bogdanović, M. Stanković, M. Jordanović, *Some comments on isometries of sphere* S^2, Godišnjak pedagoškog fakulteta u Vranju 8(2017), br. 1, 65-73., dostupno na:
`https://scindeks-clanci.ceon.rs/data/pdf/2466-3905/2017/2466-39051701065B.pdf` (veljača 2022.)

[3] Z. Franušić, J. Šiftar, *Linearna algebra 2*, skripta za nastavničke studije na PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2021. dostupno na:
`https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA2.pdf` (veljača 2022.)

[4] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb 2004.

[5] I. Kavčić, V. Krčadinac, *Sferna i hiperbolička trigonometrija*, Matematičko-fizički list LXIX 1/273 (2018/2019), 17-25.

[6] D. Roša, A. Valečić, Z. Drvar, D. Hržina, I. Romštajn, D. Maričić, M. Bašić, *Astronomija 1*, dostupno na:
`https://zvjezdarnica.hr/knjige/Astronomija1.pdf` (veljača 2022.)

[7] P. J. Ryan, *Euclidean and Non-Euclidean Geometry: An Analytic Approach*, Cambridge University Press, 1986.

[8] Ž. M. Šipuš, M. Bombardelli, *Analitička geometrija*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2007., dostupno na:
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/AG-predavanja-2016.pdf` (siječanj 2022.)

[9] Ž. M. Šipuš, *Modeli Geometrija Utorak/srijeda 30. i 31. ožujka 2021.*, dostupno na:
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mg/userfiles/downloads/mg2021/Tjedan%204.pdf` (siječanj 2022.)

[10] Ž. M. Šipuš, *Modeli Geometrija Utorak/srijeda 6. i 7. travnja 2021.*, dostupno na:
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mg/userfiles/downloads/mg2021/Tjedan%205.pdf` (ožujak 2022.)

[11] Ž. M. Šipuš, *Modeli Geometrija Utorak/srijeda 13. i 14. travnja 2021.*, dostupno na:
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mg/userfiles/downloads/mg2021/Tjedan%206.pdf (veljača 2022.)

[12] Wikipedija, *Nebeski koordinatni sustavi*, dostupno na:
https://hr.wikipedia.org/wiki/Nebeski_koordinatni_sustavi (siječanj 2022.)

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo kroz četiri poglavlja obradili osnovne rezultate sferne geometrije izgrađene na $\mathbb{R}^3$. U drugom poglavlju smo definirali osnovne pojmove: sfera, velika kružnica, antipodalne točke i udaljenost između dviju točaka. U trećem poglavlju smo proučavali sfernu trigonometriju. Definirali smo sferni trokut i dokazali analogone kosinusova, sinusova i Pitagorina poučka. Potom smo pokazali nekoliko rezultata za pravokutni sferni trokut i dualni teorem o kosinusu koji nema analogona u euklidskoj geometriji. U petom poglavlju smo obradili grupu izometrija sfere. Definirali smo izometriju na sferi, ortogonalni operator na $\mathbb{R}^3$ i pokazali da je grupa izometrija na sferi izomorfna ortogonalnoj grupi na $\mathbb{R}^3$. Zatim smo definirali osnu simetriju i pokazali da se svaka izometrija sfere može prikazati kao kompozicija najviše tri osne simetrije. Na samom kraju smo dokazali da na sferi, uz standardne teoreme o sukladnosti trokuta, vrijedi i KKK teorem o sukladnosti.

Summary

In this thesis divided in four chapters we studied fundamental results of spherical geometry considered as a subset of $\mathbb{R}^3$. In the second chapter we defined elementary terms: sphere, great circles, antipodal points and the distance between two points. In the third chapter we studied spherical trigonometry. We defined the spherical triangle and proved analogues of the cosine theorem, the sine theorem and the Pythagoras' theorem. Then, we proved several results about right-angled triangles and proved the dual cosine theorem which doesn't have an analogue in Euclidean geometry. In the fifth chapter we studied the isometry group of the sphere. We defined the isometry of sphere, orthogonal operator on $\mathbb{R}^3$ and proved that there is a isomorphism between the isometry group of sphere and the orthogonal group of $\mathbb{R}^3$. Then, we defined reflections and proved that every isometry of the sphere can be represented as the composition of at most three reflections. At the end we proved that besides ordinary congruence criteria for triangles, on the sphere the AAA criteria also holds.

Životopis

Rođena sam 27.7.1996. godine u Šibeniku. Svoje obrazovanje sam započela 2003. godine u Osnovnoj školi Vrpolje. Nakon završetka osnovne škole sam 2011. godine upisala srednju Ekonomsku školu u Šibeniku. U drugom razredu srednje škole sam znala da želim studirati matematiku. Nakon srednje škole sam 2015. godine upisala preddiplomskii sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij sam završila 2018. godine te na istom fakultetu upisala diplomski studij Matematike; smjer: nastavnički.