SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Dario Mišanec

STRATEGIJE RJEŠAVANJA GEOMETRIJSKIH PROBLEMSKIH ZADATAKA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin-Šipuš

Zagreb, veljača 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojim roditeljima i sestrama koji su me nesebično podržavali i ohrabrivali tijekom ostvarivanja mojih životnih i obrazovnih nastojanja. Na tome im zahvaljujem.

Sadržaj

Uvod

Cilj je ovog diplomskog rada proučiti strategije rješavanja problemskih zadataka u nastavi matematike (s posebnim naglaskom na geometrijske probleme), utvrditi važnost i učinkovitost poznavanja tih strategija tijekom postupka rješavanja te predložiti mogući način njihove implementacije, uz odgovarajuću tehnologiju, u nastavi matematike.

Zbog velike matematizacije mnogih područja poslovanja, industrije, te društvenog i osobnog života u današnje vrijeme teško je naći područje ljudske djelatnosti koje ne traži određena matematička znanja. U društvu utemeljenom na informacijama i tehnologiji svakodnevni rad iziskuje sve više umnog napora: potrebno je logički zaključivati, pravilno rasuđivati, kritički misliti o složenim temama, tumačiti dostupne informacije, analizirati nove situacije i složene procese te im se prilagoditi, donositi utemeljene odluke u svakodnevnomu životu, **rješavati različite probleme**, **učinkovito primjenjivati tehnologiju** te razmjenjivati ideje i mišljenja ([36], str. 80).

Zbog svega nabrojanog raste potreba za stručnjacima s dobrim matematičkim znanjem i umijećem primjene tih znanja. Društvo postavlja pred školu sve veće zahtjeve u pogledu obrazovanja mladih ljudi. Ti zahtjevi se, na primjer, očituju u većoj potrebi za znanjem različitih područja matematike kao i sposobnosti fleksibilnog korištenja tog znanja u svrhu rješavanja matematičkih problema. Da bi škola mogla na zadovoljavajući način odgovoriti na postavljene zahtjeve, mijenjaju se i obogaćuju nastavni programi, usavršavaju nastavne metode, uvode nova nastavna sredstva i tehnologije.

Nadalje, živimo u vremenu u kojem jednom stečena znanja nisu dovoljna. Razvojem društva neka od tih znanja brzo postaju neuporabljiva i beskorisna te se javlja potreba za novim znanjima. To znači da se i nastavnik matematike mora neprekidno usavršavati. Stoga suvremena nastava matematike postavlja dva bitna problema. To su problem razvoja stvaralačkog mišljenja i kreativnih sposobnosti učenika te problem primjerenog osposobljavanja nastavnika matematike. Naime, uloga nastavnika matematike je presudna u odabiru problema i aktivnosti koji pridonose stjecanju matematičke kompetencije učenika i ostvarenju kurikulumom postavljenih ishoda učenja. Stoga suvremena metodika nastave matematike pruža razne mogućnosti za rješavanje ovih dvaju problema, a oni povezani s rješavanjem problemskih zadataka su navedeni u ovom diplomskom radu ([14], str. 3).

Mogući odgovori na izazove koje postavlja svakodnevica i društvo možemo naći u mnogobrojnim svjetskim, europskim, a time i u hrvatskim obrazovnim dokumentima. U radu smo izdvojili što o postavljanju i rješavanju problema te o primjeni tehnologije piše *PISA* i *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje* (u daljnjem tekstu *NOK*). Tako *NOK* predviđa da se tijekom matematičkog obrazovanja učenici bave **matematičkim problemima** koji proizlaze iz svakodnevnih, stvarnih i smislenih situacija i time uspostavljaju poveznice između matematike i svakodnevnoga života te drugih područja odgoja, obrazovanja i ljudske djelatnosti. Time će imati prilike primijeniti matematiku u proširivanju i primjeni vlastitih znanja, vještina i sposobnosti. Primjerene matematičke aktivnosti i istraživanja izvodit će samostalno i skupno (suradnički), što će ih osposobiti za pristup i rješavanje (matematičkih) **problemima** koji uključuju primjenu matematike u raznolikim kontekstima, uključujući svijet rada i osobni život. Osim toga, *NOK* predviđa da će učenici biti osposobljeni i učinkovito primjenjivati tehnologiju.

Poučavanje i učenje matematike uključuje stjecanje znanja, vještina i sposobnosti računanja, procjenjivanja te logičkoga i prostornoga mišljenja. Osim toga, matematičko obrazovanje učenicima omogućuje **postavljanje i rješavanje matematičkih problema**, potičući ih pritom na istraživanje, sustavnost, kreativnost, korištenje informacija iz različitih izvora, samostalnost i ustrajnost ([36], str. 80).

Proces rješavanja zadataka predstavlja traženje puta iz teškoća. To je proces dostignuća cilja koji se na početku ne čini brzo dostupnim. Rješavanje zadataka je specifičnost intelekta, a intelekt je poseban dar čovjeka. Stoga je rješavanje zadataka jedna od posebnosti čovjekove djelatnosti ([16], str. 1).

Matematički pristup problemima obuhvaća odabir i pravilnu primjenu osnovnih matematičkih vještina, otkrivanje pravilnosti u oblicima i brojevima, izradbu modela, tumačenje podataka te prepoznavanje i razmjenjivanje s njima povezanih ideja. **Rješavanje matematičkih problema** zahtijeva kreativnost i sustavan pristup, što igra glavnu ulogu u izumima (inovacijama) te znanstvenim i tehničkim otkrićima.

Svi učenici mogu i trebaju iskusiti uspjeh u matematičkim aktivnostima. Rješavajući matematičke probleme, učenici uče matematiku, stječu samopouzdanje i sigurnost u upotrebi brojeva i razvijaju vještine mjerenja, konstruiranja i prostornoga zora. Nadalje, uče prikupljati, organizirati i tumačiti podatke te upotrebljavati matematički jezik i prikaze. Učenike treba postupno i primjereno naučiti matematičkim načinima mišljenja (npr. analizirati, sintetizirati, konkretizirati, apstrahirati, inducirati, deducirati, generalizirati iz uočih pravilnosti i veza, specijalizirati, uočavati analogiju itd.). Time će postati aktivni sudionici u procesu učenja i tako se osposobiti za cjeloživotno učenje ([36], str. 80). To je dragocjena stečevina matematičkog obrazovanja, bez obzira hoće li se oni kasnije baviti matematikom ili ne. Stoga je primjenjiva i u mnogim drugim djelatnostima ([7]).

Za nastavu matematike, a posebno za razvijanje sposobnosti učenika za rješavanje problema, prirodno se izdvajaju dva sustava koja su najpogodnija za ostvarenje nabrojanih ciljeva matematičkog obrazovanja: **problemska nastava** i **heuristička nastava** ([7]). Heurističku nastavu obilježava misaono vođenje postupka rješavanja, odnosno potpomognuto istraživanje i otkrivanje, a problemsku nastavu otvorenije i samostalnije učeničko istraživanje i otkrivanje. Osim karakteristika tih sustava, opisan je i **heuristički razgovor**. U pozadini svih tih sustava stoji primjena **načela problemnosti** koje se u punini ostvaruje u problemskoj nastavi.

U radu je opisan povijesni razvoj heuristike i heurističkog mišljenja. Potom je ukratko izložena povijest traganja za univerzalnom metodom rješavanja zadataka. Budući da je jasno da takva metoda ne postoji, naizgled se čini da je ta potraga bila neuspješna. No, nije baš tako jer su matematičari tijekom tog traženja pronašli mnoge nove putove u matematici i strategije rješavanja.

Osobiti doprinos razvoju metodike rješavanja zadataka je dao matematičar i metodičar George Pólya (1887. - 1985.). Njegove knjige *Kako ću riješiti matematički zadatak* i *Matematičko otkriće* su postale ključna literatura za proučavanje strategija rješavanja matematičkih problema. U knjizi *Kako ću riješiti matematički zadatak* je sustavno prikazao i objasnio četiri osnovne etape pri rješavanju svakog (pa tako i matematičkog) problema. Stoga Pólyu možemo nazvati „ocem" rješavanja matematičkih problema.

Spomenuli smo i opisali strategije, odnosno metode rješavanja problemskih zadataka u nastavi matematike. Pritom je važno spomenuti da su primjeri iz prakse pokazali da je rješavanje problemskog zadatka uvelike učinkovitije ako je učenik unaprijed upoznat sa strategijama rješavanja.

Upravo pomoću spomenutih i opisanih metoda rješavanja problemskih zadataka riješeno je dvadesetak zadataka iz područja geometrije. Ti zadatci su vrlo različite složenosti i težine tako da bi se neki od njih mogli svrstati u „prave" problemske zadatke. Ključni trenutci važni za rješavanje zadataka su prikazani crtežom, odnosno skicom. Zadatci kod kojih ima smisla koristiti tehnologiju su popraćeni prikladnim crtežom u alatu dinamične geometrije *The Geometer's Sketchpad*. Time je učenicima omogućeno lakše postaviti svoje hipoteze. Potom te slutnje, odnosno pretpostavke dokazuje formalnim rješavanjem zadataka. Proces rješavanja dvaju problema i njima srodnih problema je prikazan u obliku heurističkog razgovora između nastavnika i učenika. Tijekom tog razgovora nastavnik učenicima postavlja pitanja koja potiču refleksivno mišljenje.

Napomenimo da se tijekom ovog rada više puta spominju riječi *učenik* i *nastavnik*. Pritom *učenik* može biti osnovnoškolac, srednjoškolac, student fakulteta ili svatko tko uči matematiku. *Nastavnik* može biti profesor u osnovnoj i srednjoj školi, profesor na fakultetu ili svatko tko se zanima za metodiku nastave matematike, odnosno njenu izvedbu.

Pojmovi koji se koriste u ovom diplomskom radu koji imaju rodni značaj, bez obzira jesu li korišteni u muškom ili ženskom rodu, obuhvaćaju na jednak način muški i ženski rod.

Poglavlje 1

Problemska i heuristička nastava

1.1 Načelo problemnosti

Polazne postavke i temeljne ideje na osnovu kojih se izvodi nastava zovu se **didaktička načela**. Ona su opće smjernice odgojno-obrazovnog rada i kao sastavni dio teorije nastave određuju se ciljevima nastave i odgoja, potrebama društvenog razvoja i osobitostima školske djelatnosti učenika, a zasnovane su na odgovarajućem stupnju njihovog psihičkog razvoja. S druge strane, didaktička načela određuju načine prenošenja određenih znanja učenicima, razvijanje njihovih umijeća, navika i sposobnosti, tj. nastavnih metoda.

Didaktička načela međusobno su usko povezana i čine sustav. Nije rijedak slučaj da se ostvarivanjem jednog načela ostvaruje i neko drugo načelo. U temelje didaktike mogu biti ugrađeni različiti sustavi i s različitim brojem načela. Jedan od tih sustava čine sljedeća načela: načelo primjerenosti, načelo zornosti, načelo interesa, svjesnosti i aktivnosti, načelo sistematičnosti i postupnosti, načelo trajnosti znanja, vještina i navika, načelo odgojnosti nastave, načelo individualizacije.

Sva su načela podjednako važna jer izražavaju bitna polazišta nastave. Stoga se trebaju podjednako uvažavati i primjenjivati u nastavi svakog nastavnog predmeta, a to znači i u nastavi matematike, kako u osnovnoj, tako i u srednjoj školi. Osnovna značajka svakog načela sadržana je već u samom nazivu načela i ta su načela nastavnicima matematike uglavnom jasna. Međutim, u odnosu na druge nastavne predmete matematika ima neke osobitosti zbog kojih se gornji sustav obično nadopunjuje s još nekoliko načela. U matematici je posebno primjereno i važno načelo znanstvenosti i načelo problemnosti. Sva navedena načela zajedno čine **sustav načela nastave matematike** ([11]).

Jedno od važnih načela nastave matematike je i načelo trajnosti znanja, vještina i navika. Međutim, svako stečeno znanje ima svoj vijek trajanja. Ako se ne obnavlja i ne primjenjuje, ono s vremenom blijedi i nerijetko se velikim dijelom gubi. Zato se svaki nastavnik matematike nalazi pred pitanjem kako u nastavnom procesu ostvariti to načelo.

Ponavljanje i vježbanje najvažniji su načini kojima se to postiže. U tradicionalnoj nastavi otežava ih činjenica da se neprestano moraju usvajati nova znanja pa vremena za ponavljanje i vježbanje nema dovoljno. To znači da ponavljanje i vježbanje ne mogu biti jedini načini ostvarivanja načela, već treba potražiti i druge. Tako dolazimo do zahtjeva da se standardne etape učenja i prenošenja znanja poboljšaju i učine djelotvornijima ([14], str. 1).

Suvremena metodika nastave matematike ukazuje na razne mogućnosti za rješavanje jednog od najvažnijih pitanja suvremene nastave matematike, a to je **pitanje razvoja stvaralačkog mišljenja i stvaralačkih sposobnosti učenika**. Važne elemente rješavanja ovog pitanja nastavnik matematike može naći već u samim načelima nastave matematike, zatim u nastavnim i znanstvenim metodama koje se primjenjuju u nastavnom procesu, a rješenja treba tražiti i u izboru postojećih nastavnih sustava (predavačka nastava, demonstracijska nastava, heuristička nastava, programirana nastava, egzemplarna nastava, problemska nastava i dr.). Sve nastavne metode i svi nastavni sustavi imaju svoje mjesto u nastavi ([13]).

Nastava matematike je zahtjevan proces. Matematički sadržaji logički su povezani i razlikuju se po složenosti i težini. Neki su izrazito složeni i teški te je za njihovo razumijevanje potreban veći umni napor. Nastavnik matematike nastoji smanjiti ovu teškoću primjenjujući načela postupnosti i primjerenosti. Međutim, sam učenik se često prema tome odnosi sasvim drugačije. On tome pristupa površno i ne primjećuje neke probleme ni teškoće. U takvim situacijama dolazi do izražaja važnost misli Georga Pólye: **„Ono što nastavnik kaže u razredu nije nevažno, ali je tisuću puta važnije ono što učenici misle“** ([23]). Budući da se njemu sve čini jasnim, za razumijevanje ne ulaže potreban napor. Ova jasnoća potječe od neukosti i možemo je nazvati **jasnoća od nedostatka shvaćanja**.

U situaciji kada učenici ne zamjećuju probleme i kad im je odmah „sve jasno“, nastavnik matematike treba primijeniti **načelo problemnosti** koje možemo iskazati vrlo kratko: **„Najprije učiniti nejasnim, a zatim jasnim.“** To znači da razmatranje treba produbiti i učenike staviti pred problem. Pri tome se mora paziti da novi zahtjevi budu primjereni većini učenika. Svako produbljivanje povlači u prvom trenutku nestajanje prethodne jasnoće. Nejasnoća koja se pojavi prvi je znak uspjeha. Sada je potrebno dosta truda i dodatni umni napor da se savladaju nastale teškoće i razriješe problemi. Ponovo se pojavljuje jasnoća, ali na višoj razini. To je **jasnoća spoznavanja**.

Učenici nisu uvijek spremni na promjene situacije i povišenje razine njezine problemnosti. Mogu biti kritični prema takvom obliku rada. Međutim, kritičko mišljenje često je crta kreativnosti. Zato i njega treba pravilno usmjeravati i razvijati kod učenika. Sve to nije jednostavno ostvariti i zahtijeva od nastavnika matematike mnogo strpljivosti i umješnosti.

Dakle, u skladu sa svime što je rečeno, možemo zaključiti da je važno da načelo problemnosti postane jedno od vodećih načela nastave matematike. Primjenom toga načela nastavnik matematike može potisnuti prividnu jasnoću, upozoriti učenika na probleme koje oni ne uočavaju, doprinijeti razvoju matematičkog mišljenja i znatno poboljšati vrsnoću nastave matematik. Jasno je da će rezultati primjene ovog načela biti veći u višim razredima osnovne i srednje škole. Načelo problemnosti se primjereno i u punoj mjeri ostvaruje u **problemskoj nastavi** u kojoj posebno dolazi do izražaja ([11]).

Spomenimo da je takav način primjene načela problemnosti u skladu s **konstruktivističkom teorijom učenja (matematike)**. Konstruktivizam kao stajalište o znanju i učenju izvire iz kognitivne škole psihologije, a oslanja se na rezultate rada **Jeana Piageta** (1896. - 1980.) iz 1930-ih godina. Piaget je razvio i teoriju kognitivnog razvoja djeteta. Glavna teza konstruktivističke teorije učenja je ta da učenici (to su svi oni koji uče) kreatori svoga učenja i svoje znanje konstruiraju na temelju postojećeg znanja.

Ernst von Glasersfeld (1917. - 2010.) je 1987. godine postavio **dva osnovna načela** konstruktivističke teorije učenja:

- Učenik sam **aktivno** gradi (konstruira) svoje znanje, a ne prima ga pasivno iz svog okoliša.

- Dolaženje do spoznaje (znanja) je proces adaptacije, zasnovan na učenikovom iskustvu svijeta što ga okružuje i njime stalno modificiran.

Piaget je uveo koncept mentalne sheme. Te kognitivne sheme su proizvod konstruiranog znanja i alata pomoću kojih se može izgraditi dodatno novo znanje, a pri učenju dolazi do reorganizacije, nadopunjavanja ili nekog drugog oblika modificikacije postojeće sheme (mreže). Prema Piagetu, dva načina promjene kognitivne sheme su asimilacija i akomodacija.

Asimilacija se javlja se kada novi koncept pristaje uz postojeće znanje (kognitivnu mrežu) pa nove informacije samo proširuju postojeću mrežu. U tom slučaju učenik jednostavno prihvaća ono novo što je naučio jer to odgovara postojećoj shemi. **Akomodacija** se pak pojavljuje kada novi koncept ne pristaje uz postojeće znanje pa mozak mora preurediti (presložiti) postojeću kognitivnu mrežu ili ju nadomjestiti novom. Takav oblik promjene kognitivne sheme je u načelu zahtjevniji, ali je obično korisniji jer tako napredujemo ([4]). Akomodacija osobito dolazi do izražaja tijekom rješavanja problemskih zadataka.

Do akomodacije učenik dolazi **refleksivnim mišljenjem**. Taj oblik mišljenja je propitivanje postojećih ideja (tzv. prethodno znanje, odnosno postojeće kognitivne sheme) s ciljem pronalaženja onih koje izgledaju da bi mogle biti povezane s trenutnom misli, idejom ili zadatkom ([4], prema C. T. Fosnot, 1996.).

1.2 Matematički problem

U mnogim djelatnostima ljudi svakodnevno dolaze u različite problemske situacije sa stanovitim proturječnostima koje moraju znati i umjeti razriješiti. Također, svakodnevno niču novi problemi tako da ta riječ ljudima i nije strana te joj pridaju mnoga značenja ([13]). Osim što ima svoja značenja u enigmatici i šahu, riječ problem (njem. *Problem* ← lat. *problema*: 'prijeporno pitanje' ← grč. $\pi\rho\acute{o}\beta\lambda\eta\mu\alpha$, odnosno *próblēma*: 'smetnja' ≃ *probállein*: 'bacati naprijed' ([31], [32])) ima još neka značenja:
- sporno i teško znanstveno pitanje, teorijsko ili praktično, koje je podložno raspravi te zahtijeva mnogo razmišljanja ili vještine da se nađe pogodno rješenje ([31], [33])
- ono što izaziva nedoumicu ili nepriliku; briga ([31]), komplikacija, emotivni sukob ([33])
- težak zadatak; ono što komplicira rješenje ili radni proces ([32])
- (po)teškoća koju treba riješiti da bi se postigao određeni rezultat ([33])
- zadaća, zagonetka ([13])

Priča o jednom od najslavnijih problema je ona o **gordijskom (Gordijevom) čvoru**. Grčki mit kaže da je to bio vrlo zamršeni (prema legendi nerazmrsiv) uzao (čvor) sa skrivenim krajem kojim je frigijski kralj Gordije, osnivač grada Gordiona, vezao jaram uz rudo na svojim bojnim kolima posvećenima Zeusu. Proročište objavilo da će onaj tko ga uspije rasplesti postati gospodar svijeta (tada se mislilo na Aziju). To je pošlo za rukom Aleksandru Velikom koji je prvo pokušao naći jedan kraj užeta. No kad je uvidio da je to nemoguće, jednostavno ga je rasjekao mačem i tako „ispunio proročanstvo".

U prenesenom smislu, gordijski čvor označava problematičnu, tešku i (praktički) nerješivu situaciju, zamršeni zadatak ili veliki problem. Fraza *presjeći gordijski čvor* označava brzo i odlučno djelovanje u teškoj i složenoj situaciji, odnosno smiono i drsko rješavanje problema ([32]).

(Matematičkim) problemom smatramo svaki zadatak ili učeničku aktivnost za koje učenici nemaju unaprijed zadana ili upamćena pravila i/ili metode, niti percipiraju da za njih postoji specifična „korektna" metoda rješavanja (vidi [2], prema J. Hiebert i dr., *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*, Heinemann, 1997.).

Razvoj matematike je usko povezan s rješavanjem matematičkih problema tako da je svaki matematičar, između ostaloga, i rješavač problema. Povijest matematike pamti mnoge matematičke probleme čije je rješavanje, u manjoj ili većoj mjeri, utjecalo na daljni razvoj matematike. Neki od njih su riješeni (npr. *veliki Fermatov teorem*), a neki od njih i dalje golicaju maštu matematičara (npr. *Goldbachova slutnja*).

Problemske zadatke možemo svrstati u nestandardne zadatke. Izdvojeni su posebno iz sljedećih važnih razloga: s jedne strane, u nastavi matematike pravi problemski zadatci se rijetko pojavljuju, a s druge strane bez njih se ne mogu zamisliti matematička natjecanja ([12], str. 4).

Rješavati problem (problemski zadatak) znači raditi na zadatku za koji metoda rješavanja nije unaprijed poznata. Kako bi pronašli njegovo rješenje, učenici se moraju osloniti na vlastito znanje, a tijekom procesa rješavanja često razvijaju i nova matematička znanja i razumijevanje.

Rješavanje problema nije samo cilj, već je i jedna od najvažnijih metoda učenja matematike. Učenici bi trebali što češće dobiti priliku postavljati i, ulažući značajan intelektualni napor, rješavati složenije probleme, pri čemu ih treba poticati na kritičko osvrtanje na dobiveno rješenje i primijenjene postupke.

Učenjem strategija rješavanja problema u matematici, učenici trebaju razviti načine mišljenja, steći navike upornosti i znatiželje te razviti samopouzdanje u nepoznatim situacijama, što će im pomoći izvan matematičke učionice. U svakodnevnom životu i na radnom mjestu, sposobnost vještog rješavanja problema može dovesti do raznih prednosti.

Rješavanje problema integralni je dio učenja matematike te stoga ne bi trebao biti izolirani dio matematičkog programa. Rješavanje problema u matematici trebalo bi uključiti u svih pet sadržajnih područja: Brojeve, Algebru (Algebra i funkcije), Geometriju (Oblik i prostor), Mjerenje i Podatke (vidi [2], prema *Process Standards of NCTM's Principles and Standards for School Mathematics*, 2000.).

Dvije razine problemskih zadataka

S obzirom na složenost misaonih (kognitivnih) procesa kojima se služimo pri rješavanju, problemske zadatke dijelimo u dvije razine:

- rutinski problemi
- nerutinski problemi

Rutinski problemi

Rutinski problemi su tipični problemi, slični problemima koji su već rješavani na nastavi. Mogu biti zadani u matematičkom kontekstu ili u učenicima bliskom kontekstu iz stvarnog života. Ovoj klasi problema pripada npr. standardna primjena proporcionanosti i obrnute proporcionalnosti, standardni zadatci koji se svode na rješavanje linearne jednadžbe ili sustava linearnih jednadžbi i sl. Rješavanje takvih zadataka podrazumijeva odabir i primjenu primjerene metode rješavanja zadatka, a potrebno je i interpretirati dobiveno rješenje (vidi [2]).

Nerutinski problemi

Nerutinski problemi su pravi problemski zadatci, tj. problemi različiti ili drukčije postavljeni od onih koji su već rješavani na nastavi matematike. Takvi zadatci mogu biti postavljeni u matematičkom ili raznovrsnim nematematičkim kontekstima. Rješavaju se primjenom matematičkih činjenica, koncepata i postupaka u situacijama koje zahtijevaju analizu, sintezu, a moguće i složenije povezivanje, no ne moraju biti teški već samo drukčiji od već viđenih na nastavi. Rješavanje takvih zadataka podrazumijeva odabir i primjenu primjerene metode rješavanja zadatka, a potrebno je i interpretirati dobiveno rješenje.

Ovi zadatci u nastavi matematike nisu nužno (i jedino) namijenjeni matematičkim natjecanjima, već su važan korak u otkrivanju novih matematičkih koncepata te razvijanju dubljeg razumijevanja već obrađenih koncepata i/ili postupaka (učenje otkrivanjem i razvoj refleksivnog mišljenja) (vidi [2]).

1.3 Problemska situacija

Problemi i problemske situacije se pojavljuju i u školi, ali nas posebno zanimaju one problemske situacije koje u nastavnom procesu stvara sam nastavnik matematike s posve određenim ciljem, a to je povišenje efikasnosti nastave matematike i podizanje razine matematičkog obrazovanja učenika.

Pred nastavnikom je obrada nekog problema. On najprije treba pobuditi interes stvaranjem problemske situacije koja je primjerena predznanju i sposobnostima učenika. To se može riješiti na sljedeće načine:

- Nastavnik jasno i precizno postavlja problem učenicima.
- Nastavnik stvara situaciju u kojoj se od učenika zahtijeva da sami shvate i formuliraju problem koji se u toj situaciji nalazi.
- Nastavnik stvara situaciju s više ili manje jasno naznačenim problemom koji tijekom analize učenike treba dovesti do novog problema koji je nastavnik predvidio.
- Nastavnik stvara situaciju s više ili manje jasno naznačenim problemom koji tijekom analize učenike dovodi do novog problema koji nastavnik nije predvidio u potpunosti.

Prvi od navedenih načina je najjednostavniji jer u ostalim načinima ima više nepoznanica. Posebno je vrijedan posljednji način stvaranja problemske situacije jer je u toj situaciji bar jedna komponenta nepoznata i samom nastavniku, a rad učenika je kreativan i stvaralački. Važno je naglasiti da problemska situacija ima iste komponente kao i matematički zadatak: objekti, poznate i nepoznate veličine, uvjeti, svojstva, odnosi, veze, faze i dr. ([13]).

1.4 Problemska nastava

Problemska situacija i problemi s kojima će se novi naraštaji mladih sresti u životu i svom radu stavljaju školu pred ozbiljan zadatak da učenike primjereno pripremi za takav rad. Nije dovoljno samo prenošenje određenih znanja učenicima, a ni snalaženje u problemskim situacijama te uočavanje i formuliranje problema, već je učenike potrebno osposobiti za rješavanje problema. Najbolji način kako to postići je poseban nastavni sustav - **problemska nastava**.

Ideja problemske nastave je učenje putem rješavanja problema. Zapravo, to je oblik aktivnijeg sudjelovanja učenika u učenju matematike s većim naglaskom na zakonitostima i postavkama metodike. To nije nova ideja, ali je ona u nastavnoj praksi prilično zapostavljena. Dominiraju slabiji nastavni sustavi bez primjene suvremenih nastavnih metoda, znanje se najčešće pasivno usvaja, a ne aktivno osvaja. Suvremena nastava matematike u tom pogledu postavlja jače zahtjeve. Na nastavnom satu učenici trebaju aktivno, samostalno i stvaralački raditi, promišljati, istraživati i tražiti rješenje problema, za što je potrebno pokazivanje njihovih različitih matematičkih sposobnosti. Pritom se razvijaju njihove sposobnosti za rješavanje problema. Nastavni sat nije uspješan u suvremenom smislu ako učenici ne sudjeluju u istraživačkoj nastavi, a na što ih je potaklo rješavanje problema. Ovaj zahtjev se primjereno ostvaruje u problemskoj nastavi.

Problemska nastava je suvremen, ali viši i zahtjevniji nastavni sustav. Ta činjenica odmah upozorava da je on teži učenicima, a i nastavnicima matematike u odnosu na druge nastavne sustave.

Učenicima je taj nastavni sustav težak jer samostalno rješavanje problema nije jednostavno, a ni lako. To se najbolje vidi na matematičkim natjecanjima gdje se često i najbolji učenici ne snalaze dobro u rješavanju nestandardnih i problemskih zadataka. Prva bitna pretpostavka za uspješnu primjenu problemske nastave je da su **učenici primjereno osposobljeni za umni rad** (pravilan izbor izvora za poučavanje, izdvajanje potrebnih teorijskih činjenica, misaono prorađivanje, postavljanje i provjeravanje hipoteza, jezično oblikovanje, zapis rezultata rada i dr.) Sposobnost umnog rada postiže se postupno. Ona se razvija i u drugim nastavnim sustavima (misaono praćenje u predavačkoj nastavi, misaono vođenje u heurističkoj nastavi, samostalni rad u programiranoj nastavi), ali se tek u problemskoj nastavi postiže najpovoljniji razvoj. Stoga tu nastavu treba primjenjivati na svim razinama matematičkog obrazovanja, pri tome uvažavajući dob, psihički razvoj i stvarne matematičke sposobnosti učenika.

Iako se poučavanje nastavnika matematike u problemskoj nastavi znatno smanjuje, ovaj nastavni sustav relativno je težak i za nastavnika jer se njegova uloga sastoji od savjetovanja i pomaganju učenika pri odabiru izvora, ukazivanju na potrebne teorijske činjenice i završnoj raspravi o rezultatima samostalnog rada učenika. Tu se mogu pojaviti i postavke učenika koje nastavnik nije predvidio. Na takvu situaciju on mora biti pripravan.

Štoviše, on mora biti sposoban stvarati takve situacije. Stoga je druga bitna pretpostavka za primjenu problemske nastave **dobra osposobljenost nastavnika matematike**.

Za primjenu problemske nastave je potrebno više vremena zbog njezine složenosti i težine. Stoga je razumljivo da se problemska nastava ne može primjenjivati na svakom nastavnom satu, već je za tu svrhu potrebno načiniti uži i primjereni izbor matematičkih sadržaja, a za obradu tih sadržaja i vrsnu pripremu ([13]). Ipak, poželjno je da nastavnik matematike svim (ili barem naprednijim) učenicima češće postavlja problemske zadatke i njeguje stvaranje različitih problemskih situacija ([7]).

Dakle, očito je da nastavnik matematike mora biti bolje i drugačije pripremljen za izvođenje problemske nastave. Taj oblik pripreme treba težiti boljem nastavnikovom razumijevanju načina na koji učenici promišljaju i pristupaju rješavanju nekog problema. Međutim, to nije dovoljno jer je potrebno i da taj njihov način njeguju i razvijaju. Tako nastavnici matematike stječu dragocjeno iskustvo koje im omogućuje unapređenje nastavnog procesa, a posebno uspješniji rad s naprednijim učenicima ([14], str. 1).

Iz svega navedenog je jasno da problemska nastava ima niz dobrih strana. Izdvojit ćemo neke od njih:

- veća motiviranost učenika (širenje i pobuđivanje interesa za učenje matematike)
- primjerena mogućnost suradnje
- istraživački pristup pri rješavanju problema
- razvoj kritičkog mišljenja
- bolje shvaćanje biti i zakonitosti
- obogaćivanje matematičkog znanja, tj. povećane količine teorijskih činjenica
- veća primjenjivost stečenih znanja
- znanja koja pritom primjenjuju ili stječu kao nova postaju trajnija ([13])
- pružanje prilike i ispunjavanje prirodne želje za provjeravanjem svojih (matematičkih) sposobnosti
- razvijanje navike intenzivnog i ustrajnog rada
- razvijanje sposobnosti prosuđivanja i zaključivanja
- provjeravanje osobnog mišljenja

- razvijanje sposobnosti matematičkog komuniciranja (iznošenje vlastitog iskustva, slušanje drugih učenika i upoznavanje njihovih iskustava, razmjena ideja i pitanja, zajedničko osmišljavanje problema i pitanja te pristupa rješavanju problema, djelotvorna rasprava o rezultatima samostalnog i zajedničkog rada) ([14], str. 4).

Suvremena nastava matematike načelno pretpostavlja drukčiju spoznajnu djelatnost učenika od tradicionalne nastave. Navodimo neke ciljeve suvremene nastave matematike:

- pobuđivanje i pokretanje mišljenja učenika
- razvijanje umijeća samostalnog, istraživačkog i stvaralačkog proučavanja matematike od strane učenika (kako bi dobar dio novih znanja stjecali vlastitim sposobnostima i snagama)
- stvaranje preduvjeta za uspješnu primjenu stečenih matematičkih znanja i umijeća ([9])
- razvijanje pozitivnog odnosa prema matematici
- učenje matematičkog rasuđivanja
- učenje matematičke komunikacije
- **razvijanje sposobnosti rješavanja problema** ([14], str. 4)
- **otvorenost prema problemskim situacijama i zadacima** (iz realnog života)
- koreliranje s drugim područjima znanosti i ljudske djelatnosti
- razvijanje i njegovanje matematičkih sposobnosti, odnosno stvaranje učeničke matematičke kompetencije (a ne samo vještina rješavanja tradicionalnih i rutinskih zadataka)
- orijentiranost učeniku
- partnerski odnos učenika i nastavnika
- primjena metode suradničko-timskog rada
- posvećivanje pažnje razvijanju organizacijskih vještina učenika
- razvijanje kompetencije „učiti kako učiti“ ([1]).

Usporedimo uočavamo da su prednosti problemske nastave potpuno prilagođene ostvarenju navedenih osnovnih smjernica za osuvremenjivanje nastave matematike.

Rješavanje problemskih zadataka dobar je način postupnog uvođenja problemske nastave u nastavu matematike. Problemska nastava je primjerenija višem uzrastu učenika, ali njezina primjena je moguća i ranije. Napomenimo još da za primjenu problemske nastave osnovu daju tri važna pojma: problem, problemska situacija i načelo problemnosti ([13]).

Metodika organizacije problemske nastave

S obzirom na značajke problemske nastave i težinu koju ona nosi, metodika nastave matematike razradila je sljedeću shemu na osnovi koje se oblikuje i priprema nastavni sat u ovom nastavnom sustavu:

1. **Stvaranje nastavne problemske situacije.** Cilj nastavnika je buđenje interesa učenika za novi nastavni sadržaj i motiviranje potrebe njegove obrade. Koji će oblik problemske situacije on odabrati, ovisi o predznanju i matematičkim sposobnostima učenika.

2. **Postavljanje problema** koji niče iz dane problemske situacije. Pritom je važno da se pitanja ne nameću, već da spontano izviru iz prirode svakog takvog zadatka.

3. **Proučavanje uvjeta.** Učenici trebaju analizirati problemsku situaciju i otkriti način rješavanja postavljenog problema. Pretpostavlja se da dobro znaju teorijske činjenice potrebne za to rješavanje.

4. **Rješavanje postavljenog problema.** Ovo je najsloženiji dio u čitavom procesu. U njemu se detaljno ostvaruje zamišljeni način rješavanja i utvrđuje ispravnost svakog provedenog koraka. Učenici u pravilu rješavanje izvode samostalno. Nastavnik samo usmjerava rad, a rjeđe navodi na ideju.

5. **Razmatranje dobivenog rješenja i iskazivanje novog znanja.**

6. **Proučavanje dobivenog rješenja i traženje drugih načina rješavanja.**

7. **Proučavanje mogućih proširenja i poopćenja postavljenog problema.**

8. **Zaključci izvršnog rada.** Dijalog učenika i nastavnika. Razmatranje mogućnosti primjene novog znanja.

Ovu shemu ne treba shvatiti kruto, već kao dinamičan proces koji se može djelomice mijenjati od problema do problema. Neki koraci se mogu objediniti, a neki ponekad i ispustiti ([13]).

Nije teško navesti područje i teme pogodne za primjenu rješavanja matematičkih problema. To su gotovo bez iznimke sva područja nastavnih sadržaja jer svi matematički sadržaji nose u sebi stanovitu problemnost ([14]). Ipak, neka su područja izrazito pogodna. Primjena u tim područjima može kasnije znatno unaprijediti rad s učenicima u nastavnom procesu, posebno rad s naprednijim učenicima.

Stoga je moguće pri obradi svakog sadržaja najprije stvoriti prikladnu problemsku situaciju i učenike staviti pred neki problem. O težini matematičkog sadržaja, uzrastu i predznanju učenika te o umješnosti nastavnika ovisi hoće li se u daljnjem radu problem u potpunosti obrađivati primjenom problemske nastave ili će se rad kombinirati s drugim oblicima i nastavnim metodama. Već samo postavljanje problemske situacije na jedan od spomenutih načina znači dobar početak ([13]). Tako rješavanje problemskog zadatka može u sebi uključivati obradu nastavnih sadržaja, motivaciju, različite oblike rada i nastavnih metoda, domaće zadaće, ocjenjivanje učenika, primjenu računala u nastavi matematike itd. ([14]).

Važno je reći da pritom težište ne treba biti na broju zadataka, nego na promišljanju, idejama i teorijskoj osnovi. Nije uvijek važno čak ni riješiti zadatak u potpunosti. Za to gotovo da i nema uvijek dovoljno vremena. Ovdje se nastavnikova pozornost usmjerava na proces rješavanja, a ne na sama rješenja. Ipak, poželjno je da učenici uz pomoć nastavnika riješe svaki zadatak u potpunosti, na nastavi ili kod kuće. Time stječu veću sigurnost i samopouzdanje te se razvijaju vještine u rješavanju zadataka ([14], str. 2).

Učenje matematike rješavanjem problema

Dimenzije koje su važne u nastavi matematike su:

- procesi (deduktivni, induktivni, zaključivanje, heuristike)
- koncepti (numerički, geometrijski, algebarski, analitički, vjerojatnosni, statistički)
- vještine (procjenjivanje, misaona matematika, algoritmi, komunikacija)
- stavovi (uvažavanje, interes, samopouzdanje)
- metakognicija (promicanje učeničkog vlastitog mišljenja i viših misaonih sposobnosti).

Pritom je važno naglasiti da je sve to u službi onoga što se nalazi u središtu nastave matematike, a to je **rješavanje problemskih zadataka** (vidi [2]). Naime, važni oblici matematičke djelatnosti (kao što su stvaranje problemskih situacija, motivacija nužnosti proširivanja teorije, pronalaženje matematičkih modela praktičnih problema, rješavanje zadataka, dokazivanje tvrdnji itd. ([9])) su u većoj ili manjoj mjeri povezani s rješavanjem problemskih zadataka.

Ovladati matematikom između ostalog znači znati rješavati zadatke, ne samo standardne, nego i one koji zahtijevaju nezavisnost mišljenja, zdravo rasuđivanje, originalnost i otkrivanje. Stoga se glavna obveza školske matematike sastoji u isticanju metodičke strane procesa rješavanja zadataka koji se ne može provoditi bezlično i bez naglašavanja nekih ključnih trenutaka ([16], str. 3-4). Stoga spomenimo i misao matematičara Edwarda Griffitha Beglea (1914. - 1978.): **„Rješavanje problema je po mom mišljenju najvažniji ishod matematičkog obrazovanja"** ([24], str. 173, prema E. G. Begle, *Personal communication*, ožujak 1977.).

Rješavanje problemskih zadataka je jedan od ključnih načina poučavanja i učenja matematike. Stoga svaki zadatak treba igrati veću obrazovnu ulogu. Naime, samostalna spoznajna djelatnost učenika pri proučavanju matematike ostvaruje se u velikoj mjeri primjerenim izborom i korištenjem zadataka. Na taj način zadatci postaju važno sredstvo pri oblikovanju u učenika sustava osnovnih matematičkih znanja, umijeća i navika i doprinose razvoju njihovih matematičkih sposobnosti i stvaralačkog mišljenja. Već su procjena rezultata na početku i provjera dobivenog rezultata na kraju rješavanja važni koraci pravilne primjene zadataka. O uspješnoj primjeni zadataka u nastavi matematike ovisi i stupanj pripremljenosti učenika za sljedeću razinu njihova matematičkog obrazovanja ili za njihovu praktičnu djelatnost u nekom drugom području ([9]).

Kako bi učenici uspješno **izgradili matematičke koncepte**, nastavnik se treba pitati:
- Razumiju li učenici koncept?
- Na koji način pokazuju i komuniciraju svoje razumijevanje koncepta?
- Treba li se vratiti istom konceptu i ponovo ga pokušati pojasniti?
- Stvaraju li učenici poveznice novog koncepta s već poznatima?
- Ako učenici ne pokazuju razumijevanje, što je tome uzrok? ([2])

Kako bi učenici uspješno **razvili vještinu rješavanja problema**, nastavnik se treba pitati:
- Koje strategije učenici primjenjuju?
- Primjenjuju li učinkovite strategije?
- Razumiju li problem?
- Kako prikazuju svoje ideje?
- Razmjenjuju li ideje s drugim učenicima?
- Je li njihov proces rješavanja logičan?
- Mogu li učenici iskazati svoje razmišljanje?
- Koje stavove učenici izražavaju? ([2])

Uloga nastavnika matematike

Osnovni problem u nastavnom procesu nije samo usvajanje veće količine matematičkih sadržaja, već i načini na koje se to ostvaruje i obrazovna postignuća koja doprinose primjerenom razvoju mišljenja učenika ([8]). Uloga nastavnika matematike je presudna u odabiru problema i aktivnosti koji pridonose stjecanju matematičke kompetencije učenika i ostvarenju kurikulumom postavljenih ishoda učenja ([2]). Stoga nastavnik mora jako dobro poznavati ono što se sprema poučavati. Pólya to pravilo izražava na sljedeći slikovit način: **„Prvo pravilo poučavanja je znati ono što treba poučavati. Drugo pravilo poučavanja je znati malo više od onoga što treba poučavati"** ([22]). Nastavnik ne smije raditi slučajni izbor zadataka, već prije zadavanja mora dobro proučiti problem, njegovo rješenje, ali i okruženje u kojem će se ti zadatci rješavati.

Osim toga, kreativan rad nastavnika na odgovarajućoj razini je poželjan i potreban. Naime, nastavnik koji nema osobnog iskustva s nekom vrstom kreativne i istraživačke djelatnosti teško može potaknuti, voditi, pomoći, pa čak i prepoznati kreativnu aktivnost svojih učenika. Od takvog nastavnika matematike teško se može očekivati i istraživanje novih sadržaja ([16], str. 8). Jedna od osobina kreativnog nastavnika matematike upravo je ovladavanje umijećem izbora primjerenih nastavnih oblika rada i primjene pogodnih nastavnih metoda te njihove češće izmjene tijekom nastavnog procesa. Zato je potrebno preispitati uporabu svih oblika rada i nastavnih metoda te zadržati samo one koji ne sputavaju učenike. Na taj način se može ostvariti velik dio postavki i ciljeva suvremene nastave matematike. Tako nastavnik može osposobiti učenike za rad koji je vrlo blizak istraživačkom radu ([7]).

Rješavanje nerutinskog matematičkog problema uistinu kreativan posao jer se tu traži veće ili manje znanje, no uvijek je potreban određeni (često visok) stupanj koncentracije i razmišljanja. Rješavanje takve vrste problema je oblik kreativnog rada koji bi morao biti uključen u kurikulume, planove i programe nastave matematike. Zapravo, rješavanje problema takve vrste daje učiteljima priliku prolaska kroz stvarno i primjenjivo znanje matematike koje nije potrebno memorirati, nego primjenjivati na zanimljive zadatke. Tada učitelj, što je još važnije, može znati kako steći vještinu „pogleda iznutra" na bit procesa rješavanja zadataka. Sve će mu to omogućiti učinkovitije objašnjavanje problema, vođenje postupka rješavanja i prosuđivanje rada svojih učenika ([16], str. 8).

Ako nastavnik u svoje raspoloživo vrijeme s učenicima samo mehanički „teše" uvježbane postupke, smanjuje im interes i koči njihov intelektualni razvoj. Time slabo iskorištava svoju veliku priliku koja mu je dana.

S druge strane, izborom, formulacijama i rasporedom zadataka koji su primjereni učeničkom znanju, metodičkom raščlambom rješavanja zadataka te pomaganjem stimulativnim pitanjima je moguće potaknuti aktivnost učenika, probuditi njihovo zanimanje, radoznalost i inicijativu, razvijati sklonost za prosuđivanjem i samostalnim mišljenjem te im pokazivati putove do toga. Na taj način nastavnik kod učenika potiče stvaralački rad i izoštrava stvaralačko mišljenje i umijeće rasuđivanja. Nadalje, učenike uvodi u atmosferu znanstvenog istraživanja i ostavlja pred njima mogućnosti da se upoznaju s mnoštvom situacija koje se susreću u znanstveno-istraživačkom radu ([15], str. V-VI).

Nastavnik može odlučiti hoće li određeni problem ili aktivnost pomoći u ostvarenju postavljenih ishoda učenja, kako u sadržajnoj (matematički koncepti) tako i u procesnoj (matematički procesi) dimenziji matematičkog obrazovanja:
- analizirajući i prilagođavajući probleme
- anticipirajući matematičke ideje koje se mogu izgraditi njihovim rješavanjem
- predviđajući pitanja koja bi učenici mogli postaviti
Pritom je važno napomenuti da su brojni problemi zanimljivi i zabavni, ali svi oni ne pridonose nužno razvoju i razumijevanju matematičkih ideja koje učenici trebaju izgraditi u trenutku rada na problemu ([2]).

Učenici i matematičko otkriće

„U danom trenutku postoji samo tanki sloj između *trivijalnog* i nemogućeg. Matematička otkrića su dobivena u tom sloju."
Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903. - 1987.), zapisao u svom dnevniku 14. rujna 1943. ([37])

George Pólya je smatrao da **dobro obrazovanje podrazumijeva „sustavno pružanje prilike učeniku za samostalnim otkrivanjem."** Ta njegova misao nagovještava dvije pedagoške teme kojima se Pólya bavio i razvijao ih više od pola stoljeća. Te teme koje su zajedno tkane njegovim radom su:

- dosljednost (sustavnost) i otkriće (sustavno otkrivanje matematike)
- sustavno izlaganje (obrazložanje) „metode" (*à la Descartes*) za otkrivanje i pronalazak ([25], str. 283-284).

Rješavanjem matematičkih problema učenici će zapaziti dva lica matematike. Zaista, matematika ima dva aspekta: ona je strogo euklidska znanost, no ona je i nešto drugo. Prikazana euklidski, sama matematika je sistematska, apstraktna i deduktivna znanost, no matematika u nastajanju je eksperimentalna, konkretna i induktivna znanost. Ta činjenica govori sve o tome koliko su i za nastavu matematike važne neke znanstvene metode istraživanja. Oba navedena aspekta su stara koliko i sama matematika. Ipak je drugi aspekt u jednom pogledu nov: matematika *in statu nascendi*, tj. u procesu iznalaženja nije nikad prije Pólyine „metodičke revolucije" bila prikazana učeniku, nastavniku ili široj javnosti u takvom stilu ([15], str. VI).

Rješenje velikog problema veliko je otkriće, no i u rješavanju svakog matematičkog problema ima nešto otkrivalačko. Naime, i pri najskromnijem zadatku, ako on budi zanimanje, ako pobuđuje radoznalost, ako pokreće dosjetljivost i ako ga učenik rješava vlastitim snagama, učenik će doživjeti napetost i uživati u trijumfu pronalaska. Takvi doživljaji u dobi koja je pristupačna dojmovima mogu stvoriti sklonost za umni rad i utisnuti doživotni pečat na duh i karakter.

Jedinstvena prilika koju ima učenik će biti propuštena ako on u matematici vidi samo predmet u kojem mora steći izvjesnu ocjenu, a nakon toga ga može što prije zaboraviti. Prilika može biti propuštena čak i onda kad je učenik prirodno nadaren za matematiku jer on mora, kao i svako drugi, najprije otkriti svoje sposobnosti i sklonosti. Stoga je potrebno dovesti učenika u situaciju da to uistinu i otkrije.

Pólya to slikovito kaže na sljedeći način: **„On ne može znati voli li ćevapčiće ako ih nikad nije okusio.“** ([15], str. V-VI), odnosno **„Zapamtite - ako želite naučiti plivati, onda smjelo skočite u vodu, a ako želite naučiti rješavati zadatke, onda ih rješavajte!“** ([16], str. 1)

Potrebno je učenika dovesti do zaključka da matematički problem može pružiti isto toliko zadovoljstva koliko i kompjuterska igrica ili da intenzivan umni rad može biti jednako ugodan kao napeta nogometna utakmica. Okusi li jednom radost u matematici, neće je lako zaboraviti. Tu je onda dobra prilika da matematika za nj nešto postane: najmilija zabava i oruđe njegova zvanja ili čak velika strast. Takve matematičke užitke ne bi trebao omogućavati omogućavati samo onim ambicioznim učenicima koji žele razumjeti matematiku i razvijati vlastite sposobnosti, već svakom učeniku.

S druge strane, nastavnik bi trebao udovoljiti radoznalosti učenika koji osjećaju dublju radoznalost te si postavljaju sljedeća pitanja: „Da, rješenje je tu. Čini se da je ispravno, no kako je moguće naći takvo rješenje? A kako bih ja sam mogao nešto takvo pronaći ili otkriti?“ Ti učenici ne samo da žele shvatiti dana rješenja problema, već žele shvatiti motive i postupke u rješavanju te sredstva i putove otkrića. Takvo zanimanje među učenicima je raširenije nego što bi se u prvi mah pomislilo ([15], str. V-VI).

1.5 Izreke o rješavanju (matematičkih) problema

„Postavljanje problema je često mnogo bitnije nego njegovo rješenje koje može biti jedino predmet matematičke ili eksperimentalne vještine. Za dobivanje novih pitanja, novih mogućnosti, za promatranje starih problema iz novog kuta zahtijeva se stvaralačka mašta, a to označava pravi napredak u znanosti.“
Albert Einstein (1879. - 1955.) ([37])

„Kažu da nije toliki smisao u dolasku na odredište koliki je smisao u putovanju.“
kapetan Jack Sparrow u filmu *Pirati s Kariba: Nepoznate plime*, 2011. ([28])

„Značajni problemi s kojima smo suočeni, ne mogu se riješiti istom razinom razmišljanja (svijesti) na kojoj smo bili kad smo ih stvorili.“
Albert Einstein (1879. - 1955.) ([34])

„Mi nikada ne postajemo matematičari, čak i ako naučimo napamet sve tuđe dokaze, ako naš um nije osposobljen da samostalno rješava postavljene probleme.“
René Descartes (1596. - 1650.) ([34])

„Srž matematike čine konkretni primjeri i konkretni problemi. Nemoj samo čitati; bori se! Postavljaj svoja vlastita pitanja, traži svoje vlastite primjere, otkrij svoje vlastite dokaze. Je li pretpostavka nužna? Je li obrat istinit? Što se događa u specijalnom slučaju? Što je s degeneriranim slučajevima? Gdje dokaz rabi pretpostavke?“
Paul Richard Halmos (1916. - 2006.) ([34])

„Učini što možeš...“ (s matematičkim problemom)
Sibe Mardešić (1927. -) ([35])

„Što je najbolje učiniti s ovim zadatkom? Ostaviti ga na miru i smisliti neki drugi zadatak.“
tradicionalni profesor matematike ([16], str. 207)

„To što ste bili prisiljeni sami otkriti, u vašem umu otvara put kojim se možete ponovno koristiti kada se za to ukaže potreba.“
Georg Kristof Lichtenberg (1742. - 1799.), *Aforizmi* ([16], str. 273)

„Najbolji način da se nešto nauči jest da to sami otkrijete.“
George Pólya (1887. - 1985.) ([18])

„Svaka ljudska spoznaja počinje razmišljanjem; odatle se dolazi do pojmova i završava idejama.“
Immanuel Kant (1724. - 1804.), *Kritika zdravog uma*, str. 429. ([16], str. 429)

„Od želje niče misao o nekim sredstvima pomoću kojih vidimo ostvarenje nečeg sličnog onome čemu težimo i od te pomisli - misao o sredstvima za dostignuće tih sredstava, i tako dalje, dok ne dođemo do nekog početka koji je u našoj vlastitoj moći.“
Thomas Hobbes (1588. - 1679.), *Leviathan* ([16], str. 193)

„Rješavanje zadataka je najkarakterističnija i specifična raznolikost slobodnog mišljenja.“
William James (1842. - 1910.) ([16], str. 135)

„Problem je prilika za tebe da daš sve od sebe.“
Edward Kennedy „Duke“ Ellington (1899. – 1974.) ([42])

„Rješavanje problema je ono što radimo kad ne znamo što raditi.“
Dan Piraro (1958. -) ([2], prema T. Herr, K. Johnson, D. Piraro, *Problem Solving Strategies: Crossing the River with Dogs and Other Mathematical Adventures*, Berkeley, CA: Key Curriculum Press, 2001.)

„Problem nije problem. Problem je tvoje shvaćanje problema. Razumiješ li?“
kapetan Jack Sparrow u filmu *Pirati s Kariba* ([21])

„Ništa nije nemoguće za onoga tko ima volju pokušati.“
Aleksandar Veliki (356. prije Krista - 323. prije Krista) ([27])

Thomas Alva Edison o idejama za rješavanje problema, neuspjesima i odustajanju

„Da bi imao veliku ideju moraš imati puno ideja.“

„Kada bismo učinili sve stvari koje smo u stanju učiniti, zadivili bismo sami sebe.“

„Nisam pogriješio. Samo sam pronašao 10 000 načina koji ne funkcioniraju.“

„Samo zato što nešto ne radi onako kako si planirao ne znači da je to i neupotrebljivo.“

„Skoro svaki čovjek koji razvije neku ideju razrađuje je do točke kada ona izgleda nemoguća i onda se obeshrabri. To nije mjesto na kojem treba postati obeshrabren.“

„Naša velika slabost leži u odustajanju. Najbolji način da postignete uspjeh je da uvijek pokušate makar još jednom.“

„Naveći promašaji su ljudi koji ne shvate koliko su bili blizu uspjeha u trenutku kada su odustali.“ ([41])

1.6 Heuristika

Riječ ***heuristika*** (grč. $\varepsilon\upsilon\rho\iota\sigma\kappa\varepsilon\iota\nu$: 'nalaziti', 'otkrivati' ili grč. *heuristiko*: 'nalazim') ima mnogo značenja.
Riječ *heuristika* može označavati sljedeće:
- postupak koji vodi prema otkriću ili ga potiče ([31])
- umijeće metodičnog otkrivanja istina ([32])
- lat. *ars inveniendi*: 'vještina iznalaženja' ([17]), odnosno vještina pronalaženja istina ili novih činjenica i spoznaja ([33])
- disciplina koja se bavi istraživanjem i proučavanjem rješavačkih metoda i pravila koja vode do otkrivanja i pronalaženja ([15])
- skup znanja o metodama otkrivanja i utvrđivanja novih činjenica i spoznaja ([32])
- znanost o metodičkom pronalaženju i otkriću novoga ([17])
- dio znanstvene metodologije koji proučava vještine pronalaženja novih spoznaja ([39])
- proces koji može riješiti određenu vrstu problema, ali ne jamči uspješno rješenje (u modernoj logici) ([31])
- formalno neispravna i/ili nepotpuna procedura zaključivanja ili odlučivanja koja često vodi do uspješnoga rješenja problema ako se primijeni na specifično i razmjerno usko područje, no pokazuje se neuspješnom i beskorisnom ako je primijenjena na neko drugo područje (značenje u suvremenoj filozofiji uma) ([31]).

Područje heuristike raznoliko je povezano s drugim strukama. Heuristika djelomice zasijeca u područje djelovanja matematičara, fizičara, psihologa, pedagoga pa i filozofa, a time i logičara. Pritom treba priznavati mogućnosti kritike sa suprotnih stajališta te biti svjestan ograničenja heuristike ([15]). Važnost heuristike kao moguće bitne strategije zaključivanja potvrđena je rezultatima eksperimentalnih istraživanja u kognitivnoj psihologiji ([31]).

Iz riječi *heuristika* nastaje pridjev ***heuristički*** koji opisuje onoga koji je koristan i ima svoju svrhu u istraživanju ([32]), odnosno onoga koji služi otkrivanju ([15]). Drugačije rečeno, riječ *heuristički* opisuje onoga koji se odnosi na pronalaženje i otkrivanje novih činjenica i spoznaja, osobito znanstvenih ([17]).

Riječ ***heurističan*** (novolat. *heuristicus* $\leftarrow$ grč. *heurískein*: 'pronaći', 'otkriti') označava onoga kojemu je svojstveno otkrivanje, koji otkriva, koji se usvaja uz otkrivanje (za razliku od onoga što se uči pukim ponavljanjem ili oponašanjem) ([32]).

Riječ ***heureka*** (grč. $\varepsilon\upsilon\rho\eta\kappa\alpha$, tj. *heúreka*: '(Pro)našao sam!', 'Otkrio sam!') doslovno označava navodni legendarni uzvik koji se pripisuje velikom Grku Arhimedu iz Sirakuze kada je uočio prividni gubitak težine u tekućini i tako otkrio zakon o uzgonu tijela u tekućini (osnovni zakon hidrostatike o specifičnoj težini). Kasnije je u prenesenom značenju ta riječ počela označavati općenit usklik radosti pri nekom otkriću ili dobroj zamisli ([31]).

S riječju *heuristika* su povezani i sljedeći pojmovi:
- **Heuristički principi** (načela) su smjernice, odnosno radne hipoteze koje služe pronalaženju novih vidika pri znanstvenom istraživanju i objašnjavanju (npr. hipoteze ili fikcije) ([17]).
- **Heuristički postupak**, za razliku od sistematskog izlaganja, je prikazivanje putova i načina postizanja rezultata neke znanosti ([17]), odnosno dolaženje do znanstvenog rješenja ili otkrića putem pokušaja i pogrješaka, nagađanjima i opovrgavanjima ([31]).
- **Heurističke znanosti**, za razliku od egzaktnih znanosti, su znanosti koje svoje spoznaje (vrlo često) ne mogu provjeriti eksperimentom ([32]).
- **Heuristički program** je vrsta programa koji rješava problem na temelju pokušaja i pogrešaka ([32]).

1.7 Heuristika kroz prošlost

Heuristika je naziv za stanovitu disciplinu koja u prošlosti nije bila najjasnije definirana. Često je bila sumarno, a rijetko kada detaljno prikazivana. U vrijeme pisanja Pólyine knjige *Kako ću riješiti matematički zadatak* (1945. godina) heuristika je već dugo vremena bila zaboravljena. Stoga je bila prilično nepoznato područje, tj. disciplina koja tada nije bila u modi. Pólya slikovito navodi da heuristika ima „dugu prošlost, a možda i neku budućnost" ([15]). Upravo je pisanjem te knjige pokušao oživjeti tu, tada mladu znanstvenu granu u modernoj i skromnoj formi. Pritom je iscrpno osvijetlio ulogu heurističkog procesa u nastavi matematike pokušavajući okarakterizirati heuristiku kao posebnu granu spoznavanja ([7]).

Navest ćemo nekoliko matematičara koji su svojim radom značajno doprinijeli razvoju heuristike. Neke tragove proučavanja nalazimo već kod Euklidovih komentatora. U tom je pogledu osobito zanimljivo jedno mjesto kod poznatog grčkog matematičara **Papa iz Aleksandrije** (oko 290. – oko 350.). U sedmoj knjizi svojih *Collectiones* Papo izvještava o jednoj disciplini koju on naziva $\alpha\nu\alpha\lambda\upsilon\acute{o}\mu\epsilon\nu o\varsigma$. Ovaj naziv mogli bismo prevesti kao „riznica analize", ili kao „umijeće rješavanja zadataka", ili upravo kao „heuristika", a posljednji navedeni izraz kao da bi najviše odgovarao. Donosimo dio slobodnog prijevoda jednog Papovog izvještaja u kojem objašnjava metodu analize i sinteze. „Takozvana heuristika je, kratko rečeno, posebna znanstvena disciplina za upotrebu onima koji, nakon što su već proučili opće *Elemente*, žele steći vještinu rješavanja matematičkih zadataka. To je jedina korist ove discipline. Ona je djelo trojice: Euklida, autora *Elemenata*, Apolonija iz Perge i Aristeja starijeg. Ona uči postupcima analize i sinteze" ([15]).

Najpoznatija nastojanja da se izgradi sustav heuristike valja pripisati velikim matematičarima, fizičarima i filozofima Descartesu i Leibnizu. **René Descartes** (lat. *Renatus Cartesius*) (1596. — 1650.) namjeravao je objaviti univerzalnu metodu za rješavanje zadataka, ali je svoja *Pravila za vođenje uma* ostavio nedovršena. Fragmenti ovog djela, koji su nađeni među njegovim rukopisima i objavljeni poslije njegove smrti, sadrže brojniji i zanimljiviji materijal o rješavanju zadataka nego njegovo poznatije djelo *Discours de la Méthode*, iako je potonje djelo vrlo vjerojatno napisano kasnije. Ova Descartesova misao kao da opisuje postanak *Pravila za vođenje uma*: „Kad sam kao mladić slušao o dosjetljivim pronalascima, pokušavao sam pronalaziti sam ne čitajući autora. Postupajući tako, malo po malo sam opažao da upotrebljavam određena pravila“ ([15]).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. — 1716.) namjeravao je napisati djelo o „umijeću pronalaženja“, ali nikad nije izvršio taj plan. Brojni fragmenti razasuti po njegovim djelima ipak pokazuju da je imao zanimljivih ideja o toj temi čiju je važnost često naglašavao. Tako je, na primjer, pisao: „Ništa nije važnije, nego vidjeti izvore pronalaženja koji su po mom mišljenju zanimljiviji od pronalazaka samih“ ([15]).

Bernhard Bolzano (1781. - 1848.), logičar i matematičar, heuristici je posvetio znatan dio svog opsežnog izlaganja logike (*Wissenschaftslehre*, sv. 3, str. 293-575) i time joj je dao značajne i detaljne elemente spoznaje. U navedenom dijelu svog rada on piše: „Nipošto ne mislim da ću ovdje moći dati neki postupak za istraživanje koji ne bi svaka dobra glava već odavna bila zapazila, i nikom ne obećajem da će ovdje naići na nešto posve nova u tom pogledu. Ja ću se samo potruditi da jasnim riječima obuhvatim razna pravila i načine istraživanja po kojima postupaju svi sposobni ljudi, a da većinom toga nisu ni svjesni. Pa iako ne utvaram sebi da će i to potpuno uspjeti, ipak se nadam da će i ono malo što ću ovdje dati nekome dobro doći i da će to kasnije moći primijeniti“ ([15]).

1.8 Heuristička nastava

Kad god se problemska nastava ne može primijeniti, bilo zbog njezine težine ili zbog naravi matematičkog sadržaja koji se treba obraditi, taj nastavni sustav treba zamijeniti manje zahtjevnijim nastavnim sustavom čija je djelotvornost nešto slabija, ali još uvijek dovoljno dobra za ostvarenje većine ciljeva suvremene nastave matematike. Takav sustav je **heuristička nastava**. Kod ovog sustava su aktivnost i samostalnost učenika smanjene, ali se sposobnost umnog rada učenika i dalje razvija putem nastavnikovog misaonog vođenja.

Heuristička nastava je iznikla iz potrebe da se uvođenjem samostalnog rada učenika prevlada predavačka nastava i poboljša nastavni proces. Njezin početak nalazimo u prvom desetljeću 20. stoljeća. Ona se tijekom vremena razvijala i usavršavala. Razvojni put najbolje opisuju smjernice za njezinu primjenu iz prve polovine prošlog stoljeća:

- Zadržati prividnost igre. Uvažavati slobodu učenika. Podržavati privid njegovoga vlastitog otkrivanja matematičke istine. Izbjegavati zamorne vježbe pamćenja u početnom obrazovanju učenika jer to potiskuje njegove urođene osobine. Poučavati oslanjajući se na interes prema matematičkom sadržaju koji se proučava.

- Ne izlagati određeni dio matematike u potpuno gotovom obliku. Takvim se postupanjem dolazi u raskorak s osnovnim načelima nastave. Razvijati umni rad, a ne zahtijevati učenje napamet. Pridržavati se načela primjerenih teškoća.

- Razvijanje stvaralačkih sposobnosti učenika glavni je zadatak nastave matematike.

- Heuristička metoda je takva nastavna metoda u kojoj nastavnik ne priopćuje učenicima gotove činjenice i istine, nego ih navodi na samostalno otkrivanje odgovarajućih tvrdnji i pravila.

- Heuristička metoda sastoji se u tome da nastavnik pred učenicima postavlja problem, a onda pomoću odgovarajućih prikladnih pitanja vodi učenike do rješenja. Heuristička nastava učenike mora dovesti do shvaćanja.

Mnoge gore navedene smjernice i promišljanja su ostali svježi i prepoznatljivi sve do danas ([7]).

Karakteristike heurističke nastave

Kao i svaki drugi nastavni sustav, heuristička nastava ima svoje dobre strane i slabe strane (koje ne treba zanemariti). Poticajna je činjanica da dobre strane prevladavaju i heurističku nastavu svrstavaju među više i suvremene nastavne oblike.

Dobre strane:

- Osnovu za stjecanje znanja i sposobnosti predstavljaju samostalni rad i aktivnost učenika. Pritom je važno nastavnikovo poučavanje o matematičkom sadržaju i načinu rada kao svojevrsna pomoć učenicima.

- Poznato je da obrazovno značenje imaju samo oni matematički sadržaji koje učenici potpuno razumiju. Ono što učenici ne razumiju brzo se zaboravlja i potpuni je obrazovni promašaj. Stoga je važna odrednica heurističke nastave da nastavnici svojim poučavanjem učenike misaono vode i dovode ih do razumijevanja i shvaćanja matematičkog sadržaja.

- Heuristička nastava pretpostavlja neposredno komuniciranje nastavnika i učenika. Nastavnik svojim pitanjima upućuje učenike da u izvorima nalaze činjenice na osnovu kojih nastavnikovim misaonim vođenjem dolaze do shvaćanja. Slobodan razgovor i rasprava omogućavaju učenicima postavljanje pitanja, i to posebno kad im nedostaje neka spoznajna informacija.

- Za razliku od problemske nastave, heuristička nastava još uvijek ne dovodi učenike do potpuno samostalnog rada u otkrivanju matematičkih istina, već do toga spoznavanja učenike vodi nastavnik na temelju svoga heurističkog modela. Ipak, učenici su i tu misaono aktivni i u određenoj mjeri subjekti nastave.

- Heuristička nastava, za razliku od problemske nastave, može se u potpunosti ili djelomično primijeniti na svakom nastavnom satu matematike. Sve ovisi o nastavniku i umješnosti njegovog vođenja ([7]).

Slabe strane:

- Nemogućnost misaonog vođenja baš svih učenika zbog pomanjkanja vremena i različitih brzina shvaćanja.

- Nemogućnost neposredne komunikacije sa svim učenicima.

- Komunikacija s povučenim učenicima je otežana i često izostaju njihova pitanja.

- Nepotpuna povratna informacija o proučenom matematičkom sadržaju ([7]).

- Nije lako dovesti sve učenike do samostalnog otkrivanja odgovaraućih tvrdnji i pravila, tj. do usklika *Heureka!* Za neke učenike heuristička nastava ostaje još uvijek složen i težak nastavni sustav ([8]).

1.9 Heuristički razgovor

Zbog već spomenutih slabih strana heurističke nastave ne treba čuditi da se mnogi naši nastavnici matematike drže prokušanih metoda tradicionalne nastave. Tako u nastavnom procesu najčešće primjenjuju **metodu razgovora**. Ta metoda je dobra, ali je slabije djelotvorna od heurističke metode. Razlog leži i u njezinoj neprimjerenoj primjeni jer pitanja često ne budu dobro pripremljena. Evo uočenih slabosti metode razgovora:

- nema postupnog otkrivanja novog
- nastavnik kroz razgovor izlaže određeni matematički sadržaj u potpuno gotovom obliku
- nastavnik razgovor vodi samo s nekim učenicima (obično s najboljim)
- potiče se pasivnost mnogih učenika ([8]).

Dakle, tijekom rješavanja zadatka na nastavi, nije dobro da se odmah pozove jedan učenik pred ploču i krene s rješavanjem zadatka, što je najčešći slučaj. Tada obično nastaje pasivna atmosfera: nastavnik i učenik pred pločom traže put rješavanja, učenik nešto nejasno izgovara i muči se, a „prepisivači“ u razredu čekaju dok dragocjeno vrijeme nepovratno teče. Ovakav početak rješavanja zadatka metodički je promašaj.

Stoga metodu razgovora treba osuvremeniti. To se postiže zadržavanjem svih dobrih strana metode razgovora i dodavanjem dobrih strana heurističke metode. Tako se dobiva jedna metoda koja po svojim karakteristikama stoji između metode razgovora i heurističke metode. Ta se metoda naziva **heuristički razgovor**, odnosno **razgovor otkrivanja**. Ta metoda je zapravo rezultat stalnog poboljšanja metode razgovora. Ovom metodom se dolazi do novih matematičkih istina otkrivanjem razgovorom nastavnika i svih učenika, ali uz pojedinačno nastavnikovo misaono vođenje. Za dobro vođenje heurističkog razgovora osnovni je preduvjet vrsna nastavnikova priprema, posebno priprema pitanja za pojedine dijelove matematičkih sadržaja (pitanja koja se odnose na razumijevanje i rješavanje zadatka, pitanja koja se odnose na rješavanje jednadžbi, pitanja u vezi s poučkom i njegovim dokazom).

Dakle, svaki zadatak je lijep primjer za primjenu heurističkog razgovora. Zapravo, nastavnik matematike gotovo da i nema izbora jer se primjena heurističkog razgovora sama nameće. Stoga nastavnik mora u pripremi nastavnog sata imati razrađen cijeli postupak rješavanja zadatka na taj način i, što je najvažnije, točno znati koji obrazovni učinak može postići rješavanjem. S vremenom će razvoj mišljenja učenika dostići razinu koja omogućuje izvođenje nastave matematike primjenom heurističke metode, a možda i primjenom problemske metode. Naravno, u svakom konkrentom slučaju nastavnik matematike treba izvoditi nastavu na način koji je primjeren predznanju njegovih učenika ([8]).

1.10 Heurističko mišljenje

Heurističko mišljenje nije isto što i konačno, strogo zaključivanje. Ono je privremeno i plauzibilno (može se prihvatiti, vjerodostojno, prihvatljivo, usvojivo) i svrha mu je otkriti rješenje danog zadatka. Često smo prisiljeni rasuđivati heuristički. Potpunu sigurnost postižemo tek onda kad dobijemo potpuno rješenje, ali prije nego što smo sigurni, moramo se često zadovoljiti više ili manje plauzibilnim slutnjama. Prije nego što postignemo definitivno rješenje, može nam zatrebati privremeno rješenje. Heurističko mišljenje nam treba kad izgrađujemo strog dokaz kao što su nam potrebne skele kad podižemo zgradu. Dakle, takvo rasuđivanje, koje se često temelji na indukciji ili na analogiji, je samo po sebi dobro. Ono što je loše jest brkati ga sa strogim dokazom. Još je gore ako heurističko rasuđivanje deklariramo kao strog dokaz.

Određeni dijelovi nastave bi se mogli znatno poboljšati kad bi se bolje shvatila narav heurističkog mišljenja, kad bi se njegove prednosti i njegove granice iskreno priznale i kad bi udžbenici heurističke dokaze otvoreno iznosili kao takve. Heuristički izvod, iznijet ukusno i iskreno, može koristiti. On može pripremiti egzaktan dokaz čije određene klice on obično i sadrži. Međutim, heuristički izvod će vjerojatno samo škoditi ako se iznosi dvosmisleno i s očitim kolebanjem između „stida“ i preuzetnosti ([15], str. 61-62).

Poglavlje 2

Obrazovni dokumenti o rješavanju matematičkih problema

2.1 *PISA* o matematičkim problemima

Primarni cilj matematičkog obrazovanje je osposobiti učenika za rješavanje (matematičkih) problema. Taj cilj možemo utvrditi u hrvatskim (npr. *NOK*), europskim, odnosno svjetskim obrazovnim dokumentima (npr. *PISA*). Europski referentni okvir definira **matematičku kompetenciju** kao sposobnost razvoja i primjene matematičkog mišljenja kako bi se riješio **niz problema** u svakodnevnim situacijama. Uz dobro vladanje brojevima (tzv. numerička pismenost), naglasak je na procesu i aktivnosti, kao i na znanju.

Matematička kompetencija uključuje, na različitim stupnjevima, sposobnost i volju za korištenjem matematičkih načina mišljenja (logičko i prostorno mišljenje) i prikazivanja (formule, modeli, konstrukcije, grafovi, grafikoni) ([2]).

Prema definiciji *OECD*-a/*PISA*-e, matematička pismenost je sposobnost pojedinca za:

- **prepoznavanje matematičkih problema**,
- razumijevanje i angažman u matematici,
- stvaranje dobro utemeljenih prosudbi o ulozi matematike.

Ta sposobnost je potrebna u sadašnjem i budućem privatnom, poslovnom i društvenom životu s vršnjacima i članovima obitelji, kao i u životu kao konstruktivnog, zainteresiranog i promišljajućeg građanina ([2]).

Tri dimenzije matematičke pismenosti (prema *PISA*-i) su:

- matematički procesi,
- matematički sadržaj,
- matematičke situacije i konteksti ([2]).

Matematički procesi obuhvaćaju (prema *PISA*-i):

- matematičko mišljenje i zaključivanje,
- matematičko argumentiranje,
- matematička komunikacija,
- modeliranje,
- **postavljanje i rješavanje problema**,
- prikazivanje,
- korištenje simboličkog, formalnog i tehničkog jezika i operacija,
- korištenje pomagala i alata ([2]).

Postavljanje i rješavanje problema (prema *PISA*-i) obuhvaća:

- postavljanje, formuliranje i definiranje različitih tipova matematičkih problema (npr. čisto matematički ili primijenjeni problemi; problemi otvorenog ili zatvorenog tipa),
- rješavanje različitih vrsta matematičkih problema na raznovrsne načine ([2]).

Jedan od pet standarda matematičke kompetencije u Sjedinjenim Američkim Državama je strategijska kompetencija. Ona obuhvaća sposobnost postavljanja, prikazivanja i rješavanja matematičkih problema ([2], prema *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*, 2001.).

2.2 *NOK* o rješavanju problema i korištenju tehnologije

NOK predstavlja osnovne sastavnice predškolga, općega obveznoga i srednjoškolskoga odgoja i obrazovanja, uključujući odgoj i obrazovanje za djecu s posebnim odgojno-obrazovnim potrebama. *NOK* je temeljni dokument u kojemu su prikazane sastavnice kurikulumskoga sustava: vrijednosti, ciljevi, načela, sadržaj i opći ciljevi odgojno-obrazovnih područja, vrjednovanje učeničkih postignuća te vrjednovanje i samovrjednovanje ostvarivanja nacionalnoga kurikuluma. Središnji dio *NOK*-a čine učenička postignuća za odgojno-obrazovna područja, razrađena po odgojno-obrazovnim ciklusima te opisi i ciljevi međupredmetnih tema koje su usmjerene na razvijanje ključnih učeničkih kompetencija ([36], str. 11).

NOK određuje:
- svrhu učenja i poučavanja matematike u osnovnoj i srednjoj školi,
- ulogu matematike u sustavu odgoja i obrazovanja,
- opće ciljeve matematičkog obrazovanja,
- očekivana učenička postignuća na kraju svakog od četiri odgojno-obrazovna ciklusa ([4]).

U dijelu koji slijedi izdvojit ćemo samo one dijelove *NOK*-a koji se odnose na rješavanje matematičkih problema i primjenu tehnologije u nastavi matematike.

Opći odgojno-obrazovni ciljevi područja matematičkog obrazovanja
Učenici će:
- biti osposobljeni za **rješavanje matematičkih problema** i primjenu matematike u različitim kontekstima, uključujući i svijet rada
- učinkovito **primjenjivati tehnologiju** ([36], str. 80).

Razradom tih općih ciljeva dobivamo dvije istaknute dimenzije matematičkog obrazovanja:
- matematički procesi
- matematički koncepti

NOK razlikuje pet matematičkih procesa:
- prikazivanje i komunikacija
- povezivanje
- logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje
- **rješavanje problema i matematičko modeliranje**
- **primjena tehnologije** ([36], str. 81-91).

2.3 Očekivana učenička postignuća u *NOK*-u po odgojno-obrazovnim ciklusima

Prvi ciklus (I., II., III. i IV. razred osnovne škole)

I. Matematički procesi

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje
Učenik/ca:
- postavlja i analizira jednostavniji problem, planira njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka, rjašava ga te tumači i vrednuje rješenje i postupak
- izgrađuje novo matematičko znanje rješavanjem problema.

II. Matematički koncepti

4. Mjerenje
Učenik/ca određuje mjeriva obilježja *jednostavnoga* objekta ili pojave u svakodnevnim situacijama i primjenjuje mjerenje pri rješavanju problema.

Drugi ciklus (V. i VI. razred osnovne škole)

I. Matematički procesi

Postignuća se ne razlikuju u odnosu na prethodni (prvi) ciklus.

II. Matematički koncepti

2. Algebra i funkcije
Učenik/ca rješava jednostavni problemski zadatak zadan riječima upotrebom algebarskih simbola (brojevna rečenica, formula, linearna jednadžba).

4. Mjerenje
Učenik/ca određuje mjeriva obilježja objekta ili pojave u svakodnevnim situacijama i primjenjuje mjerenje pri rješavanju problema.

Treći ciklus (VII. i VIII. razred osnovne škole)

I. Matematički procesi

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje
Prvo postignuće se ne razlikuje u odnosu na ono iz prethodnog ciklusa, a drugo postignuće je nadopunjeno: Učenik/ca izgrađuje novo matematičko znanje rješavanjem problema *i modeliranjem situacija*.

5. Primjena tehnologije
Učenik/ca:
- istražuje i analizira matematičke ideje, eksperimentira s njima te provjerava pretpostavke pomoću džepnih računala i raznovrsnih računalnih programa, osobito programa dinamične geometrije i programa za izradu proračunskih tablica
- razložno i učinkovito rabi tehnologiju za prikupljanje, organiziranje, prikazivanje, predstavljanje i razmjenu podataka i informacija, za rješavanje problema i modeliranje te u situacijama kojima su u središtu zanimanja matematičke ideje (radi rasterećivanja od računanja i grafičkoga prikazivanja)
- razumije prednosti i nedostatke primjene tehnologije.

II. Matematički koncepti

1. Brojevi
Učenik/ca primjenjuje *realne* brojeve, njihove zapise i računske operacije u *rješavanju* jednostavnih matematičkih problema i problema u svakodnevnomu životu.

2. Algebra i funkcije
Učenik/ca prevodi jednostavan problem u algebarske simbole (brojevna rečenica, linearna jednadžba, sustav dviju linearnih jednadžbi), planira njegovo rješavanje, rješava ga i utvrđuje smislenost dobivenoga rješenja.

3. Mjerenje
Učenik/ca određuje mjeriva obilježja objekta ili pojave u svakodnevnim situacijama, *odabire primjerene mjerne jedinice i mjerne uređaje* te primjenjuje mjerenje pri rješavanju problema.

Četvrti ciklus - srednje strukovne škole

NOK za ovaj ciklus propisuje zajedničku općeobrazovnu jezgru za sve strukovne programe, i to najmanje 60% prvog razreda i 40% drugog razreda strukovnog obrazovanja u srednjim strukovnim i umjetničkim školama ([4]). „Treba imati na umu da se u srednjim strukovnim i umjetničkim školama općeobrazovni sadržaji mogu poučavati i u završnim razredima, ovisno o profilu i potrebama škole, odnosno učenika" ([36], str. 19).

I. Matematički procesi

Postignuća se ne razlikuju u odnosu na prethodni (treći) ciklus, osim što se u procesu **Rješavanje problema i matematičko modeliranje** navodi još jedno postignuće:
Učenik/ca primjenjuje matematičke pojmove i postupke u svakodnevnomu osobnomu, profesionalnomu i društvenomu životu te u drugim odgojno-obrazovnim područjima.

II. Matematički koncepti

1. Brojevi
Učenik/ca primjenjuje *brojeve*, njihove zapise i računske operacije u *modeliranju* jednostavnih matematičkih problema i problema u svakodnevnomu životu.

U postignućima koncepta **Algebra i funkcije** se ne spominje rješavanje problema (za razliku od prethodog ciklusa), a postignuća koncepta **4. Mjerenje** se ne razlikuju u odnosu na ona iz prethodnog ciklusa.

Četvrti ciklus - gimnazije

Ovaj ciklus u gimnazijama obuhvaća sva četiri razreda ([36], str. 19) i propisuje zajedničku jezgru za sve gimnazije ([4]).

I. Matematički procesi

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje Postignuća ovog procesa se ne razlikuju u odnosu na prethodni (treći) ciklus, osim što se govori o *problemu*, a ne samo o *jednostavnijem problemu* kao u prethodnom ciklusu. Nadalje, spominje se još jedno dodatno postignuće:
Učenik/ca modelira situacije i procese iz drugih odgojno-obrazovnih područja te svakodnevnoga osobnoga, profesionalnoga i društvenoga života.

5. Primjena tehnologije

Postignuća ovog procesa se ne razlikuju u odnosu na prethodni (treći) ciklus, osim što se u drugonavedenom ishodu spominje i to da se *razložno i učinkovito rabi džepno računalo za računanje*.

II. Matematički koncepti

1. Brojevi

Učenik/ca primjenjuje *brojeve*, njihove zapise i računske operacije u *modeliranju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima* i svakodnevnomu životu.

2. Algebra i funkcije

Učenik/ca primjenjuje funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnomu životu.

3. Mjerenje

Učenik/ca određuje mjeriva obilježja objekta ili pojave u svakodnevnoj situaciji te primjenjuje mjerenje pri rješavanju *matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnomu životu*.

5. Infinitezimalni račun

Učenik/ca *primjenjuje derivaciju i određeni integral pri rješavanju jednostavnih problema*.

Poglavlje 3

Pólyini koraci

3.1 George Pólya - lik i djelo

George Pólya (slika 3.1) rođen je u Budimpešti 13. prosinca 1887. U mladosti nije pokazivao osobito zanimanje za matematiku. Godine 1905. upisao je pravni fakultet. Budući da je taj studij smatrao dosadnim, nakon jednog semestra prebacio se na studij jezika i književnosti te je stekao zvanje profesora latinskog i mađarskog jezika. Nakon toga počeo se baviti filozofijom pri čemu se susreo s matematikom. Godine 1912. doktorirao je matematiku na Budimpeštanskom sveučilištu. Radio je na sveučilištima u Njemačkoj, Engleskoj, Švicarskoj i Francuskoj. Godine 1940. napušta Europu te potom odlazi u Ameriku.

Bio je izuzetan matematičar. Svojim znanstvenim radovima fundamentalno je doprinio kombinatorici, teoriji brojeva, teoriji vjerojatnosti, kompleksnoj analizi i parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. Bio je izuzetan učitelj, učitelj učitelja te vrstan predavač. Osobito se zalagao za heuristički pristup učenju. Tvrdio je da postoji umijeće otkrića i da ga je moguće naučiti. Njegova knjiga *Kako riješiti matematički zadatak* (1945.) prodana je u gotovo milijun primjeraka i prevedena na 17 jezika i gotovo da nema knjige o heurističkoj metodi koja se na nju ne poziva. Drugi njegov rad značajan za matematičku edukaciju je knjiga *Matematika i uvjerljivo zaključivanje*, odnosno *Matematički vjerodostojno zaključivanje* (1954.), prevedena na šest jezika, u kojoj se bavi načinom kako naučiti rješavati probleme i dokazivati teoreme.

Osobito je važna knjiga *Matematičko otkriće* (1962.), prevedena na devet jezika, u kojoj izlaže razmišljanje o matematičkom otkriću. (Svi navedeni podatci o prijevodima knjiga i broju prodanih knjiga su iz 2003. godine ([16]).) *Matematičko otkriće* je priručnik koji svakodnevno mogu rabiti i roditelji, kao i stariji srednjoškolci. Čitatelju će se činiti vrlo suvremenim iako je pisan prije više od 50 godina. U njemu Pólya detaljno argumentira ideje i poglede na sve dijelove nastave matematike ([16], str. iii). Pritom objedinjava teorijski cilj - proučavanje heuristike, s konkretnim, praktičnim i neodgodivim ciljem - po-

Slika 3.1: George Pólya na drugoj Međunarodnoj konferenciji o matematičkom obrazovanju u engleskom gradu Exeteru 1972. godine ([40])

boljšanjem izobrazbe nastavnika i njihovim daljnjim usavršavanjem ([16], str. 3). Pólya svoje neslaganje s određenim aspektima postojeće prakse iskazuje ironizirajući je. Pritom ne nameće prihvaćanje svojih rješenja, nego odluku prepušta čitatelju čiju je aktivnost nastojao svesrdno potaknuti ([16], str. iii). Veći dio tog njegovog djela predstavljaju realan, praktičan aspekt heuristike. Pólya je svim njemu dostupnim sredstvima pokušao zainteresirati čitatelja za rješavanje zadataka i potaknuti ga da se zamisli nad metodama i sredstvima koja on pri tome primjenjuje. Većinu teksta je posvetio svestranom istraživanju procesa rješavanja samo nekoliko problema ([16], str. 2). Mnogi prijedlozi iz te knjige su standardizirani (i na neki način „ozakonjeni" za svakodnevnu uporabu u školskom sustavu) u *Standardima za nastavu matematike*. To je skup standarda za matematičke nastavne planove u sjevernoameričkim školama od vrtića do četvrtog razreda srednje škole koji je 1988. godine donijela američka *Komisija za standarde školske matematike Upravnog odbora Nacionalnog vijeća učitelja matematike* ([16], str. iii). (Kod nas prijevod tih standarda 2000. godine objavilo Hrvatsko matematičko društvo.)

Pólya je redovno posjećivao srednje škole na zapadu SAD-a. Držao je predavanja i tako prikupljao na stotine mladih zainteresiranih za matematiku koji su posjećivali njegove seminare na sveučilištu u Stanfordu (Kalifornija, SAD). Mnoge je potakao na matematički karijeru. Umro je 7. rujna 1985. u Paolo Altu ([16]).

Važno je reći da je George Pólya bio veliki matematičar 20. stoljeća i jedan od najboljih metodičara i pedagoga. Njegova promišljanja i predložena rješenja u poučavanju matematike ostvaruju se i ne gube na snazi već pedesetak godina. Nastavnici bi njegove ideje trebali ugraditi u svoje poučavanje, na svoju korist i na korist svojih učenika. Moglo bi se reći da danas dobivaju novi poticaj uvođenjem računala u nastavu matematike ([16], str. iii).

3.2 Pólyini koraci - temeljne etape pri rješavanju svakog problema

Po svojoj naravi čovjek teži k najvećem: htio bi ovladati univerzalnom metodom koja omogućuje da se uspješno riješi svaki zadatak. Stoga je pitanje pronalaženja što općenitijih metoda rješavanja problema vrlo staro. U većini ljudi ta želja ostaje skrivena, ali se katkad pojavljuje u pričama i djelima nekih filozofa. Tako je René Descartes tragao u svojim istraživanjima za univerzalnom metodom rješavanja problema, zasnovanoj na ideji da se bilo koji problem može svesti na rješavanje jednadžbi. Descartesova zamisao se vrlo plodno ostvaruje za mnoštvo raznorodnih problema u raznim područjima matematike, pa tako i u školskoj matematici, osobito pri rješavanju tekstualnih i konstruktivnih zadataka ([12], str. II). Leibniz je najjasnije definirao ideju univerzalne metode koja je pogodna za rješavanje svih zadataka. Međutim, potraga za općom metodom nije bila ništa uspješnija od potrage za kamenom koji sve metale pretvara u zlato. To su više ili manje ostali tek nedostižni ideali kojima je suđeno da ostanu mašta jer je jasno da univerzalna metoda ne može postojati. No ni ti ideali nisu potpuno beskorisni jer su mnogi u potrazi za ciljem pronašli zanimljive putove. Naime, i nekoliko malih koraka u smjeru nedostižnog ideala može razviti umijeće rješavanja zadataka ([16], str. 1-2).

Umjesto uzaludnog traganja za univerzalnom metodom, za široke klase problema uvode se i razvijaju posebne metode rješavanja. Međutim, za mnoge probleme ni to nije moguće učiniti. Zato u metodici nastave matematike izrasta i neprestano se razvija posebna metodika - **metodika rješavanja zadataka**. Njezino je središnje pitanje: **kako naučiti učenike rješavati zadatke?** A jedan je od njezinih glavnih ciljeva: naučiti učenike prepoznavati zadatke iz iste klase. Ona pomaže da se proces rješavanaj bilo kojeg zadatka svede na što je moguće manji broj nepoznanica i na taj način podigne razina uspješnosti rješavanja ([12], str. II).

Dakle, nemoguće je naći čarobni ključ (ili riječ) koji otvara sva vrata, tj. univerzalnu metodu kojom se mogu riješiti svi zadatci, ali je moguće proučiti mnogo dobrih primjera za oponašanje rješavanja sličnih zadataka. Naime, rješavanje zadataka je praktična vještina slična plivanju, skijanju ili sviranju na glasoviru; može se naučiti samo oponašajući dobre uzorke i neprekidno vježbajući ([16], str. 1).

George Pólya je 1945. godine napisao knjigu *How to solve it* (*Kako ću riješiti matematički zadatak*) koje je postala osnovna literatura o strategijama rješavanja matematičkih problema. U toj knjizi je sustavno prikazao i objasnio četiri osnovne etape pri rješavanju svakog (pa tako i matematičkog) problema. Stoga Pólyu možemo nazvati „ocem“ rješavanja matematičkih problema ([2]). Tu razradu općeg pristupa rješavanju zadataka popratio je nizom korisnih uputa, usmjeravajućih pitanja i logičkih rasuđivanja ([12], str. II). Pólya navodi pitanja koja su ključna za pojedinu etapu rješavanja zadatka. Ta pitanja se zasnivaju se na misaonim operacijama. Ako se nastavnik s tim pitanjima i preporukama obrati svom učeniku i primijeni ih pravilno (u pravom trenutku i na pravi način), time učeniku može pomoći pri rješavanju zadatka. Također, učenici si i sami mogu postavljati preporučena pitanja i tako kontrolirati postupak rješavanja. Važno je da učenici na primjerima uistinu uoče praktičnu korist tih pitanja i preporuka ([15], str. XIII-XIV).

Prema [2] i [15], danas je uobičajeno da se proces rješavanja zadataka dijeli u četiri temeljne etape:

1. Razumijevanje problema

2. Stvaranje plana njegova rješavanja

3. Izvršavanje osmišljenog plana – dobivanje rješenja problema

4. Osvrt na rješenje i metodu rješavanja

Te etape se isprepliću i međusobno ovise tako da su tijekom rješavanja u stalnom međudjelovanju. Stoga je često poželjno da se učenik po potrebi i vraća na neku od prethodnih etapa (osim da prelazi na sljedeću etapu).

Razumijevanje problemskog zadatka

Važne upute i pitanja koja si trebamo postaviti pri čitanju teksta problemskog zadatka:

- Možeš li zadatak izreći svojim riječima?

- Što u zadatku pokušavaš pronaći ili napraviti?

- Koje informacije su zadane? Kako glasi uvjet? Što je nepoznato?

- Koje informacije u zadatku nedostaju? Postoje li i koje su informacije u zadatku suvišne? ([2])

- Je li moguće zadovoljiti uvjet? Je li uvjet dovoljan za određivanje nepoznatog? Što ako nije dovoljan; je li preodređen ili kontradiktoran?

- Nacrtaj sliku. Uvedi pogodne oznake.

- Rastavi uvjet na razne dijelove. Možeš li ih napisati? ([15])

Osmišljavanje plana rješavanja

Ova etapa podrazumijeva odabir učinkovite strategije rješavanja problema, odnosno otkrivanje posebnih metoda rješavanja (ako takve metode postoje) ([12], str. II). O tome će biti više riječi u sljedećem poglavlju. Jasna je stvar da se mnogi zadatci ne mogu riješiti samo jednom metodom, već se njihovo rješavanje provodi kombiniranjem više metoda.

Važne upute i pitanja koja si trebamo postaviti:

- Potraži vezu između zadanog i nepoznatog. Ako se ne može naći neposredna veza, možda ćeš morati razmatrati pomoćne zadatke. U konačnici trebaš dobiti plan rješavanja.
- Jesi li zadatke već prije vidio? Jesi li isti zadatak vidio u nešto drugačijem obliku?
- Znaš li neki srodan zadatak? Znaš li koji teorem bi ti mogao pomoći pri rješavanju?
- Promotri nepoznato i nastoj se sjetiti nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu traženu nepoznanicu.
- Prisjeti se srodnog zadatka koji je već riješen. Možeš li ga iskoristiti? Možeš li primijeniti njegovo rješenje? Možeš li primijeniti metodu kojom je taj zadatak riješen? Pokušaj uvesti pomoćni element kako bi mogao upotrijebiti taj zadatak pri rješavanju početnog zadatka ([15]). René Descartes u svojem djelu *Rasprava o metodi* o tome piše: **„Svaki zadatak koji sam riješio postao je za mene uzorak koji je kasnije služio za rješavanje drugih zadataka.“** i **„Ako sam ja i otkrio neke nove istine u znanosti, mogu tvrditi da su one ili izravna posljedica pet ili šest glavnih zadataka koje sam uspio riješiti ili barem ovise o njima. Ja na njih gledam kao na isto toliko sukoba u kojima je ratna sreća bila na mojoj strani“** ([16], str. 11).
- Možeš li zadatak drugačije izraziti?
- Ne možeš li riješiti postavljen zadatak, pokušaj najprije riješiti neki srodan zadatak. Možeš li smisliti srodan zadatak koji je pristupačniji/općenitiji/specijalniji/analogan? Možeš li riješiti dio zadatka? ([15]) George Pólya o tome piše sljedeće: **„Ako ne možeš riješiti dani problem, onda postoji lakši problem koji možeš riješiti. Pronađi ga!“** ([30]). René Descartes u pravilu VI. svog djela *Pravila rukovođenja umom* piše: **„Kad se pojavi problem, moramo biti u mogućnosti vidjeti je li učinkovito prije istražiti neki drugi problem, koji problem ili koje probleme“** ([16], str. 207).
- Zadrži samo jedan dio uvjeta, a ostale uvjete odbaci. Dokle je tada nepoznanica određena te kako se ona može mijenjati?

- Možeš li iz zadanih podataka izvesti nešto korisno?
- Možeš li zamisliti neke druge zadane podatke koji bi bili pogodni za određivanje nepoznatog?
- Možeš li promijeniti nepoznanicu ili zadane podatke (ili oboje ako treba) tako da nova nepoznanica i novi zadani podaci budu međusobno bliži?
- Jesi li iskoristio sve zadano? Jesi li iskoristio uvjete u cjelini? Jesi li uzeo u obzir sve bitne pojmove koji se nalaze u zadanom zadatku? ([15])

Provođenje osmišljenog plana – dobivanje rješenja problema

Rješavanje zadatka je prijelaz od uvjeta do rezultata, tj. način postizanja cilja zadatka. Provodi se nakon iscrpne analize u kojoj je otkriven put rješavanja ([12], str. 2).
Ova etapa podrazumijeva:
- izvođenje strategije odabrane u drugom koraku te izvođenje svih nužnih koraka i izračuna
- provjeru izvršenosti i valjanosti svakog učinjenog koraka predviđenog planom
- precizno i sustavno bilježenje rada
- ustrajnost u radu, čak i ako primijenjena strategija ne daje rezultate - tada je treba zamijeniti nekom drugom strategijom, a ne odustati od rješavanja problema ([2]).

Važna pitanja koja si trebamo postaviti:

- Provodiš li svoj plan rješavanja? Kontroliraj svaki korak.
- Možeš li jasno vidjeti da je korak ispravan? Možeš li dokazati da je ispravan? ([15])

Osvrt na gotovo rješenje i metodu rješavanja

Pozornost koja se poklanja nekom zadatku obično završava nalaženjem njegova rješenja. Kada je rješenje nađeno, često se prelazi na sljedeći zadatak pa prethodni zadatak kao da više ne postoji. Čak se možda nije ni provjerilo je li dobiveno rješenje ispravno. Tako se čini da je brzo nalaženje rješenja najvažnije u čitavom procesu rješavanja zadatka i jedina njegova svrha, a dakako da nije tako. Pregledavajući tok svog rada i konačni oblik rješenja, učenik će zapaziti vrlo mnogo raznih stvari ([12], str. 2). Pritom je sasvim jasno da je najbolje osvruti se na riješeni problem te razmišljati o metodama rješavanja odmah nakon samog rješavanja. Tada je rješenje dobro „probavljeno“, dojmovi su još svježi pa će učenik iz retrospektivnog pogleda na svoj napor bolje razabrati karakter svladanih poteškoća, lakše prepoznati i imenovati korištenu metodu ([16], str. 7).

Ova sastavnica zadatka je od posebne važnosti jer pruža mogućnost ispitivanja novih ideja i daljnjih usmjeravanja mišljenja učenika na važne znanstvene postupke kao što su analiza, sinteza, analogija, specijalizacija, generalizacija i dr. Traženjem odgovora na novonastala pitanja razvijaju se i njeguju određene matematičke sposobnosti učenika i njihova kreativnost podiže na višu razinu. Dakle, ako učenik, što je moguće potpunije, razmišlja o zadatcima koje je riješio, steći će sređeno i upotrebljivo znanje ([12], str. 2).

Važno je i da je učenik svjestan toga da iz svojih napora može izvući korist tako da iz riješenog zadatka uoči to što u budućnosti može poslužiti pri rješavanju drugih zadataka. Način rješavanja do kojeg dođe osobnim naporom, koji pročita u knjizi ili pak koji čuje od nekog drugog, može se pretvoriti u pogodnu metodu i uzorak koji se s uspjehom može oponašati pri rješavanju drugih zadataka. Naravno da je pritom oponašanje rješenja lako ako je zadatak sličan učenicima poznatom zadatku. Međutim, ako sličnost nije velika, onda takvo oponašanje postaje teškim ili jedva ostvarivim ([16], str. 1).

Ova etapa podrazumijeva:
- provjeru dobivenog rezultata uvrštavanjem u postavljeni problem, što u nekim slučajevima uključuje i dokaz da dobiveno upravo ono što je traženo
- interpretaciju dobivenog rješenja u terminima postavljenog problema te odgovor na pitanje ima li dobiveno rješenje smisla i je li postavljeni problem u cijelosti riješen
- utvrđivanje postoji li još neka metoda kojom se može riješiti postavljeni problem te koja je od metoda najjednostavnija, odnosno najefikasija
- ukoliko je moguće, utvrđivanje drugih srodnih ili općenitijih problema koji se mogu riješiti primijenjenom metodom te sagledavanje ograničenja primijenjene metode ([2]).

Određeno usmjeravanje učeničkog mišljenja može se postići napomenama i postavljanjem važnih pitanja:

- Provjeri dobiveno rješenje.
- Možeš li kontrolirati rezultat? Možeš li kontrolirati dokaz?
- Možeš li zadatak riješiti na neki drugi način?
- Možeš li rezultat uočiti na prvi pogled?
- Koliko prethodnog znanja trebam za rješavanje ovog zadatka?
- Možeš li rezultat ili metodu rješavanja upotrijebiti za neki drugi zadatak? Postoji li neki trik koji možemo uporabiti sljedeći puta u sličnoj situaciji? ([15])
- Jesmo li opisani postupak rješavanja već koristili kod nekog drugog zadatka?

- Može li se način rješavanja zadatka pojednostavniti? Što se moglo bolje učiniti? ([12], str. 2) (Thomas Alva Edison (1847. - 1937.) je jednom prilikom rekao: **„Postoji način da se to napravi bolje. Pronađi ga!“** ([41])).
- Može li se zadatak pojednostavniti i/ili poopćiti?
- Može li se sastaviti neki sličan zadatak?
- Kako glasi obrnuta tvrdnja i vrijedi li ona? ([12], str. 2)
- Je li riješeni zadatak bio težak ili lagan?
- Koja je bila glavna, tj. ključna ideja za rješavanje zadatka? Koji je trenutak u procesu rješavanja bio vrlo važan?
- Što je najviše pomagalo, a što najviše kočilo tijekom rješavanja, tj. u čemu je bila glavna poteškoća? ([15], str. 41)

Poglavlje 4

Strategije rješavanja problemskih zadataka

4.1 Strategije i metode

„Metoda - to je postupak koji rabite dva puta.“
izreka jednog pedagoga o metodi kao misaonoj doskočici čiju opću shemu djelovanja uočavamo nakon što je uporabimo dva puta ([16], str. 78)

„Metoda se sastoji u razmišljanju i uređivanju stvari na koje treba biti usmjerena naša pozornost u cilju otkrića neke istine.“
René Descartes (1596. - 1650.), *Pravila rukovođenja umom*, pravilo V. ([16], str. 249)

„Iako je u običnim slučajevima teško dati opća pravila (upute) jer svatko u njima mora slijediti upute svoga razuma, ipak ću pokušati pokazati put početnicima.“
Isaac Newton (1643. - 1728.), *Sveopća aritmetika*, str. 198. ([16], str. 263)

Pojam **strategija** (grčki $\sigma\tau\rho\alpha\tau\eta\gamma\acute{\iota}\alpha$, tj. *stratēgía* $\simeq$ *stratēgós*: 'vojni zapovjednik' $\simeq$ *stratós*: 'vojska' + *ágein*: 'voditi') se koristi u različitim kontekstima (vojska, društvo, ekonomija, politika, geografija, sociologija, psihologija, sport, računalne igre itd.) ([32]) te u skladu s tim ima i različita značenja. U svakodnevnim razgovorima se često koristi u prenesenom značenju te obično označava način (plan) ili spretnost (taktičku vještinu) postizanja željenog cilja ([32], [33]), tj. umijeće korištenja i unapređivanja sposobnosti djelovanja radi postizanja optimalno mogućih predvidivih ciljeva ([39]).

Pojam **metoda** (lat. *methodus* $\leftarrow$ grč. $\mu\varepsilon\vartheta o\delta o\varsigma$, tj. *méthodos*: 'traženje', 'istraživanje' $\simeq$ *meta-* + *hodós*: 'put', 'staza') označava način, put, postupak koji pomaže ostvarenju željenog rezultata u nekom praktičnom poslu, znanstvenom istraživanju, društvenoj akciji, sportskoj igri itd. ([32]), odnosno unaprijed smišljen, planski postupak za postizanje određenoga cilja na nekom praktičnom ili teoretskom području; ustaljen način obavljanja neke djelatnosti ([33]).

Iz nevedenog je uočljivo da su pojmovi **strategija** i **metoda** bliske po svome značenju pa ćemo ih i koristiti kao istoznačnice.

Opće metode rješavanja problemskih zadataka

Promatrajući spomenute Pólyine korake, možemo uočiti neke „opće" metode rješavanja problemskih zadataka koje prirodno proizlaze iz tih koraka. Te metode su zapravo primjenjive na svakom zadatku (koliko god to možda nekad bilo besmisleno), točnije gotovo pa uvijek su primjenjive. Ispisat ćemo neke od tih metoda:

- metoda pokušaja i promašaja (pogrešaka)
- crtanje dijagrama (metoda grafičkog prikaza), tj. grafičko-aritmetička metoda
- metoda vraćanja (rješavanja) unatrag
- promjena fokusa
- prisjećanje i analiziranje srodnih ili sličnih problema te utvrđivanje može li se metoda njihovog rješavanja primijeniti i u ovom slučaju
- istraživanje i rješavanje jednostavnijeg srodnog problema (npr. s manje varijabli) ili specijalnog slučaja postavljenog problema
- razlaganje problema na potprobleme ([2]).

Posebne metode rješavanja problemskih zadataka

Nadalje, možemo istaknuti i neke „konkretnije" metode rješavanja koje su često karakteristične, tj. vezane za pojedini tip zadatka. Stoga je područje djelovanja tih metoda više ili manje usko pa se te metode vrlo često ne mogu primjenjivati na svakom zadatku.

Nazivi tih specifičnih metoda proizlaze iz načina njihova „djelovanja" tijekom rješavanja zadatka. Mogli bismo reći da svaka od tih metoda ima svoj uzorak djelovanja pa primjena tih metoda često daje osjećaj „sigurnog tla pod nogama" i „nalaženja na poznatom terenu", a provođenje metode gotovo pa sigurno dovodi do traženog rješenja (ako se pokaže da je provedena metoda prikladna za zadatak). Primjena tih posebnih metoda nekada slijedi tek nakon primjene neke od „općih" metoda.

Nabrojat ćemo neke posebne metode, odnosno posebne strategije rješavanja problemskih zadataka:

- sastavljanje tablica ili ispisivanje sustavnih listi
- metoda uzastopnog/uzastopnih približavanja
- uočavanje zakonitosti ili pravilnosti
- postavljanje i rješavanje jednadžbe ili sustava jednadžbi, tj. Descartesova metoda ili algebarska metoda (npr. metode rješavanja diofantskih jednadžbi, algebarska metoda rješavanja konstruktivnih problema, metoda koordinata) ([2])
- metoda supstitucije
- metoda neodređenih koeficijenata
- Gaussova metoda eliminacije
- metoda teleskopiranja
- metoda razlikovanja slučajeva
- metoda rješavanja logičkih problema
- Dirichletovo načelo
- metoda rekurzije
- konstruktivne metode (npr. metoda presjeka, metoda pomoćnih likova, metoda osne simetrije, metoda rotacije, metoda centralne simetrije, metoda translacije, metoda sličnosti)
- metoda (dvaju) geometrijskih mjesta
- Lagrangeova metoda superpozicije specijalnih slučajeva
- metoda lažne postavke

Više o tim metodama se može pročitati u [12].

Metode dokazivanja

Izdvojit ćemo neke metode kojima se rješavaju zadatci u kojima je potrebno dokazati neku tvrdnju.

- Ako se pojavljuju cjelobrojni parametri, može se pokušati dokazati **principom matematičke indukcije** ([24], str. 178).

- Dokazivanje pomoću svođenja na **kontradikciju** (proturječje) ili pomoću **kontrapozicije**.

Obje od ovih metoda su osobito korisne kada se ustanovi da je teško provesti direktni dokaz. Primjenom tih metoda se obavlja manji posao ([24], str. 178).

Metoda uzastopnih približavanja je primjerena znanju matematike učenika 4. i 5. razreda ([12], str. III). Metoda razlikovanja slučajeva se može primjenjivati vrlo rano (napredni učenici već u petom razredu osnovne škole) ([10]). Ostale metode koje su nabrojane trebaju poznavati učenici viših razreda osnovne škole i 1. razreda srednjih škola. Složenost spomenutih metoda raste tako da metodu matematičke indukcije mogu dobro razumjeti i primijeniti samo učenici završnog razreda srednjih škola ([12], str. III).

Napomenimo da podjela na opće i posebne metode ne mora nužno biti onakva kako je prikazano. Naime, teško je napraviti strogu podjelu jer bi neke od navedenih strategija mogle pripadati objema skupinama. Stoga navedena podjela nije konačna i dakako da je otvorena za rasprave i potencijalne izmjene.

4.2 Učinkovitost poznavanja metoda rješavanja problemskih zadataka

Budući da je rješavanje zadataka najčešća učenikova djelatnost, važno je da učenik poznaje metode kojima ih može riješiti. U svakom području matematike postoji niz razrađenih i djelotvornih metoda rješavanja raznovrsnih problema. To znači da se velike skupine srodnih problema mogu obuhvatiti preciznim i sistematičkim planom rješavanja. Često se već iz same formulacije problema može naslutiti koju metodu treba odabrati.

Ova činjenica, osim stručnog, ima i važno psihološko značenje jer **unaprijed znane metode svakom učeniku daju veću sigurnost pri rješavanju problema**. Naime, ako učenik rješava neki problem i brzo uoči da se on može riješiti metodom koju on unaprijed poznaje, onda se smanjuje njegova početna psihička napetost, njegovo mišljenje manje je opterećeno i može se odmah usmjeriti na postupak rješavanja ([12], str. I). U praksi je pokazano kako primjena različitih prikladnih metoda rješavanja često omogućuje znatno jednostavnije, spretnije, uspješnije i brže rješavanje pa se time dodatno štedi i vrijeme. Time nastavnici nastavu matematike ujedno čine sadržajnijom i dinamičnijom ([12], str. III). To posebno dolazi do izražaja na matematičkim natjecanjima pa je stoga preporučljivo napredne učenike, one koji pokazuju veće zanimanje za matematiku i one koji se uključe u sustav natjecanja upoznati sa što više posebnih metoda rješavanja problemskih zadataka. Dakle, poznavanje svake metode je korisno jer proširuje znanje i omogućuje bolje rezultate pri rješavanju zadataka (bilo na nastavi, bilo na matematičkim natjecanjima).

Naravno, nije moguće sve probleme rješavati određenim brojem poznatih metoda jer se neprestano pojavljuju novi problemi koji zahtijevaju nove načine rješavanja. Međutim, poznavanje zadovoljavajućeg broja djelotvornih metoda omogućuje lakše svladavanje novih problema i pozitivno utječe na matematičke sposobnosti učenika i trajnost njihovih znanja. Zato je vrlo važno njegovati i razvijati metode koje učenici poznaju te ih postupo upoznavati s novim metodama rješavanjem zadataka. Osobito je bitno da učenici na temelju riješenih primjera uoče značajke i djelotvornost pojedinih metoda jer je to preduvjet za prepoznavanje potrebe njihove primjene.

Dugogodišnje praćenje matematičkih natjecanja pokazuje da bi se današnje stanje u tom pogledu moglo znatno poboljšati jer naši najbolji učenici često ne snalaze dobro u rješavanju nestandardnih i složenijih matematičkih problema i postižu slabije rezultate. Nedostaju im određena znanja, ne poznaju neke jednostavne metode rješavanja matematičkih problema. Posebno je uočeno slabo poznavanje analize.

Istina, rješavajući raznovrsne standardne i nestandardne zadatke učenici ovladavaju sve većim znanjem i stječu sve bolje iskustvo u toj djelatnosti. Međutim, sposobnost rješavanja problemskih zadataka razvija se uspješnije i brže ako oni to ne postižu samo rješavanjem velikog broja zadataka, već upoznavanjem i usvajanjem različitih metoda rješavanja zadataka ([12], str. I).

Mnogi problemski zadatci omogućuju rješavanje na više načina. Jedni su načini složeniji, drugi jednostavniji. Naravno, postoji i onaj najbolji način rješavanja, lijep, jednostavan i racionalan, ali njegovo otkrivanje i nije najvažnije na početku postupka rješavanja. On se izdvaja na kraju, a na početku je važan svaki način rješavanja. Stoga si možemo postaviti prirodno pitanje zašto razmatrati više načina rješavanja, tj. zar nije dovoljan samo jedan način jer on vodi do onoga što se traži, a to je rješenje zadatka.

Naravno da je dovoljan jedan način rješavanja ako je cilj samo rješenje zadatka. No, ako se želi postići više, onda nije dovoljan. Naime, za nalaženje rješenja zadatka potrebno je određeno znanje koje se sastoji od teorijskih činjenica koje su u najužoj vezi sa zadatkom. Za jedan način rješavanja potrebne su jedne činjenice, za drugi način neke druge činjenice, za treći treće. Zaključujemo da će za rješavanje zadatka na više načina trebati više teorijskih činjenica i metoda nego za rješavanje na samo jedan način. Time se za samo jedan zadatak aktivira, analizira i primjenjuje veća količina stečenog znanja. Osim toga, znanja se produbljuju i proširuju novim znanjima, a najvažnije je da zadatci s više načina rješavanja povećavaju aktivnost učenika i njihov interes za matematiku ([12], str. 4-5).

U nastavku ćemo detaljnije opisati neke od spomenutih metoda rješavanja problemskih zadataka.

4.3 Metoda pokušaja i promašaja

Znamo da je učenje vlastitim iskustvom i na vlastitim pogreškama najučinkovitije. Naime, pokušavanje je izvrsna strategija u situacijama kad nemamo bolju ideju jer nas osvrt i na propali pokušaj može dovesti do bolje ideje. Stoga je metoda pokušaja i promašaja prva metoda učenja koju primjenjujemo u svom životu.

Primjenom ovakvog načina razmišljanja tijekom rješavanja problemskog zadatka, **zadatak rješavamo naslućivanjem njegova rješenja ili postupka koji vodi rješenju te provjerom**. Ovu metodu bismo mogli ukratko opisati riječima „Pokušaj i vidi što možeš pronaći ili zaključiti."

Prednost ove strategije je što obično ne iziskuje dublje razumijevanje problema i matematičkih koncepata u čijem se kontekstu primjenjuje. Nedostatak ove metode je to što njenom primjenom nismo sigurni je li pogođeno rješenje jedinstveno, koliko postavljeni problem zapravo ima rješenja niti koja je njihova struktura. Nedostatak je i neefikasnost metode jer iscrpljivanje svih mogućnosti nekada nije baš najracionalnije. Naime, pogađanje može potrajati dulje nego li rješavanje zadatka nekom drugom strategijom, iako se može dogoditi da rješenje pogodimo i otprve. Stoga je bolji pristup ako se metodu pokušaja i promašaja **kombinira s logičkim zaključivanjem**.

Metodu pokušaja i promašaja možemo primijeniti i **u slučaju zadataka višestrukog izbora**, tj. u situacijama u kojima je ponuđeno nekoliko mogućih odgovora od kojih je najmanje jedan korektan. Tako se uvrštavanjem konkretnih, pogodno odabranih vrijednosti u zadani izraz eliminiraju neki od ponuđenih odgovora. Iako ova metoda može biti efikasna pri rješavanju npr. ispita državne mature, ona **ne potiče učenike na izgradnju novog matematičkog znanja i razumijevanja**. Naime, čak i ukoliko učenik zaokruži korektan odgovor takvog zadatka, ne možemo biti sigurni je li on ostvario ishod učenja koji se želio provjeriti tim zadatkom. Stoga treba voditi računa u kojem se obrazovnom kontekstu i s kojim ciljem primjenjuju zadatci višestrukog izbora te kako se biraju distraktori (ponuđeni pogrešni odgovori) ([2]).

4.4 Crtanje dijagrama (grafičko-aritmetička metoda)

Prosječan čovjek obično voli čitati knjigu koju, osim teksta, ispunjavaju i slike, odnosno crteži. Ta činjenica je vrlo jasno iskazana i u jednoj sceni knjige *Alisa u Zemlji Čudesa*, čiji je autor engleski književnik i matematičar Lewis Carroll (1832. – 1898.): „Alisi je već dosadilo sjediti kraj sestre na obali i ništa ne raditi. Jedanput-dvaput je provirila u knjigu koju je čitala sestra, ali u njoj nije bilo ni slika ni razgovora. 'Kakva je to knjiga', pomisli Alisa, 'kad u njoj nema ni slika ni razgovora?'" ([19])

Nadalje, znamo da dijagram, odnosno model zornije prikazuje odnose i veze među promatranim objektima od opisa situacije riječima. To **načelo zornosti** („Jedna slika vrijedi tisuću riječi!“) možemo preoblikovati u metodu rješavanja zadatka. Tako dobivamo strategiju kojom zadatak **rješavamo prostorno-vizualnim organiziranjem podataka**, tj. crtanjem prikladnog dijagrama bilo koje vrste (grafa, grafikona i dr.). Ova metoda se u literaturi naziva još i *metoda modela*. Neki od oblika te metode su: prikaz stablom, model površine, Vennov dijagram, grafička metoda rješavanja jednadžbi i grafička metoda gibanja ([2]).

Čak i ako u konačnici problem riješimo na algebarski ili neki drugi način, crtež može pomoći dajući „osjećaj“ za problem i navodeći na ideje ili moguće odgovore. Dapače, neki problemi se mogu riješiti baš grafičkim putem ([24], str. 178).

4.5 Istraživanje i rješavanje jednostavnijeg srodnog problema ili specijalnog slučaja postavljenog problema

Istraživanje i rješavanje jednostavnijeg srodnog problema ili specijalnog slučaja postavljenog problema Ako problem ima velik broj varijabli i prezbunjujuće je sve ih koristiti, može se probati konstruirati i riješiti sličan problem s manjim brojem varijabli. Time se stječe bolji uvid u rješenje postavljenog problema. Potom se korištena metoda rješavanja jednostavnijeg problema može prilagoditi za rješavanje složenieg problema ([24], str. 178).

4.6 Razlaganje problema na potprobleme

Metoda rješavanja može biti i pokušaj dobivanja dijela traženog odgovora, a potom se može dalje rješavati zadatak. Također, preporučuje se raščlanjivanje zadatka na podzadatke pa na kraju rješenja lakših problema kombiniranjem daju konačni rezultat ([24], str. 178). Ipak, ova metoda nije baš uvijek korisna, a to se da naslutiti i iz navedene „rasprave“ dvojice matematičkih velikana.

„Raščlanite svaki zadatak koji rješavate na toliko dijelova koliko je to nužno da vam bude lakše doći do rezultata.“
René Descartes (1596. - 1650.), *Rasprava o metodi* ([16], str. 147)

„Ovo Descartesovo pravilo nije mnogo učinkovito jer umijeće rastavljanja ne podliježe tumačenju. Ako se zadatak nespretno rastavi na dijelove, to može čak i otežati njegovo rješavanje.“
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. - 1716.), *Philosophische Schriften* ([16], str. 147)

4.7 Ispisivanje sustavnih listi

Primjenom ove metode zadatak rješavamo **sustavnim ispisivanjem svih (klasa) mogućih slučajeva**, odnosno pronalaženjem najpogodnije organizacije podataka, tj. sustava. Ova strategija treba prethoditi primjeni svih zakona prebrojavanja (npr. rješavanju zadataka primjenom teorema o uzastopnom prebrojavanju i sl.).

Uz pomoć računala (programiranje, alat za izradu proračunskih tablica i sl.), metoda ispisivanja sustavnih listi je primjenjiva na probleme u čijem se rješavanju koriste algoritmi primjerene složenosti. S druge strane, ako se primjenjuje bez pomoći računala, ova je strategija prikladna samo u situacijama u kojima je broj svih (klasa) slučajeva mali ([2]).

4.8 Metoda uzastopnog približavanja

Metoda uzastopnog približavanja je **vrsta metode sustavnih listi**. Primjenjuje se u problemima u kojima se može uočiti **određena monotonost (rast ili pad) promatranih veličina (podataka)** u sustavnoj listi i, ako je moguće, **zakonitost po kojoj se odvija mijenjanje** izračunate vrijednosti. Uočimo da pritom zaključujemo nepotpunom indukcijom.

Pri sastavljanju i ispunjavanju tablice korisno je procjenjivati vrijednosti kako bismo smanjili broj slučajeva koje treba ispisati. Naime, time dobivamo racionalniju tablicu.

Ova metoda se rimjenjuje u problemima koje je u višim odgojno-obrazovnim ciklusima u pravilu moguće riješiti algebarskim metodama (npr. pomoću jednadžbi, nejednadžbi, sustava jednadžbi ili sustava nejednadžbi). Nadalje, koristi se za rješavanje diofantskih jednadžbi.

Pod nazivom **metoda sukcesivnih aproksimacija** ova metoda se primjenjuje za numeričko (približno, aproksimativno) rješavanje nelinearnih jednadžbi i očituje se u sljedećim oblicima:

- **metoda raspolavljanja**, odnosno **metoda bisekcije** (jedan od najjednostavnijih i najintuitivnijih oblika te metode koji se koristi za određivanje realnih nultočaka neprekidne funkcije)
- **Newtonova metoda** (tzv. **metoda tangente**) za približno računanje nultočke derivabilne funkcije (specijalan slučaj je Heronova metoda za približno računanje drugog korijena pozitivnog realnog broja)
- metoda najbržeg spusta (optimizacija)
- ostale iterativne metode ([2]).

4.9 Metoda uočavanja pravilnosti ili zakonitosti

Znamo da je jedan od opisa matematike taj da je ona **znanost o pravilnostima, tj. zakonitostima**. Stoga je uočavanje pravilnosti, odnosno zakonitosti u (matematičkim) objektima ključna metoda istraživanja u matematici koja je primjenjuje u svim područjima matematike.

Ključna metoda poučavanja i učenja matematike je izgradnja (tj. konstrukcija) učeničkog znanja i razumijevanja matematičkih koncepata i procedura putem učeničkih individualnih ili suradničko-timskih aktivnosti istraživanja i otkrivanja pravilnosti i zakonitosti. To se može ostvariti na dva načina: heurističkom nastavom (vođeno istraživanje i otkrivanje) ili problemskom nastavom (otvorenije i samostalnije učeničko istraživanje i otkrivanje) ([2]).

4.10 Metoda razlikovanja slučajeva

Problem treba riješiti u zadanom skupu pa se skup na prirodan način razlaže na dijelove i problemi se rješavaju u tim dijelovima ([10]). Više o tome se može pročitati u [12], str. 103-104.

4.11 Metoda vraćanja unatrag

Rješavanje problema metodom vraćanja unatrag se temelji na **rekonstrukciji koraka koja se izvodi obrnutim kronološkim redom**, tj. od zadnjeg izvršenog koraka prema prvome. **Analiza započinje postavljanjem cilja**, tj. očekivanog rezultata ili rješenja problema. Ovu metodu popularno zovemo i *undo metoda* ili *rikverc metoda*.

Metoda vraćanja unatrag se primjenjuje u svim područjima (školske) matematike, a posebno u:

- **brojevima i algebri**, osobito u nižim odgojno-obrazovnim ciklusima, gdje ova metoda zamjenjuje algebraizaciju (prevođenje u simbole, jednadžbe ili nejednadžbe) problema zadanog riječima

- **geometriji**, gdje rješavanje zadatka počinje crtanjem kvalitetne skice na kojoj se nalazi pretpostavljeno rješenje (pritom treba imati na umu da pogrešna ili manjkava skica može navesti na stvaranje pogrešnih hipoteza)

- **infinitezimalnom računu**, pri dokazivanju svojstava pojedinih funkcija tzv. $\varepsilon - \delta$ tehnikom ([2]).

4.12 Metode rješavanja logičkih problema

Logički zadatci su odabrani kao dodatni matematički sadržaj koji trebaju poznavati napredniji učenici da bi bili što bolje pripremljeni za županijsko, regionalno i državno natjecanje iz matematike. Nije sasvim jednostavno definirati što je logički zadatak jer za svaki matematički zadatak treba odgovarajuće logičko rasuđivanje. Zadatcima ipak često dajemo poseban naziv kada u njima prepoznamo osobitost koja na to ukazuje. Tako naziv aritmetički zadatci ukazuje na to da se u njima računa s brojevima, naziv algebarski zadatci ukazuje na algebarske izraze i operacije s njima, a naziv geometrijski zadatci na likove i tijela. Međutim, postoje zadatci u kojima nema ni geometrijskih objekata, ni brojeva, ili težište nije na njima, već prevladava logički element. U takvim zadatcima riječ je obično o iskazima koji se odnose na živa bića ili objekte bilo kakve prirode. Svima njima zajedničko je da je svaka izjava ili istinita ili neistinita. Takvi se zadatci po tradiciji nazivaju **logički zadatci**.

Takvi zadatci se mogu naći u knjigama iz zabavne matematike, ponekad kao zasebna cjelina. Rijetko se nalaze u školskim zbirkama iako su očito vrlo pogodni za razvoj logičkog mišljenja. Njihova prednost pred nekim drugim matematičkim zadatcima je s jedne strane u tome što za njihovo rješavanje nije potrebno neko veliko matematičko predznanje (dovoljni su zdrav razum i logičko rasuđivanje), a s druge strane što su tekstovi tih zadataka često pričice. U logičkim zadatcima nalazimo svojstva, osobine i odnose živih bića ili predmeta koje često susrećemo u svakodnevnom životu: poznanstva, zanimanja, obitavališta, ispiti, prometne veze, svjedočenja, rasporedi, vožnje, igre, sportske igre, natjecanja, vaganja, pretakanja i dr. Ovim svojim značajkama logički zadatci mogu doprinijeti, osim razvoju logičkog mišljenja, i razvoju interesa za matematiku.

Postoji nekoliko osnovnih metoda rješavanja logičkih zadataka:

- metoda „zdravog razuma"
- metoda pomoćne pretpostavke
- metoda isključivanja
- metoda tablica
- metoda grafova
- metoda računa izjava

Te metode često dolaze zajedno u primjeni i jedna drugu nadopunjuju tako da se neki od logičkih zadataka mogu riješti na više načina. Posljednje dvije navedene metode nisu predviđene za rješavanje logičkih problema na razini osnovne škole ([12]).

4.13 Metoda promjene fokusa

„Ludost: raditi istu stvar iznova i iznova očekujući drugačije rezultate.“
Albert Einstein (1879. - 1955.) ([26])

Metoda promjene fokusa se zasniva na **proučavanju komplementa promatranog skupa** umjesto samog skupa. Primjenjuje se u situacijama u kojima je komplement jednostavniji od samog skupa jer je skup opisan kao unija skupova, tj. pomoću logičke operacije disjunkcije. Npr. umjesto uspoređivanja zadanih razlomaka, uspoređujemo njihove nadopune do određenog broja. Nadalje, vrlo često se koristi u računu vjerojatnosti (promatranje suprotnog događaja zadanom događaju).

Osnova za ideju koja se krije iza metode promjene fokusa su **De Morganovi zakoni** za skupovne i logičke operacije:
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$
$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$ ([2]).

Napomenimo da smo ovime opisali poseban slučaj primjene metode promjene fokusa. Naime, ne moramo uvijek gledati na komplement, odnosno na nešto što je dijametralno suprotno. Primjena te metode se općenito može odnositi na promjenu gledišta, odnosno načina promatranja na problem, u slučaju da se provedena strategija rješavanja pokazala neuspješnom. Uspjeh rješavanja često ovisi o sposobnosti promjene uobičajenog kuta gledanja na postojeći problem.

4.14 Metoda pomoćnih likova

Važan korak postupka rješavanja planimetrijskog problema je izrada crteža na kojemu se, ako je to moguće, prikažu dane i tražene veličine. Ponekad se može odmah uspostaviti i veza među tim veličinama koja vodi do rješenja problema. Ako to nije neposredno moguće, onda se dio crteža nadopuni novim elementima kako bi se dobio neki **pomoćni lik** koji na temelju poznatih činjenica olakšava rješavanje.

Radnje koje vode do pomoćnih likova su sljedeće: produživanje ili skraćivanje neke dužine, povlačenje dodatnih dužina, paralela ili okomica, tvorba pomoćnih mnogokuta, opisivanje pomoćnih kružnica i sl. Nakon izrade pomoćnog lika obično se na lako uočljiv način otkriva put rješavanja postavljenog problema.

Izradi pomoćnog crteža treba posvetiti primjerenu pozornost. Nepravilan ili netočan crtež može ponekad odvesti na krivi put i dovesti do netočnih zaključaka. To se često događa na matematičkim natjecanjima. Razlog može biti kriva predodžba o ulozi crteža ili pomanjkanje vremena. Šteta je kad se tako upropasti dobra zamisao i ne postigne cilj.

Gubitak dragocjenog vremena zna rješavaču stvoriti dodatnu nervozu i pojačati psihološki pritisak pri rješavanju preostalih problema.

Važno je znati i zapamtiti da, iako pomoćni crteža zahtijeva preciznost u izradi, ako je dobar i točan, crtež je „pola" rješenja problema. Međutim, treba znati i to da nije crtež temelj za zaključke u postupku rješavanja, već logička veza. Crtež je samo zorno sredstvo. Stoga rješenje problema nije moguće zamijeniti nikakvim pa ni vrlo točnim crtežom ([12], str. 51).

4.15 Algebarska metoda (Descartesova metoda)

Algebarska metoda se zasniva na **prevođenju problema zadanog riječima**, odnosno nealgebarskih problema, **na algebarski jezik** (jezik simbola, jednadžbi i nejednadžbi). Problem koji je preveden na jezik algebarskih simbola potom se **rješava algebarskim metodama**, a dobiveno se **rješenje interpretira u izvornom kontekstu**. Ova se metoda naziva još i *Descartesova metoda*, u čast Renéa Descartesa, „oca" koordinatne, tj. analitičke geometrije.

Algebarska metoda se često primjenjuje u školskoj matematici, i to:

- pri rješavanju (problemskih) zadataka zadanih riječima koji se svode na linearnu, kvadratnu, racionalnu, eksponencijalnu, logaritamsku ili trigonometrijsku **jednadžbu ili nejednadžbu**, odnosno **sustav** takvih jednadžbi i/ili nejednadžbi

- pri rješavanju (problemskih) zadataka zadanih riječima koji se **svode na nizove i/ili redove brojeva**

- pri rješavanju (problemskih) zadataka zadanih riječima koji se **svode na problem određivanja toka ili (ekstremnih ili graničnih) vrijednosti funkcije metodama infinitezimalnog računa**

- **u analitičkoj geometriji**, smještanjem geometrijskih objekata u prikladni koordinatni sustav u ravnini ili u prostoru ([2]).

Descartesova metoda u rješavanju zadataka riječima

Područje primjene Descartesove metode u nastavi matematike tradicionalno je i rješavanje zadataka zadanih u izvanmatematičkom kontekstu tako da se matematičkim modeliranjem prevode u jednadžbe i/ili nejednadžbe ([2]).

Pólyini koraci u primjeni Descartesove metode u rješavanju zadataka riječima

1. Razumijevanje problema Kako bi se učitelj uvjerio da su učenici razumjeli tekst zadatka, najprije jedan od učenika treba zadatak pročitati naglas, a zatim ga nekoliko učenika treba u cijelosti i po dijelovima prepričati svojim riječima.
Učenici su razumjeli tekst zadatka ako znaju odgovoriti na ova pitanja:

- Što se u zadatku traži?
- Što je u zadatku zadano, tj. poznato?
- Što je u zadatku nepoznato?
- Koje su veze zadanog i traženog, tj. poznatog i nepoznatog u zadatku?

2. Osmišljavanje plana rješavanja problema Tekst zadatka treba prevesti u jezik matematičkih (algebarskih) simbola:

- svaku od nepoznatih veličina treba označiti pogodnim simbolom (najčešće slovom), i to tako da simbol sugerira što se njime označava (nepoznanice ne moraju uvijek biti označene slovom x, y i sl.)
- svaku zadanu vezu poznatih i nepoznatih veličina treba prevesti u jednadžbu, odnosno nejednadžbu koristeći simbole za nepoznate i brojeve za poznate veličine.

Najčešće je ovo najsloženiji korak u rješavanju zadatka. U njegovom provođenju učenici se mogu osloniti na prije naučene strategije (heuristike) rješavanja problema, kao što su npr. crtanje dijagrama (grafička metoda), promjena fokusa, vraćanje unatrag i dr.

Prije učenja primjene algebarske metode, učenici trebaju razviti vještinu rješavanja njima primjerenih problema drugim, jednostavnijim metodama, npr. metodom pokušaja i promašaja, grafičkom metodom, metodom sustavne liste, metodom uzastopnog približavanja, metodom vraćanja unatrag i sl.

3. Provođenje osmišljenog plana Postavljenu jednadžbu, nejednadžbu ili sustav jednadžbi i/ili nejednadžbi potrebno je riješiti prikladnom efikasnom metodom, primjerenom učenicima pojedine dobi.

4. Osvrt na rješenje i metodu rješavanja Dobivena rješenja potrebno je:

- **provjeriti uvrštavanjem** u postavljenu jednadžbu, nejednadžbu ili sustav
- **interpretirati u izvornom kontekstu**, tj. u kontekstu postavljenog zadatka, što može rezultirati odbacivanjem nekih rješenja postavljene jednadžbe, nejednadžbe

ili sustava (npr. onih s negativnim predznakom), odnosno njihovom prilagodbom, tj. transformiranjem (npr. zaokruživanjem i sl.).

Učenike treba navikavati na:

- zapisivanje rješenja u obliku potpune rečenice u izvornom kontekstu
- pisano obrazlaganje, tj. argumentiranje odabira primijenjenih postupaka ([2]).

Descartesova metoda u diferencijalnom računu

Često se primjenjuje pri rješavanju optimizacijskih problema, tj. problema određivanja ekstrema, tj. minimuma i/ili maksimuma u nekoj situaciji. Osnovna ideja je **situaciju korektno modelirati diferencijabilnom funkcijom**, uz precizno definiranje njezine domene. Pritom se pri određivanju ekstrema u školskoj matematici (završni razred srednje škole) koristimo samo svojstvima prve derivacije, tj. Fermatovim teoremom o nužnom uvjetu za lokalni ekstrem i teoremom o dovoljnom uvjetu za lokalni ekstrem ([2]).

Descartesova metoda u geometriji

„Slična predočenja o tim stvarima vrlo su korisna budući da za nas ništa nije očiglednije od likova jer njih možemo osjetiti i vidjeti.“
René Descartes (1596. - 1650.) o geometrijskom predočenju procesa rješavanja, *Pravila rukovođenja umom* ([16], str. 173)

Osnovna ideja ove metode je **geometrijske objekte pogodno smjestiti u prikladni koordinatni sustav** u ravnini ili u prostoru, a zatim primijeniti analitičku geometriju. Stoga se ova metoda naziva i *koordinatna metoda*. Pitanje je kako odabrati prikladni koordinatni sustav, tako da račun s koordinatama bude što jednostavniji. Obično postupamo ovako:

- za **ishodište koordinatnog sustava** odaberemo neku istaknutu točku promatranog objekta - npr. vrh, polovište stranice, težište, ortocentar i sl. trokuta, vrh, polovište stranice, težište ili sjecište dijagonala četverokuta, središte krivulje, centar simetrije geometrijskog objekta, vrh ili sjecište prostornih dijagonala kvadra itd.
- za barem jednu **koordinatnu os** odaberemo pravac kojem pripada neki istaknuti element promatranog geometrijskog objekta - npr. stranica trokuta ili četverokuta, težišnica ili visina trokuta, visina trapeza, dijagonala četverokuta, simetrala stranice mnogokuta, os simetrije geometrijskog objekta, brid prizme ili piramide itd. ([2]).

4.16 Metoda rekurzije

Primjena **metode rekurzije** je vrlo djelotvorna u području uređenih nizova brojeva. Bit ove metode sastoji se od sljedećega:
Neka je (a_n) potpuno uređeni niz. Njegovi članovi mogu se određivati jedan za drugim ako su ispunjena ova dva uvjeta:

1) Poznat je prvi član niza a_1.

2) Postoji relacija koja povezuje opći član niza a_n s prethodnim članovima.

Relacija se naziva **rekurzivna relacija**, a za članove kažemo da ih određujemo rekurzivno ([12], str. 147).

Rekurzija označava postupak kojim se s pomoću neke funkcije (rekurzivne funkcije) ili izraza (rekurzivne formule) opetovanim postupkom dolazi do jednostavnijeg oblika matematičkih izraza ili rješenja neke jednadžbe ([31]). Riječ ***rekurzija*** dolazi od kasnolatinske riječi *recursio*, što znači 'vraćanje' ([31]), odnosno od latinske riječi *recurrere*, što znači 'vratiti se', 'trčati natrag', 'ponovo', a ta je riječ nastala od *recurrens* čije je značenje 'koji se vraća' ([32]).

Poglavlje 5

Rješavanje geometrijskih problema

Svaki od navedenih zadataka ima određenu težinu. Ako se uoči da je problem pretežak za učenike, preporučljivo je da ga nastavnik ili učenici eksperimentiranjem variraju u lakši (npr. specijalizacijom). Ako je zadatak lagan, onda ga se može otežati (npr. generalizacijom). Također, zadatak je moguće varirati i analogijom. Svaki od tako dobivenih zadataka učenici mogu pokušati riješiti primjenom iste ili slične metode rješavanja. Za neke od navedenih zadataka variranje je učinjeno u jednom, a za neke u više smjerova.

U zadacima u kojima je to bilo pogodno, provedeno je eksperimentiranje uz pomoć računala i softvera dinamične geometrije. To je suvremenoj nastavi matematike uobičajena metoda „otkrivanja". Provodi se prije samog formalnog rješavanja problema i pomaže pri naslućivanju broja rješenja ili strukture rješenja.

5.1 Štapići, trokuti i kvadrati

Zadatak:
Na satu geometrije učenici su od štapića jednakih duljina slagali trokute i kvadrate. Upotrijebili su 300 štapića i složili 92 lika. Koliko je među njima bilo trokuta, a koliko kvadrata ([12], str. 8)?

Rješenje:
Rasuđivanje provodimo na sljedeći način. Budući da znamo da su učenici složili 92 lika, razmatramo krajnje slučajeve. Najveći mogući broj trokuta je 92, a u tom slučaju nema kvadrata. S druge strane, najveći mogući broj kvadrata je 92, a tada nema trokuta. U prvom slučaju je ukupan broj stranica jednak 276, a u drugom 368. Budući da su učenici upotrijebili 300 štapića, zaključujemo da je ukupan broj stranica likova u zadatku jednak 300. Stoga zaključujemo da su učenici složili i trokute i kvadrate, a ne samo jedne od tih likova.

Budući da nam krajnji slučajevi ne odgovaraju, dobra ideja je razmotriti srednji slučaj u kojem imamo 46 trokuta i 46 kvadrata. U tom slučaju je ukupan broj stranica 322, a to je previše. Budući da broj kvadrata više doprinosi ukupnom broju stranica, treba smanjivati broj kvadrata, a povećavati broj trokuta. Time ćemo postići postupno smanjivanje ukupnog broja stranica te se uzastopno i kontrolirano približavati traženom ukupnom broju stranica.

Dakle, započinjemo približavanje rješenju povećavanjem broja trokuta, recimo za po 5, tj. s 46 na 50, pa na 55, pa na 60, pa na 65, pa na 70. Istovremeno smanjujemo broj kvadrata s 46 na 42, pa na 37, pa na 32, pa na 27, pa na 22. Pritom kontroliramo je li ukupan broj likova 92. Ukupan broj stranica likova u tim slučajevima je 318, 313, 308, 303, 298.

Na temelju posljednja dva broja ukupnog broja stranica zaključujemo da je traženi broj trokuta između 65 i 70, odnosno traženi broj kvadrata između 22 i 27. Stoga treba nastaviti s s nešto „finijim“ približavanjem rješenju smanjujući broj s trokuta, tj. promatrajući 69, pa 68, pa 68, odnosno 66 trokuta. U tablici 5.1 je zorno prikazan tijek rješavanja te jasno vidi naredni pokušaji vode do rješenja.

broj trokuta	broj kvadrata	ukupan broj stranica
92	0	276
0	92	368
46	46	322
50	42	318
55	37	313
60	32	308
65	27	303
70	22	298
69	23	299
68	**24**	**300**
67	25	301

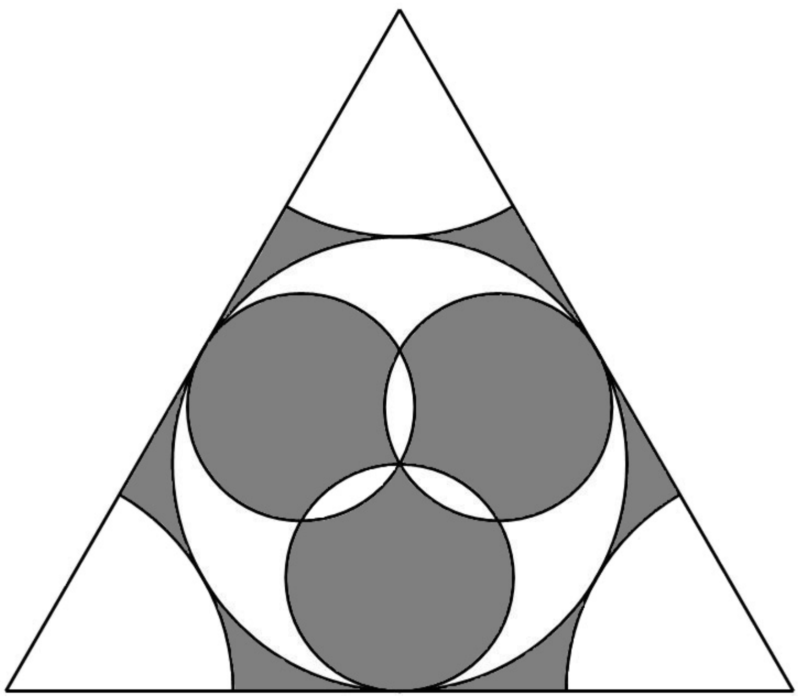
Tablica 5.1: Tablični prikaz metode uzastopnih približavanja

Na temelju toga zaključujemo da su od 300 štapića učenici složili 68 trokuta i 24 kvadrata.

Uočimo da smo zadatak riješili **metodom uzastopnog približavanja**. Napomenimo da smo ovaj zadatak mogli riješiti i **algebarskom metodom** tako da smo postavili sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama, a potom taj sustav riješili algebarskom manipulacijom jednadžbi (npr. **metodom supstitucije**, **metodom supstitucije**, **metodom komparacije** ili **Gaussovom metodom eliminacije**). Ipak, te metode su primjerene samo učenicima viših razreda osnovne škole, odnosno učenicima srednje škole. Primjena **metode crtanja dijagrama** bi se možda pokazala nepraktičnom zbog velikog broja danih štapića od kojih su složeni trokuti i kvadrati.

5.2 Površine u ornamentu

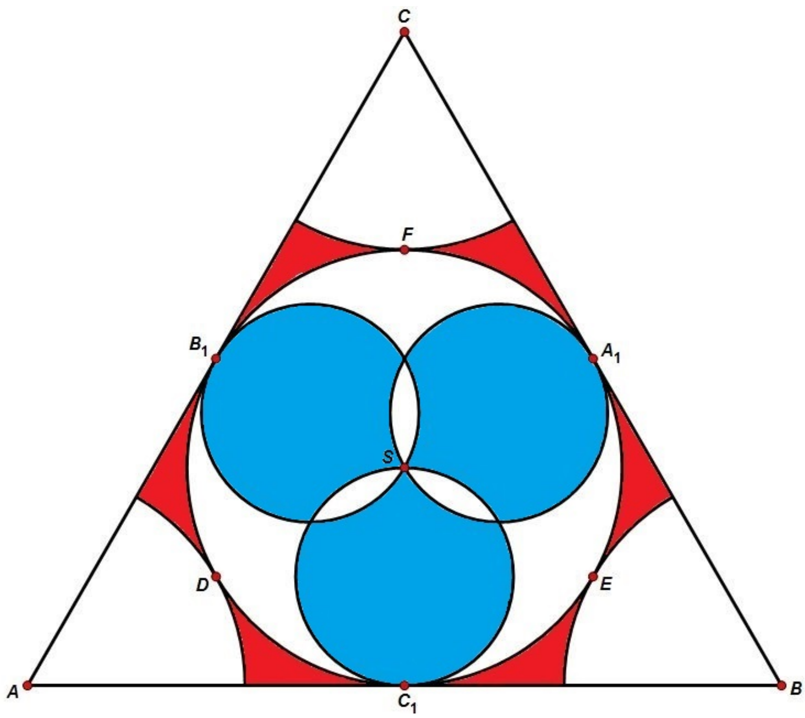
Zadatak:
Slika 5.1 prikazuje ornament oblika jednakostraničnog trokuta stranice duljine a. Odredite površinu osjenčanog i površinu neosjenčanog dijela ornamenta ([3]).



Slika 5.1: Osjenčane površine u ornamentu

Rješenje:
Uočavamo da ne znamo odrediti površinu nekih osjenčanih i nekih neosjenčanih dijelova ornamenta. Stoga naslućujemo da ćemo površine traženih dijelova izračunati oduzimanjem, odnosno zbrajanjem površina dijelova čiju površinu možemo izračunati. Dakle, primjenjujemo **metodu promjene fokusa**.

Vrijedi $a = |AB| = |BC| = |AC|$. Uvodimo oznake kao na slici 5.2
A_1 - polovište dužine $\overline{BC}$,
B_1 - polovište dužine $\overline{AC}$,
C_1 - polovište dužine $\overline{AB}$.



Slika 5.2

Dužine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ su težišnice trokuta $\triangle ABC$. One se sijeku u točki S, tj. u težištu trokuta $\triangle ABC$.

Znamo da težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru $2 : 1$ (gledajući od vrha trokuta prema polovištu nasuprotne stranice). Stoga je $|DA_1| = 2|AD|$, $|EB_1| = 2|BE|$ i $|FC_1| = 2|FC|$. Očito je da vrijedi $|SD| = |SA_1|$, $|SE| = |SB_1|$ i $|SF| = |SC_1|$. Iz toga svega možemo zaključiti da kružnica upisana trokutu $\triangle ABC$ (sa središtem u točki S) ima polumjer jednak polumjerima kružnih isječaka sa središtima u vrhovima A, B i C.

Budući da je trokut $\triangle ABC$ jednakostraničan, pripadni središnji kutovi tih kružnih isječaka u vrhovima A, B i C imaju mjeru $60°$.

Stoga možemo zaključiti da ta tri isječka čine polukrug jednakog radijusa, tj. zbroj njihovih površina je jednak polovini površine kruga upisanog trokutu $\triangle ABC$.

Budući da je trokut $\triangle ABC$ jednakostraničan, njegova površina iznosi $P_\triangle = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

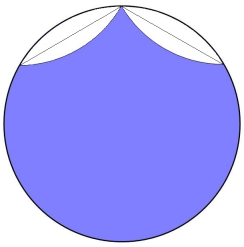
Površina kružnice upisane trokutu $\triangle ABC$ je jednaka

$$P_U = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \pi = \frac{3a^2}{36}\pi = \frac{a^2\pi}{12}.$$

Računamo zbroj površina 6 sukladnih dijelova obojenih crvenom bojom:

$$P_C = ab = P_\triangle - 1,5 \cdot P_U = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2\pi}{12} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\pi}{8} = \frac{2a^2\sqrt{3} - a^2\pi}{8}$$
$$= \frac{2a^2\sqrt{3} - a^2\pi}{8} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{8}a^2.$$

Neka je P_{P_1} površina manjeg kruga (obojenog plavom bojom), ali bez dva neosjenčana dijela, tj. „listića“. (slika 5.3)



Slika 5.3

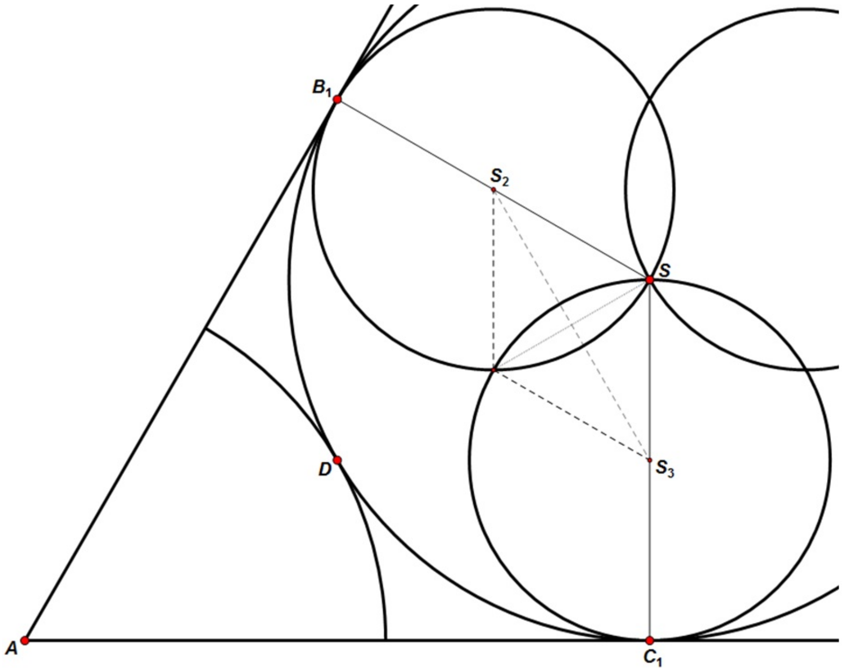
Sada iz slike 5.4 uočavamo da je $|\angle C_1AB_1| = 60°$ i $|\angle SC_1A| = |\angle SB_1A| = 90°$. Budući da je zbroj veličina unutarnjih kutova u četverokutu jednak $360°$, za četverokut AC_1SB_1 vrijedi:

$$|\angle B_1SC_1| = 360° - |\angle C_1AB_1| - |\angle SC_1A| - |\angle SB_1A| = 360° - 60° - 90° - 90° = 120°.$$

Budući da vrijedi $|SS_2| = |SS_3|$, zaključujemo da je trokut $\triangle SS_2S_3$ jednakokračan. Iz toga slijedi $|\angle SS_2S_3| = |\angle SS_3S_2|$.

Znamo da vrijedi $|\angle SS_2S_3| + |\angle SS_3S_2| + |\angle S_2SS_3| = 180°$. Stoga vrijedi:

$$2|\angle SS_2S_3| = 180° - |\angle S_2SS_3| = 180° - 120° = 60°.$$



Slika 5.4

Iz toga slijedi $|\angle SS_2S_3| = |\angle SS_3S_2| = 30°$. Stoga zaključujemo da kružnim odsječcima odgovara središnji kut od $60°$.

Računamo površinu jednog kružnog odsječka.

Uočimo da je duljina polumjera malog kruga jednaka polovini duljine polumjera trokutu upisane kružnice, tj. duljina polumjera mu je jednaka $\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Površina jednog kružnog odsječka je jednaka razlici površine kružnog isječka (sa središnjim kutom čija je mjera $60°$) i površine jednakostraničnog trokuta $\left(\text{čija je stranica duljine } \frac{a\sqrt{3}}{12}\right)$:

$$P_{\oslash} = P_I - P_{\triangledown} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 \cdot \pi \cdot 60}{360} - \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{3a^2\pi}{144}}{6} - \frac{\frac{3\sqrt{3}a^2}{144}}{4} = \frac{a^2\pi}{288} - \frac{3\sqrt{3}a^2}{576}$$
$$= \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{576}a^2.$$

$$P_{P_1} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 \pi - 4P_{\oslash} = \frac{3a^2\pi}{144} - 4 \cdot \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{576}a^2 = \frac{3\pi}{144}a^2 - \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{144}a^2 = \frac{\pi + 3\sqrt{3}}{144}a^2$$

Ukupna osjenčana površina plave boje unutar kruga upisanog trokutu iznosi:

$$P_P = 3P_{P_1} = 3 \cdot \frac{\pi + 3\sqrt{3}}{144}a^2 = \frac{\pi + 3\sqrt{3}}{48}a^2.$$

Određujemo ukupnu površinu osjenčanog dijela ornamenta:

$$P_O = P_C + P_P = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{8}a^2 + \frac{3\sqrt{3} + \pi}{48}a^2 = \frac{15\sqrt{3} - 5\pi}{48}a^2.$$

Stoga je ukupna površina neosjenčanog dijela ornamenta jednaka razlici ukupne površine ornamenta (tj. površine trokuta $\triangle ABC$) i površine osjenčanog dijela ornamenta:

$$P_N = P_{\triangle} - P_O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{15\sqrt{3} - 5\pi}{48}a^2 = \frac{5\pi - 3\sqrt{3}}{48}a^2.$$

5.3 Dirichlet u konveksnom mnogokutu

Zadatak:
U konveksnom mnogokutu s 1998 stranica duljine stranica su prirodni brojevi. Opseg mnogokuta je 1 997 000. Dokaži da barem dvije stranice tog mnogokuta imaju jednake duljine ([38]).

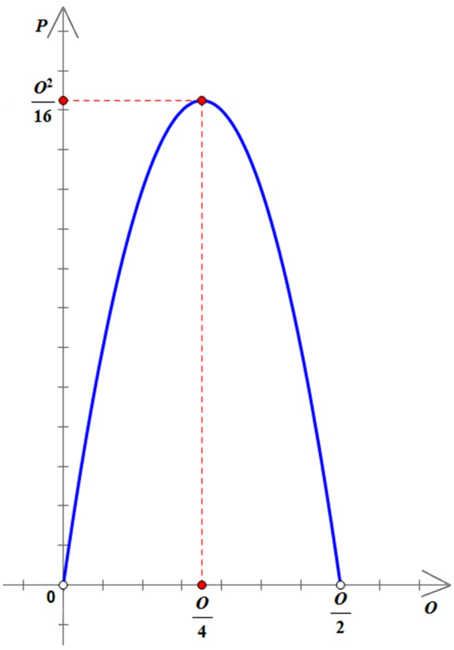
Rješenje:
Pretpostavimo da su duljine promatranog mnogokuta cjelobrojne i da su te duljine međusobno različite. Budući da je riječ o 1998-terokutu, najmanji opseg će imati ako su mu duljine stranica 1, 2, 3, ..., 1997 i 1998. Stoga je najmanji mogući opseg takvog mnogokuta jednak $1 + 2 + 3 + ... + 1997 + 1998$. Uočavamo da je to zapravo zbroj prvih 1998 prirodnih brojeva. Znamo da je zbroj prvih n prirodnih brojeva $(1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n)$ jednak $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (prema tvrdnji tzv. Gaussove dosjetke).

Stoga je najmanji mogući opseg mnogokut koji zadovoljava pretpostavljena svojstva jednak $1 + 2 + 3 + ... + 1997 + 1998 = \frac{1998 \cdot (1998 + 1)}{2} = 1997001$. Opseg zadanog mnogokuta je jednak 1 997 000, a to je manje od 1 997 001, odnosno manje od najmanjeg mogućeg opsega kada su stranice međusobno različitih duljina. Stoga prema **Dirichletovom načelu** zaključujemo da barem dvije stranice zadanog mnogokuta moraju imati jednake duljine.

5.4 Pravokutnik zadanog opsega, a najveće površine

Zadatak:
U skupu svih pravokutnika zadanog (jednakog) opsega O, odredite onaj kojemu je površina najveća.

Rješenje:
1. način rješavanja:
Trebamo odrediti duljine stranica pravokutnika zadanog opsega tako da njegova površina bude najveća moguća. U drugom razredu srednje škole ovakav problem se obično rješava razmatranjem maksimuma kvadratne funkcije. Dakle, promotrimo najprije taj postupak u kojem **modeliramo kvadratnom funkcijom**.



Slika 5.5: Graf funkcije P

Neka su a i b duljine susjednih stranica pravokutnika, a O = const. njegov opseg. Budući da je u tom slučaju opseg pravokutnika jednak $O = 2a + 2b$, duljina druge stranice pravokutnika je $b = \frac{O}{2} - a$. Stoga za površinu P pravokutnika vrijedi

$$\begin{aligned} P(a) = ab = a\left(\frac{O}{2} - a\right) &= -a^2 + \frac{O}{2}a = -a^2 + \frac{O}{2}a - \frac{O^2}{16} + \frac{O^2}{16} \\ &= -\left(a^2 - 2 \cdot \frac{O}{4} \cdot a + \frac{O^2}{16}\right) + \frac{O^2}{16} = -\left(a - \frac{O}{4}\right)^2 + \frac{O^2}{16} = \frac{O^2}{16} - \left(a - \frac{O}{4}\right)^2 \to \max. \end{aligned}$$

Definiramo kvadratnu funkciju P, pri čemu je $P : \left\langle 0, \frac{O}{2} \right\rangle \to \mathbb{R}$, $P(a) = a\left(\frac{O}{2} - a\right)$, tj. $P(a) = \frac{O^2}{16} - \left(a - \frac{O}{4}\right)^2$. Dakle, tražimo maksimum te funkcije kojom smo modelirali površinu.

Očito je da funkcija P postiže najveću vrijednost kada je $\left(a - \frac{O}{4}\right)^2 = 0$, odnosno kada je duljina jedne stranice pravokutnika jednaka $a_{\max} = \frac{O}{4}$ (slika 5.5). Tada je i duljina druge stranice pravokutnika jednaka $b_{\max} = \frac{O}{4}$. Time smo dokazali da između svih pravokutnika zadanog opsega O najveću površinu ima kvadrat, a tada površina iznosi

$$P_{\max} = P(a_{\max}) = \frac{O^2}{16}.$$

2. način rješavanja:
Primjenom **metode razlikovanja slučajeva** ovaj zadatak mogu riješiti i učenici osmog razreda osnovne škole. Neka su a i b duljine stranica pravokutnika, a O opseg pravokutnika. Tada vrijedi $2a + 2b = O$, tj. $a + b = \frac{O}{2}$. Dakle, duljine stranica primaju vrijednosti iz otvorenog intervala $\left\langle 0, \frac{O}{2} \right\rangle$. Razmatramo kolika može biti duljina stranice a. Razlikujemo tri slučaja: $0 < a < \frac{O}{4}, a = \frac{O}{4}, \frac{O}{4} < a < \frac{O}{2}$.

1) Ako je $O < a < \frac{O}{4}$, onda postoji pozitivan broj x takav da je $a = \frac{O}{4} - x$ i $b = \frac{O}{4} + x$ $\left(\text{jer mora vrijediti } a + b = \frac{O}{2}\right)$. Tada je površina P pravokutnika

$$P = ab = \left(\frac{O}{4} - x\right)\left(\frac{O}{4} + x\right) = \frac{O^2}{16} - x^2.$$

2) Ako je $a = \frac{O}{4}$, onda je i $b = \frac{O}{4}$ (jer mora vrijediti $a + b = \frac{O}{2}$). Stoga je površina pravokutnika $P = ab = \frac{O}{4} \cdot \frac{O}{4} = \frac{O^2}{16}$.

3) Ako je $\frac{O}{4} < a < \frac{O}{2}$, onda postoji pozitivan broj x takav da je $a = \frac{O}{4} + x$ i $b = \frac{O}{4} - x$. Tada je površina pravokutnika $P = ab = \left(\frac{O}{4} + x\right)\left(\frac{O}{4} - x\right) = \frac{O^2}{16} - x^2$.

Budući da je $x > 0$, vrijedi
$$\frac{O^2}{16} > \frac{O^2}{16} - x^2.$$

Iz toga zaključujemo da je najveća površina u slučaju 2). Dakle, pravokutnik zadanog opsega O s najvećom mogućom površinom P ima duljine stranica $a = \frac{O}{4}$ i $b = \frac{O}{4}$, tj. taj pravokutnik je ujedno i kvadrat.

Napomena:
Ovaj zadatak je jedan od najjednostavnijih izoperimetričkih ([32]), odnosno **izoperimetrijskih** ([1]) **problema**. To su klasični zadatci u kojima se određuje onaj lik sa zadanim opsegom koji ima najveću površinu ([32]). Naime, *izoperimetrija* označava jednakost opsega geometrijskih likova u ravnini ([32]). Ta je riječ nastala spajanjem predmetka u složenicama *izo-* (grč. *ísos*: 'jednak'), koji označava jednakost (isto-, jednako-, jedno-) ili sličnost po obliku ili namjeni drugog dijela složenice ([32]), i riječi *perimetar* (grč. *περίμετρος*), a što znači 'opseg' ([31]).

5.5 Pravokutnik zadane površine, a najmanjeg opsega

Variranjem prethodnog zadatka dobivamo sljedeći problem koji ćemo riješiti drugačijom metodom.

Zadatak:
U skupu svih pravokutnika zadane (jednake) površine P, odredite onaj kojemu je opseg najmanji.

Rješenje:
Trebamo odrediti duljine stranica pravokutnika zadane površine tako da njegov opseg bude najmanji moguć. U četvrtom razredu srednje škole ovakav problem se obično rješava primjenom **Descartesove metode u diferencijalnom računu**. Dakle, promotrimo najprije taj postupak u kojem modeliramo diferencijabilnom funkcijom.

Neka su a i b duljine susjednih stranica pravokutnika, a $P = \text{const.}$ njegova površina. Budući da je u tom slučaju površina pravokutnika jednaka $P = a \cdot b$, duljina druge stranice pravokutika je $b = \dfrac{P}{a}$. Stoga za opseg O pravokutnika vrijedi

$$O(a) = 2(a + b) = 2\left(a + \frac{P}{a}\right) \to \min.$$

Definiramo funkciju O, pri čemu je $O : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $O(a) = 2\left(a + \dfrac{P}{a}\right)$. Domenu funkcije O smo smisleno odredili iz uvjeta da je duljina stranice a pozitivan realan broj, a pritom duljina stranice a nije omeđena veličinom površine P. Dakle, tražimo minimum te racionalne funkcije kojom smo modelirali opseg.

Ta je funkcija diferencijabilna na cijeloj svojoj domeni i vrijedi $O'(a) = 2\left(1 - \dfrac{P}{a^2}\right)$, $a \in \langle 0, +\infty\rangle$. Odredimo stacionarne točke funkcije O. One su rješenja jednadžbe $O'(a) = 2\left(1 - \dfrac{P}{a^2}\right) = 0$ u domeni funkcije O.

$$2\left(1 - \frac{P}{a^2}\right) = 0 / : 2 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{P}{a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{P}{a^2} = 1 / \cdot a^2, (a \neq 0) \Leftrightarrow P = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{P}, (a > 0)$$

Iz $P = a \cdot b$ i $P = a^2$ slijedi $a \cdot b = a^2$, odnosno $a = b$. Stoga vrijedi $a = b = \sqrt{P}$. Dakle, zaključujemo da u domeni funkcije O postoji samo jedna stacionarna točka funkcije O. Ta nultočka njezine prve derivacije je točka $a = \sqrt{P}$.

Promatramo na kojim intervalima vrijedi $O'(a) > 0$, a na kojima $O'(a) < 0$. Rješavamo nejednadžbu $O'(a) > 0$:

$$\begin{aligned} O'(a) > 0 &\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{P}{a^2}\right) > 0 / : 2 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{P}{a^2}\right) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{P}{a^2} / \cdot a^2, (a^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow a^2 > P / \sqrt{\ } \text{ (funkcija drugog korijena je strogo rastuća)} \Rightarrow a > \sqrt{P} \end{aligned}$$

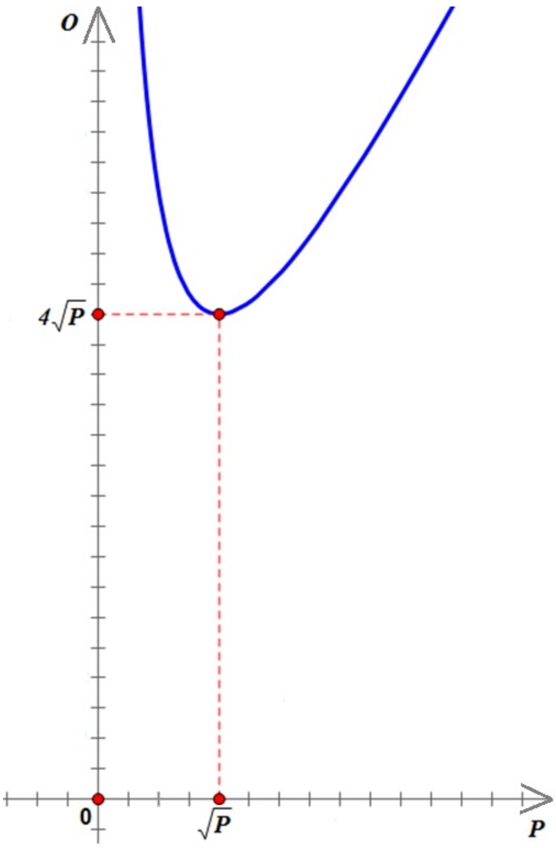
Potom rješavamo nejednadžbu $O'(a) < 0$:

$$\begin{aligned} O'(a) < 0 &\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{P}{a^2}\right) < 0 / : 2 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{P}{a^2}\right) < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{P}{a^2} / \cdot a^2, (a^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow a^2 < P / \sqrt{\ } \text{ (funkcija drugog korijena je strogo rastuća)} \Rightarrow a < \sqrt{P} \end{aligned}$$

Stoga vrijedi

$$O'(a) \begin{cases} < 0, & a \in \left\langle 0, \sqrt{P}\right\rangle, \\ = 0, & a = \sqrt{P}, \\ > 0, & a \in \left\langle \sqrt{P}, +\infty\right\rangle. \end{cases}$$

Dakle, funkcija O u točki $a = \sqrt{P}$ postiže jedinstveni lokalni minimum na svojoj domeni. Stoga funkcija O postiže najmanju vrijednost kada je $a = b = \sqrt{P}$, odnosno kada je duljina jedne stranice pravokutnika jednaka $a_{\min} = \sqrt{P}$ (slika 5.6). Tada je i duljina druge stranice pravokutnika jednaka $b_{\min} = \sqrt{P}$.



Slika 5.6: Graf funkcije O

To znači da od svih pravokutnika zadane površine P najmanji opseg ima kvadrat čije stranice imaju duljinu $\sqrt{P}$, a tada opseg iznosi

$$O_{\min} = O(a_{\min}) = O\left(\sqrt{P}\right) = 2(a_{\min} + b_{\min}) = 2\left(\sqrt{P} + \sqrt{P}\right) = 4\sqrt{P}.$$

5.6 Kružnice oko vrhova trokuta koje se dodiruju

Zadatak:
Oko vrhova A, B i C danog trokuta $\triangle ABC$ opišimo kružnice koje se međusobno dodiruju izvana ([12], str. 50).

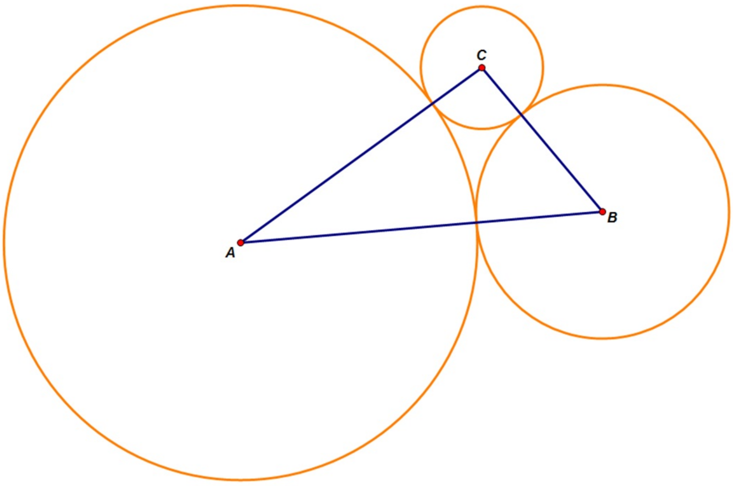
Rješenje:
Analiza:
U ovom trenutku nećemo raspravljati postoji li geometrijska metoda rješavanja ovog konstruktivnog zadatka, već odmah primjenjujemo **algebarsku metodu**. Ideja je da se nepoznata veličina izrazi pomoću zadanih veličina i da se pomoću dobivenog izraza provede konstrukcija.

Dakle, dan je trokut $\triangle ABC$ čije stranice redom označavamo s a, b i c. Trebamo konstruirati kružnice k_A, k_B i k_C sa središtima u vrhovima A, B i C trokuta $\triangle ABC$. Stoga trebamo odrediti duljine polumjera r_A, r_B i r_C tih kružnica.
Očito je da će dirališta tih kružnica biti točke stranica trokuta $\triangle ABC$.
Budući da se kružnice k_A i k_B dodiruju izvana, vrijedi $r_A + r_B = c$.
Budući da se kružnice k_B i k_C dodiruju izvana, vrijedi $r_B + r_C = a$.
Budući da se kružnice k_A i k_C dodiruju izvana, vrijedi $r_A + r_C = b$.

Time smo konstruktivni zadatak sveli na rješavanje sustava triju jednadžbi s trima nepoznanicama r_A, r_B i r_C: $\begin{cases} r_A + r_B = c \\ r_B + r_C = a \\ r_A + r_C = b \end{cases}$.
Dobivamo da je rješenje tog sustava $r_A = \frac{1}{2}(b + c - a)$, $r_B = \frac{1}{2}(a + c - b)$ i
$r_C = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

Konstrukcija:
Najprije konstruiramo jedan od polumjera traženih kružnica r_A, r_B i r_C. U slučaju da, npr. prvo konstruiramo polumjer r_A, potom oko vrhova A, B i C trokuta $\triangle ABC$ redom opisujemo kružnice polumjera r_A, $c - r_A$ i $b - r_A$ kao što je prikazano na slici 5.7, odnosno u crtežu *Kružnice oko vrhova trokuta.gsp*.

Dokaz. Iz analize i opisa konstrukcije je očito da se kružnice s dobivenim polumjerima dodiruju izvana. □



Slika 5.7: Kružnice oko vrhova trokuta koje se dodiruju izvana

Rasprava:
Zbog nejednakosti trokuta uvijek vrijedi $r_A > 0$, $r_B > 0$ i $r_C > 0$ pa uvijek možemo konstruirati tražene kružnice. Stoga je zadatak uvijek rješiv i uvijek ima jedinstveno rješenje.

5.7 Konstrukcija kvadrata kojemu je zadan zbroj $a + d$

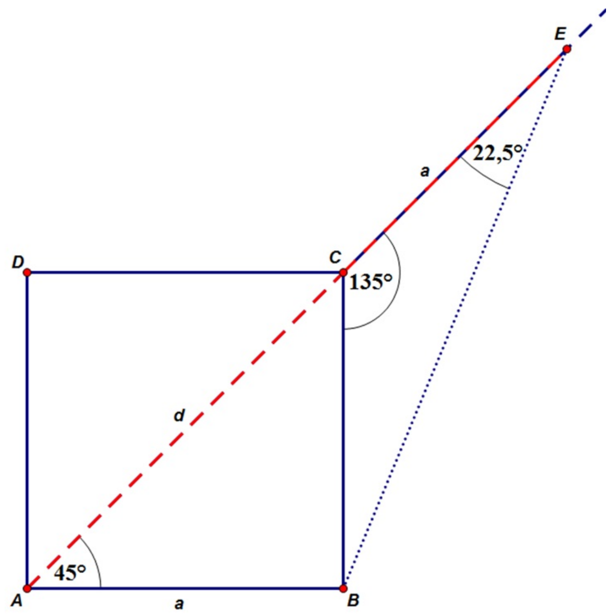
Zadatak:
Konstruirajte kvadrat kojemu je zadan zbroj $a + d$ duljine stranice a i duljine dijagonale d.

Rješenje:
Analiza:
Nacrtajmo skicu kvadrata $ABCD$. (Vidi sliku 5.8.) Duljinu njegovih stranica označimo s a, a duljinu njegove dijagonale s d. Taj crtež nadopunjujemo tako da se na njemu pojavi pomoćna figura čiji je jedan element dužina zadane duljine $a + d$. Produžujemo dijagonalu $\overline{AC}$ (čija je duljina d) za dužinu $\overline{CE}$ duljine a. Uočimo da je duljina dužine $\overline{AE}$ jednaka zadanoj duljini $a + d$. Budući da je $|BC| = |CE| = a$, zaključujemo da je trokut $\triangle BEC$ jednakokračan. Iz toga slijedi $|\angle CBE| = |\angle BEC|$. Očito je da vrijedi $|\angle ECB| = 135°$. Stoga je

$$|\angle CBE| = |\angle BEC| = \frac{180° - |\angle ECB|}{2} = \frac{180° - 135°}{2} = 22,5°.$$

Budući da je $|AE| = a + d$, $|\angle EAB| = 45°$ i $|\angle BEC| = |\angle BEA| = 22,5°$, uočavamo da znamo kostruirati trokut $\triangle BEA$. Stoga znamo konstruirati i njegovu stranicu $\overline{AB}$ koja je zajednička tom trokutu i traženom kvadratu $ABCD$. Budući da znamo konstruirati jednu stranicu kvadrata, znamo konstruirati cijeli traženi kvadrat.

Konstrukcija:
Konstruiramo dužinu $\overline{AE}$ čija je duljina $a+d$. Zatim konstruiramo pravac koji prolazi kroz točku E i koji s dužinom $\overline{AE}$ zatvara kut od $22,5°$. S „iste strane" dužine $\overline{AE}$ konstruiramo pravac koji prolazi točkom A i koji s tom dužinom zatvara kut od $45°$. Sjecište tih dvaju konstruiranih pravaca označimo s B. Točke A i B povezujemo dužinom čija je duljina a. Na kraju konstruiramo preostale tri stranice kvadrata $ABCD$ čija je duljina a. Konstrukcija je prikazana na slici 5.8.



Slika 5.8: Prikaz konstrukcije kvadrata kojemu je zadan zbroj $a + d$

Dokaz. Iz analize i opisa konstrukcije je očito da u trokutu $\triangle BEA$ stranica $\overline{AE}$ ima zadanu duljinu $a + d$. Stoga je taj trokut **pomoćna figura (lik)** koja omogućuje konstrukciju kvadrata $ABCD$. □

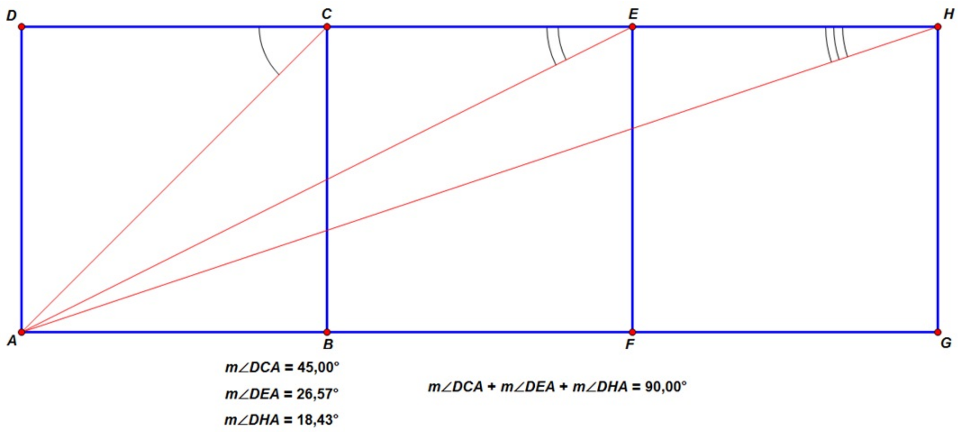
Rasprava:
Kada bismo pravce (koji prolaze točkama A i E i zatvaraju određene kutove s dužinom $\overline{AE}$) konstruirali s „druge strane" dužine $\overline{AE}$, opisanom konstrukcijom bismo također dobili traženi kvadrat koji bi bio sukladan kvadratu dobivenom opisanom konstrukcijom.

5.8 Tri kvadrata

Zadatak:
Dana su tri „povezana“ kvadrata $ABCD$, $BCEF$ i $EFGH$. Dokaži da je

$$|\angle DCA| + |\angle DEA| + |\angle DHA| = 90^\circ.$$

Rješenje:
Slutnja:
Učenici mogu naslutiti da je tvrdnja istinita mjereći kutove u crtežu *Tri kvadrata.gsp*. (Vidi sliku 5.9.)



Slika 5.9: Provjeravanje slutnje

Dokaz. Zadat ćemo sljedeći Descartesov koordinatni sustav $O \equiv D$, $|DC| = |AD| = 1$, pravac DH se podudara s osi apscisa, a pravac DA s osi ordinata. Dopunimo tri dana kvadrata s još šest njima sukladnih kvadrata. Time dobivamo veliki kvadrat $IJHD$. Točke K i L smjestimo u koordinatni sustav kao što je naznačeno na slici 5.10.

Promatramo neke točke i pravce. Određujemo koordinate vrhova četverokuta $AKLE$: $A(0, -1)$, $K(1, -3)$, $L(3, -2)$, $E(2, 0)$. Potom određujemo jednadžbe pravaca:

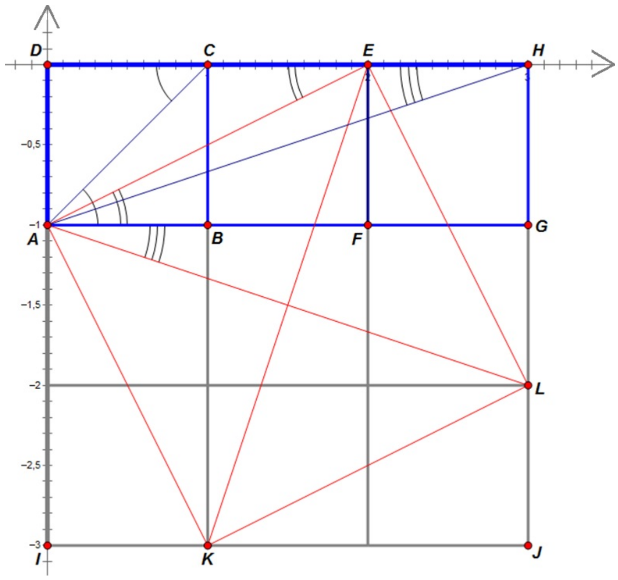
$$AK ... y = -2x - 1$$

$$KL ... y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

$$EL ... y = -2x + 4$$

$$AE ... y = \frac{1}{2}x - 1$$
$$AL ... y = -\frac{1}{3}x - 1$$
$$EK ... y = 3x - 6$$

Uspoređivanjem koeficijenata smjerova tih pravaca zaključujemo sljedeće:
$AK \perp KL$, $AE \perp EL$, $AK \| EL$, $AE \| KL$, $AL \perp KE$. Na temelju tih svojstava zaključujemo da je četverokut $AKLE$ kvadrat.



Slika 5.10: Skica za dokaz

Očito je da vrijedi $|\angle DCA| = 45°$. Prema poučku o kutovima uz transverzalu (AE) paralelnih pravaca (DH i AG) vrijedi $|\angle DEA| = |\angle GAE|$. Pravci DH i AH su u istom odnosu kao i pravci AG i AL. Stoga vrijedi $|\angle DHA| = |\angle GAL|$. Iz svega toga slijedi $|\angle DCA| + |\angle DEA| + |\angle DHA| = 45° + |\angle GAE| + |\angle GAL|$. Budući da je četverokut $AKLE$ kvadrat, vrijedi $|\angle EAL| = 45°$.

Iz $|\angle GAE| + |\angle GAL| = |\angle EAL| = 45°$ slijedi

$$|\angle DCA| + |\angle DEA| + |\angle DHA| = 45° + 45° = 90°,$$

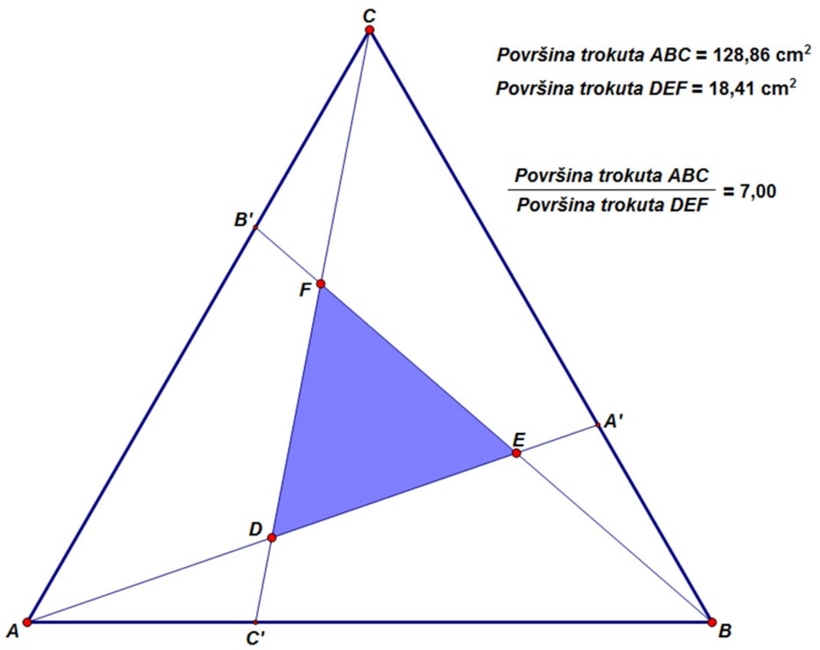
a to je upravo ono što smo i trebali dokazati.

Uočimo da smo za dokazivanje činjenice da je četverokut $AKLE$ kvadrat koristili **metodu koordinata**. Ostatak zadatka smo riješili koristeći temeljne činjenice elementarne geometrije. □

5.9 Feynmanov trokut

Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ dane su točke A', B' i C' takve da je $|BA'| = |CB'| = |AC'| = \frac{1}{3}|AB|$, tj. svaki vrh trokuta $\triangle ABC$ je dužinom spojen s točkom na nasuprotnoj stranici koju dijeli u omjeru $1 : 2$ (gledano u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu). U kojem su odnosu površina „unutarnjeg" trokuta $\triangle DEF$ što ga određuju pravci AA', BB' i CC' i površina zadanog trokuta $\triangle ABC$?

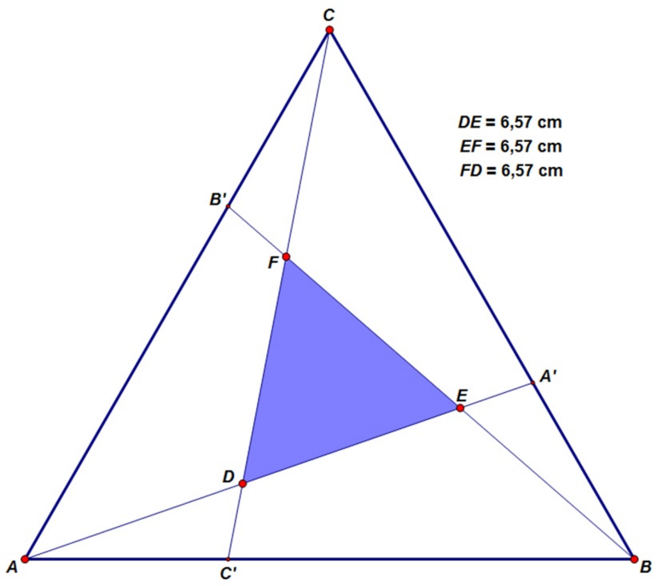
Slutnja:
Učenici mogu naslutiti odgovor (površina trokuta $\triangle ABC$ je sedam puta veća od površine trokuta $\triangle DEF$) mjereći površine trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ te uspoređujući ih u crtežu *Feynmanov trokut (1).gsp* (Vidi sliku 5.11.)



Slika 5.11: Naslućivanje odnosa površina trokuta

Za početak kao poseban zadatak dokazujemo sljedeću tvrdnju:
Trokut $\triangle DEF$ je također jednakostraničan.

Slutnja:
Učenici mogu naslutiti da je trokut $\triangle DEF$ također jednakostraničan mjereći duljine stranica trokuta $\triangle DEF$ u crtežu *Feynmanov trokut (2).gsp* (slika 5.12).



Slika 5.12: Provjeravanje tvrdnje da je $\triangle DEF$ jednakostraničan

Dokaz. Očito je da su trokuti $\triangle ABA'$ i $\triangle BCB'$ sukladni.
Iz toga slijedi $|\angle A'AB| = |\angle B'BC| = |\angle EBA'|$. Budući da je trokut $\triangle ABC$ jednakostraničan, vrijedi $|\angle ABC| = 60°$, tj. $|\angle ABA'| = 60°$.

$$|\angle A'AB| = 180° - |\angle ABA'| - |\angle BA'A| = 180° - 60° - |\angle BA'A| = 120° - |\angle BA'A| = 120° - |\angle BA'E|$$

Iz $|\angle A'AB| = |\angle EBA'|$ i $|\angle A'AB| = 120° - |\angle BA'E|$ slijedi $|\angle EBA'| = 120° - |\angle BA'E|$.
Znamo da je zbroj veličina unutarnjih kutova svakog trokuta jednak 180° pa je stoga $|\angle BA'E| + |\angle A'EB| + |\angle EBA'| = 180°$.
Iz toga slijedi

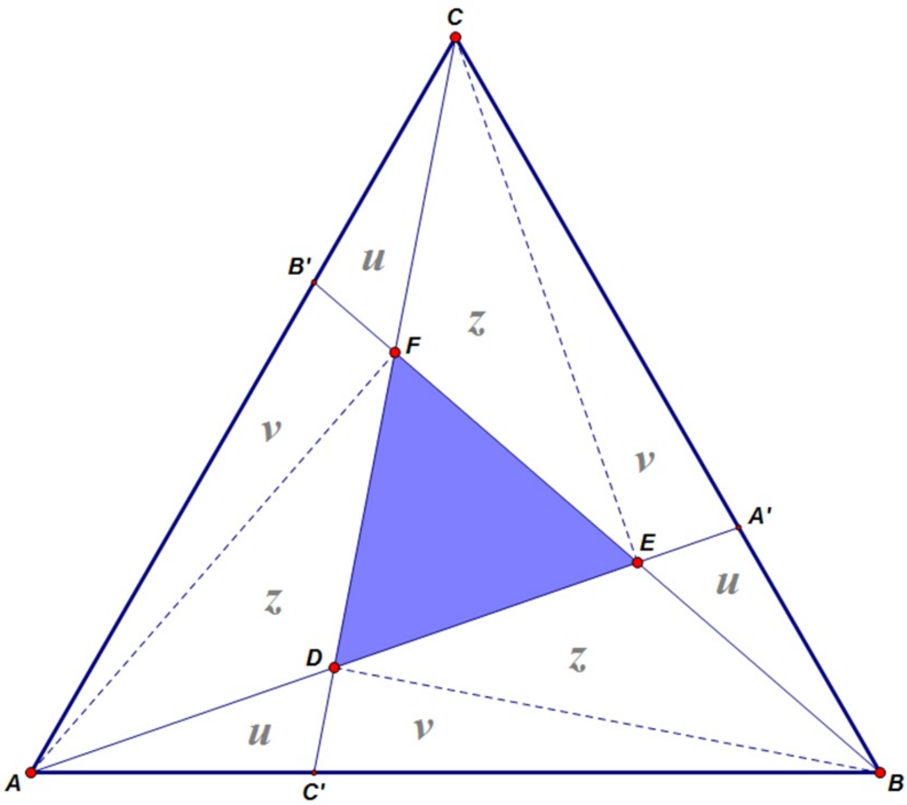
$$\begin{aligned} |\angle A'EB| &= 180° - |\angle BA'E| - |\angle EBA'| = 180° - |\angle BA'E| - (120° - |\angle BA'E|) \\ &= 180° - |\angle BA'E| - 120° + |\angle BA'E| = 60°. \end{aligned}$$

Prema poučku o vršnim kutovima iz slike 5.12 slijedi $|\angle A'EB| = |\angle DEF|$ pa je $|\angle DEF| = 60°$.
Na analogan način računamo da vrijedi $|\angle EFD| = 60°$, odnosno $|\angle FDE| = 60°$ pa iz toga zaključujemo da je trokut $\triangle DEF$ jednakostraničan. □

Nakon što smo dokazali da je trokut $\triangle DEF$ jednakostraničan, vraćamo se na rješavanje početnog problema. Uočavamo tri prirodne ideje.

Prvi način rješavanja

Zadatak je planimetrijski i jasno je da bi **metoda površina** trebala biti osnovno sredstvo njegovog rješavanja.
Označimo površinu trokuta $\triangle DEF$ s x. Potom dopunimo polazni crtež dužinama $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$.



Slika 5.13: Prvi način rješavanja

Na slici 5.13 uočavamo tri trojke međusobno sukladnih trokuta.
- Površinu svakog od sukladnih trokuta $\triangle AC'D$, $\triangle BA'E$ i $\triangle CB'F$ označimo s u.
- Površinu svakog od sukladnih trokuta $\triangle AFB'$, $\triangle BDC'$ i $\triangle CEA'$ označimo s v.
- Površinu svakog od sukladnih trokuta $\triangle ADF$, $\triangle BED$ i $\triangle CFE$ označimo sa z.

Budući da je $|C'B| = 2|AC'|$, sa slike 5.13 odčitavamo sljedeće odnose površina trokuta:
$P(\triangle BDC') = 2P(\triangle AC'D)$, tj. $v = 2u$.
$P(\triangle BFC') = 2P(\triangle AC'F)$, tj. $v + z + x = 2(u + z) = 2u + 2z = v + 2z \Rightarrow z = x$.
$P(\triangle BCC') = 2P(\triangle AC'C)$, tj. $u + 2v + 2z + x = 2(2u + v + z) = 4u + 2v + 2z \Rightarrow x = 3u$.

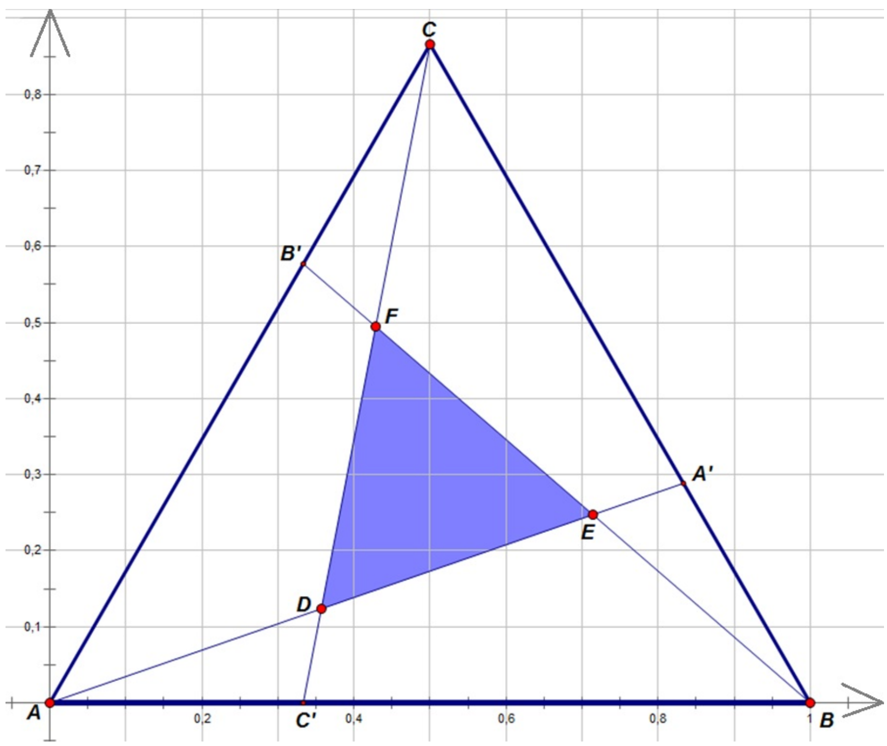
Konačno uočavamo da vrijedi

$$\begin{aligned} P(\triangle ABC) &= 3u + 3v + 3z + x = x + 3(2u) + 3x + x = 5x + 2(3u) = 5x + 2x = 7x \\ &= 7P(\triangle DEF). \end{aligned}$$

Iz toga slijedi $P(\triangle DEF) : P(\triangle ABC) = 1 : 7$, odnosno $\dfrac{P(\triangle DEF)}{P(\triangle ABC)} = \dfrac{1}{7}$.

Drugi način rješavanja

Prisjećamo se da formula za površinu trokuta postoji u analitičkoj geometriji. Stoga treba ispitati mogućnost primjene analitičke geometrije, odnosno **metode koordinata**. Koordinatni sustav postavimo tako da se vrh A trokuta $\triangle ABC$ podudara s ishodištem, a stranica $\overline{AB}$ pripada osi x koordinatnog sustava. Neka je pritom $|AB| = 1$.



Slika 5.14: Drugi način rješavanja

Sa slike 5.14 dosta lako odčitamo koordinate vrhova A i B te djelišne točke C': $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$.

Budući da je $\triangle ABC$ jednakostraničan trokut sa stranicama čija je duljina jednaka 1, lako izračunamo koordinate točke $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Prisjećamo se formula za određivanje koordinata djelišta dužine u zadanom omjeru. Neka su točke $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ krajevi dužine $\overline{T_1T_2}$. Točka S je djelište dužine $\overline{T_1T_2}$ u omjeru λ ako je $|T_1S| = \lambda|ST_2|$. Tada točka S ima koordinate: $x_S = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_S = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.
Pomoću toga računamo koordinate djelišnih točaka A' i B': $A'\left(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $B'\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Za određivanje vrhova D, E i F trokuta $\triangle DEF$ trebamo odrediti pravaca AA', BB' i CC':
$AA' ... y = \dfrac{\sqrt{3}}{5}x$
$BB' ... y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$CC' ... y = 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

Određivanjem sjecišta parova pravaca ($\{D\} = AA' \cap CC'$, $\{E\} = AA' \cap BB'$, $\{F\} = BB' \cap CC'$) nalazimo: $D\left(\frac{5}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$, $E\left(\frac{5}{7}, \frac{\sqrt{3}}{7}\right)$, $F\left(\frac{3}{7}, \frac{2\sqrt{3}}{7}\right)$.

Pomoću analitičke formule za površinu trokuta konačno računamo odnos površine trokuta $\triangle DEF$ i površine trokuta $\triangle ABC$:

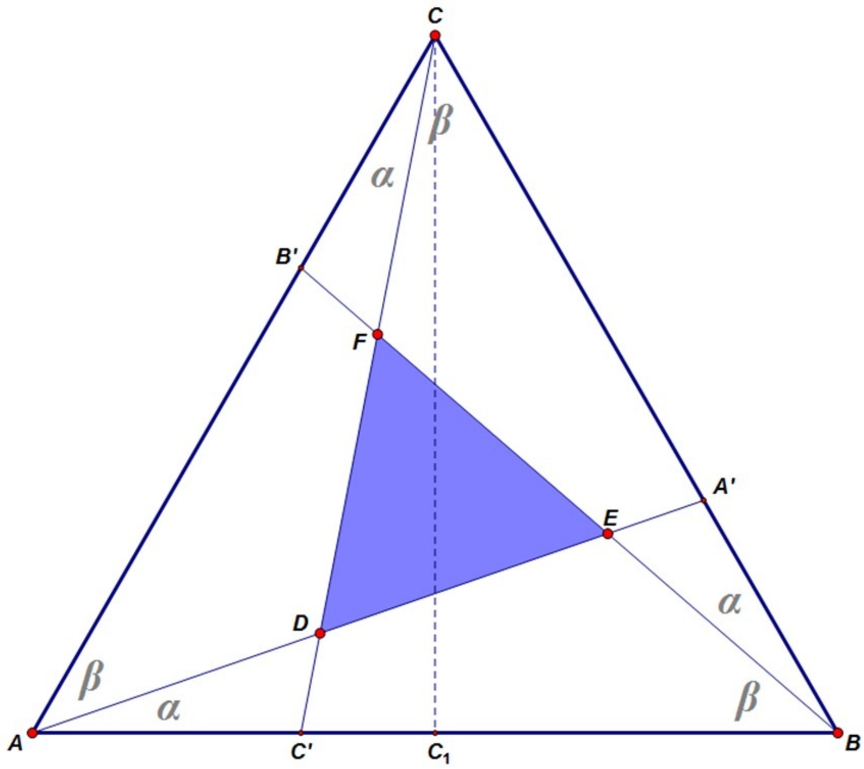
$$\begin{aligned} P(\triangle DEF) &= \frac{1}{2}|x_D(y_E - y_F) + x_E(y_F - y_D) + x_F(y_D - y_E)| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{5}{14}\left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2\sqrt{3}}{7}\right) + \frac{5}{7}\left(\frac{2\sqrt{3}}{7} - \frac{\sqrt{3}}{14}\right) + \frac{3}{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{14} - \frac{\sqrt{3}}{7}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{28}. \end{aligned}$$

$$P(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v_C = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{P(\triangle DEF)}{P(\triangle ABC)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{28}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{7}$$

Treći način rješavanja

Prisjećamo se da formula za površinu trokuta postoji u trigonometriji. Stoga treba ispitati mogućnost primjene **algebarske metode** u trigonometriji.
Na slici 5.15 označimo s α i β kutove na koje pravci AA', BB' i CC' dijele unutarnje kutove trokuta $\triangle ABC$, a s C_1 nožište visine iz vrha C. Neka je $|AB| = 1$.



Slika 5.15: Treći način rješavanja

Budući da je trokut $\triangle ABC$ jednakostraničan sa stranicama duljine 1, vrijedi

$$v_C = |CC_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Potom po Pitagorinom poučku računamo duljinu hipotenuze $\overline{C'C}$ pravokutnog trokuta $\triangle C'C_1C$:

$$|C'C_1| = |AC_1| - |AC'| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$|C'C| = \sqrt{|C'C_1|^2 + |CC_1|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Zbog sličnosti trokuta je očito da vrijedi $|AD| = |CF|$. Uočimo da prema poučku o sinusima za trokut $\triangle ADC$ vrijedi $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{|AD|}{|CD|} = \dfrac{|CF|}{|CD|}$.

Za trokut $\triangle AC'C$ vrijedi $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\angle CAC'} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ} = \dfrac{|AC'|}{|CC'|} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Za trokut $\triangle BCC'$ vrijedi $\dfrac{\sin\beta}{\sin\angle C'BC} = \dfrac{\sin\beta}{\sin 60^\circ} = \dfrac{|C'B|}{|CC'|} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

Iz $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$ i $\dfrac{\sin\beta}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ slijedi $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\frac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ}}{\frac{\sin\beta}{\sin 60^\circ}} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = \dfrac{1}{2}$.

Stoga vrijedi $\dfrac{|CF|}{|CD|} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{1}{2}$, odnosno $|CD| = 2|CF|$.

Sa slike 5.15 odčitavamo $|CD| = |CF| + |FD|$ pa vrijedi $|CF| + |FD| = 2|CF|$, tj. $|FD| = |CF|$.
Za trokut $\triangle AC'D$ vrijedi $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\angle C'DA} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ} = \dfrac{|DC'|}{|AC'|} = \dfrac{|DC'|}{\frac{1}{3}} = 3|DC'|$.

Iz $\dfrac{\sin\beta}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ i $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ} = 3|DC'|$ slijedi $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\frac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ}}{\frac{\sin\beta}{\sin 60^\circ}} = \dfrac{3|DC'|}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}|DC'|}{2}$.

Stoga vrijedi $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{3\sqrt{7}|DC'|}{2}$, odnosno $3\sqrt{7}|DC'| = 1$, a iz toga slijedi $|DC'| = \dfrac{\sqrt{7}}{21}$.

Sa slike 5.15 odčitavamo da vrijedi $|CC'| = |CF| + |FD| + |DC'| = |FD| + |DC'|$.
Budući da je $|CC'| = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$, $|CF| = |FD|$ i $|DC'| = \dfrac{\sqrt{7}}{21}$, slijedi da je

$$\frac{\sqrt{7}}{3} = |CC'| = |CF| + |FD| + |DC'| = |FD| + |FD| + \frac{\sqrt{7}}{21} = 2|FD| + \frac{\sqrt{7}}{21}.$$

Na temelju toga zaključujemo $2|FD| = \dfrac{\sqrt{7}}{3} - \dfrac{\sqrt{7}}{21} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$, odnosno $|FD| = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Konačno je $P(\triangle DEF) : P(\triangle ABC) = \dfrac{|FD|^2\sqrt{3}}{4} : \dfrac{|AB|^2\sqrt{3}}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)^2 : 1^2 = \dfrac{1}{7} : 1 = 1 : 7$.

Dakle, ovim trima dokazima smo dokazali našu slutnju da je površina početnog trokuta $\triangle ABC$ točno sedam puta veća od površine nastalog „unutarnjeg“ trokuta $\triangle DEF$.

Generalizacije

Osim što se zadatak može riješiti na navedena tri načina, on omogućuje i lijepa daljnja promišljanja. Razmatranja se mogu nastaviti u smjeru istraživanja općenitijih tvrdnji čije dokazivanje možemo iskoristiti za tri nova, složenija zadatka, ali iznimno pogodna za rad s naprednijim učenicima.
Možemo konstantu $\frac{1}{3}$ zamijeniti varijablom $\frac{1}{n}$, pri čemu je n prirodan broj veći ili jednak 3. Tada dobivamo sljedeću generalizaciju:
1) Neka je $\triangle ABC$ jednakostraničan trokut i $|BA'| = |CB'| = |AC'| = \frac{1}{n}|AB|$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Tada je trokut $\triangle DEF$ također jednakostraničan, za površine vrijedi općenitija jednakost: $P(\triangle DEF) = \frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1} P(\triangle ABC)$.

Nadalje, jednakostranični trokut možemo zamijeniti bilo kojim trokutom, a time dobivamo sljedeću generalizaciju:
2) Neka je $\triangle ABC$ trokut i $|BA'| = \frac{1}{3}|BC|$, $|CB'| = \frac{1}{3}|CA|$, $|AC'| = \frac{1}{3}|AB|$. Tada za površine ostaje sačuvan odnos, tj. vrijedi: $P(\triangle DEF) = \frac{1}{7} P(\triangle ABC)$.
Istinitost te tvrdnje učenici mogu provjeriti zaključujući nepotpunom indukcijom na temelju konačnog broja slučajeva u crtežu *Feynmanov trokut (generalizacija 2).gsp*.

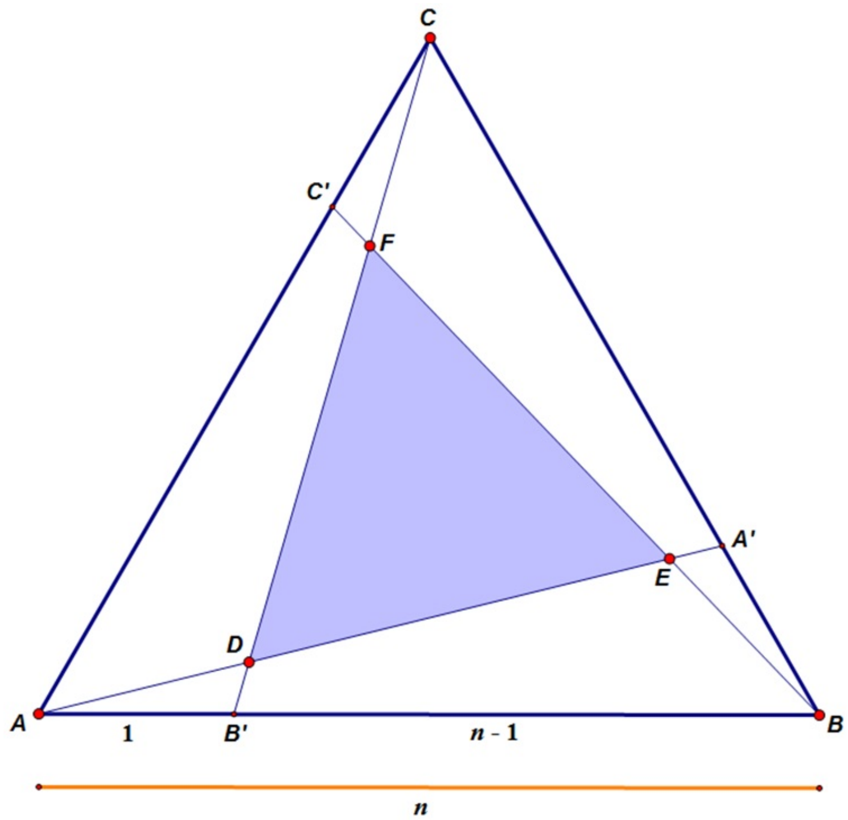
Povijesna crtica:
Inače, ovaj problem je postavljen poznatom fizičaru Richardu Feynmanu (1918. - 1988.) tijekom večernjeg objeda nakon kolokvija (stručni razgovor i razmjena mišljenja) na „Sveučilištu Cornell“. On je proveo većinu večeri najprije pokušavajući opovrgnuti istinitost te tvrdnje, ali je na kraju ipak uspio dokazati njezinu točnost.

Također, možemo konstantu $\frac{1}{3}$ zamijeniti varijablom $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, i jednakostranični trokut zamijeniti bilo kojim trokutom. Rezultat tog promišljanaj bi bila sljedeća generalizacija:
3) Neka je $\triangle ABC$ trokut i $|BA'| = \frac{1}{n}|BC|$, $|CB'| = \frac{1}{n}|CA|$, $|AC'| = \frac{1}{n}|AB|$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Tada za površine vrijedi općenitija jednakost: $P(\triangle DEF) = \frac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1} P(\triangle ABC)$.

Istinitost te tvrdnje učenici mogu provjeriti zaključujući nepotpunom indukcijom na temelju konačnog broja slučajeva u crtežu *Feynmanov trokut (generalizacija 3).gsp*.

Dokazat ćemo tvrdnju 1). Prije nego što prijeđu na dokazivanje te tvrdnje, učenici se mogu uvjeriti u istinitost te tvrdnje zaključujući nepotpunom indukcijom na temelju konačnog broja slučajeva u crtežu *Feynmanov trokut (generalizacija 1).gsp*.

Dokaz. Razmatramo jednakostranični trokut $\triangle ABC$ prikazan na slici 5.16.
Neka je $|AB| = |BC| = |CA| = n$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ dane su točke A', B' i C' takve da je $|BA'| = |CB'| = |AC'| = \frac{1}{n}|AB|$, tj. svaki vrh trokuta $\triangle ABC$ je dužinom spojen s točkom na nasuprotnoj stranici koju dijeli u omjeru $1 : (n-1)$ (gledano u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu). Stoga je $|AC'| = |BA'| = |CB'| = 1$.



Slika 5.16: Slika za dokaz prve generalizacije

Prema poučku o kosinusu vrijedi:

$$|B'B|^2 = |BC|^2 + |B'C|^2 - 2|BC| \cdot |B'C| \cdot \cos|\angle BCB'| = n^2 + 1^2 - 2 \cdot n \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = n^2 - n + 1.$$

Iz toga slijedi $|B'B| = \sqrt{n^2 - n + 1}$.

Budući da vrijedi $|\angle FB'C| = |\angle CB'B|$ i $|\angle FCB'| = |\angle CBB'|$, zaključujemo (prema K-K teoremu o sličnosti trokuta) da su trokuti $\triangle BCB'$ i $\triangle CFB'$ slični.

Iz toga slijedi $\dfrac{|B'F|}{|B'C|} = \dfrac{|B'C|}{B'B}$, odnosno $|B'F| = \dfrac{|B'C|}{B'B} \cdot |B'C| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}} \cdot 1 = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$.

Na analogan način zaključujemo $|C'D| = |A'E| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$.

Iz sličnosti trokuta $\triangle BCB'$ i $\triangle CFB'$ slijedi i $\dfrac{|FC|}{|B'C|} = \dfrac{|BC|}{BB'}$, odnosno

$$|FC| = \frac{|BC|}{BB'} \cdot |B'C| = \frac{n}{\sqrt{n^2 - n + 1}} \cdot 1 = \frac{n}{\sqrt{n^2 - n + 1}}.$$

Na analogan način zaključujemo $|AD| = |BE| = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$. Stoga je

$$\begin{aligned} |EF| = |BB'| - |B'F| - |BE| &= \sqrt{n^2 - n + 1} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}} - \frac{n}{\sqrt{n^2 - n + 1}} \\ &= \frac{n^2 - n + 1 - 1 - n}{\sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{n^2 - 2n}{\sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{n(n-2)}{\sqrt{n^2 - n + 1}}. \end{aligned}$$

Primjenom svojstva simetrije zaključujemo da je $\triangle DEF$ također jednakostraničan trokut sa stranicama čija je duljina $\dfrac{n(n-2)}{\sqrt{n^2 - n + 1}} \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-2}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$ duljine stranice trokuta $\triangle ABC$.

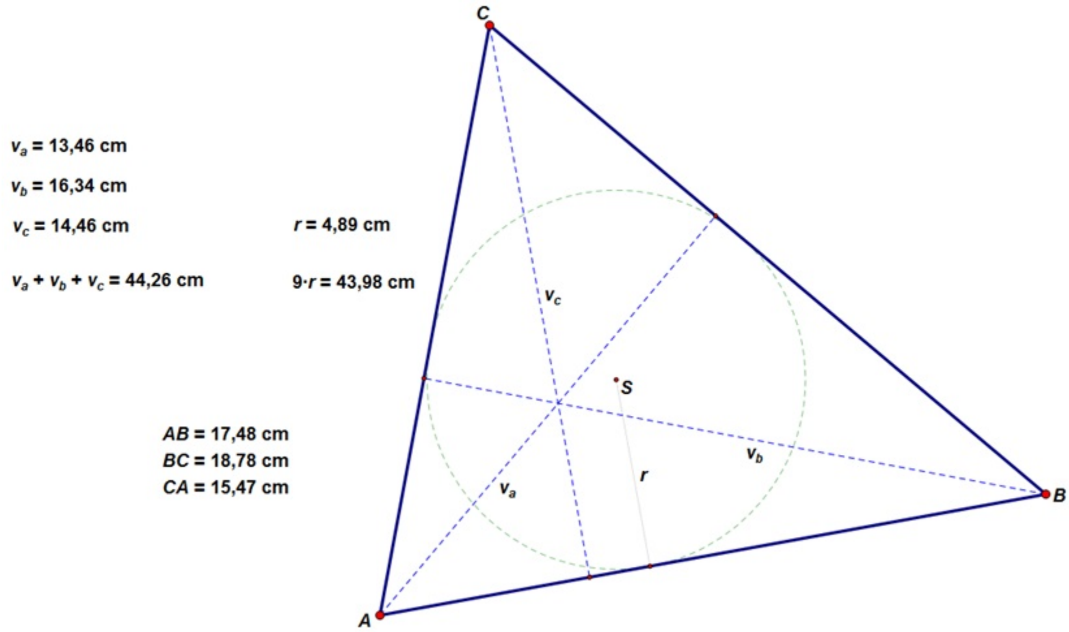
Stoga površina trokuta $\triangle DEF$ iznosi $\left(\dfrac{n-2}{\sqrt{n^2 - n + 1}}\right)^2$, odnosno $\dfrac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1}$ površine trokuta $\triangle ABC$.

Dakle, ovime smo dokazali da površina „unutarnjeg“ trokuta $\triangle DEF$ iznosi $\dfrac{(n-2)^2}{n^2 - n + 1}$ površine nastalog početnog trokuta $\triangle ABC$. □

5.10 Odnos zbroja duljina visina trokuta i duljine polumjera kružnice upisane trokutu

Zadatak: Za duljine visina v_a, v_b, v_c trokuta i polumjer r trokutu upisane kružnice vrijedi nejednakost $v_a + v_b + v_c \geq 9r$. Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan. Dokaži!

Slutnja:
Učenici mogu naslutiti da je tvrdnja istinita mjereći duljine visina trokuta i polumjer njemu upisane kružnice u crtežu *Zbroj duljina visina u trokutu.gsp* (slika 5.17).



Slika 5.17: Odnos između $v_a + v_b + v_c$ i r kružnice opisane trokutu

Metodička analiza

Uočavamo da je zadatak geometrijske prirode, ali da se u tvrdnji pojavljuje nejednakost. To nas navodi da bi prvi korak pri dokazivanju mogao biti svođenje zadatka na čisto algebarski zadatak, tj. na algebarsku nejednakost.

Uvodimo sljedeće oznake:
a, b, c - duljine stranica trokuta
v_a, v_b, v_c - duljine odgovarajućih visina trokuta
r - duljina polumjera kružnice upisane trokutu
P - površina trokuta

Znamo da tada za trokut vrijedi

$$P = \frac{1}{2}av_a, P = \frac{1}{2}bv_b, P = \frac{1}{2}cv_c, P = rs, \left(s = \frac{a+b+c}{2}\right).$$

Te činjenice nam omogućuju zamjenu duljina visina v_a, v_b, v_c i polumjera r duljinama stranica trokuta a, b i c:

$$v_a = \frac{2P}{a}, v_b = \frac{2P}{b}, v_c = \frac{2P}{c}, r = \frac{P}{s} = \frac{2P}{a+b+c}.$$

Unesemo li dobivene odnose u polaznu nejednakost $v_a + v_b + v_c \geq 9r$, dobivamo

$$\frac{2P}{a} + \frac{2P}{b} + \frac{2P}{c} \geq 9\frac{2P}{a+b+c},$$

odnosno $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$. Time smo početni zadatak sveli na algebarski zadatak. Budući da su duljine stranica trokuta uvijek pozitivni brojevi, zapravo trebamo dokazati da za pozitivne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Prvi način rješavanja

Nejednakost je tako građena da se u njoj lako prepoznaje aritmetička sredina triju pozitivnih brojeva, a vidljiv je i dio harmonijske sredine. Stoga naslućujemo mogućnost primjene **HA nejednakosti**.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} / : 3 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{a+b+c}$$

Budući da su a, b i c pozitivni brojevi te da je racionalna funkcija strogo padajuća na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$, ta nejednakost je ekvivalentna nejednakosti $\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}$. Ta nejednakost je istinita jer znamo da aritmetička sredina triju pozitivnih brojeva nije manja od harmonijske sredine tih brojeva, tj. vrijedi $H \leq A$.

Time smo dokazali da vrijedi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Drugi način rješavanja

U slučaju da nam prva ideja promakne, možemo u dobivenoj nejednakosti prepoznati aritmetičku sredinu, a naslućujemo da se tu možda krije i geometrijska sredina triju pozitivnih brojeva. Stoga bismo možda mogli primijeniti **AG nejednakost**.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}\Leftrightarrow\frac{bc+ac+ab}{abc}\geq\frac{9}{a+b+c}$$

Dakle, postupak nastavljamo množenjem nejednakosti zajedničkim nazivnikom $abc(a+b+c)$, a tom transformacijom dobivamo ekvivalentni oblik $(a+b+c)(bc+ac+ab)\geq 9abc$.

$$(a+b+c)(bc+ac+ab)\geq 9abc/:9\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)(bc+ac+ab)}{9}\geq abc$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{bc+ac+ab}{3}\geq abc\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{bc+ac+ab}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{bc\cdot ac\cdot ab}$$

Ta nejednakost je istinita jer znamo da aritmetička sredina triju pozitivnih brojeva nije manja od geometrijske sredine tih brojeva, tj. vrijedi $A\geq G$. Time smo dokazali da vrijedi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$.

Treći način rješavanja

Ako nije uočena primjena nijedne od nejednakosti o sredinama, nastavljamo s transformiranjem nejednakosti $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$ dobivene u početku prethodnog načina rješavanja. Množenjem izraza u zagradama dobivamo nejednakost

$$abc+a^2c+a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+ac^2+abc\geq 9abc,$$

a dodatnim sređivanjem $ab^2+ac^2+a^2b+c^2b+a^2c+b^2c\geq 6abc$. Podijelimo li gornju nejednakost s abc, dobivamo

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 6.$$

Koristit ćemo pomoćnu nejednakost koju dobivamo na sljedeći način:

$$(u-v)^2\geq 0\Leftrightarrow u^2-2uv+v^2\geq 0\Leftrightarrow u2+v^2\geq 2uv\Leftrightarrow\frac{u^2+v^2}{uv}\geq 2,(u,v>0)\Leftrightarrow\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\geq 2.$$

Jasno je da iz toga slijedi istinitost nejednakosti $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 6$ koja je ekvivalentna početnoj nejednakosti $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$ pa je time tvrdnja dokazana.

Četvrti način rješavanja

Uočimo da se prethodni dokazi temelje na primjeni pomoćnih nejednakosti. Međutim, dokaz nejednakosti $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ uvijek se može provesti i bez pomoćnih činjenica, odnosno kad te pomoćne činjenice baš i nisu uočljive. Stoga nam kao posljednji način uvijek ostaje **analitičko-sintetička metoda**. Na temelju nejednakosti dobivenih u prethodnim načinima dokazivanja sažeto prikazujemo ovaj način dokazivanja.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} &\Leftrightarrow (a+b+c)(bc+ac+ab) \geq 9abc \\
&\Leftrightarrow ab^2 + ac^2 + a^2b + c^2b + a^2c + b^2c - 6abc \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (ab^2 + ac^2 - 2abc) + (a^2b + c^2b - 2abc) + (a^2c + b^2c - 2abc) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow a(b^2 + c^2 - 2bc) + b(a^2 + c^2 - 2ac) + c(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow a, b, c > 0
\end{aligned}$$

Zbroj $v_a + v_b + v_c$ je najmanji i jednak $9r$ kad u nejednakosti $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ vrijedi znak jednakosti, a to je ispunjeno onda kad znak jednakosti vrijedi u

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

(u prvom načinu rješavanja), kad vrijedi znak jednakosti u

$$\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{bc+ac+ab}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt[3]{bc \cdot ac \cdot ab}$$

(u drugom načinu rješavanja), kad vrijedi znak jednakosti u $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 6$ (u trećem načinu rješavanja), odnosno kad vrijedi znak jednakosti u $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0$ (u četvrtom načinu rješavanja). To vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$. Stoga zaključujemo da je zbroj $v_a + v_b + v_c$ najmanji i jednak $9r$ kad je trokut jednakostraničan.

Uočimo da su navedeni dokazi bili relativno kratki, ali i da se u trima dokazima koristila neka pomoćna nejednakost. U tom slučaju nastavnik matematike mora biti oprezan pitajući se je li pomoćna nejednakost dovoljno poznata te je li dokaz pomoćne nejednakosti lakši od dokaza tražene nejednakosti.

Ovaj zadatak možemo preinačiti u lakši zadatak:
Ako za duljine visina v_a, v_b, v_c i polumjer r trokuta njemu upisane kružnice vrijedi jednakost $v_a + v_b + v_c = 9r$, onda je taj trokut jednakostraničan. Dokaži!

Evo formulacije i teže varijacije tog zadatka:
Ispitajte odnos sume duljina visina trokuta i polumjera trokuta njemu upisane kružnice.

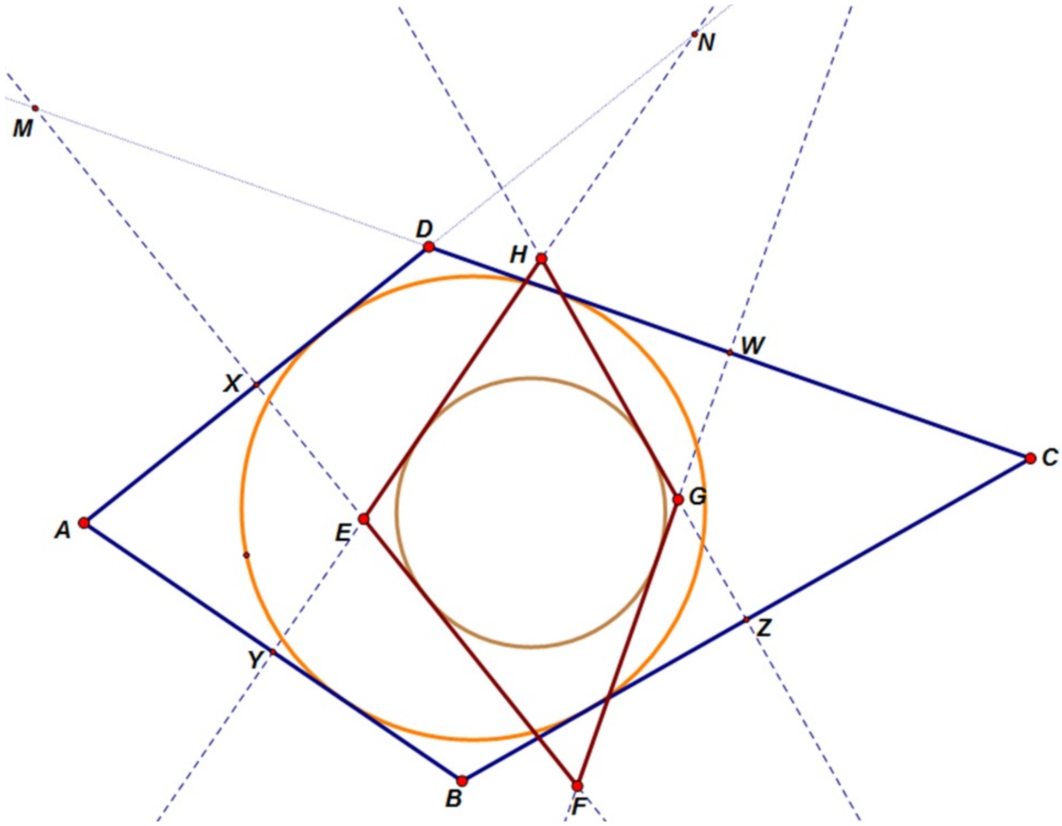
Uočimo da smo ovaj zadatak riješili na više različitih načina. Inače je rješavanje jednog zadatka na više različitih načina „dobro su sredstvo za aktivnije razmišljanje učenika i djelotvornije ponavljanje i utvrđivanje stečenog znanja" ([14], str. 1).

5.11 Zanimljivo svojstvo tangencijalnog četverokuta

Zadatak: Simetrale stranica tangencijalnog četverokuta tvore novi tangencijalni četverokut. Dokaži!

Slutnja:
Učenici mogu naslutiti da je tvrdnja istinita konstruirajući zadanu situaciju u crtežu *Tangencijalni četverokut (1).gsp*.

Dokaz. Koristimo oznake kao na slici 5.18. Pritom još definiramo sljedeće oznake:
$a := |AB|$
$b := |BC|$
$c := |CD|$
$d := |DA|$
t_A - udaljenost točke A od dirališta tangente iz točke A na kružnicu k_1 upisanu zadanom četverokutu
t_B - udaljenost točke B od dirališta tangente iz točke B na kružnicu k_1 upisanu zadanom četverokutu
t_C - udaljenost točke C od dirališta tangente iz točke C na kružnicu k_1 upisanu zadanom četverokutu
t_D - udaljenost točke D od dirališta tangente iz točke D na kružnicu k_1 upisanu zadanom četverokutu
r - duljina radijusa kružnice k_1 upisanu zadanom četverokutu
Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $r = 1$.
Budući da je trokut $\triangle MXD$ pravokutan, vrijedi $\cos|\angle XDM| = \dfrac{|XD|}{|MD|}$, odnosno



Slika 5.18: Zanimljivo svojstvo tangencijalnog četverokuta

$|MD| = \dfrac{|XD|}{\cos|\angle XDM|}$. Očito je da vrijedi $|XD| = \dfrac{|DA|}{2} = \dfrac{d}{2}$ pa iz toga slijedi

$$|MD| = \frac{\frac{d}{2}}{\cos|\angle XDM|} = \frac{d}{2\cos|\angle XDM|}.$$

Iz crteža 5.18 uočavamo da vrijedi $|\angle XDM| = 180^\circ - |\angle ADC|$. Budući da općenito vrijedi $\cos(180^\circ - x) = -\cos x, x \in \mathbb{R}$, iz toga slijedi

$$\cos|\angle XDM| = \cos(180^\circ - |\angle ADC|) = -\cos|\angle ADC|.$$

Stoga vrijedi $|MD| = -\dfrac{d}{2\cos|\angle ADC|}$.

$$|MW| = |MD| + |DW| = -\frac{d}{2\cos|\angle ADC|} + \frac{|CD|}{2} = \frac{c}{2} - \frac{d}{2\cos|\angle ADC|}$$

Iz crteža 5.18 slijedi da je $\operatorname{ctg}|\angle MFW| = \dfrac{|FW|}{|MW|}$. Budući da je trokut $\triangle FWM$ pravokutan, vrijedi $|\angle MFW| = 90^\circ - |\angle FMW| = 90^\circ - (90^\circ - |\angle XDM|) = |\angle XDM| = 180^\circ - |\angle ADC|$.
Iz $\operatorname{ctg}(180^\circ - |\angle ADC|) = \dfrac{|FW|}{|MW|}$ slijedi $|FW| = |MW| \cdot \operatorname{ctg}(180^\circ - |\angle ADC|)$.
Vrijedi $\operatorname{ctg}(180^\circ - |\angle ADC|) = \dfrac{\cos(180^\circ - |\angle ADC|)}{\sin(180^\circ - |\angle ADC|)} = -\dfrac{\cos|\angle ADC|}{\sin|\angle ADC|}$. Stoga je

$$|FW| = \left(\frac{c}{2} - \frac{d}{2\cos|\angle ADC|}\right) \cdot \left(-\frac{\cos|\angle ADC|}{\sin|\angle ADC|}\right) = \frac{d}{2\sin|\angle ADC|} - \frac{c}{2}\operatorname{ctg}|ADC|.$$

Analogno zaključujemo da vrijedi $|FX| = \dfrac{c}{2\sin|\angle ADC|} - \dfrac{d}{2}\operatorname{ctg}|\angle ADC|$. Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}
2(|FX| - |FW|) &= 2\left[\frac{c}{2\sin|\angle ADC|} - \frac{d}{2}\operatorname{ctg}|\angle ADC| - \left(\frac{d}{2\sin|\angle ADC|} - \frac{c}{2}\operatorname{ctg}|\angle ADC|\right)\right] \\
&= 2\left(\frac{c}{2\sin|\angle ADC|} - \frac{d}{2}\operatorname{ctg}|\angle ADC| - \frac{d}{2\sin|\angle ADC|} + \frac{c}{2}\operatorname{ctg}|\angle ADC|\right) \\
&= \frac{c}{\sin|\angle ADC|} - \frac{d}{\sin|\angle ADC|} + c\operatorname{ctg}|\angle ADC| - d\operatorname{ctg}|\angle ADC| \\
&= \frac{c-d}{\sin|\angle ADC|} + (c-d)\operatorname{ctg}|\angle ADC| \\
&= (c-d)\left(\frac{1}{\sin|\angle ADC|} + \operatorname{ctg}|\angle ADC|\right) \\
&= (c-d)\left(\frac{1}{\sin|\angle ADC|} + \frac{\cos|\angle ADC|}{\sin|\angle ADC|}\right) \\
&= (c-d)\frac{1+\cos|\angle ADC|}{\sin|\angle ADC|}.
\end{aligned}$$

Budući da vrijedi $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$, zaključujemo

$$2(|FX| - |FW|) = (c-d)\operatorname{ctg}\frac{|\angle ADC|}{2}.$$

Iz slike 5.18 uočavamo da vrijedi $\operatorname{ctg}\dfrac{|\angle ADC|}{2} = \dfrac{t_D}{r} = \dfrac{t_D}{1} = t_D$ pa je stoga

$$2(|FX| - |FW|) = (c-d)t_D.$$

Na analogan način zaključujemo da vrijedi:

$$2(|HZ| - |HY|) = (a - b)t_B,$$
$$2(|EY| - |EX|) = (d - a)t_A,$$
$$2(|GW| - |GZ|) = (b - c)t_C.$$

Analiza:
Trebamo dokazati da je nastali četverokut $EFGH$ tangencijalan pa stoga provjeravamo je li zbroj duljina nasuprotnih stranica tog četverokuta jednak, tj. dokazujemo da vrijedi $|EF| + |GH| = |FG| + |EH|$, odnosno $|EF| - |EH| + |GH| - |FG| = 0$.

Iz crteža 5.18 je očito da vrijedi

$$|EF| = |FX| - |EX|,$$
$$|EH| = |HY| - |EY|,$$
$$|GH| = |HZ| - |GZ|,$$
$$|FG| = |FW| - |GW|.$$

Stoga iz $|EF| - |EH| + |GH| - |FG| = 0$ slijedi

$$(|FX| - |EX|) - (|HY| - |EY|) + (|HZ| - |GZ|) - (|FW| - |GW|) = 0, \text{ odnosno}$$

$$2(|FX| - |EX|) - 2(|HY| - |EY|) + 2(|HZ| - |GZ|) - 2(|FW| - |GW|) = 0.$$

Uvidom u prethodni rezultat zaključivanja uviđamo da je navedena jednakost ekvivalentna jednakosti

$$(c - d)t_D + (a - b)t_B + (d - a)t_A + (b - c)t_C = 0, \text{ odnosno}$$
$$(c - d)t_D - (b - a)t_B + (d - a)t_A - (c - b)t_C = 0.$$

Budući da je četverokut $ABCD$ tangencijalan, vrijedi da je zbroj duljina dviju nasuprotnih stranica tog četverokuta jednak zbroju duljina drugih dviju stranica istog četverokuta, tj. vrijedi $a + c = b + d$.

$$a + c = b + d \,/\, - a - d \Rightarrow c - d = b - a$$
$$a + c = b + d \,/\, - a - b \Rightarrow c - b = d - a$$

Uvrštavajući to u $(c - d)t_D - (b - a)t_B + (d - a)t_A - (c - b)t_C = 0$ dobivamo

$$(c - d)t_D - (c - d)t_B + (d - a)t_A - (d - a)t_C = 0, \text{ odnosno}$$
$$(c - d)(t_D - t_B) + (d - a)(t_A - t_C) = 0.$$

Iz crteža zaključujemo

$$\left.\begin{aligned} c &= t_C + t_D \\ d &= t_D + t_A \end{aligned}\right\} \Rightarrow c - d = (t_C + t_D) - (t_D + t_A) = t_C - t_A,$$

$$\left.\begin{aligned} d &= t_D + t_A \\ a &= t_A + t_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow d - a = (t_D + t_A) - (t_A + t_B) = t_D - t_B.$$

Uvrštavajući to u $(c - d)(t_D - t_B) + (d - a)(t_A - t_C) = 0$ dobivamo

$$(t_C - t_A)(t_D - t_B) + (t_D - t_B)(t_A - t_C) = 0, \text{ odnosno}$$
$$(t_C - t_A)(t_D - t_B) - (t_C - t_A)(t_D - t_B) = 0, \text{ a očito je da to vrijedi.}$$

Sinteza:
Sintezu provodimo koristeći analizu, ali obrnutim smjerom zaključivanja. Time ćemo zaključiti da za četverokut $EFGH$ vrijedi $|EF| + |GH| = |FG| + |EH|$. Na temelju toga, a koristeći obrat teorema o tangencijalnom četverokutu, zaključujemo da je četverokut $EFGH$ tangencijalan. □

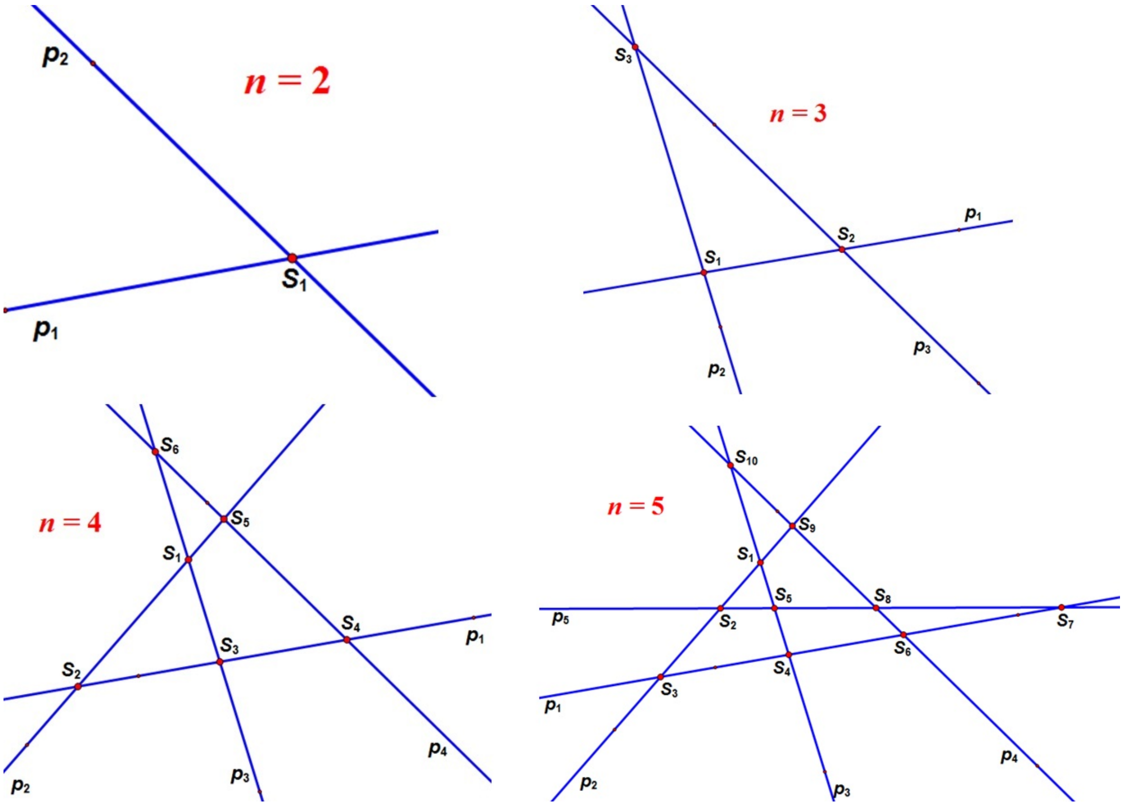
Napomena:
Uočimo da smo tijekom rješavanja ovog zadatka koristili više različitih metoda: **algebarsku metodu**, **metodu pomoćnih likova**, **metodu supstitucije** i **analitičko-sintetičku metodu**. Ovaj zadatak je izrazito složen te je za negovo rješavanje potreban visok stupanj povezivanja. Stoga je ovo „pravi“ problemski zadatak za čije rješavanje bi bilo najpogodnije heurističko vođenje (naprednih) učenika.

5.12 Pravci (sjecišta, odsječci, dijelovi ravnine)

Zadatak:
U ravnini je dano n pravaca p_1, p_2,..., p_n u općem položaju (nema paralelnih i nikoja tri ne prolaze istom točkom). Neka je a_n ukupan broj sjecišta tih pravaca, b_n ukupan broj odsječaka na koje su ti pravci podijeljeni sjecištima, a c_n ukupan broj dijelova na koje ti pravci dijele ravninu. Ispitajmo vrijednost izraza $a_n - b_n + c_n$ u ovisnosti o prirodnom broju n ([12], str. 213).

Rješenje:
Pogledajmo niz konkretnih slučajeva prebrojavajući broj sjecišta, broj odsječaka i broj dijelova ravnine na crtežu *Pravci (sjecišta, odsječci, dijelovi ravnine).gsp*, odnosno na slici 5.19.
Uočimo da navedene veličine ima smisla promatrati za $n \geq 2$. Naime, u trivijalnoj situaciji za $n = 1$ (samo jedan pravac se nalazi u ravnini) možemo reći da je ukupan broj sjecišta $a_1 = 0$, ukupan broj odječaka (dijelova pravaca) $b_1 = 1$, a ukupan broj dijelova ravnine $c_1 = 2$. Stoga bismo mogli reći da u tom slučaju vrijedi $a_1 - b_1 + c_1 = 0 - 1 + 2 = 1$.
Za $n = 2$ uočavamo $a_2 = 1$, $b_2 = 4$, $c_2 = 4$ pa je $a_2 - b_2 + c_2 = 1 - 4 + 4 = 1$.
Za $n = 3$ uočavamo $a_3 = 3$, $b_3 = 9$, $c_3 = 7$ pa je $a_3 - b_3 + c_3 = 3 - 9 + 7 = 1$.

Za $n = 4$ uočavamo $a_4 = 6$, $b_4 = 16$, $c_4 = 11$ pa je $a_4 - b_4 + c_4 = 6 - 16 + 11 = 1$.
Za $n = 5$ uočavamo $a_5 = 10$, $b_5 = 25$, $c_5 = 16$ pa je $a_5 - b_5 + c_5 = 10 - 25 + 16 = 1$.
Na temelju toga naslućujemo da bi mogla vrijediti generalizacija $a_n - b_n + c_n = 1$ koja je u potpunosti smislena za $n \geq 2$.



Slika 5.19: Pravci (sjecišta, odsječci, dijelovi ravnine)

Dokaz. Dokaz provodimo pomoću **principa matematičke indukcije** po n, $n \geq 2$.
1) Baza indukcije:
Za $n = 2$ vrijedi da je $a_2 - b_2 + c_2 = 1 - 4 + 4 = 1$.

2) Pretpostavka indukcije:
Pretpostavimo da za neki prirodni broj n, $n \geq 2$, vrijedi naslućena jednakost $a_n - b_n + c_n = 1$.

3) Korak indukcije:
Na temelju te pretpostavke želimo dokazati da slijedi valjanost te jednakosti i za prirodni broj $n + 1$, tj. da vrijedi $a_{n+1} - b_{n+1} + c_{n+1} = 1$, $n \geq 2$.

Pravac p_{n+1} presijeca sve pravce p_1, p_2,..., p_n pa na svakom poveća broj sjecišta za 1. Stoga vrijedi $a_{n+1} = a_n + n \cdot 1 = a_n + n$. To znači da se broj sjecišta a_n poveća za n.
Jednako tako, budući da pravac p_{n+1} presijeca sve pravce p_1, p_2,..., p_n, na svakom poveća broj odsječaka za 1. S druge strane, pravci p_1, p_2,..., p_n odsijecaju na pravcu p_{n+1} ukupno $n + 1$ odsječak. Stoga vrijedi $b_{n+1} = b_n + n \cdot 1 + (n + 1) = b_n + 2n + 1$. To znači da se broj odsječaka b_n poveća za $2n + 1$.
Budući da pravci p_1, p_2,..., p_n presijecaju pravac p_{n+1} na ukupno $n + 1$ dijelova, uočavamo da se upravo za toliko poveća broj dijelova ravnine c_n dodavanjem pravca p_{n+1}. Dakle, zaključujemo da vrijedi $c_{n+1} = c_n + n + 1$.
Prema tome i koristeći pretpostavku indukcije računamo da je:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} + c_{n+1} &= (a_n + n) + (b_n + 2n + 1) + (c_n + n + 1) \\ &= (a_n - b_n + c_n) + (n - 2n - 1 + n + 1) \\ &= a_n - b_n + c_n = 1 \end{aligned}$$

Zaista, primjenom pretpostavke indukcije smo dobili ono što smo i željeli.
Budući da smo provjerili da:
- jednakost vrijedi za $n = 2$
- iz pretpostavke da ona vrijedi za neki prirodni broj n slijedi da vrijedi i za $n + 1$,

prema aksiomu matematičke indukcije zaključujemo da je izraz $a_n - b_n + c_n$ jednak broju 1 za svaki prirodni broj $n \geq 2$. □

5.13 Pravci koji dijele ravninu

Zadatak 1:
Neka je u ravnini dano n pravaca p_1, p_2,..., p_n u općem položaju (nikoja tri ne prolaze jednom točkom niti među njima ima paralelnih) i neka je $D_2(n)$ broj dijelova na koje ti pravci dijele ravninu. Koliki je $D_2(n)$?

Rješenje:
$D_2(n)$ ćemo odrediti primjenom **metode rekurzije**.
Promatrajmo broj dijelova $D_2(n-1)$ na koje $n-1$ pravac p_1, p_2,...,p_n ravnine dijeli ravninu. Uočimo da možemo koristiti sliku 5.19 iz prethodnog zadatka. Iz te slike, odnosno iz crteža *Pravci koji dijele ravninu.gsp* zaključujemo da se dodavanjem n-tog pravca u ravninu broj dijelova $D_2(n - 1)$ poveća za n. (Uočimo da je n upravo i broj dijelova što ga $n - 1$ pravac određuje na n-tom pravcu.) Stoga vrijedi **rekurzivna relacija**:

$$D_2(n) = D_2(n - 1) + n.$$

Sada primjenjujemo **metodu teleskopiranja**, tj. ispisujemo redom izraze za
$D_2(n)$, $D_2(n - 1)$, $D_2(n - 2)$,..., $D_2(3)$ i $D_2(2)$:

$$\begin{aligned}
D_2(n) &= D_2(n-1) + n \\
D_2(n-1) &= D_2(n-2) + (n-1) \\
D_2(n-2) &= D_2(n-3) + (n-2) \\
&\vdots \\
D_2(4) &= D_2(3) + 4 \\
D_2(3) &= D_2(2) + 3 \\
D_2(2) &= D_2(1) + 2.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem tih relacija se poništavaju neki izrazi na lijevoj i desnoj strani jednakosti pa dobivamo:

$$D_2(n) = D_2(1) + 2 + 3 + 4 + ... + (n-2) + (n-1) + n.$$

Očito je da je $D_2(1) = 2$ pa možemo pisati

$$D_2(n) = 2+2+3+4+...+(n-2)+(n-1)+n = 1+(1+2+3+4+...+(n-2)+(n-1)+n).$$

Uočavamo da je $1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-2) + (n-1) + n$ zapravo zbroj prvih n prirodnih brojeva. Znamo da je zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (prema tvrdnji tzv. Gaussove dosjetke). Stoga vrijedi

$$D_2(n) = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Zadatak 2:
U narednom zadatku ćemo drugom metodom dokazati da vrijedi prethodno doneseni zaključak.
Dokaži da je broj dijelova $D_2(n)$ na koje n pravaca $p_1, p_2, ..., p_n$ u općem položaju (nikoja tri ne prolaze jednom točkom niti među njima ima paralelnih) dijele ravninu jednak

$$D_2(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

([12], str. 214).

Dokaz. Dokaz provodimo pomoću **principa matematičke indukcije** po n. Kao pomoć pri vizualizaciji koristimo crtež *Pravci koji dijele ravninu.gsp*.
1) Baza indukcije:
Jednakost je istinita za $n = 1$ jer vrijedi da je $D_2(1) = \frac{1^2 + 1 + 2}{2} = 2$, a znamo da jedan pravac dijeli ravninu na dva dijela.

2) Pretpostavka indukcije:
Pretpostavimo da za neki prirodni broj n vrijedi jednakost $D_2(n) = \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

3) Korak indukcije:
Na temelju te pretpostavke želimo dokazati da slijedi valjanost te jednakosti i za prirodni broj $n+1$, tj. da vrijedi $D_2(n+1) = \dfrac{(n+1)^2+(n+3}{2}$.
Budući da pravci p_1, p_2,...,p_n presijecaju pravac p_{n+1} na ukupno $n+1$ dijelova, uočavamo da se upravo za toliko poveća broj dijelova ravnine dodavanjem pravca p_{n+1}. Dakle, zaključujemo da vrijedi rekurzivna relacija $D_2(n+1) = D_1(n) + (n+1)$.
Prema tome i koristeći pretpostavku indukcije računamo da je:

$$\begin{aligned} D_2(n+1) &= \frac{n^2+n+2}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2+2n+2}{2} = \frac{(n^2+2n+1)+(n+1)+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2} \end{aligned}$$

Zaista, primjenom pretpostavke indukcije smo dobili ono što smo i željeli.
Budući da smo provjerili da:
- jednakost vrijedi za $n = 1$
- iz pretpostavke da ona vrijedi za neki prirodni broj n slijedi da vrijedi i za $n+1$,

prema aksiomu matematičke indukcije zaključujemo da polazna jednakost
$D_2(n) = \dfrac{n^2+n+2}{2}$ vrijedi za svaki prirodni broj n. □

5.14 Ravnine koje dijele prostor

Zadatak:
Dokažimo da je broj dijelova $D_3(n)$ na koje n ravnina π_1, π_2,..., π_n, od kojih nikoje četiri ne prolaze jednom točkom, niti nema paralelnih, a niti ima paralelnih njihovih presječnica, dijele prostor jednak

$$D_3(n) = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$$

([12], str. 214).

Dokaz. Ovo je nešto teži problem u odnosu na prethodni, ali se brzo rješava primjenom prethodnog rezultata. Dokaz provodimo pomoću **principa matematičke indukcije** po n.

1) Baza indukcije:

Jednakost je istinita za $n = 1$ jer vrijedi da je $D_3 = \dfrac{(1+1)(1^2-1+6)}{6} = 2$, a znamo da jedna ravnina dijeli prostor na dva dijela.

2) Pretpostavka indukcije:

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n vrijedi jednakost $D_3(n) = \dfrac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$.

3) Korak indukcije:
Na temelju te pretpostavke želimo dokazati da slijedi valjanost te jednakosti i za prirodni broj $n+1$, tj. da vrijedi $D_3(n+1) = \dfrac{(n+2)\left[(n+1)^2-n+5\right]}{6}$.
Uočavamo da ravnina π_{n+1} presijeca ravnine $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n$ u n pravaca. Uočimo da ti pravci prema prethodnom zadatku (zadatak 1)) zadatku dijele ravninu π_{n+1} na $D_1(n)$, odnosno $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ dijelova. Stoga se upravo za toliko poveća broj dijelova prostora dodavanjem ravnine π_{n+1}. Dakle, zaključujemo da vrijedi rekurzivna relacija $D_3(n+1) = D_3(n) + D_1(n)$. Prema tome i koristeći pretpostavku indukcije računamo da je:

$$\begin{aligned}
D_3(n+1) &= \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6} + \frac{n^2+n+2}{2} = \frac{n^3-n^2+6n+n^2-n+6+3(n^2+n+2)}{6} \\
&= \frac{n^3+3n^2+8n+12}{6} = \frac{(n+2)(n^2+n+6)}{6} = \frac{(n+2)\left[(n+1)^2-n+5\right]}{6} \\
&= \frac{[(n+1)+1]\left[(n+1)^2-(n+1)+6\right]}{6}.
\end{aligned}$$

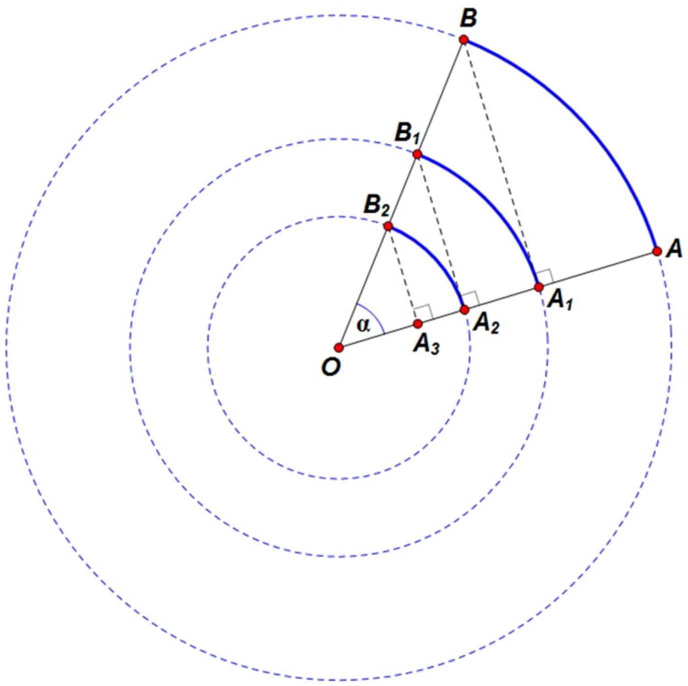
Zaista, primjenom pretpostavke indukcije smo dobili ono što smo i željeli.
Budući da smo provjerili da:
- jednakost vrijedi za $n = 1$
- iz pretpostavke da ona vrijedi za neki prirodni broj n slijedi da vrijedi i za $n+1$,

prema aksiomu matematičke indukcije zaključujemo da polazna jednakost
$D_3(n) = \dfrac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$ vrijedi za svaki prirodni broj n. □

Napomenimo da smo broj $D_3(n)$ mogli odrediti pomoću **metode rekurzije** analogno kao u prethodnom primjeru.

5.15 Geometrijski red u koncentričnim kružnicama

Zadatak:
Na slici 5.20 je prikazan niz koncentričnih kružnica sa središtem u točki O. α je mjera kuta $\angle AOB$ izražena u stupnjevima, a $|OA| = 10$cm. Polumjeru $\overline{OA}$ pripada niz točaka $A_1, A_2, A_3, ...$, a polumjeru $\overline{OB}$ pripada niz točaka $B_1, B_2, B_3, ...$ Točka A_1 je sjecište polumjera $\overline{OA}$ i okomice iz točke B na taj polumjer. Točka A_2 je sjecište polumjera $\overline{OA}$ i okomice iz točke B_1 na taj polumjer itd. Zbroj duljina svih kružnih lukova $\widehat{AB}+\widehat{A_1B_1}+\widehat{A_1B_1}+...$ jednak je $\frac{5\pi\alpha}{18}$cm ([29]).



Slika 5.20

Rješenje:
$\alpha = |\angle AOB|$
$|OA| = |OB| = 10$cm
$A_1, A_2, A_3, ... \in \overline{OA}$
$B_1, B_2, B_3, ... \in \overline{OB}$
$\widehat{AB} + \widehat{A_1B_1} + \widehat{A_2B_2} + ... = \frac{5\pi\alpha}{18}$cm

Budući da točke A_1 i B_1, točke A_2 i B_2, točke A_3 i B_3,... pripadaju istim kružnicama čija su središta u točki O, zaključujemo da vrijedi:

$$\begin{gathered}|OA_1| = |OB_1|\\ |OA_2| = |OB_2|\\ |OA_3| = |OB_3|\\ \vdots\end{gathered}$$

Primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{|OA_1|}{|OB|} \Rightarrow |OA_1| = |OB|\cos\alpha = 10\cos\alpha = |OB_1|$$

$$\cos\alpha = \frac{|OA_2|}{|OB_1|} \Rightarrow |OA_2| = |OB_1|\cos\alpha = 10\cos^2\alpha = |OB_2|$$

$$\cos\alpha = \frac{|OA_3|}{|OB_2|} \Rightarrow |OA_3| = |OB_2|\cos\alpha = 10\cos^3\alpha = |OB_3|.$$

Znamo da je duljina l kružnog luka kružnice opsega o, koji odgovara središnjem kutu veličine α (čija je mjera izražena u stupnjevima), dana je izrazom: $l = \frac{o}{360^\circ}\cdot\alpha$. Odnosno, vrijedi $l = \frac{r\pi}{180^\circ}\cdot\alpha$, pri čemu je r duljina polumjera kružnice.

Stoga vrijedi:

$$\widehat{AB} = \frac{|OA|\pi\alpha}{180^\circ} = \frac{10\pi\alpha}{180^\circ} = \frac{\pi\alpha}{18^\circ}$$

$$\widehat{A_1B_1} = \frac{|OA_1|\pi\alpha}{180^\circ} = \frac{10\pi\alpha\cos\alpha}{180^\circ} = \frac{\pi\alpha\cos\alpha}{18^\circ}$$

$$\widehat{A_2B_2} = \frac{|OA_2|\pi\alpha}{180^\circ} = \frac{10\pi\alpha\cos^2\alpha}{180^\circ} = \frac{\pi\alpha\cos^2\alpha}{18^\circ}$$

$$\widehat{A_3B_1} = \frac{|OA_3|\pi\alpha}{180^\circ} = \frac{10\pi\alpha\cos^3\alpha}{180^\circ} = \frac{\pi\alpha\cos^3\alpha}{18^\circ}$$

$$\vdots$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo

$$\widehat{AB} + \widehat{A_1B_1} + \widehat{A_2B_2} + \widehat{A_3B_3} + ... = \frac{\pi\alpha}{18^\circ} + \frac{\pi\alpha\cos\alpha}{18^\circ} + \frac{\pi\alpha\cos^2\alpha}{18^\circ} + \frac{\pi\alpha\cos^3\alpha}{18^\circ} + ...$$

Znamo da vrijedi $\widehat{AB} + \widehat{A_1B_1} + \widehat{A_2B_2} + ... = \frac{5\pi\alpha}{18^\circ}$cm. Stoga zaključujemo

$$\frac{\pi\alpha}{18^\circ} + \frac{\pi\alpha\cos\alpha}{18^\circ} + \frac{\pi\alpha\cos^2\alpha}{18^\circ} + \frac{\pi\alpha\cos^3\alpha}{18^\circ} + ... = \frac{5\pi\alpha}{18^\circ}.$$

Množenjem te jednakosti s $\frac{18°}{\pi\alpha}$ dobivamo $1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + ... = 5$. Uočavamo da je to geometrijski red čiji je prvi član jednak $a_1 = 1$, a kvocijent $q = \cos\alpha$. Budući da je $|q| = |\cos\alpha| < 1$, ($|\cos\alpha| = 1$ za $\alpha = 0°$ ili $\alpha = 180°$ ili $\alpha = 360°$, ali u tim slučajevima zadatak nema smisla), uočeni geometrijski red je konvergentan pa je njegova suma jednaka

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\cos\alpha}.$$

Stoga je $\frac{1}{1-\cos\alpha} = 5$, odnosno $5 - 5\cos\alpha = 1$. Iz toga slijedi da je $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ pa je traženi kut jednak $\alpha \approx 36,86989765° \approx 36°52'12''$.

Zadatak smo riješili primjenom **algebarske metode** i **metodom uočavanja pravilnosti**.

5.16 Diofant u pravokutnom trokutu

Zadatak:
Odredite sve pravokutne trokute kojima su duljine stranica prirodni brojevi i pri tome je duljina jedne od njih 17 ([43]).

Rješenje: Budući da je u zadatku riječ o pravokutnom trokutu, naslućujemo da ćemo za određivanje duljina a, b i c njegovih stranica najvjerojatnije trebati primijeniti Pitagorin poučak, tj. tvrdnju da tada za taj trokut vrijedi odnos duljina stranica $a^2 + b^2 = c^2$.
Nadalje, uočimo da nije rečeno je li zadana duljina hipotenuze ili duljina jedne od kateta tog pravokutnog trokuta. Stoga treba ispitati obje te mogućnosti pa razlikujemo dva slučaja.

I) Zadana je duljina hipotenuze c koja iznosi 17. U tom slučaju trebamo **rješavati diofantsku jednadžbu** drugog stupnja $a^2 + b^2 = 17^2$. Dobivenu jednadžbu pišemo u obliku $a^2 + b^2 = 289$, a do njenog rješenja možemo doći kombiniranjem. Uočavamo da trebamo odrediti prirodne brojeve a i b, pri čemu je zbroj njihovih kvadrata jednak 289. Ispisujemo sve kvadrate koji su manji od 289: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225 i 256. Kombiniranjem tih kvadrata zaključujemo da među tim kvadratima postoji samo jedan par koji zadovoljava uvjet. To su 64 i 225 (jer je $64 + 225 = 289$). Budući da je $8^2 = 64$ i $15^2 = 225$ te vrijedi $8 \in \mathbb{N}$ i $15 \in \mathbb{N}$, tražena Pitagorina trojka je $(a, b, c) = (8, 15, 17)$. Dakle, radi se o trokutu s duljinama stranica 8, 15 i 17.

II) Zadana je duljina jedne katete, recimo a, koja iznosi 17. Stoga **diofantsku jednadžbu** drugog stupnja $17^2+b^2 = c^2$, odnosno $c^2-b^2 = 289$. Tu jednadžbu rješavamo

metodom umnoška pa broj 289 zapisujemo kao umnožak broja 1 i prostih faktora: $289 = 1 \cdot 17 \cdot 17$. Tada jednadžbu pišemo u obliku $(c-b)(c+b) = 1 \cdot 17 \cdot 17$.

Kombiniranjem dobivamo tri različita sustava dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama:

1) Uočimo da je sustav $\begin{cases} c-b = 1 \cdot 17 \\ c+b = 17 \end{cases}$ ekvivalentan sustavu $\begin{cases} c-b = 17 \\ c+b = 1 \cdot 17 \end{cases}$.

   Rješenje tih dvaju sustava je uređeni par $(b,c) = (0,17)$. Budući da $0 \notin \mathbb{N}$, zaključujemo da $(0,17)$ nije traženo rješenje jednadžbe $c^2 - b^2 = 289$.

2) Rješenje sustava $\begin{cases} c-b = 17 \cdot 17 \\ c+b = 1 \end{cases}$ je uređeni par $(b,c) = (-144, 145)$.

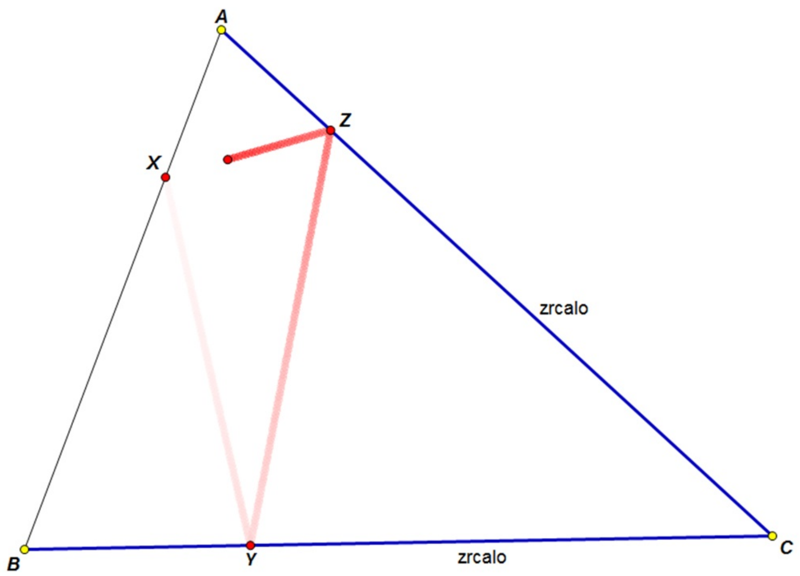
   Budući da $-144 \notin \mathbb{N}$, zaključujemo da $(-144,145)$ nije traženo rješenje jednadžbe $c^2 - b^2 = 289$.

3) Konačno, kombiniranjem dobivamo i sustav $\begin{cases} c-b = 1 \\ c+b = 17 \cdot 17 \end{cases}$ čije je rješenje uređeni par $(b,c) = (144,145)$.
   Budući da $144 \in \mathbb{N}$ i $145 \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je $(144,145)$ traženo rješenje jednadžbe $c^2 - b^2 = 289$. U ovom slučaju je dobivena Pitagorina trojka $(a,b,c) = (17,144,145)$. Dakle, radi se o trokutu s duljinama stranica 17, 144 i 145.

Dakle, jedini pravokutni trokutu koji zadovoljavaju tražena svojstva imaju duljine stranica 8, 15 i 17, odnosno 17, 144 i 145.

5.17 Svjetlosna zraka u trokutu

Potrebna predznanja učenika:
- zakon refleksije (Kut upada jednak je kutu refleksije.)
- teorem o ortocentru trokuta (Pravci kojima pripadaju visine trokuta se sijeku u jednoj točki.)
- definicija tetivnog četverokuta (Tetivni četverokut je četverokut kojemu se može opisati kružnica.)
- svojstva tetivnog četverokuta (npr. „Ako su kutovi nad istom tetivom sukladni, onda je taj četverokut tetivan.“ ili „Ako su nasuprotni kutovi četverokuta suplementarni, onda je četverokut tetivan.“)
Crtež: *Svjetlosna zraka u trokutu.gsp*



Slika 5.21: Svjetlosna zraka u trokutu (uvod u problem)

Uvod u problem

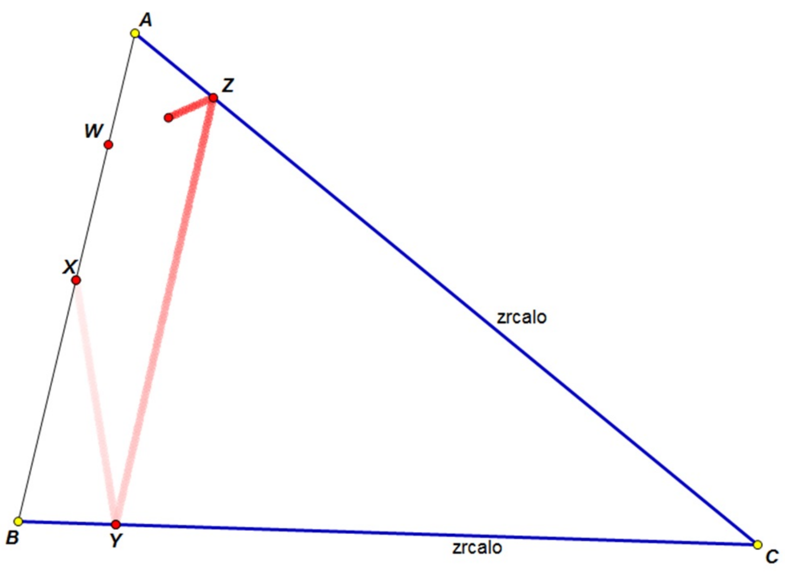
Premda je ovaj problem sasvim geometrijske prirode, lakše je ako ga protumačimo kao fizikalni problem. Zamislimo da smo u sobi koja je u obliku trokuta $\triangle ABC$, a čiji su zidovi $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ zrcala (zadana situacija pomalo podsjeća na sjedenje unutar kaleidoskopa). Iz lasera u točki X dužine $\overline{AB}$ je poslana svjetlosna zraka na dužinu $\overline{BC}$. Zraka se u točki Y dužine $\overline{BC}$ reflektira prema dužini $\overline{AC}$ te se od točke Z vraća prema točki X. Opisana situacija je prikazana na slici 5.21, a učenici zraku odašilju u crtežu *Svjetlosna zraka u trokutu (1).gsp*. Odakle bi svjetlosna zraka trebala biti poslana i u kojim točkama bi se trebala reflektirati o zidove (zrcala) da prijeđe najmanji mogući put? ([6], str. 90-94)

Rješavanje zadanog problema i njemu srodnih problema ćemo prikazati u obliku heurističkog razgovora između nastavnika i učenika. Tijekom tog razgovora nastavnik učenicima postavlja pitanja koja potiču refleksivno mišljenje.

Uvodni problem 1

Prije nego što riješimo zadani problem, razmotrimo pod kojim uvjetima se događa da se svjetlosna zraka koja je odaslana iz točke X vrati u tu istu točku nakon reflektiranja. Naime, vrlo lako se može dogoditi da učenicima promakne taj problem te im iz danog crteža postane sasvim očito da će se odaslana zraka odbijanjima o „zrcala“ uvijek vratiti u početnu točku X.

Stoga možemo primijeniti **načelo problemnosti** tako da učenicima situaciju najprije učinimo nejasnom, a potom jasnom. Njihovu „predrasudu“ da će se odaslana zraka uvijek vratiti u početnu točku možemo razbiti tako da u crtežu *Svjetlosna zraka u trokutu (uvodni problem 1).gsp* (slika 5.22) uoče da se odaslana zraka nakon odbijanja ne mora uvijek vratiti u početnu točku. Zapravo, to se događa u samo jednom specijalnom slučaju. Pritom je također važno da uoče da se i u tom slučaju odbijanje odvija po zakonu refleksije, tj. da ne postoji neka greška u tom crtežu.



Slika 5.22: Svjetlosna zraka se ne mora uvijek vratiti u početnu točku

Vratimo se na *uvodni problem 1*. Dakle, svjetlosna zraka je odaslana iz točke X sa stranice $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$. Trebamo odrediti položaj točke Y, $Y \in \overline{BC}$, tako da se zraka svjetlosti odaslana iz točke X reflektira o „zrcalo“ $\overline{BC}$ u točki Y pa potom o „zrcalo“ $\overline{AC}$ te se ponovno vrati u početnu točku X.

Nastavnik učenicima savjetuje da u crtežu *Svjetlosna zraka u trokutu (uvodni problem 1).gsp* točku Y na stranici $\overline{BC}$ namjeste tako da se točka W (dobivena refleksijom svjetlosne zrake o stranicu $\overline{AB}$) podudara s početnom točkom X. Učenici bi tada možda mogli naslutiti u kojem položaju treba biti točka Y u odnosu na točku X tako da se svjetlosna zraka iz točke Z reflektira u početnu točku X. Ako to ipak ne uoče, onda bi se heuristički razgovor mogao odvijati u sljedećem smjeru.

P: Točku X preslikajte zrcalnosimetrično s obzirom na pravac BC. Dobivenu točku označite s X'. Točku X preslikajte zrcalnosimetrično s obzirom na pravac AC. Dobivenu točku označite s X''. Potom konstruirajte pravac $X'X''$. Što bi se dogodilo kada bi se svjetlosna zraka odaslana iz točke X reflektirala u točku koja nastaje presjekom dužine $\overline{BC}$ i pravca $X'X''$?

O: Zbog zakona refleksije ta bi se zraka potom reflektirala u točku koja nastaje presjekom dužine $\overline{AC}$ i pravca $X'X''$, a potom u početnu točku X.

Tako učenici zaključuju kako odrediti položaj tražene točke Y te zaključuju da taj položaj ovisi o položaju zadane točke X.

Konstrukcija:
Zatim učenici provode konstrukciju tražene točke Y, a time i konstrukciju točke Z. (Vidi sliku 5.23 i crtež *Svjetlosna zraka u trokutu (konstrukcija 1).gsp*.)

1. Točku X preslikamo zrcalnosimetrično s obzirom na pravac BC. Dobivenu točku označimo s X'.

2. Točku X preslikamo zrcalnosimetrično s obzirom na pravac AC. Dobivenu točku označimo s X''.

3. Konstruiramo pravac $X'X''$.

4. Sjecište pravaca $X'X''$ i BC označimo s Y, a sjecište pravaca $X'X''$ i AC označimo sa Z.

Dokaz. Preporučljivo je da učenici dokažu da je točka Y dobivena na opisani način tražena točka.

1. • Budući da je zrcalna simetrija izometrija ravnine, vrijedi $|\angle XYB| = |\angle X'YB|$.

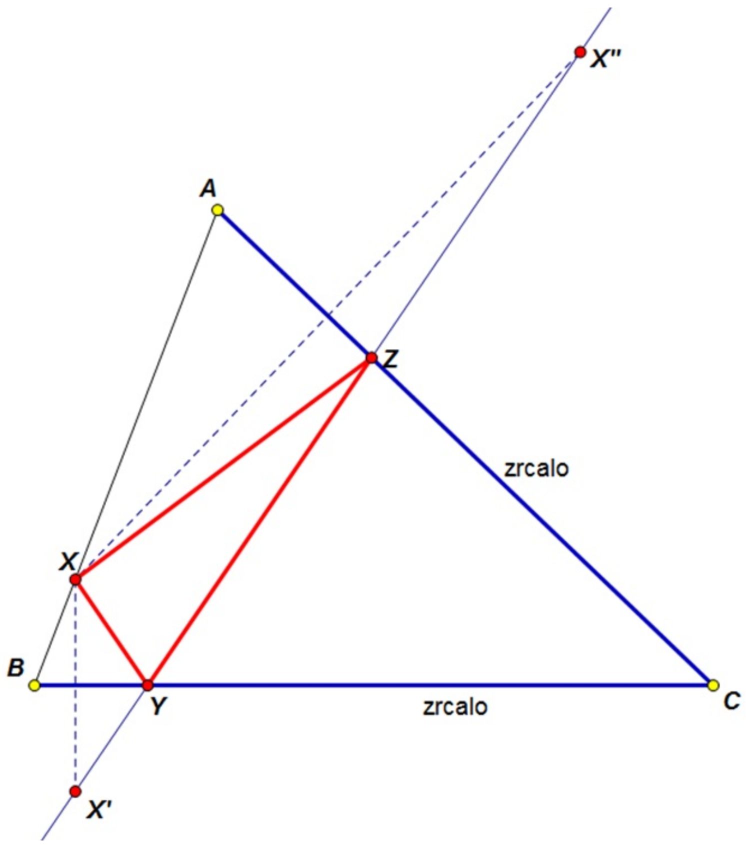
- Vršni kutovi su sukladni pa vrijedi $|\angle X'YB| = |\angle X''YC|$.

Iz toga slijedi $|\angle XYB| = |\angle X''YC|$. Dakle, zbog zakona refleksije zraka se nakon reflektiranja u točki Y „zrcala“ $\overline{BC}$ reflektira do točke Z „zrcala“ $\overline{AC}$.

2.
- Vršni kutovi su sukladni pa vrijedi $|\angle YZC| = |\angle X''ZA|$.
- Budući da je zrcalna simetrija izometrija ravnine, vrijedi $|\angle X''ZA| = |\angle XZA|$.

Iz toga slijedi $|\angle XZC| = |\angle XZA|$. Dakle, zbog zakona refleksije zraka se nakon reflektiranja u točki Z „zrcala“ $\overline{AC}$ reflektira do točke X „zrcala“ $\overline{AB}$., tj. vraća se u početnu točku iz koje je odaslana svjetlosna zraka.

□



Slika 5.23: Prikaz konstrukcije točaka Y i Z

Uvodni problem smo riješili **konstruktivnom metodom**, točnije **metodom zrcalne simetrije**.

Uvodni problem 2

Učenike možemo potaknuti da pokušaju generalizirati prethodni problem (*uvodni problem 1*). Ako ne uspiju, možemo im sami zadati jednu moguću generalizaciju tog problema.
Zadatak:
Svjetlosna zraka izlazi iz zadane točke A, reflektira se redom na danim pravcima p i q, a nakon refleksija prolazi danom točkom B. Konstruirajte tu svjetlosnu zraku ([12], str. 173).

Rješenje:
Analiza:
Učenici bi (lako) mogli uočiti da ovaj problem mogu riješiti primjenjujući metodu rješavanja iz prethodnog problema. Dakle, očito je da je također potrebno koristiti **metodu zrcalne simetrije**.

Konstrukcija:
Zatim učenici provode konstrukciju tražene svjetlosne zrake. (Vidi sliku 5.24 i crtež *Svjetlosna zraka u trokutu (uvodni problem 2).gsp*.)

1. Točku A preslikamo zrcalnosimetrično s obzirom na pravac p. Dobivenu točku označimo s A'.

2. Točku B preslikamo zrcalnosimetrično s obzirom na pravac q. Dobivenu točku označimo s B'.

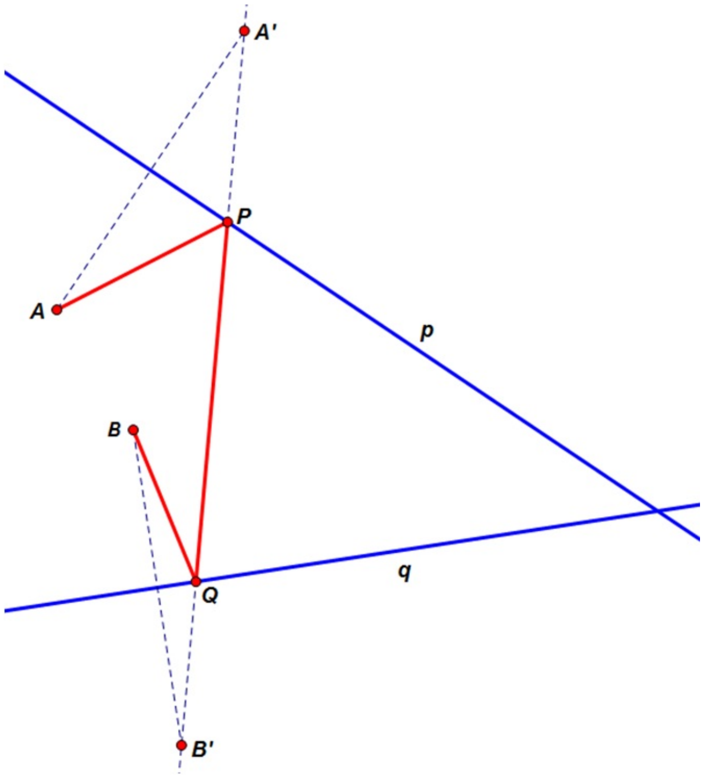
3. Konstruiramo pravac $A'B'$.

4. Sjecište pravaca $A'B'$ i p označimo s P, a sjecište pravaca $A'B'$ i q označimo sa Q.

Tražena svjetlosna zraka je izlomljena linija $APQB$.
Uočimo da je ovaj problem zapravo generalizacija prethodnog problema (uvodni problem 1). Naime, kada bi se u ovom zadatku imali poseban slučaj u kojem se zadane točke A i B podudaraju, onda bismo upravo dobili već razmatranu situaciju u kojoj se odaslana svjetlosna zraka vraća u početnu točku, tj. ta zraka postaje „zatvorena“ i time tvori trokut.

Dokaz. Preporučljivo je da učenici dokažu da je izlomljena linija $APQB$ dobivena na opisani način tražena svjetslosna zaraka. Dokaz provode analogno kao i u dokazivanju prethodnog problema (uvodni problem 1).

Nastavljamo s rješavanjem problema koji nam je zadan na početku. Stoga odsada pa nadalje razmatramo samo situaciju u kojoj se reflektirana zraka svjetlosti odbijanjima vraća u početnu točku X. Očito je da tada trag te zrake tvori trokut.



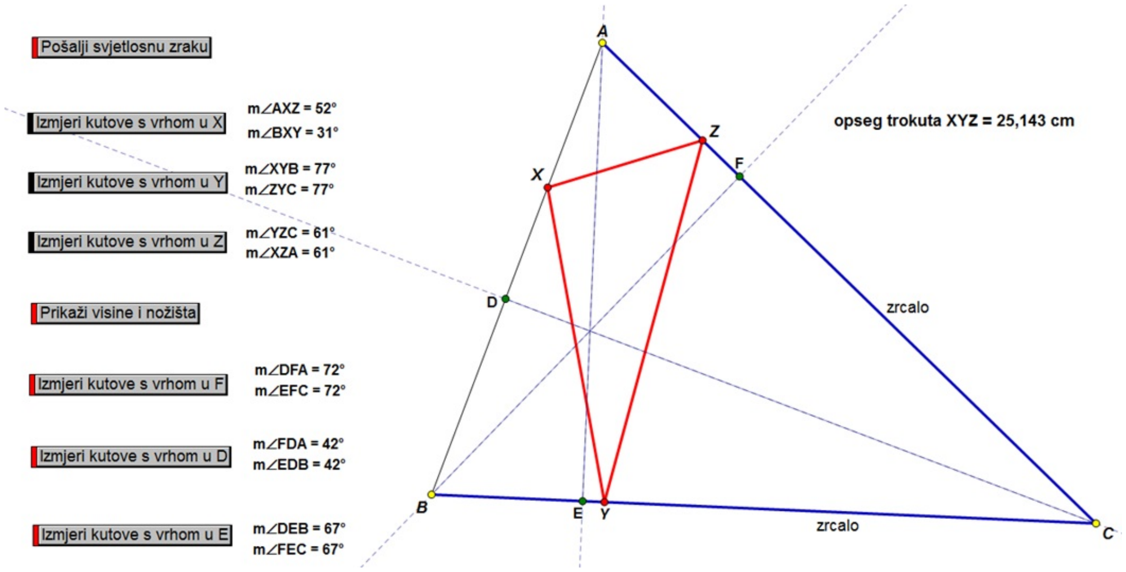
Slika 5.24: Prikaz konstrukcije svjetlosne zrake $APQB$

Slutnja

Do slutnje učenici dolaze na temelju slike 5.25.
P: Otvori crtež *Svjetlosna zraka u trokutu (1).gsp*. Pritisni tipku kojom ćeš poslati svjetlosnu zraku unutar trokuta. Zatim pritisni tipku koja će pokazati mjere kutova $\angle XYB$, $\angle ZYC$, $\angle YZC$, $\angle XZA$, $\angle AXZ$ i $\angle BXY$.

1.
P: Što primjećuješ u vezi s mjerama tih kutova? Provjeri svoja opažanja pomičući točku X.
O: Uočavam sukladne kutove, točnije da vrijedi $|\angle XYB| = |\angle ZYC|$ i $|\angle YZC| = |\angle XZA|$. Nadalje, ne vrijedi nužno da su kutovi $\angle AXZ$ i $\angle BXY$ sukladni.

2.
P: Objasni svoja zapažanja iz 1. pitanja koristeći svoja znanja o refleksiji svjetlosnih zraka.
O: Sukladnost navedenih parova kutova vrijedi zbog refleksije na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Dakle, tu vrijedi zakon refleksije ili odbijanja, tj. kut upada jednak je kutu refleksije.



Slika 5.25: Svjetlosna zraka u trokutu (naslućivanje)

P: Podsjetimo se da trebamo odrediti odakle bi svjetlosna zraka trebala biti poslana i u kojim točkama bi se trebala reflektirati o zidove (zrcala) da prijeđe najmanji mogući put. U kakvoj su vezi trokut koji tvori zraka svojim odbijanjima i put koji zraka pritom prijeđe?
O: Opseg tako nastalog trokuta je jednak duljini puta koji zraka prijeđe tijekom odbijanja.

P: Pomiči točku X po dužini $\overline{AB}$ sve dok opseg trokuta $\triangle XYZ$ ne postane najmanji moguć. Potom pritisni tipku kako bi se pojavile sve tri visine na stranice trokuta $\triangle ABC$ i njihova nožišta.

3.
P: Što uočavaš u vezi s položajem točaka X, Y i Z u odnosu na nožišta visina?
O: Čini se da se točke X, Y i Z podudaraju s nožištima visina. (Dakle, vrhovi trokuta $\triangle XYZ$ koji je najmanjeg mogućeg opsega se podudaraju s nožištima visina zadanog šiljastog trokuta $\triangle ABC$.)

Pomakni bilo koji vrh trokuta $\triangle ABC$, ali tako da trokut ostane šiljastokutan. Opet pomiči točku X sve dok opseg trokuta $\triangle XYZ$ ne postane najmanji moguć. Provjeri vrijedi li zapažanje iz 3. pitanja.
Ponovi prethodni korak najamanje još jedanput.

4.
P: Što možeš naslutiti o parovima kutova s vrhovima u nožištima visina (kao što kutovi $\angle DFA$ i $\angle EFC$, $\angle FDA$ i $\angle EDB$ te kutovi $\angle DEB$ i $\angle FEC$)?
O: Spomenuti kutovi s vrhovima u nožištima visina su međusobno sukladni u navedenim parovima, tj. vrijedi $|\angle DFA| = |\angle EFC|$, $|\angle FDA| = |\angle EDB|$ i $|\angle DEB| = |\angle FEC|$.

Provjeri svoj zaključak iz 4. pitanja pritiskajući tipku kako bi se pokazale mjere kutova s vrhovima u nožištima visina.

5.
P: Je li tvoja slutnja iz 4. pitanja točna ako je trokut $\triangle ABC$ tup?
O: Da, tada je također točna.

6.
P: Točnost: Osvrni se na svoje slutnje iz 4. pitanja i 5. pitanja. Koliko si siguran da je svaka od tih slutnji uvijek točna? Možeš li navesti uvjerljive dokaze ili protuprimjere kojima ćeš potkrijepiti svoje mišljenje?
O: Odgovori se mogu razlikovati od učenika do učenika.

Izazov

P: Ako smatraš da je tvoja slutnja uvijek točna, navedi neke primjere kojima ćeš potkrijepiti svoje gledište i pokušaj uvjeriti svog suradnika u paru ili preostale članove svoje skupine. Štoviše, potkrijepi svoje slutnje logičnim objašnjenjem ili uvjerljivim dokazom. Ako sumnjaš da tvoja slutnja ili slutnja tvog suradnika nije uvijek točna, pokušaj navesti protuprimjer.

Ovdje je važno da nastavnik zauzme neutralan stav ili, možda još i bolje, da ima kritički i suzdržan odnos, da bude sumnjičav i pun nevjerice te nesklon oduševljavanju za neki od zaključaka. Nije preporučljivo da učenike navodi na to da je taj zaključak uistinu istinit. Nastavnik bi čak mogao izazvati učenike da njega i druge razredne skeptike uvjere u to.

Dokaz

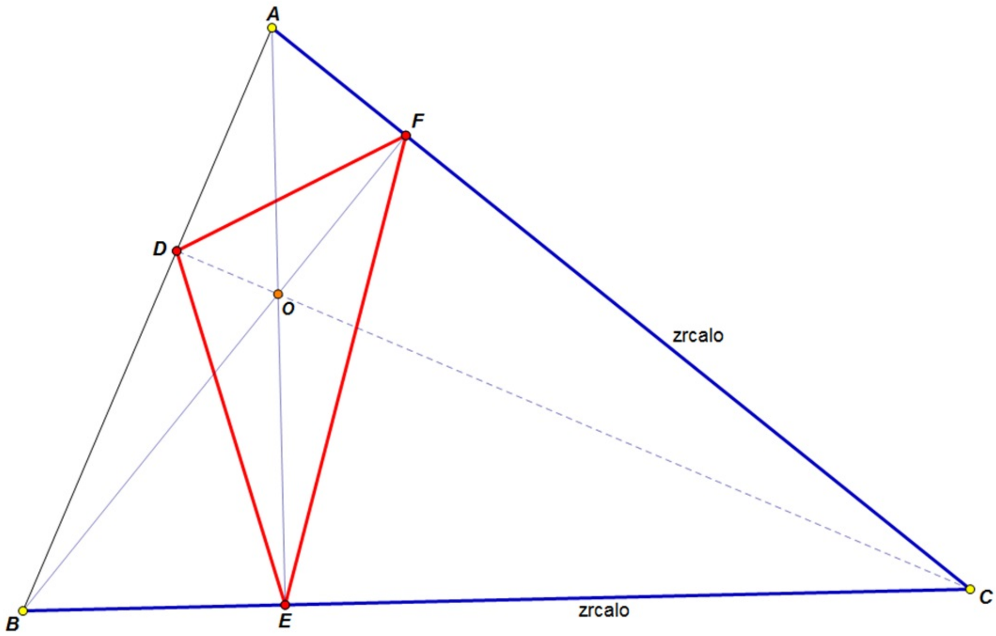
Zacijelo si naslutio sljedeća dva zaključka:
- Trokut $\triangle XYZ$ upisan šiljastom trokutu $\triangle ABC$ ima najmanji opseg kada se njegovi vrhovi podudaraju s nožištima visina zadanog trokuta $\triangle ABC$.
- Tada vrijedi da su kutovi s vrhovima u nožištima visina međusobno sukladni, točnije vrijedi $|\angle DFA| = |\angle EFC|$, $|\angle FDA| = |\angle EDB|$ i $|\angle DEB| = |\angle FEC|$.

P: Koliko ste sigurni u točnost svojih zaključaka. Na temelju svojih prijašnjih iskustava možete zaključiti da je moguće donijeti pogrešne slutnje samo na temelju opažanja. Na primjer, slutnje se mogu pokazati netočnima kada se krenu razmatrati krajnji, tj. granični slučajevi. Kako ste sigurni da ste provjerili sve moguće slučajeve?

Učenici će se uvjeriti u istinitost svojih tvrdnji argumentirajući činjenice u vođenom dokazu. Prvo će dokazati drugu slutnju.

Dokaz sukladnosti kutova s vrhovima u nožištima visina

Konstruiraj sjecište visina i taj ortocentar označi s O (kao na slici 5.26).



Slika 5.26: Svjetlosna zraka u trokutu (dokazivanje sukladnosti kutova)

7.
P: Što možeš reći o nasuprotnim kutovima $\angle OEC$ i $\angle OFC$ u četverokutu $OECF$? Objasni svoje tvrdnje.
O: Uočavamo da vrijedi $|\angle OEC| = 90°$ i $|\angle OFC| = 90°$.
Stoga vrijedi $|\angle OEC| + |\angle OFC| = 180°$ pa zaključujemo da su ti kutovi suplementarni.

8.
P: Koristeći odgovor na 7. pitanje, što možeš zaključiti o četverokutu $OECF$.
O: Znamo da ako su nasuprotni kutovi četverokuta suplementarni, onda je taj četverokut tetivan. Stoga je četverokutu $OECF$ tetivan.
ili
Budući da su kutovi $\angle OEC$ i $\angle OFC$ pravi, trokute $\triangle OEC$ i $\triangle OFC$ možemo upisati u polukružnicu s različitih strana promjera $\overline{OC}$ (prema Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice) pa stoga četverokut $OECF$ možemo upisati u kružnicu, tj. četverokut $OECF$ je tetivan.

9.
P: Koristeći odgovor na 8. pitanje, objasni što možeš zaključiti o kutovima $\angle EOC$ i $\angle EFC$?
O: Uočimo da su $\angle EOC$ i $\angle EFC$ obodni kutovi nad istim lukom $\widehat{EC}$ kružnice čiji je promjer $\overline{OC}$. Znamo da su svi obodni kutovi nad nekim lukom kružnice sukladni pa stoga vrijedi $|\angle EOC| = |\angle EFC|$.

10.
P: Što možeš reći o nasuprotnim kutovima $\angle ADO$ i $\angle AFO$ u četverokutu $ADOF$? Koje je stoga vrste četverokut $ADOF$? (Svoju slutnju možeš provjeriti konstrukcijom u Sketchpadu.)
O: Uočavamo da vrijedi $|\angle ADO| = 90°$ i $|\angle AFO| = 90°$.
Stoga vrijedi $|\angle ADO| + |\angle AFO| = 180°$ pa zaključujemo da su ti kutovi suplementarni. Znamo da ako su nasuprotni kutovi četverokuta suplementarni, onda je taj četverokut tetivan. Stoga je četverokut $ADOF$ tetivan.

11.
P: Što možeš zaključiti o kutovima $\angle AFD$ i $\angle AOD$ na temelju odgovora na 10. pitanje?
O: Uočimo da su $\angle AFD$ i $\angle AOD$ obodni kutovi nad istim lukom $\widehat{AD}$ kružnice čiji je promjer $\overline{AO}$. Znamo da su svi obodni kutovi nad nekim lukom kružnice sukladni pa stoga vrijedi $|\angle AFD| = |\angle AOD|$.

12.
P: Što možeš reći o kutovima $\angle EOC$ i $\angle AOD$? Objasni svoj odgovor.
O: Uočavamo da su $\angle EOC$ i $\angle AOD$ vršni kutovi pa su oni sukladni.

13.
P: Što prema tome možeš zaključiti iz odgovora na 9., 11. i 12. pitanje?
O: Iz toga slijedi da su $\angle EFC$ i $\angle AFD$ sukladni kutovi. Učenici mogu uočiti da su i njihovi komplementarni kutovi također sukladni, tj. vrijedi $|\angle BFE| = |\angle BFD|$.

14.
P: Objasni što se dobije primjenom istog argumenta na parove kutova s vrhovima u nožištima preostale dvije visine.
O: Odgovori se mogu razlikovati od učenika do učenika, ali bi u konačnici svi trebali analogno zaključiti da vrijedi $|\angle FDA| = |\angle EDB|$ i $|\angle DEB| = |\angle FEC|$, tj. da su kutovi s vrhovima u nožištima visina međusobno sukladni. Ako učenici ne uspiju doći do tih zaključaka primjenom analogije, uputno je provesti sličan slijed heurističkog razgovora i za te parove kutova.

Napomena:
Preporučljivo je razmisliti postoje li još neke varijacije navedenog dokaza i pokušati ih osmisliti. Za učenike bi moglo biti korisno da usporede napor uložen u provođenje svakog od navedenih dokaza. Također bi bilo poučno da ponove navedeni dokaz u specijalnim slučajevima kada je $\triangle ABC$ pravi ili tupi trokut.

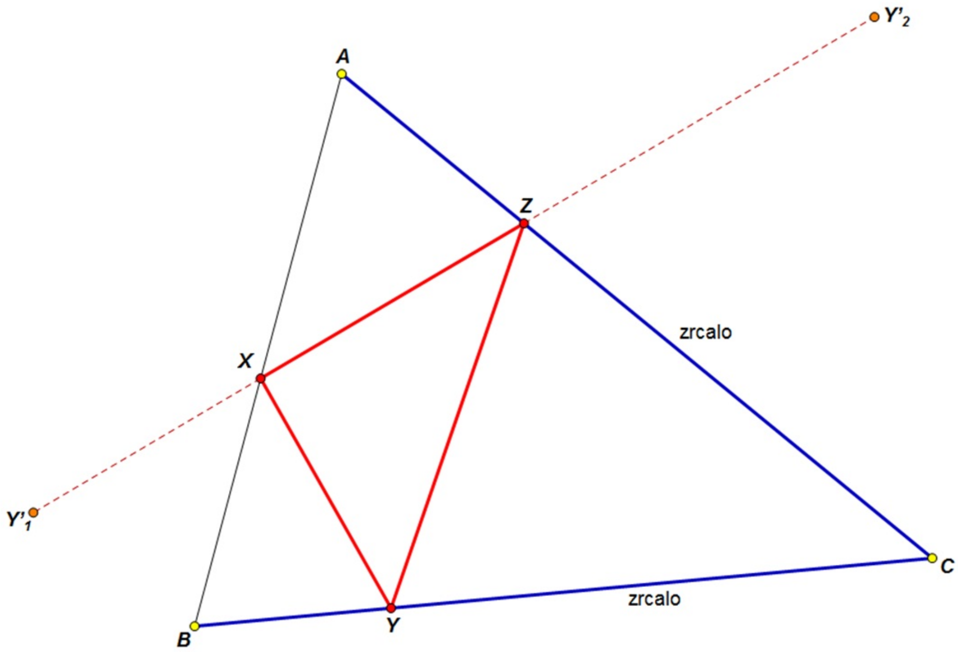
Formalan dokaz

U dijelu rada u kojem smo opisivali heuristiku i heurističko mišljenje smo već spomenuli da nije dobro heurističko rasuđivanje poistovjećivati sa strogim dokazom. Stoga je poželjno da učenici zaključke dobivene tijekom heurističkog razgovora oblikuju u formalni dokaz.

Dokaz minimuma opsega

Sada ćemo dokazati prvu slutnju da trokut $\triangle XYZ$ upisan šiljastom trokutu $\triangle ABC$ ima najmanji opseg kada se njegovi vrhovi podudaraju s nožištima visina zadanog trokuta $\triangle ABC$. Neformalni dokaz također provodimo koracima heurističkog razgovora između nastavniak i učenika.
- Pritisni tipku kojom ćeš sakriti visine i mjere svih kutova kako bi crtež bio pregledniji.
- Točku Y preslikaj zrcalnosimetrično s obzirom na pravac AB. Dobivenu točku označi s Y_1'.
- Točku Y preslikaj zrcalnosimetrično s obzirom na pravac AC. Dobivenu točku označi s Y_2' (kao na slici 5.27).

15.
P: Što možeš reći o dužinama $\overline{XY_1'}$ i $\overline{XY}$, odnosno $\overline{Y_2'Z}$ i $\overline{ZY}$? Objasni svoje tvrdnje.
O: Zbog svojstva zrcalne simetrije vrijedi $|XY_1'| = |XY|$ i $|Y_2'Z| = |ZY|$.



Slika 5.27: Svjetlosna zraka u trokutu (dokazivanje minimuma opsega)

16.
P: Koristeći odgovor na 15. pitanje, što možeš reći o ukupnoj duljini puta $|XY| + |YZ| + |ZX|$ u odnosu na ukupnu duljinu puta $|XY_1'| + |ZX| + |ZY_2'|$?
O: Duljine tih dvaju puteva su jednake, odnosno vrijedi
$|XY| + |YZ| + |ZX| = |XY_1'| + |ZX| + |ZY_2'|$.

17.
P: Što uočavaš u vezi s točkama X, Z i Y_2'? Pokušaj objasniti (dokazati) svoja zapažanja.
O: Naslućujemo da točke X, Z i Y_2' uvijek pripadaju istom pravcu, a to objašnjavamo na sljedeći način. Zbog zakona refleksije vrijedi da su kutovi $\angle XZA$ i $\angle YZC$ sukladni, a zbog svojstva zrcalne simetrije vrijedi da su kutovi $\angle YZC$ i $\angle Y_2'ZC$ sukladni. Stoga vrijedi i da su kutovi $\angle XZA$ i $\angle Y_2'ZC$ sukladni. Budući da je AC pravac, vrijedi $|\angle XZA| + |\angle XZC| = 180°$. Zbog $|\angle XZA| = |\angle Y_2'ZC|$ vrijedi $|\angle Y_2'ZC| + |\angle XZC| = 180°$. Stoga je XZY_2' pravac, odnosno točke X, Z i Y_2' su kolinearne.

18.
P: Pomiči točku X sve dok duljina puta $|XY_1'| + |ZX| + |ZY_2'|$ ne postane najmanja moguća. Objasni položaj točke X kada to postigneš.

O: Duljina puta $|XY_1'| + |ZX| + |ZY_2'|$ je najmanja moguća kada točke Y_1', X, Z i Y_2' pripadaju istom pravcu. Dakle, točka X treba biti smještena tako da vrijedi $|\angle AXZ| = |\angle BXY_1'|$.

19.
P: Dokaži da ako položaj točke X zadovoljava uvjet u 18. zadatku, onda vrijedi $|\angle AXZ| = |\angle BXY|$.
O: Zbog svojstva izometrije vrijedi $|\angle BXY_1'| = |\angle BXY|$. Ako je zadovoljen uvjet iz 18. pitanja, tj. da vrijedi $|\angle AXZ| = |\angle BXY_1'|$, onda iz toga slijedi $|\angle AXZ| = |\angle BXY|$.

20.
P: Koristeći odgovor na 19. pitanje i dobiveni rezultat dokazan u prvom dijelu ove aktivnosti, što možeš zaključiti o smještaju trokuta $\triangle XYZ$ tako da njegov opseg bude najmanji moguć.
O: Da bi trokut $\triangle XYZ$ imao najmanji mogući opseg, sljedeći kutovi moraju biti sukladni: $|\angle AXZ| = |\angle BXY|$, $|\angle BYX| = |\angle CYZ|$ i $|\angle XZA| = |\angle YZC|$. Kutovi s vrhovima u nožištima nožišnog trokuta $\angle DEF$ su međusobno sukladni, tj. vrijedi $|\angle DFA| = |\angle EFC|$, $|\angle FDA| = |\angle EDB|$ i $|\angle DEB| = |\angle FEC|$. Stoga slijedi da se trokut $\triangle XYZ$ podudara s nožišnim trokutom $\triangle DEF$. (Drugačije rečeno, nožišni trokut $\triangle DEF$ zadovoljava uvjet da su kutovi s vhovima u nožištima sukladni pa se trokut $\triangle XYZ$ mora podudarati s nožišnim trokutom $\triangle DEF$.)

Napomena:
Spomenuti argument pokazuje da nožište nožišnog trokuta zadovoljava uvjet i time osigurava rješenje, ali time nije dokazana jedinstvenost rješenja. Može se dokazati da vrhovi trokuta s najmanjim opsegom uvijek podudaraju s nožištima visina.

Formalan dokaz

Preporučljivo je da učenici zaključke dobivene tijekom heurističkog razgovora oblikuju u formalni dokaz.

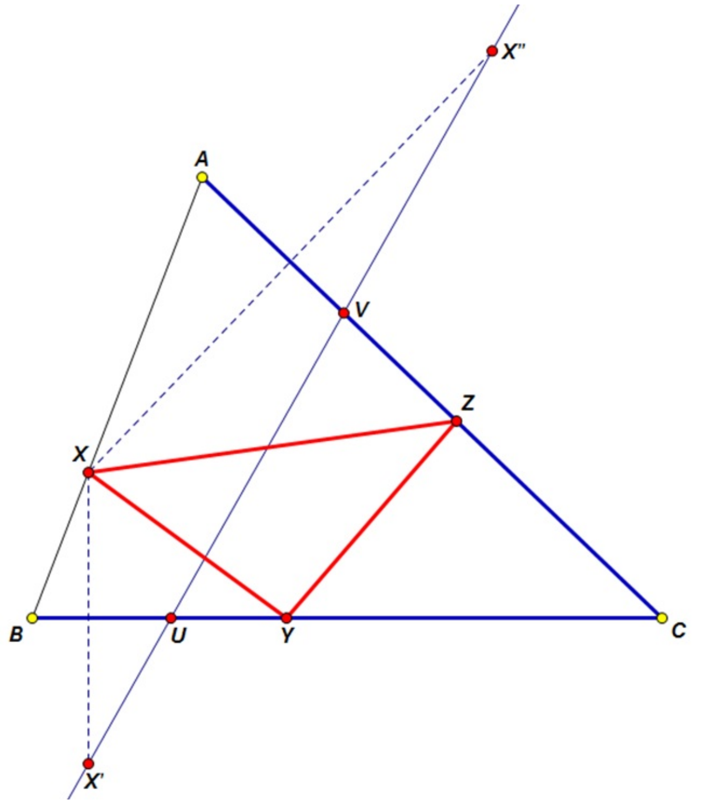
Dodatna istraživanja

Iskoristi crtež *Svjetlosna zraka (1).gsp* u svrhu provjere slučaja kada je $\triangle ABC$ pravi ili tupi trokut. Kamo treba smjestiti trokut da bi imao najmanji mogući opseg? Pokušaj objasniti svoje rješenje.

Nadalje, učenicima možemo postaviti sljedeći zadatak.
Zadatak:
Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan trokut i X točka na stranici $\overline{AB}$. U taj trokut upišite trokut $\triangle XYZ$ najmanjeg opsega ([12], str. 174).

Rješenje:
Učenici mogu pretpostaviti da je za dobivanje traženog trokuta $\triangle XYZ$ potrebno koristiti **metodu zrcalne simetrije** kao i u prethodnim primjerima. Stoga konstrukciju točaka U (pripada dužini $\overline{BC}$) i V (pripada dužini $\overline{AC}$) provodimo na već poznat način.

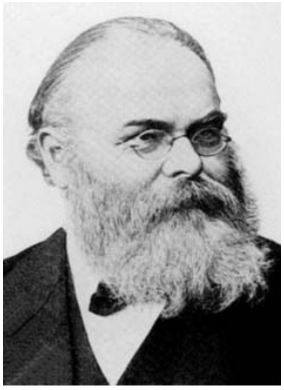
Učenici mogu u crtežu *Svjetlosna zraka u trokutu (dodatno).gsp* isprobati koji je položaj točaka Y i Z najpovoljniji tako da trokut $\triangle XYZ$ ima najmanji opseg. Isprobavanjem (kao na slici 5.28) učenici mogu zaključiti nepotpunom indukcijom da je traženi trokut najmanjeg opsega upravo onaj čiji se vrhovi Y i Z podudaraju s konstruiranim točkama U i V.
Učenici tu tvrdnju mogu i dokazati.



Slika 5.28: Određivanje upisanog trokut najmanjeg opsega ako je točka X fiksna

Povijesna crtica

Problem trokuta najmanjeg opsega upisanog u šiljasti trokut prvi je predložio Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), profesor na njemačkim sveučilištima u Göttingenu i u Berlinu (slika 5.29). Bio je jedan od najistaknutijih istraživača varijacijskog (infinitezimalnog) računa u devetnaestom stoljeću.



Slika 5.29: Karl Hermann Amandus Schwarz (1843. - 1921.) ([20])

5.18 Napoleonov teorem

Potrebna predznanja učenika:
- konstrukcija jednakostraničnog trokuta kojem je zadana duljina stranica
- svojstva tetivnog četverokuta (osobito poznavanje svojstva da su nasuprotni kutovi tetivnog četverokuta suplemetarni te obrat te tvrdnje)
- definicija deltoida
- svojstvo deltoida da su mu dijagonale međusobno okomite

crtež: *Napoleonov teorem.gsp*

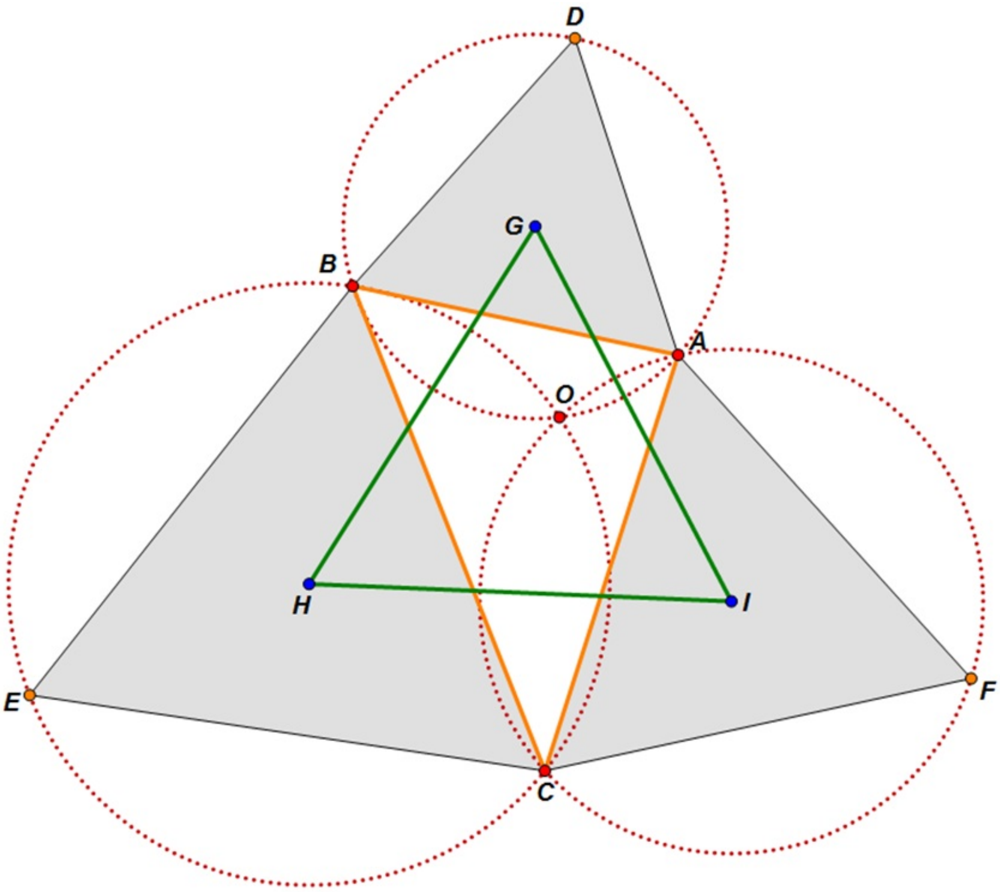
Uvod u problem

Ova aktivnost može biti provedna kao nastavak razmatranja svojstava *Fermat-Torricellijeve točke* jer se odnosi na daljnja istraživanja istih geometrijskih odnosa. Međutim, ovu aktivnost je moguće provesti neovisno o aktivnosti o *Fermat-Torricellijevoj točki*. Konstruiramo li jednakostranične trokute nad stranicama bilo kojeg trokuta, uočit ćemo neke zanimljive posljedice. Jedna je ta da se sve tri kružnice opisane jednakostraničnim trokutima sijeku u istoj točki koju nazivamo ***Fermat-Torricellijeva točka***. Ta osobita točka trokuta je na slici 5.30 označena slovom O.

Spomenimo još jedno važno svojstvo *Fermat-Torricellijeve točke*, a to je da je ukupna udaljenost te točke od vrhova konstruiranih jednakostraničnih trokuta najmanja moguća. Ta osobita točka trokuta je tako nazvana jer je francuski matematičar Pierre de Fermat (1601. – 1665.) prvi potaknuo rješavanje tog problema u pismu upućenom talijanskom matematičaru Evangelistu Torricelliju (1608. – 1647.), koji je taj problem i riješio.

U ovoj aktivnosti ćemo otkriti još jednu tvrdnju povezanu s konstrukcijom takvog oblika, a čije se otkriće pripisuje Napoleonu Bonaparteu, poznatom francuskom generalu i caru ([6], str. 119-121).

Rješavanje zadanog problema i njemu srodnih problema ćemo prikazati u obliku heurističkog razgovora između nastavnika i učenika. Tijekom tog razgovora nastavnik učenicima postavlja pitanja koja potiču refleksivno mišljenje kod učenika.



Slika 5.30: *Napoleonov teorem* (početni problem)

Slutnja

Otvori crtež *Napoleon (početni problem).gsp*. Pomiči točke u crtežu kako bi se dobro upoznao s prikazanim konstruiranim likovima.
Dužinama poveži središta G, H i I jednakostraničnih trokuta.

1.
P: Pomiči bilo koji vrh trokuta $\triangle ABC$. Što primjećuješ na trokutu $\triangle GHI$? Ako je potrebno, izmjeri i pomiči još neke elemente na crtežu kako bi potvrdio svoje slutnje.
O: Uočavam da je trokut $\triangle GHI$ jednakostraničan (slika 5.30).

2.
P: Provjeri svoju pretpostavku iz 1. pitanja za sljedeće posebne slučajeve, a potom izreci svoja opažanja.
- Trokut $\triangle ABC$ je tup.
- Točke A, B i C pripadaju istom pravcu.
- Konstruirani jednakostranični trokuti su okrenuti prema unutrašnjosti trokuta $\triangle ABC$ i međusobno se preklapaju.
O: U svim tim slučajevima trokut $\triangle GHI$ i dalje ostaje jednakostraničan.

Izazov

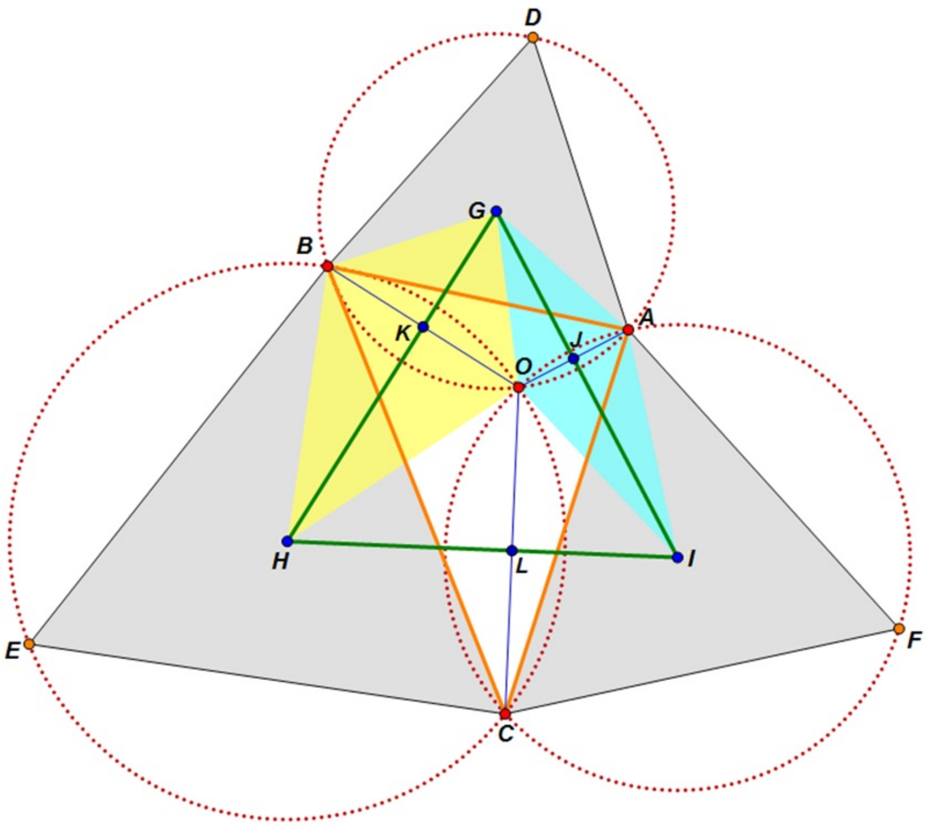
Pokušaj dokazati svoju slutnju iz 1. pitanja. Ovo učenicima osigurava priliku da pokušaju osmisliti vlastite dokaze.

Uputa:
1) Konstruiraj dužine $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ i $\overline{CO}$ i razmotri njihovu vezu sa stranicama trokuta $\triangle GHI$.
2) Iskoristi poznata svojstva Fermat-Torricellijeve točke.
Ako „zaglaviš“ u daljnjem dokazivanju, pročitaj detaljnije upute koje slijede.

Dokaz

U prethodnom dijelu je bilo potrebno otkriti sljedeću tvrdnju: „Ako konstruiraš jednakostranične trokute nad svakom stranicom danog trokuta i zatim dužinama povežeš središta tih trokuta, onda ćeš dobiti jednakostraničan trokut.“
Ispod su navedene upute za planiranje mogućeg dokaza. Pažljivo ih pročitaj i primijeni.
Već smo upoznati s činjenicom da se tri kružnice opisane trokutu sijeku u jednoj točki (*Fermat-Torricellijeva točka O*). Sada ćemo upotrijebiti jedno od svojstava tetivnog četverokuta kako bismo dokazali da mjera svakog unutarnjeg kuta trokuta $\triangle GHI$ iznosi 60°.

Pritisni tipku kako bi se pokazale dužine $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ i $\overline{CO}$ i njihova sjecišta sa stranicama trokuta $\triangle GHI$.
Po potrebi pritisni tipku na svom crtežu kako bi jasnije mogao vidjeti četverokute tijekom odgovaranja na sljedeća pitanja. Na kraju možeš skriti četverokute kako crtež ne bi postao prezamršen (slika 5.31).



Slika 5.31: Dokazivanje *Napoleonovog teorema*

3.
P: Kojoj vrsti četverokuta pripada četverokut $ABDO$? Obrazloži svoj zaključak.
O: Četverokut $ABDO$ je tetivni jer kružnica prolazi kroz sva četiri njegova vrha.

4.
P: Što možeš zaključiti o mjeri kuta $\angle AOB$ na temelju odgovora na 3. pitanje? Obrazloži svoj zaključak.
O: Budući da je četverokut $DBOA$ tetivan, kutovi $\angle AOB$ i $\angle ADB$ su suplementarni. Iz toga i iz činjenice da mjera kuta $\angle ADB$ iznosi 60° zaključujemo da vrijedi $|\angle AOB| = 120°$.

5.
P: Kojoj vrsti četverokuta pripada četverokut $GBHO$? Obrazloži svoj zaključak.
O: Uočavamo da su dužine $\overline{GB}$ i $\overline{GO}$ polumjeri kružnice sa središtem u točki G i da su dužine $\overline{HB}$ i $\overline{HO}$ polumjeri kružnice sa središtem u točki H. Stoga vrijedi $|GB| = |GO|$ i $|HB| = |HO|$ pa zaključujemo da je četverokut $GBHO$ deltoid.

6.
P: Što možeš zaključiti o mjeri kuta $\angle GKO$ na temelju odgovora na 5. pitanje? Obrazloži svoj zaključak.
O: Budući da vrijedi da su dijagonale deltoida međusobno okomite, vrijedi $|\angle GKO| = 90°$.

7.
P: Kojoj vrsti četverokuta pripada četverokut $GOIA$? Obrazloži svoj zaključak.
O: Uočavamo da su dužine $\overline{GO}$ i $\overline{GA}$ polumjeri kružnice sa središtem u točki G i da su dužine $\overline{IO}$ i $\overline{IA}$ polumjeri kružnice sa središtem u točki I. Stoga vrijedi $|GO| = |GA|$ i $|IO| = |IA|$ pa zaključujemo da je četverokut $GOIA$ deltoid.

8.
P: Što možeš zaključiti o mjeri kuta $\angle GJO$ na temelju odgovora na 7. pitanje? Obrazloži svoj zaključak.
O: Budući da vrijedi da su dijagonale deltoida međusobno okomite, vrijedi $|\angle GJO| = 90°$.

9.
P: Što možeš zaključiti o kutu $\angle KGJ$ četverokuta $GJOK$? Obrazloži svoj zaključak.
O: Znamo da je zbroj mjera svih unutarnjih kutova četverokuta (pa tako i četverokuta $GJOK$) jednak $360°$. Stoga vrijedi

$$|\angle KGJ| = 360° - 90° - 90° - 120° = 360° - |\angle GKO| - |\angle GJO| - |\angle AOB| = 60°.$$

10.
P: Odgovori na analogna pitanja 3.-9. za svaki od preostala dva kuta trokuta $\triangle GHI$.
O: Analognim načinom zaključivanja se može dokazati da mjera jednog od preostala dva kuta trokuta $\triangle GHI$ iznosi $60°$ pa iz toga slijedi da mjera preostalog kuta tog trokuta iznosi također $60°$.

11.
P: Što na temelju svega toga možeš zaključiti?
O: Zaključujem da je trokut $\triangle GHI$ jednakostraničan.

Formalni dokaz

Pregledaj pitanja 3.-11. Potom svojim riječima napiši strogi dokaz svoje prvobitne slutnje. Možeš uključiti i demostraciju crteža kako bi potkrijepio i objasnio svoj dokaz.

Dodatna istraživanja

Istraži što će se dogoditi s trokutom $\triangle GHI$ ako nad stranicama trokuta $\triangle ABC$ smjestimo međusobno slične trokute.
Učenici mogu otkriti naredne dvije zanimljive generalizacije:
1. Ako slične trokute $\triangle DBA$, $\triangle BEC$ i $\triangle ACF$ konstruiramo nad stranicama bilo kojeg trokuta $\triangle ABC$, središta opisanih kružnica tih triju sličnih trokuta G, H i I su vrhovi trokuta koji je sličan tim trima trokutima.

2. Ako slične trokute $\triangle DBA$, $\triangle CBE$ i $\triangle CFA$ konstruiramo nad stranicama bilo kojeg trokuta $\triangle ABC$, središta opisanih kružnica tih triju sličnih trokuta G, H i I su vrhovi trokuta koji je sličan tim trima trokutima.
Uočimo da slični trokuti u tim dvama generalizacijama imaju različitu orijentaciju.

Učenike možemo potaknuti na daljnja istraživanja pitajući ih što se događa ako su veličine kutova $\angle ADB$, $\angle BEC$ i $\angle CFA$ po volji odabrane tako da njihov zbroj iznosi $180°$. Naime, to istraživanje vodi do sljedeće generalizacije:
3. Ako trokute $\triangle DBA$, $\triangle BEC$ i $\triangle ACF$ konstruiramo nad stranicama bilo kojeg trokuta $\triangle ABC$ tako da vrijedi $|\angle ADB| + |\angle BEC| + |\angle CFA| = 180°$, onda se kružnice opisane trokutima $\triangle DBA$, $\triangle BEC$ i $\triangle ACF$ sijeku u jednoj točki, a središta G, H i I tih opisanih kružnica su vrhovi trokuta, pri čemu vrijedi $|\angle IGH| = |\angle ADB|$, $|\angle GHI| = |\angle BEC|$ i $|\angle HIG| = |\angle CFA|$.

Formalan dokaz

Ovu treću generalizaciju možemo dokazati na analogan način kao i u prethodnom primjeru s jednakostraničnim trokutom.

Dokaz. Naprimjer, konstruirajmo kružnice opisane trokutima $\triangle ADB$ i $\triangle BEC$. Točke u kojima se one sijeku su B i O. Povežemo li točku O s vrhovima A, B i C, uočit ćemo da vrijedi $|\angle BOC| = 180° - |\angle BEC|$, $|\angle AOB| = 180° - |\angle ADB|$ i $|\angle BOC| = 180° - |\angle BEC|$.

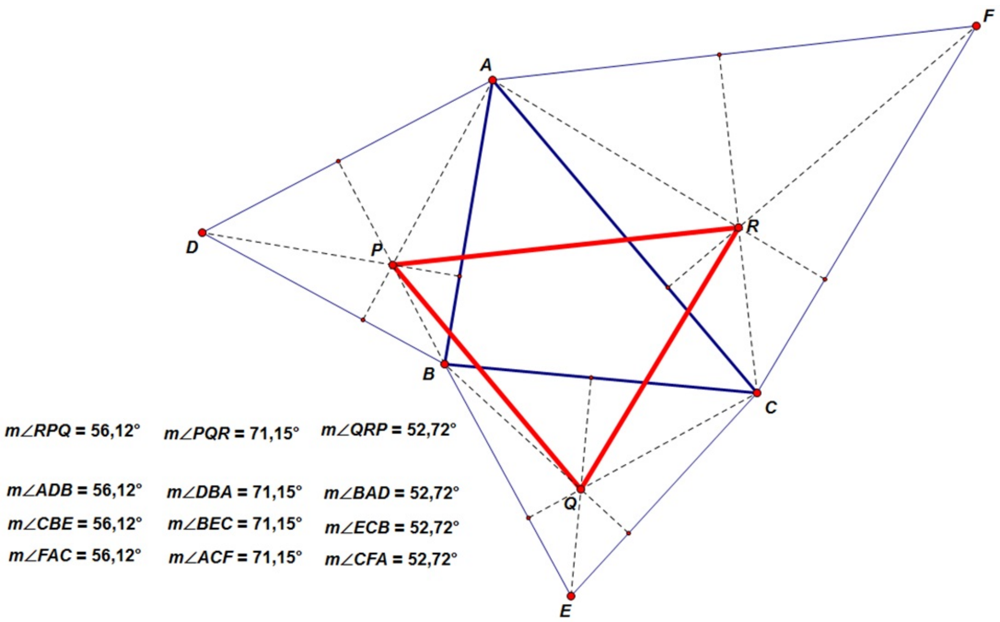
$$|\angle AOC| = 360^\circ - (|\angle BOC| + |\angle AOB|$$
$$= 360^\circ - (180^\circ - |\angle BEC| + 180^\circ - |\angle ADB|) = |\angle BEC| + |\angle ADB| = 180^\circ - |\angle CFA|$$

Dakle, kutovi $\angle BOC$ i $\angle CFA$ su suplementarni pa stoga točka O pripada kružnici opisanoj trokutu $\triangle AFC$. Budući da su dužine $\overline{GH}$, $\overline{HI}$ i $\overline{GI}$ okomite na pripadajuće tetive $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ i $\overline{OA}$ (redom), slijedi da su $OKGJ$, $OKHL$ i $OLIJ$ tetivni četverokuti. Stoga je kut $\angle HIG$ suplementaran kutu $\angle AOC$. Analognim zaključivanjem dobivamo da je kut $\angle CFA$ suplementaran kutu $\angle AOC$. Dakle, vrijedi $|\angle HIG| = |\angle CFA|$. Slično zaključujemo da vrijedi $|\angle IGH| = |\angle ADB|$ i $|\angle GHI| = |\angle BEC|$. □

Napomenimo da su prva i druga generalizacija (koje govore o sličnim trokutima) pojednostavljeni, odnosno specijalni slučajevi treće generalizacije.

Druga zanimljiva inačica već navedene prve generalizacije je dana u crtežu *Napoleon (4. generalizacija-općenito).gsp*.

4. Ako slične trokute $\triangle DBA$, $\triangle BEC$ i $\triangle ACF$ konstruiramo nad stranicama bilo kojeg trokuta $\triangle ABC$ i ako točke P, Q i R odaberemo tako da su smještene u istom položaju u odnosu na ta tri slična trokuta, onda su točke P, Q i R vrhovi trokuta koji je također sličan navedenim trima trokutima.



Slika 5.32: Jedna od generalizacija *Napoleonovog teorema* (ortocentri)

Naprimjer, slika 5.32, odnosno crtež *Napoleon (4. generalizacija-ortocentar).gsp* prikazuje da su odgovarajući ortocentri sličnih trokuta zapravo vrhovi trokuta koji je sličan trima vanjskim trokutima. Slično tome, odgovarajuća težišta i središta kružnica upisanih sličnim trokutima su također vrhovi sličnih trokuta.

Povijesna crtica

Napoleon Bonaparte (1769. - 1821.), francuski vojni strateg, vojskovođa i vladar, je jako uživao u matematici, a osobito u geometriji. Bio je uspješan u bavljenju matematikom. Izgleda da je otkrio i dokazao tvrdnju koju smo razmatrali kao početni problem, a koja je po njemu i nazivana *Napoleonov teorem*. Iskaz tog poučka glasi: „Ako se nad stranicama trokuta prema van (ili pak prema unutra) konstruiraju jednakostranični trokuti, onda su središta tih trokuta vrhovi jednakostraničnog trokuta" ([5]). O tome koliko je cijenio matematiku govori njegova misao: „Napretkom i usavršavanjem matematike uvjetovano je blagostanje države" ([34]).

Bibliografija

[1] A. Čižmešija, *Ideje vodilje u nastavi matematike na primjeru elementarnog optimiranja*, materijali s predavanja na kolegiju *Metodika nastave matematike 3*, Zagreb, 2013./2014.

[2] A. Čižmešija, *Poučavanje i učenje matematike rješavanjem problemskih zadataka*, materijali s predavanja na kolegijima *Metodika nastave matematike 3 i 4*, Zagreb, 2013./2014.

[3] A. Čižmešija, *Prva domaća zadaća*, kolegij *Metodika nastave matematike 4*, Zagreb, travanj 2014.

[4] A. Čižmešija, *Raditi, učiti i razumjeti matematiku*, materijali s predavanja na kolegiju *Metodika nastave matematike 1*, Zagreb, 2012.

[5] B. Dakić, N. Elezović, *Udžbenici i zbirke zadataka iz Matematike za sva četiri razreda gimnazije*, Element, Zagreb

[6] M. D. de Villiers, *Rethinking proof*, Key Curriculum Press, 2003.

[7] Z. Kurnik, *Heuristička nastava*, Matematika i škola 34 (2006), 148-153.

[8] Z. Kurnik, *Heuristički razgovor*, Matematika i škola 37 (2006), 52-56.

[9] Z. Kurnik, *Matematički zadatak*, Matematika i škola 7 (2000), 51-58.

[10] Z. Kurnik, *Metoda razlikovanja slučajeva*, Matematika i škola 21 (2003), 4-10.

[11] Z. Kurnik, *Načelo problemnosti*, Matematika i škola 14 (2002), 148-152.

[12] Z. Kurnik, *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.

[13] Z. Kurnik, *Problemska nastava*, Matematika i škola 15 (2002), 196-202.

[14] Z. Kurnik, *Zadaci s više načina rješavanja*, HMD, Zagreb, 2004.

[15] G. Pólya, *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb, 1956.

[16] G. Pólya, *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb, 2003.

[17] skupina autora u redakciji Vladimira Filipovića, *Filozofijski rječnik*, Nakladni zavod Matice hrvatske, Zagreb, 1989.

[18] Ž. Bjelanović Dijanić, *Učenje istraživanjem u GeoGebri po modelu Georga Pólya*, dostupno na http://bib.irb.hr/datoteka/522342.istrazivanje_Polya_GGB_MiS.pdf (lipanj 2014.)

[19] L. Carroll, *Alice's Adventures in Wonderland*, dostupno na http://www.gutenberg.org/files/11/11-h/11-h.htm (veljača 2015.)

[20] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *Hermann Amandus Schwarz*, dostupno na http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Schwarz.html (veljača 2015.)

[21] Quotes for Bros, *19 Jack Sparrow Quotes about Life*, dostupno na http://www.quotesforbros.com/19-jack-sparrow-quotes-life/ (veljača 2015.)

[22] G. Recinto, *Anatomy of a Good Math Teacher*, dostupno na http://geraldrecinto14.blogspot.com/ (veljača 2015.)

[23] E. Ronda, *Math Knowledge for Teaching Addition*, dostupno na http://math4teaching.com/2012/05/12/math-knowledge-for-teaching-counting-cubes/ (veljača 2015.)

[24] A. H. Schoenfeld, *Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem-Solving Performance*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 10, No. 3 (May, 1979), 99. 173-187, dostupno na http://www.jstor.org/stable/748805 (studeni 2012.)

[25] A. H. Schoenfeld, *Pólya, Problem Solving, and Education*, Mathematics Magazine, Vol. 60, No. 5 (Dec., 1987), 99. 283-291, dostupno na http://www.jstor.org/discover/10.2307/2690409?sid=21105682505653&uid=4&uid=3738200&uid=2 (studeni 2012.)

[26] S. Silverstein, *Changing Perspective: A New Look At Old Problems*, dostupno na http://www.smashingmagazine.com/2012/09/03/changing-perpective-new-look-old-problems/ (veljača 2015.)

[27] *Aleksandar Veliki*, dostupno na http://www.moljac.hr/biografije/aleksandar_veliki.htm (veljača 2015.)

[28] *Citati iz filma* Pirati s Kariba: Nepoznate plime (2011.), dostupno na http://www.imdb.com/title/tt1298650/quotes (veljača 2015.)

[29] *Državna matura iz Matematike, šk. g. 2010./2011., ljetni rok, viša razina (A), 30. zadatak*, dostupno na http://www.ncvvo.hr/drzavnamatura/web/public/dm11ljeto (veljača 2015.)

[30] *George Pólya Quotes and Sayings*, dostupno na http://meetville.com/quotes/author/george-polya/page1 (veljača 2015.)

[31] *Hrvatska enciklopedija - online*, dostupno na http://www.enciklopedija.hr/ (listopad 2014.)

[32] *Hrvatski jezični portal*, dostupno na http://hjp.novi-liber.hr/ (listopad 2014.)

[33] *Hrvatski obiteljski leksikon*, dostupno na http://hol.lzmk.hr/ (listopad 2014.)

[34] *Izreke matematičara i izreke o matematici*, dostupno na http://www.halapa.com/izreke.htm (listopad 2014.)

[35] *Matematičke izreke*, dostupno na http://www.croatianhistory.net/mat/izreke.html (lipanj 2014.)

[36] *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje*, dostupno na http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf (srpanj 2014.)

[37] *Onionesque Reality: Quotes*, dostupno na https://onionesquereality.wordpress.com/quotes/ (veljača 2015.)

[38] *Općinsko-gradsko natjecanje iz matematike učenika srednjih škola Republike Hrvatske, 1. razred, 4. zadatak* (6. ožujka 1998.), dostupno na http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm (siječanj 2015.)

[39] *Proleksis enciklopedija - online*, dostupno na http://proleksis.lzmk.hr/ (listopad 2014.)

[40] *The Dolph Briscoe Center for American History: Mathematician George Pólya at the International Conference on Mathematical Education (ICME-2)*, dostupno na http://www.cah.utexas.edu/db/dmr/image_lg.php?variable=e_math_01150 (siječanj 2015.)

[41] *Thomas Edison - citati, izreke, misli...*, dostupno na http://izreka.com/index.php/osobe/168-thomas-edison-citati-izreke-misli (veljača 2015.)

[42] *To Teach Your Students How to Solve Problems*, dostupno na http://pred.boun.edu.tr/ps/ (siječanj 2015.)

[43] *Županijsko natjecanje iz matematike učenika osnovnih škola Republike Hrvatske, 8. razred, 5. zadatak* (8. travnja 2005.), dostupno na http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-OS.htm (siječanj 2015.)

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavaju se strategije rješavanja problemskih zadataka u nastavi matematike, s posebnim naglaskom na geometrijske probleme. Rad je podijeljen na pet poglavlja, a svako poglavlje se sastoji od nekoliko potpoglavlja. U prvom poglavlju se bavimo matematičkim problemima, heuristikom te problemskom i heurističkom nastavom. U drugom poglavlju istražujemo kako neki od obrazovnih dokumenata (*PISA* i *NOK*) razmatraju pitanja postavljanja i rješavanja problema te primjenu tehnologije u nastavi matematike. U trećem poglavlju proučavamo doprinos matematičara i matematičkog edukatora Georga Pólye razvoju metodike rješavanja problemskih zadataka. U tom poglavlju također analiziramo i četiri Pólyina koraka, tj. temeljne etape pri rješavanju svakog problema. U četvrtom poglavlju upoznajemo razne strategije kojima se rješavaju problemski zadatci. Nadalje, utvrđujemo važnost i učinkovitost poznavanja tih strategija tijekom postupka rješavanja. U zadnjem, petom poglavlju rješavamo geometrijske probleme pomoću opisanih metoda i predlažemo moguće načine njihove implementacije, uz odgovarajuću tehnologiju, u nastavi matematike.

Summary

This thesis examines the strategies of problem solving in mathematics education, with special emphasis on geometric problems. Thesis is divided into five chapters, and each chapter consists of several sections. In the first chapter we deal with mathematical problems, heuristics, problem-based and heuristic-based learning. In the second chapter we investigate how the educational documents (*PISA* and *NOK*) deal with construction and solving of mathematical problems and with the application of technology in mathematics education. In the third chapter we study the important role of mathematician and mathematical educator George Pólya in development of methodology of problem solving. In this chapter we also find Pólya's four steps, i.e. four basic principles of problem solving. In the fourth chapter we introduce various problem solving strategies. Furthermore, we determine the importance and effectiveness of knowing these strategies while solving problems. In the final, fifth chapter we solve geometric problems using the described methods and suggest possible ways of their implementation, with appropriate technology, in mathematics education.

Životopis

Zovem se Dario Mišanec. Rođen sam 18. srpnja 1990. godine u Slavonskom Brodu. Djetinjstvo i mladenaštvo provodim u obližnjem selu Garčinu, u kojem i danas živim. Ondje sam pohađao Osnovnu školu „Vjekoslav Klaić" koju sam završio 2005. godine. Potom upisujem Gimnaziju „Matija Mesić" u Slavonskom Brodu, program opća gimnazija. Srednjoškolsko obrazovanje završavam 2009. godine. Naslov maturalnog rada s područja povijesti je glasio *Alojzije Stepinac - lik i djelo*. Iste godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Završetkom tog studija 2012. godine, na istom fakultetu upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.
Osim matematikom, bavim se i proučavanjem povijesti. U slobodno vrijeme, između ostaloga, volim čitati i voziti bicikl.