

Manipulativni materijali za množenje u razrednoj nastavi matematike

Bolfek, Maja

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Teacher Education / Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:147:061282>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-14**

Repository / Repozitorij:

[University of Zagreb Faculty of Teacher Education - Digital repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE**

**MAJA BOLFEK
DIPLOMSKI RAD**

**MANIPULATIVNI MATERIJALI ZA
MNOŽENJE U RAZREDNOJ NASTAVI
MATEMATIKE**

Čakovec, srpanj 2017.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
UČITELJSKI FAKULTET
ODSJEK ZA UČITELJSKE STUDIJE
Čakovec**

DIPLOMSKI RAD

Ime i prezime pristupnika: Maja Bolfek

**TEMA DIPLOMSKOG RADA: Manipulativni materijali za
množenje u razrednoj nastavi matematike**

MENTOR: doc. dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin

Čakovec, srpanj 2017.

SADRŽAJ

SAŽETAK.....	
SUMMARY	
1. UVOD	1
2. MNOŽENJE U RAZREDNOJ NASTAVI MATEMATIKE.....	3
2.1. Povijest množenja	3
2.2. Metodički pristup obradi množenja prirodnih brojeva u razrednoj nastavi matematike	5
2.2.1. Modeli množenja u razrednoj nastavi matematike.....	6
2.2.2. I-G-S-Z model kod množenja u razrednoj nastavi matematike	13
3. POJAM MNOŽENJA U KURIKULARNIM DOKUMENTIMA I UDŽBENICIMA	17
3.1. Množenje u razrednoj nastavi prema <i>Nastavnom planu i programu</i>	17
3.2. Množenje u razrednoj nastavi prema <i>Nacionalnom okvirnom kurikulumu</i>	19
3.3. Množenje prikazano u udžbenicima drugog razreda osnovne škole.....	21
4. MANIPULATIVNI MATERIJALI U RAZREDNOJ NASTAVI MATEMATIKE	26
4.1. Uloga manipulativnog materijala u razrednoj nastavi matematike.....	26
4.2. Metodički pristup usvajanja novog matematičkog pojma pomoću manipulativnog materijala	29
4.3. Postojeći manipulativni materijal za množenje u razrednoj nastavi	32
5. <i>MNOŽILICA</i> – MANIPULATIVNI MATERIJAL ZA MNOŽENJE	36
5.1. Izrada <i>Množilice</i>	37
5.2. Metodika obrade pojma množenje u razrednoj nastavi pomoću <i>Množilice</i> ...	38
6. PRIMJERI AKTIVNOSTI S <i>MNOŽILICOM</i> ZA MNOŽENJE U RAZREDNOJ NASTAVI.....	45
6.1. Priprave za satove usvajanja novog matematičkog sadržaja množenja s manipulativnim materijalom <i>Množilica</i>	45
6.2. Priprava za sat ponavljanja matematičkog sadržaja množenja s manipulativnim materijalom	67
7. ZAKLJUČAK.....	78
LITERATURA	80
Kratka biografska bilješka.....	83
Izjava o samostalnoj izradi rada.....	84

IZJAVA.....	85
--------------------	-----------

SAŽETAK

U ovom radu sagledane su dvije teme: računska operacija množenja u razrednoj nastavi matematike te korištenje manipulativnih materijala u razrednoj nastavi matematike. Posebna se pozornost posvetila njihovom sjedinjavanju, odnosno obradi i uvježbavanju sadržaja iz množenja prirodnih brojeva uz pomoć manipulativnih materijala.

Prikazan je uvid u povijest računske operacije množenja, kao i aktualni trendovi metodičkog pristupa obradi množenja prirodnih brojeva s naglaskom na modele množenja te I-G-S-Z model.

Analizirani su sadržaji iz množenja u hrvatskim kurikularnim dokumentima (*Nastavnom planu i programu* i *Nacionalnom okvirnom kurikulumu*) kao i dvama udžbenicima iz matematike za drugi razred osnovne škole.

Istaknuta je važnost manipulativnih materijala u razrednoj nastavi matematike kao i njihova uloga u nastavi matematike. Prikazan je metodički pristup usvajanja novih matematičkih sadržaja koristeći manipulativne materijale te su predstavljeni postojeći manipulativni materijali za množenje.

Za potrebe ovog rada, osmišljen je i izrađen manipulativni materijal za množenje pod imenom *Množilica*. Prikazan je način izrade tog materijala te su navedene njegove karakteristike s naglaskom na prednost spram ostalih manipulativnih materijala za množenje.

Na kraju su ponuđene pripreme za obradu i uvježbavanje matematičkih pojmova pomoću *Množilice* u drugom razredu razredne nastave.

KLJUČNE RIJEČI: množenje, modeli množenja, manipulativni materijal, *Množilica*

SUMMARY

Two topics are analyzed in this paper: multiplication in the teaching of math in primary schools and the use of manipulative materials. Special attention is paid to their incorporation, that is, to the learning and training contents of the multiplication of natural numbers by using manipulatives.

Furthermore, a review into the history of multiplication is presented, as well as the current trends in the didactic processing of the multiplication of natural numbers, focusing on multiplication models and I-G-S-Z model.

Contents of the multiplication in the Croatian curricular documents as well as two textbooks in mathematics for the second year of primary school are analyzed.

The importance of manipulative materials in mathematics teaching, as well as their role in the teaching of mathematics, is pointed out. The didactic approach to taking in new mathematical content using manipulative materials is shown, and existing manipulative materials for multiplication are presented.

For the purpose of this paper, manipulative material for multiplication called *Množilica* is developed. The process of creating the material is presented, and its main features, highlighting the advantages over other manipulative multiplication materials, are listed.

At the end of the work suggestions for teaching and learning multiplication in the second year of primary school by using *Množilica* are provided.

KEY WORDS: multiplication, multiplication models, manipulative material, *Množilica*.

1. UVOD

Računska operacija množenja jedna je od osnovne četiri računske operacije. U početnoj nastavi matematike zauzima vrlo važno mjesto te se pojavljuje u drugom razredu razredne nastave prema *Nastavnom planu i programu*. U drugom razredu, množenje je glavni matematički sadržaj i prevladava među aritmetičkim temama. Učenici većinu školske godine svladavaju računsku operaciju množenja pa često dolazi do monotonosti nastave. Dominiraju numerički zadatci, dok se problemski zadatci, koji se ne pojavljuju učestalo, svode na proceduralno rješavanje. Također, učenici imaju poteškoće u svladavanju množenja kada učitelj ne organizira sistemsko vježbanje i ponavljanje tijekom cijelog procesa učenja tablice množenja. Poželjno je da se tablica množenja svakodnevno ponavlja kratkim usmenim i pismenim provjeravama te uz igre i aktivnosti. Često je problem nedostatak razumijevanja zbog preskakanja stupnja konkretizacije (izvor: Predavanje Metodike matematike, 2015).

U učenju množenja nužno je osigurati konkretna iskustva zbog razvojne razine učenika i apstraktnosti matematičkih pojmova. Zbog toga je važno da učitelj u nastavi koristi manipulativni materijal za učenje novih matematičkih pojmova koji će pomoći učenicima na putu svladavanja novog matematičkog pojma. Djeca puno više uživaju u matematičkim iskustvima kada im učitelj ponudi opipljiv, konkretan pristup jer na taj način uspostavljaju vezu s dječjim potrebama i interesima. U nedostatku dostupnosti prikladnog materijala za množenje, došlo je do ideje da se osmisli vlastiti, pristupačan materijal kojeg će moći imati svaki učenik. U ovom radu prikazat će se način na koji se manipulativni materijal može izraditi iz dječje igrache te tako postati prihvatljiv manipulativni materijal kojega može imati školska torba svakog učenika.

Nakon uvoda, u drugom poglavlju ovog rada govori se o računskoj operaciji množenje u razrednoj nastavi s naglaskom na modele množenja te I-G-S-Z model. Uz svaki model navedeni su opisi i primjeri zadataka koji se mogu riješiti pomoću modela, ovisno o kontekstu zadanom tekstualnim zadacima.

Zatim se u trećem poglavlju daje uvid u množenje prema hrvatskim kurikularnim dokumentima (*Nastavni plan i program* i *Nacionalni okvirni kurikulum*) te se analiziraju sadržaji iz dva udžbenika za drugi razred razredne nastave. U kurikularnim dokumentima se najveća pažnja posvetila obrazovnim postignućima i

ishodima, dok je u analizi udžbenika promatran raspored nastavnih jedinica, vezanih uz računsku operaciju množenje, te trendovi pojavljivanja modela za množenje.

U četvrtom poglavlju govori se o manipulativnim materijalima u nastavi matematike. Prikazuje se njihova uloga i metodički pristup kojim učenici usvajaju nova matematička znanja koristeći manipulativne materijale. Opisat će se postojeći materijal za množenje - Cuisenaire štapići i Stern blokovi.

U petom poglavlju prikazat će se novi manipulativni materijal koji je izrađen za potrebe ovog rada. Radi se o prenamjeni dječje igračke u materijal za učenje računske operacije množenja pod imenom *Množilica*. Prikazan je tijek izrade materijala i njegove značajke u nastavi matematike.

U šestom poglavlju dani su prijedlozi priprava za nastavne satove obrade i uvježbavanja računske operacije množenja pomoću *Množilice* u drugom razredu razredne nastave.

2. MNOŽENJE U RAZREDNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Prema *Nastavnom planu i programu* (2006) računska operacija množenja se prvi puta pojavljuje u drugom razredu osnovne škole. Računska operacija množenja uvodi se kao skraćeno zbrajanje jednakih pribrojnika (Markovac, 2001). Najčešće pogreške početnog poučavanja množenja su preskakanje stupnja konkretizacije (Sharma, 2001) te korištenje konkretnog materijala samo u demonstracijske svrhe (Glasnović Gracin, 2012). U stupnju konkretizacije učenici samostalno trebaju manipulirati materijalom, prebrojavati elemente skupova i zatim ih zbrojiti, a nakon toga prelaze na upoznavanje računske operacije množenja kao skraćenog zbrajanja jednakih pribrojnika (Markovac, 2001). Praksa pokazuje da se kod nekih učitelja u razrednoj nastavi množenje svodi na učenje tablice množenja napamet, bez da učenici znaju što zapravo znači računska operacija množenja. Umjesto toga, učitelji bi trebali poticati upotrebu konkretnih materijala kako bi učenici pomoću vizualnih pomagala shvatili princip množenja.

U ovom poglavlju dat će se kratki uvid u povijest računske operacije množenja, nakon čega će se prikazati metodika obrade množenja prirodnih brojeva preko modela množenja i *I-G-S-Z modela*¹.

2.1. Povijest množenja

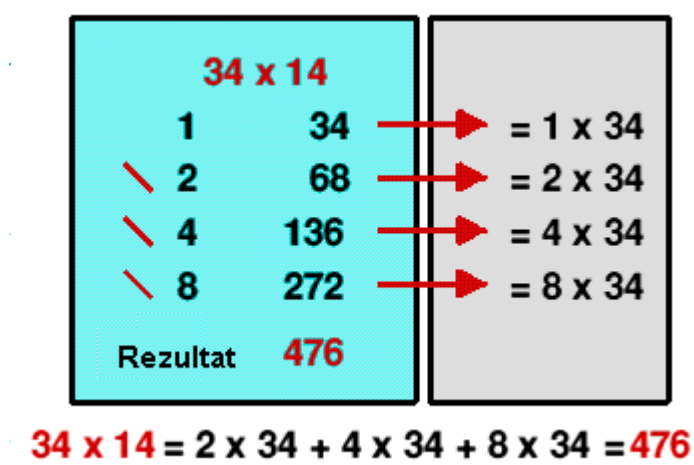
Matematika se kroz povijest razvijala kako se razvijalo i ljudsko društvo. Ljudi su imali potrebu za prebrojavanjem, čak i prije nego što se razvio koncept broja i računskih operacija. Najpoznatija priča je ona o pastiru koji je ujutro, dok je puštao ovce na ispašu, na hrpu stavio kamenčić za svaku svoju ovcu. Navečer, kada su se one vraćale, pastir je za svaku vraćenu ovcu u tor uzeo po jedan kamenčić. Na taj je način pastir prebrojavao svoje ovce i navečer bio siguran da su mu sve ovce na broju (Čekrilija, 2001).

Ljudi su u Starom vijeku koristili ruke, odnosno prste kao pomoć u računanju. „Brojevi manji od 100 smatrani su svakodnevnim brojevima, pa se za njihovo prikazivanje koristila lijeva ruka, dok su se stotice prikazivale desnom rukom.“ (Gusić, 2012, str. 98). Također, u drevnoj Indiji računsku operaciju množenja

¹ *I-G-S-Z (iskustvo-govor-slika-znak)* model prikazuje slijed radnji pri razvijanju apstraktnog mišljenja kod djeteta, odnosno slijed apstrahiranja. Taj je model razvila engleska matematičarka Pamela Liebeck te ga prikazala u svojoj knjizi *Kako djeca uče matematiku* (eng. *How Children Learn Mathematics*, 1982)

izvodili su koristeći prste obje ruke. Primjerice, ako bi netko htio izračunati koliko je $7 \cdot 8$ sljedećio bi sljedeću proceduru: obje ruke se dignu u zrak; na jednoj ruci dignu se dva prsta, a na drugoj 3 prsta jer je $7 = 5 + 2$, a $8 = 5 + 3$. Dalje, brojevi koji su se prikazivali rukama se zbroje: $2 + 3 = 5$, i pomnože: $2 \cdot 3 = 6$. Zbroj 5 označava znamenku desetica, a umnožak 6 označava znamenku jedinica, pa je rezultat množenja: $7 \cdot 8 = 56$.

Jedna od najranijih kultura i civilizacija na Zemlji bila je staroegipatska, a njihova matematika bila je jedna od najranijih epoha razvoja te znanosti (Srđić, 2004). Stari Egipćani imali su razvijeni decimalni sustav i oznake za brojeve. Proučavajući pronađene papiruse, otkrilo se da su Egipćani množili dva broja koristeći udvostručavanje brojeva. „Broj su udvostručavali zbrajajući ga samog sa sobom, dakle samo su zapisali brojeve jedan ispod drugoga i pretvorili svakih 10 istih simbola u simbol sljedeće razine“ (Srđić, 2004). Na slici možemo vidjeti njihov način množenja (Slika 1.) na primjeru $34 \cdot 14$. Prvi faktor se u svakom sljedećem koraku udvostručio. Dakle, prvo se udvostručuje 34, zatim 68 pa 136 i tako dalje. U drugom stupcu prvog okvira su vrijednosti za koje se povećao broj 34. Brojevi se udvostručuju sve dok se u prvom stupcu ne dobije broj veći od 14. Sljedeći broj u prvom stupcu bio bi 16, što je veće od 14 i zbog toga se staje s udvostručavanjem. Nakon toga se brojevi dobiveni postupkom udvostručavanja zbroje čime se dobiva konačni rezultat.



Slika 1. Prikaz starogrčkog množenja (Srđić, 2014, str.1)

Egipćani su također uočili jednostavnost množenja brojeva s 10. Prilikom računanja bi zamijenili svaki simbol onim susjednim po veličini, npr.

$$423 \cdot 10 = (3 \text{ jedinice postaju } 3 \text{ desetice, } 2 \text{ desetice postaju } 2 \text{ stotice, } 4 \text{ stotice postaju } 4 \text{ tisućice}) = 4230$$

S druge strane, imamo babilonsku matematiku koja je temeljena na iskustvu. Sustav mjesnih vrijednosti bio je temeljen na broju 60 (seksagezimalni sustav) pa su njihove tablice množenja bile vrlo opsežne (Majstorović, 2016). Svaka tablica davala je popis svih umnožaka određenog broja. Primjerice za broj 7 je tablica prvo sadržavala umnoške od $1 \cdot 7$ do $20 \cdot 7$, zatim su bili dani umnošci $30 \cdot 7$, $40 \cdot 7$ i $50 \cdot 7$. Onaj kojega je zanimao umnožak $25 \cdot 7$, pronašao bi u tablici dva umnoška: $20 \cdot 7$ i $5 \cdot 7$ koje bi potom zbrojio. Za umnožak brojeva s dvije ili tri znamenke seksagezimalnog sustava trebalo se koristiti nekoliko takvih tablica. Do danas se nije otkrio točan postupak kojim su se Babilonci koristili prilikom množenja, ali postoje nagađanja da je bio sličan onom kojim se koristimo. Množenje, kakvo je poznato danas, potječe je iz Indije, a na europske prostore su ga donijeli Arapi (Čekrilija, 2001).

2.2. Metodički pristup obradi množenja prirodnih brojeva u razrednoj nastavi matematike

„Pojam množenja prirodnih brojeva izvodi se iz realnosti, a konkretizira se odgovarajućim aktivnostima sa skupovima.“ (Markovac, 2001, str.194). Obrada započinje na konkretnoj razini upotrebom didaktičkih materijala – pločice, štapići, kocke, plodovi (Markovac, 2001). Poštujući *načelo postupnosti*², razvija se spoznajni proces te dolazi do automatizacije i konačno do primjene stečenog znanja u rješavanju zadataka. Više o slijedu podučavanja novih matematičkih koncepata o množenju spominjat će se u četvrtom poglavlju pod naslovom *Metodički pristup usvajanja novog matematičkog pojma pomoću manipulativnog materijala*.

Podučavanje matematike je složeni proces i zahtijeva dobro educiranog učitelja koji će na razumljiv i efikasan način približiti učenicima nove matematičke koncepte. Između ostaloga, treba voditi računa o fazi kognitivnog razvoja u kojoj se nalaze učenici početne nastave matematike. Psiholog Jean Piaget (1896.-1980.) formulirao

² Načelo postupnosti uvjetovano je psihološkom činjenicom da se određeno gradivo ne može shvatiti i učiti, a da se prethodno nisu shvatili i usvojili relevantni sadržaji. To načelo ima veliko značenje pri usvajanju nastavnog gradiva gdje znanje jednog sadržaja postaje uvjetom učenja drugoga, a znanje drugoga uvjetom učenja trećega itd. (Markovac, 2001).

je četiri faze dječjeg intelektualnog razvoja. To su: senzomotorička faza, faza predoperacijskog mišljenja, faza konkretnih operacija te faza formalnih operacija (Buggle, 2002). Učenici razredne nastave nalaze se u fazi konkretnih operacija kognitivnog razvoja (kronološki do desete godine). U toj fazi kod učenika se pojavljuje mogućnost logičkog razmišljanja i *konzervacije*³ (Buggle, 2002). Zbog toga posebnu pažnju treba posvetiti metodičkim postupcima i dobi učenika (Glasnović Gracin, 2012). Naime, savladati operaciju množenja ne znači samo memorizaciju tablice množenja, kao što većina misli. Kod množenja se učenici prvi puta susreću s nizom predradnji jer množenje od učenika zahtijeva naučene matematičke vještine grupiranja, brojanja, prostornu orijentaciju, poznavanje mjesnih vrijednosti, zbrajanje i slijeđenje uputa u nizu (Sharma, 2001). Zbog toga, matematički pojmovi koji prethode množenju moraju biti savladani, kako bi učenici mogli shvatiti algoritam množenja. Teškoće u učenju množenja najčešće se pripisuju nesavladanosti spomenutih predmatematičkih i matematičkih vještina (Sharma, 2001).

U sljedećim podcjelinama, prikazat će se modeli aritmetike za množenje prirodnih brojeva u razrednoj nastavi te I-G-S-Z model. Samim time, pokušat će se približiti važnost konkretnih, odnosno manipulativnih materijala pomoću kojih učenici samostalno uče i usvajaju nastavni sadržaj, zapažaju i izražavaju svoje ideje i zaključke.

2.2.1. Modeli množenja u razrednoj nastavi matematike

Aritmetički sadržaji, u koje spada i množenje, čine čak 67% sadržaja razredne nastave matematike u Hrvatskoj (Nastavni plan i program, 2006). Nastavni sadržaji iz aritmetike prikazuju se učenicima kroz modele aritmetike. Prema Glasnović Gracin (2014), model se shvaća kao osnovni primjer koji se koristi u nastavi s ciljem prikaza matematičkog koncepta, odabire se na kontekst samog zadatka. Glasnović Gracin (2014) navodi četiri modela za množenje, a oni su: uzastopno zbrajanje jednakih pribrojnika, model površine, skaliranje i kombinatorni model.

Matematički pojmovi učenicima se mogu i trebaju približiti kroz razne modele, a u udžbenicima je često prisutan samo jedan model, vrlo rijetko dva modela, koji

³ Pojam konzervacije se odnosi na spoznaju da se promjenom vanjskog izgleda skupa predmeta ne mijenjaju njihova kvantitativna svojstva, ukoliko se pri promjeni, tom skupu predmeta nije ništa nadodalo ili oduzelo. (Reić Ercegovac, 2012)

prikazuju matematički pojam (Glasnović Gracin, 2014). Pri tome, u nastavi ne smije prevladavati, odnosno dominirati, samo jedan model aritmetike već se matematički sadržaji moraju prikazivati učenicima kroz čim više modela, različitih tipova zadataka i aktivnosti kako kod učenika ne bi došlo do teškoća u shvaćanju matematičkih koncepata (Glasnović Gracin, 2014). Više govora o udžbenicima iz matematike u drugom razredu razredne nastave bit će u podcjelini 3.3. pod naslovom *Množenje u drugom razredu osnovne škole prema udžbenicima*.

Liebeck (1990) je utvrdila da se u planiranju i provedbi nastave učitelji čvrsto drže zadataka i aktivnosti iz udžbenika. Obzirom na to, učitelji se koriste modelima sugeriranim u udžbenicima, a ostale modele aritmetike zanemaruju. U hrvatskim udžbenicima se za množenje u razrednoj nastavi ističe skupovni model, dok se ostali pojavljuju u minimalnim količinama, ili ih uopće nema (Glasnović Gracin, 2014). Raznolikost modela aritmetike omogućuje cjelovito prikazivanje matematičkih sadržaja i olakšava učenicima shvaćanje matematičkih ideja.

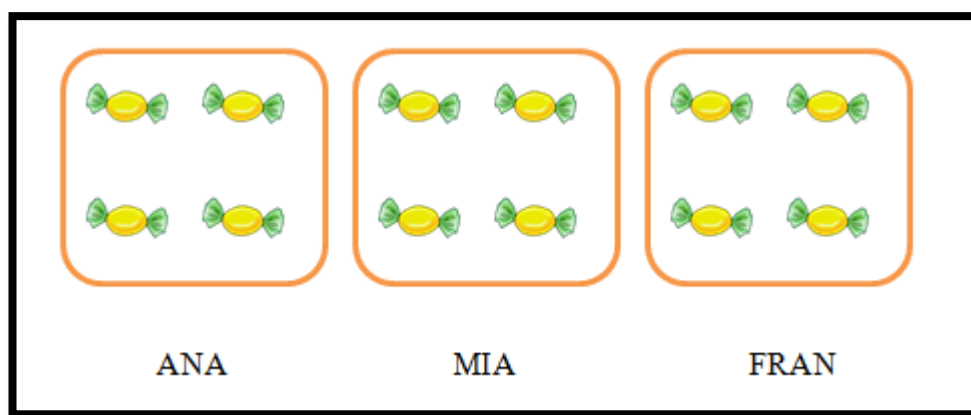
Skupovni model (*Primjer 1.*) se koristi u radu s konkretnim materijalima, a odnosi se na kardinalni broj promatranog konačnog skupa elemenata. Glavna aktivnost je prebrojavanje elemenata skupa (Glasnović Gracin, 2014). Skupovni model su učenici već koristili prilikom usvajanja matematičkog pojma zbrajanja. Kod zbrajanja se radi o združivanju dva skupova različitog broja elemenata, dok kod množenja učenici promatraju veći broj skupova s jednakim brojem elemenata. Tako se modelom množenje prikazuje kao zbrajanje jednakih pribrojnika.

Na početku aktivnosti učenici uočavaju da imaju više skupova s jednakim brojem elemenata (aktivnost prebrojavanja), nakon čega prelaze na simbolički zapis množenja. Kod tog modela, najpoželjnije je koristiti konkretni materijal kako bi učenici mogli donijeti zaključke samostalno, na temelju vlastitog iskustva. Tijek zaključivanja jasno će se prikazati na sljedećem primjeru:

Primjer 1. Zbrajajte jednakih pribrojnika kod množenja prirodnih brojeva, skupovni model

Ana ima 4 bombona, Mia ima 4 bombona i Fran ima 4 bombona. Koliko bombona imaju zajedno?

Konkretni materijal:



Slika 2. Prikaz skupovnog modela

Govor učenika: *Imam tri hrpe bombona, a na svakoj hrpi su 4 bombona. Četiri bombona više četiri bombona je osam bombona. Osam bombona više četiri bombona je dvanaest bombona.*

Zbrajanje jednakih pribrojnika: $4 + 4 + 4 = 12$

Učenici primjećuju da imaju tri skupa po četiri bombona. Učenici su do točnog rješenja došli od prije poznatom računskom operacijom, zbrajanjem. Pošto se radi o zbrajanju više pribrojnika, učenicima je trebalo više vremena. U govoru se služe izjavom: „Imam tri puta po četiri bombona“, što se matematičkim simbolima piše $3 \cdot 4$. Prvi faktor vidljiv je u broju skupova (hrpama bombona), drugi faktor vidljiv je broju elemenata (broju bombona u svakoj hrpi), a umnožak prikazuje ukupnu količinu.

Zapisujemo računsku radnju simbolički: $3 \cdot 4 = 12$

Govor učenika: *Tri puta četiri jednako je dvanaest. Ana, Mia i Fran zajedno imaju dvanaest bombona.*

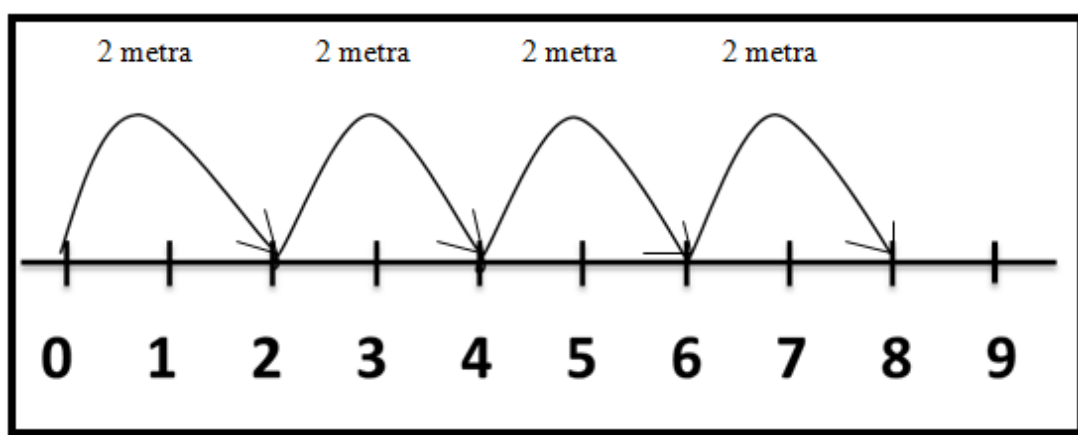
Množenje kao zbrajanje uzastopnih pribrojnika može se prikazati i preko modela brojevnog pravca. Kod modela brojevnog pravca promatra se udaljenost od početne točke kojoj je pridružen broj 0 do rezultata prikazanog na brojevnom pravcu, a on ovisi o tome koliko puta se nanosi određena dužina zadana u zadatku. Ponovno je glavna aktivnost prebrojavanje (Glasnović Gracin, 2014). Dakle, zbrajanje jednakih pribrojnika svodi se na zbrajanje jediničnih dužina. Taj model se najčešće koristi kod

zadataka u kojima se u određenim vremenskim intervalima ponavlja ista vrijednost (Glasnović Gracin, 2010) , što možemo vidjeti na *Primjeru 2*.

Primjer 2. Model brojevnog pravca kod množenja prirodnih brojeva

Klokan u jednom skoku preskoči 2 metra. Koliko će metara preskočiti u svoja 4 skoka?

Učenici, krenuvši od 0, nanose dvije jedinične dužine (skok duljine 2 metra). Radnju ponavljaju četiri puta, po jednom za svaki skok klokana. Učenici zbrajaju jedinične dužine koje interpretiraju kao preskočene metre.



Slika 3. Prikaz modela brojevnog pravca

Govor učenika: *Klokan je skočio 4 puta i svakim skokom skočio je 2 metra. Dva metra više dva metra su četiri metra. Četiri metra više dva metra je šest metara. Šest metara više dva metra je osam metara.*

Zbrajanje jednakih pribrojnika: $2 + 2 + 2 + 2 = 8$

Učenici uočavaju ponavljanje zbrajanja jednakih pribrojnika, odnosno da je klokan skočio „četiri puta po dva metra“. U sljedećem koraku učenici „skraćuju“ zapis zbrajanja jednakih pribrojnika i prelaze na množenje. Prvi faktor je vidljiv u broju skokova, odnosno koliko puta su nanosili dvije jedinične dužine na pravac. Drugi faktor prikazuje duljinu skoka, odnosno nanošenje od dvije jedinične dužine. Umnožak se vidi u ukupnoj udaljenosti od nule nakon četiri skoka.

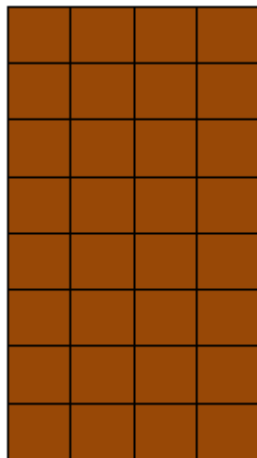
Zapisujemo računsku radnju simbolički: $4 \cdot 2 = 8$

Skupovni model i model brojevnog pravca su najčešći u razrednoj nastavi, ali treba napomenuti da su oni pogodni samo za množenje prirodnih brojeva (Glasnović Gracin, 2014). „Ako učenik kroz razrednu nastavu upozna samo ovaj model množenja mogao bi imati teškoća sa shvaćanjem pojma množenja racionalnih brojeva i sl.“ (Glasnović Gracin, 2014, str. 18). Zbog toga, učenike treba upoznati s ostalim modelima množenja koje će moći primjenjivati u nastavku školovanja.

Sljedeći model koji će se prikazati je model površine pravokutnika, a upravo taj model, kao i model skaliranja, učenici mogu primijeniti kasnije, odnosno na racionalnim brojevima (Glasnović Gracin, 2014.). Kod modela površine pravokutnika umnožak prirodnih brojeva a i b prikazuje se kao površina pravokutnika sa stranicama duljine a i b . Pravokutnik tada dijelimo na a broj redaka, a u svakom retku nalazi se b elemenata. Umnožak brojeva a i b tada je jednak ukupnom broju „kvadratića“ na koje smo podijelili pravokutnik, odnosno površinu pravokutnika, od kuda i dolazi naziv modela.

Primjer 3. Model površine pravokutnika

Čokolada ima 8 redova. Svaki red sadrži 4 „kockica“. Koliko „kockica“ ima cijela čokolada?



Učenici prebrojavaju koliko ukupno ima „kockica“ na slici. Prebrojavanjem dođu do rezultata, odnosno zaključka da cijela čokolada ukupno ima 32 „kockice“.

Govor učenika: *Imamo 8 redova čokolade, a u svakom redu četiri „kockice“.* Četiri više četiri je osam, osam više četiri je dvanaest, dvanaest više četiri je šesnaest, šesnaest više četiri je dvadeset, dvadeset više četiri je dvadeset i četiri, dvadeset i četiri više četiri je dvadeset i osam, dvadeset i osam više četiri je trideset i dva.

Zbrajanje jednakih pribrojnika:

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 32$$

Nakon što su zbrojili jednake pribrojnike, učenici uočavaju da se broj četiri ponavlja osam puta, odnosno da imaju osam puta po četiri „kockice“. Zbrajanje jednakih pribrojnika zamjenjuje se računskom operacijom množenja.

Pri tome broje redaka čini jedan, broj stupaca drugi faktor. Odabran je model površine jer upravo kontekst tekstualnog zadatka sugerira model koji je prikladan za rješavanje zadatka. Model površine je najpogodniji za zorno prikazivanje *komutativnosti množenja*⁴. Svojstvo komutativnosti vidi se u svim modelima, ali kod ostalih modela dolazi do kontekstualne razlike (npr. štafeta 4x100 nije isto što i štafeta 100x4). Kod modela površine pravokutnika ne postoji kontekstualna razlika, odnosno nije predodređeno hoće li se prvo navesti broj redaka pa u njemu broj elemenata ili broj stupaca i broj elemenata u njemu.

Računsku operaciju zapisujemo simbolički: $8 \cdot 4 = 32$

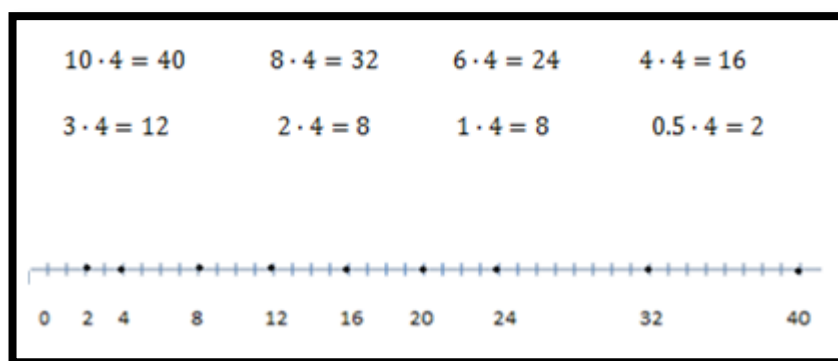
Učenički govor: *Osam redova čokolade puta četiri „kockice“ čokolade ukupno su 32 „kockice“ čokolade.*

Kod skaliranja radi se o množenju po principu $\lambda \cdot a$, pri čemu λ može biti bilo koji realni broj. Učenik mijenjanjem jednog faktora (λ), dobiva dojam rastezljivosti te razvija funkcionalno razmišljanje. Skaliranje se prikazuje na brojevnom pravcu, kao i već prikazani i spominjani model, samo što se skaliranje može kasnije nadograditi s množenjem u skupovima racionalnih i realnih brojeva (Glasnović Gracin, 2014).

Primjer 4. Skaliranje

Riješi zadatke pa umnoške smjesti na brojevni pravac. Što misliš, koji će biti rezultat u zadnjem zadatku?

⁴ „Komutativnost (izmjenitost) je svojstvo binarnih operacija koje u slučaju množenja realnih brojeva glasi $a \cdot b = b \cdot a$ “ (Gusić, 1995, str.101).



Slika 4. Prikaz modela skaliranja

Zadani su zadaci množenja prirodnih brojeva, osim zadnjeg primjera u kojem prirodni broj množimo decimalnim. Pošto se mijenja samo jedan od faktora, koristeći analogiju zaključivanja iz prijašnjih primjera učenici mogu samostalnim zaključivanjem dati rješenje zadatka, iako nisu upoznati s množenjem decimalnog broja. Smještanjem rezultata na brojevnom pravcu učenici dolaze do zaključka da se množenjem brojem četiri, drugi faktor povećava četiri puta (četiri puta se nanosi na brojevni pravac). Takvim načinom zaključivanja učenici će znati riješiti i zadnji zadatak u kojem broj četiri množi decimalni broj.

Kombinatorni model je model u kojem učenici stvaraju parove iz dva *disjunktna skupa*⁵ dok ne prikažu sve mogućnosti. Kod kombinatornog modela, množenje se odnosi samo za prirodne brojeve, a najčešće se koristi na satovima dodatne nastave iz matematike pri čemu učenici stvaraju parove iz elemenata dvaju skupova (a i b) (Glasnović Gracin, 2014).

Primjer 5. Kombinatorni model

Pepeljuga ima dvije haljine (crvenu i plavu) i tri para cipela (crvene, crne i roze). Na koliko se načina Pepeljuga može obući s ovim haljinama i cipelama?

⁵ „Disjunktnost je relacija na skupovima. Skupovi A, B jesu disjunktni ako nemaju zajedničkih elemenata, tj. $A \cap B = \emptyset$ “ (Gusić, 1995, str.45)



Slika 5. Slikovni prikaz rješenja zadatka

Skup haljina i skup cipela su dva disjunktna skupa. Učenici kombiniraju moguće parove, na način da fiksiraju element iz jednog skupa (primjerice haljinu), a drugi variraju (cipele). Učenici otkrivaju da se radi o šest mogućih kombinacija, odnosno da sa svakom haljinom dobivamo tri različite kombinacije. Tri kombinacije s jednom haljinom i tri kombinacije s drugom haljinom daje ukupno šest različitih kombinacija. Kraće, zadatak možemo riješiti množenjem broja elemenata iz dva zadana skupa, odnosno umnoškom $2 \cdot 3$.

2.2.2. I-G-S-Z model kod množenja u razrednoj nastavi matematike

U nastavi matematike suprotstavljaju se dvije ideje. S jedne strane, matematički pojmovi su apstraktni, s druge su duboko ukorijenjeni u stvarnosti te potpomažu rješavanje svakodnevnih praktičnih problema. Iz ovog razloga Liebeck (1990) tvrdi da je matematika apstrakcija stvarnosti. Sva djetetova iskustva, pa tako i matematička, razvijaju se određenim slijedom, slijedom I-G-S-Z modela. No, što je uopće I-G-S-Z model Pamele Liebeck? Taj model smatra se okosnicom za razvoj apstraktnog mišljenja u matematici (Glasnović Gracin, 2012). U nazivu modela, slovo *I* označava iskustvo fizičkih premeta pri kojem učenik upoznaje manipulativni materijal i taktilno doživljava predmet pri čemu se očituju kreativni instinkti. Slovo *G* odnosi se na govoreni jezik kojim dijete opisuje iskustvo i ono je prisutno u svim ostalim etapama modela. *S* su slike koje prikazuju to iskustvo, a *Z* se odnosi na

znakove, odnosno na čitanje i pisanje matematičkih simbola vezanih uz određeni pojam (Liebeck, 1990). Na sljedećem primjeru Liebeck (1990) prikazuje slijed apstrahiranja kod usvajanja pojma *lopta*.

1. „Vidi, osjeća, drži, kotrlja i baca loptu. Zabavlja se i uči o njezinim osobinama. (I)“
2. „Povezuje zvuk riječi „lopta“ s igračkom. Uskoro će povezati „loptu“ s drugim predmetima koje može kotrljati. (G)“
3. „Prepoznaje sliku lopte. Slika je drugačija od njegove lopte. Ne kotrlja se, ali i drukčije se osjeća pod prstima. No, dijete vidi da slika ima dovoljno zajedničkih obilježja s njegovom loptom i da je može nazvati „lopta“. (S)“
4. „Poslije će naučiti znakove (slova) kojima se označuje zvuk riječi „lopta“. To raži više oblike zaključivanja. Ti znakovi nemaju nikakvih zajedničkih obilježja s pravom loptom i tek su površno povezani sa zvukovima što ih čuje kad se izgovara riječ „lopta“. (Z)“

(Liebeck, 1990, str.11-12)

Zbog toga u matematici postoji hijerarhija apstrakcija, a učiteljeva zadaća je provesti djecu kroz tu hijerarhiju (Liebeck, 1990). Učenici razredne nastave nalaze se u fazi konkretnih operacija kognitivnog razvoja u kojoj do konceptualizacije dolaze vlastitim manualnim iskustvima. Uz pomoć I-G-S-Z modela prikazat će se *Množenje broja 2* na primjeru modela skupa.

I(iskustvo)	Učenici pred sobom imaju manipulativni materijal, štapiće. Kažemo im da slože pet skupova tako da se u svakom skupu nalaze po dva štapića. Učenici uzimaju štapiće te tvore pet hrpa (skupova) i u svaku hrpu (skup) stavljaju po dva štapića (elementa).
G(govor)	Govor prati iskustvene manipulacije. Učenik se potiče na verbalizaciju aktivnosti. Opisuju ono što vide, odnosno rade. Predviđeni učenički govor: <i>Imam pet skupova i u svakom skupu po dva štapića (pet puta po dva). Ukupno imam 10 štapića.</i> 
S(slika)	Zatim se prelazi na višu razinu apstrakcije. U idućem koraku učenici promatraju sliku. 

	U: <i>Ako imate četiri vaze i svakoj vazi po dva cvijeta, koliko cvjetova imate ukupno?</i> Učenici zbrajaju: <i>Dva plus dva je četiri, četiri plus dva je šest, šest plus dva je osam. Imamo četiri puta po dva cvijeta što je ukupno osam.</i>
Z(znakovi)	Zapis na ploču ispod slikovnog prikaza :  $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ Učenici zbrajanjem dolaze do rezultata. Zatim uočavaju da se ponavlja isti pribrojnik, broj dva. Zaključuju da je „četiri puta po dva jednako osam“. Nakon pojašnjenja, učitelj uvodi znak za množenje, a učenici skraćuju zapis zbrajanja u novu računsku operaciju množenje. $2 + 2 + 2 + 2 = 4 \cdot 2 = 8$

Tablica 1. Množenje broja 2 na primjeru I-G-S-Z modela

U *Tablici 1.* možemo uočiti da su učenici, počevši od konkretnih iskustva, prebrojavanja i zbrajanja, praćenog matematičkim govorom, došli do apstraktnog, simboličkog zapisa nove računске operacije, množenja. Učenici su vlastitim iskustvom samostalno došli do spoznaja i zaključaka, a da su pri tom zadovoljeni svi zahtjevi njihovog kognitivnog razvoja (faza konkretnih operacija). Imajući na umu i ostale modele množenja prirodnih brojeva, učitelj vodi učenike dajući im nove primjere, potiče učenike na verbalno izražavanje i obrazlaganje postupka u rješavanju zadatka. Upravo izražavanje matematičkih ideja riječima, može učitelju poslužiti kao najbolji pokazatelj koliko je učenik uistinu savladao novi matematički koncept (Liebeck, 1990).

Svaki od navedenih modela prikladan je za učenike razredne nastave te se pravilnim doziranjem i upotrebom odgovarajućih modela može postići vrlo efikasan učinak nastave. Korištenjem različitih modela množenja, primjerenih nastavnih metoda, pružanjem manipulativnih i konkretnih iskustava učenicima, daju se temelji

kvalitetne nastave koja vodi do usvajanja koncepta i osigurava prelazak na apstraktnu, simboličku razinu.

3. POJAM MNOŽENJA U KURIKULARNIM DOKUMENTIMA I UDŽBENICIMA

U hrvatskoj praksi, učitelji planiraju nastavu u školi prema *Nastavnom planu i programu* (2006), *Nacionalnom okvirnom kurikulumu* (2010), školskim udžbenicima i priručnicima. U ovom poglavlju dat će se uvid u množenje prema navedenim kurikularnim dokumentima i udžbenicima za 2. razred osnovne škole.

3.1. Množenje u razrednoj nastavi prema *Nastavnom planu i programu*

Nastavni plan i program za osnovne škole (2006.) službeni je dokument izdan od strane Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa.

22. Množenje brojevima 1 i 0

Ključni pojmovi: množenje brojevima 1 i 0.

Obrazovna postignuća: razumjeti da je umnožak zadanoga broja i broja 1 jednak zadanomu broju; razumjeti da je umnožak bilo kojega broja 1 i 0 jednak 0.

Slika 6. Primjer nastavne teme Množenje brojevima 1 i 0 iz Nastavnog plana i programa (2006) s ključnim pojmovima i obrazovnim postignućima

Prema *Nastavnom planu i programu* (2006), sadržaj množenja se prvi put pojavljuje u drugom razredu kada se učenike podučava tablici množenja u skupu brojeva do 100. U trećem razredu nastavni sadržaj se proširuje. Učenike se podučava množenju u skupu brojeva do 1000 te se prvi puta susreću s pisanim množenjem s jednoznačenkastim brojem. U četvrtom razredu učenici se susreću s pisanim množenjem u skupu brojeva do 1000000.

Od ukupno 31 nastavne teme, predviđene Nastavnim planom i programom (NPP) za drugi razred, 13 ih se odnosi na množenje. Pet tema odnosi se isključivo na podučavanje množenja, primjerice „Množenje brojem 5“, a ostale teme predviđaju istovremeno podučavanje množenja i dijeljenja, primjerice „Množenje i dijeljenje brojem 4“.

Prva tema u NPP-u koja se odnosi na množenje je tema „Množenje brojeva“. Ključni pojmovi te nastavne teme su zbrajanje, pribrojnik, množenje, umnožak i faktor. Obrazovna postignuća te nastavne teme odnose se na razumijevanje množenja kao

zbrajanje jednakih pribrojnika i na savladavanje matematičkog zapisa množenja. Sljedeća tema koja se odnosi na množenje jest tema „Zamjena mjesta faktora“. U toj temi učenici se upoznaju s pojmom komutativnosti množenja i uče ju primijeniti. Zatim dolaze dvije teme („Množenje brojem 2“ i „Množenje brojem 5“) prema čijim obrazovnim postignućima trebaju ovladati postupkom množenja brojem 2 i brojem 5. Može se vidjeti da su to dvije teme u kojima se učenici isključivo bave množenjem. Nakon toga slijedi prijelaz na upoznavanje s pojmom dijeljenja brojeva te na dijeljenje brojevima 2 i 5. Nakon tri teme koje se odnose na dijeljenje, učenici se opet vraćaju na računsku operaciju množenja, ali i istovremeno svladavanje dijeljenja brojevima 3, 4, 10, 6, 7, 8 i 9. Ključni pojmovi, iz tema koje uključuju istovremeno podučavanje množenja i dijeljenja, jednaki su naslovima tih tema. Primjerice kod teme „Množenje i dijeljenje brojem 8“ obrazovna postignuća se odnose na ovladavanje postupkom množenja i dijeljenja navedenim brojevima. Između množenja i dijeljenja brojevima 4 i 10, pojavljuju se dvije teme koje se odnose na 0 i 1 u množenju i dijeljenju. Obrazovno postignuće, kod množenja brojevima 1 i 0, odnosi se na razumijevanje da je umnožak zadanog broja i broja 1 jednak zadanom broju, a umnožak zadanog broja i 0 da je jednak 0 (*Slika 6.*). Preostala tema vezana uz množenje odnosi se na tablicu množenja, odnosno poznavanje tablice množenja u skupu brojeva do 100.

U trećem razredu pojam množenja se proširuje s obzirom da učenici pišu i broje do 1000. U NPP-u za treći razred se pojavljuju četiri teme koje podrazumijevaju proširivanje znanja o množenju, od ukupno dvadeset i tri teme. Prva tema u kojoj učenici proširuju znanje o množenju je „Množenje zbroja brojem“, a obrazovno postignuće odnosi se na ovladavanje postupka množenja zbroja brojem. Sljedeća tema iz NPP-a također je vezana uz računsku operaciju množenja, a njezin naslov je „Množenje i dijeljenje brojeva s 10 i 100“. To je prva tema u kojoj učenici trebaju ovladati množenjem troznamenkastim brojem, odnosno brojem 100. Zatim slijedi tema „Množenje dvoznamenkastog broja jednoznamenkastim“. Obrazovno postignuće odnosi se na ovladavanje postupkom množenja višekratnika broja 10 jednoznamenkastim brojem, ovladavanje postupkom množenja dvoznamenkastog broja jednoznamenkastim te primjenjivanje svojstva distributivnosti množenja. Posljednja tema vezana uz računsku operaciju množenja jest „Pisano množenje dvoznamenkastoga broja jednoznamenkastim“. Ovo je učenicima prvi susret s

pisanim množenjem te moraju savladati postupak pisanog množenja dvoznamenkastoga broja jednoznamenkastim.

U četvrtom razredu još više se smanjuje broj tema vezanih uz računsku operaciju množenja u NPP-u. Od ukupno dvadeset i dvije teme, množenje se spominje u dvije teme. Prva tema odnosi se na „Pisano množenje višeznamenkastog broja jednoznamenkastim brojem“ u kojoj učenici moraju savladati postupak pisanog množenja višeznamenkastog broja jednoznamenkastim brojem. Sljedeća tema naziva se „Pisano množenje višeznamenkastoga broja dvoznamenkastim brojem“ u kojoj se učenici upoznaju s postupkom pisanog množenja dvoznamenkastim brojem.

3.2. Množenje u razrednoj nastavi prema *Nacionalnom okvirnom kurikulumu*

Nacionalni okvirni kurikulum (2010) službeni je dokument izdan od strane Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa. U Nacionalnom okvirnom kurikulumu (NOK) su definirane temeljne odgojno-obrazovne vrijednosti, zatim ciljevi odgoja i obrazovanja, načela i ciljevi odgojno-obrazovnih područja, vrjednovanje učeničkih postignuća te vrjednovanje i samovrjednovanje ostvarivanja nacionalnoga kurikuluma (NOK, 2010). U dokumentu su odgojno-obrazovne razine podijeljene na četiri ciklusa. Razredna nastava spada u prvi odgojno-obrazovni ciklus. Ciklusi nastave matematike podijeljeni su na postignuća matematičkih procesa te postignuća matematičkih koncepata. Matematički procesi odnose se na opće matematičke kompetencije, a matematički koncepti na matematički sadržaj (znanja i vještine) (NOK, 2010).

Matematički procesi	Matematički koncepti
• Prikazivanje i komunikacija • Povezivanje • Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje • Rješavanje problema i matematičko modeliranje • Primjena tehnologije	• Brojevi • Oblik i prostor • Mjerenje • Podatci

Tablica 2. Prikaz matematičkih procesa i koncepata u prvom odgojno-obrazovnom ciklusu

Prema navedenim učeničkim postignućima u NOK-u na kraju prvog ciklusa, mogu se pretpostaviti postignuća učenika nakon završetka obrade množenja u prvom ciklusu. Sadržaj množenja prirodnih brojeva spada pod matematički koncept množenje. Očekivana učenička postignuća su :

- učenici će množiti na pamet znajući tablicu množenja do $10 \cdot 10$;
- odrediti nepoznati broj pomoću množenja ili dijeljenja u jednostavnim jednakostima i provjeriti točnost rješenja;
- primjenjivati računsku operaciju množenja u jednostavnim svakodnevnim situacijama;
- učenici će pisano množiti višeznamenaste brojeve s jednoznamenkastim i dvoznamenkastim brojevima te znati primjenjivati svojstvo distributivnosti množenja;
- učenici će na kraju prvog ciklusa biti osposobljeni za rješavanje zadataka s više računskih radnji, uz upotrebu zagrada i bez upotrebe zagrada, poštujući slijed izvođenja više računskih radnji.

Također, s obzirom na navedene matematičke koncepte, mogu se pretpostaviti i učenička postignuća kod matematičkih procesa nakon završenog prvog ciklusa nastave matematike. Oni su sljedeći:

- *Prikazivanje i komunikacija*
 - učenik će riječima opisati postupak množenja te rješenja prikazati didaktičkim materijalima, crtežima i brojevima;
 - prikazat će množenje modelima;
 - učenici će biti sposoban samostalno protumačiti tekstualni zadatak u kojem se navodi na računsku operaciju množenje.
- *Povezivanje*
 - učenici će moći uspostaviti veze između usvojenih matematičkih pojmova množenja i dijeljenja, zbrajanja i oduzimanja, te njihovih postupaka;
 - učenici će povezivati množenje s vlastitim iskustvom i svakodnevnim životom.
- *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje*

- učenici će postavljati o množenju svojstvena pitanja te istraživati o mogućim rješenjima te obrazložiti odabir množenja kao odgovarajućeg matematičkog postupka i utvrditi smislenost dobivenog rezultata.
- *Rješavanje problema i matematičko modeliranje*
 - učenici će postaviti i analizirati jednostavniji problem iz područja množenja (ili čije rješavanje navodi na računsku operaciju množenja), isplanirati njegovo rješavanje pomoću množenja, riješiti ga te protumačiti i vrjednovati rješenje i postupak; primjenjivati množenje u različitim kontekstima.
- *Primjena tehnologije*
 - učenici će istraživati i učiti o množenju koristeći manipulativni materijal.

3.3. Množenje prikazano u udžbenicima drugog razreda osnovne škole

U svrhu diplomskog rada, analizirala su se dva udžbenika za razrednu nastavu matematike u drugom razredu, istog imena – *Matematika 2*. Autor jednog udžbenika je Josip Markovac (2010), a autori drugog udžbenika su Jasenka i Ivo Đurović (2005). Udžbenik Josipa Markovaca (2010) koristio se u nastavi matematike od 2006. do 2010. godine. 2014. godine udžbenik je izdan ponovno, ali uz minimalne preinake. Udžbenik autora Đurović i Đurović (2005) je nešto stariji udžbenik iz matematike za drugi razred. Udžbenik je napisan godinu dana prije nego je NPP stupio na snagu, radi čega više nije na listi odobrenih udžbenika koji se trenutno koriste Ministarstva znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske. Dakle, prikazat će se nastavne jedinice iz jednog novijeg i jednog starijeg udžbenika za drugi razred matematike razredne nastave. Promatrat će se različiti trendovi u obradi pojma množenja u drugom razredu razredne nastave.

U tablici 3. su prikazani naslovi nastavnih jedinica koje se odnose na množenje, slijedom kojim se nalaze u analiziranim udžbenicima. Zelenom bojom su označeni naslovi nastavnih jedinica koje bi se okvirno obrađivale u isto vrijeme kod oba udžbenika. Bijele boje su ostali naslovi koji se ne pojavljuju u oba udžbenika. Zatim se na lijevoj i desnoj strani tablice pojavljuju parovi istih boja (crvena-crvena, plava-

plava). Te boje označuju naslove istih nastavnih jedinica koje se izvode u različitim vremenskim razdobljima.

Redni broj nastavnih jedinica	Matematika 2 (Josip Markovac, 2010)	Matematika 2 (Jasenka Đurović, Ivo Đuroović, 2005)
1.	Množenje brojeva	Uzastopno dodavanje istog broja
2.	Zamjena mjesta faktora	Uzastopno oduzimanje istog broja
3.	Dijeljenje brojeva	Množenje
4.	Množenje broja 2	Množenje broja 2 i brojem 2
5.	Dijeljenje broja 2	Dijeljenje. Dijeljenje brojem 2
6.	Množenje brojem 10	Polovina
7.	Dijeljenje brojem 10	Množenje broja 3 i brojem 3
8.	Množenje broja 3	Dijeljenje brojem 3
9.	Dijeljenje brojem 3	Množenje broja 4 i brojem 4
10.	Brojevi 1 i 0 u množenju	Višekratnik
11.	Množenje broja 4	Dijeljenje brojem 4
12.	Dijeljenje brojem 4	Trećina i četvrtina
13.	Veza množenja i dijeljenja	Množenje broja 5 i brojem 5
14.	Parni i neparni brojevi	Dijeljenje brojem 5. Petina
15.	Množenje broja 5 i dijeljenje brojem 5	Veza množenja i dijeljenja
16.	Množenje broja 6 i dijeljenje brojem 6	Množenje broja 6 i brojem 6. Dijeljenje brojem 6
17.	Dijeljenje brojem 1. Nula kao djeljenik	Množenje broja 7 i brojem 7. Dijeljenje brojem 7
18.	Redoslijed izvođenja računskih radnji	Množenje broja 8 i brojem 8. Dijeljenje brojem 8
19.	Množenje broja 7 i dijeljenje brojem 7	Množenje brojeva 9 i 10, množenje i dijeljenje brojevima 9 i 10. Desetina
20.	Množenje broja 8 i dijeljenje brojem 8	Nula i jedan u množenju i dijeljenju
21.	Množenje broja 9 i dijeljenje brojem 9	Množenje i dijeljenje (ponavljanje)
22.	Ponavljanje- množenje i dijeljenje	Djeljivost brojeva. Parni i neparni brojevi
23.	-	Združivanje faktora
24.	-	Izvođenje više računskih radnji uz upotrebu i bez

		upotrebe zagrada
--	--	------------------

Tablica 3. Prikaz nastavnih jedinica iz udžbenika kod množenja i dijeljenja prirodnih brojeva

Budući da su udžbenici nastali po drugačijim kurikularnim dokumentima, na prvi pogled se uočava razlika u broju nastavnih jedinica koje se odnose na množenje i dijeljenje. Đurović i Đurović (2005) izdali su udžbenik kada je na razrednu nastavu matematike tjedno otpadalo pet sati pa je zato i program bio širi. To objašnjava više nastavnih jedinica u odnosu na Markovca (2010).

Đurović i Đurović (2005) započinju nastavnu cjelinu o množenju nastavnom jedinicom koja se odnosi na uzastopno zbrajanje pribrojnika, a zatim na uzastopno oduzimanje istog broja. Potom kreću nastave jedinice koje se odnose na množenje i dijeljenje broja/brojem dva. Đurović i Đurović (2005) zatim redom stavljaju nastavne jedinice množenja i dijeljenja brojeva od tri do broja deset. Između ubacuju nastavne jedinice *Polovina*, *Višekratnik* te *Trećina i četvrtina* koje dolaze nakon obrade dijeljenja brojem dva, tri četiri i pet redom. Na sam kraj cjeline o množenju predlažu teme *Nula i jedan u množenju i dijeljenju*, *Djeljivost brojeva*, *Parni i neparni brojevi*, *Združivanje fakotra* te *Izvođenje više računskih radnji uz upotrebu i bez upotrebe zagrada*. Može se uočiti da Đurović i Đurović (2005) razdvajaju pojmove *množenje broja 2* i *množenje brojem 2*. To se zamjećuje i kod zadataka u udžbenicima (Slika 8.).

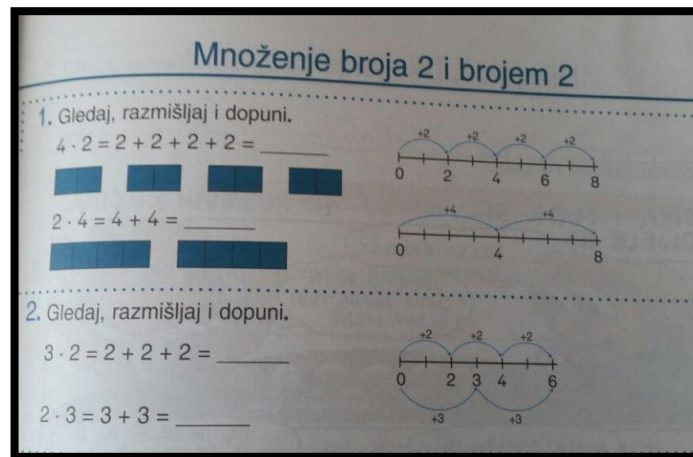
Markovac (2010) cjelinu o množenju započinje uvodnom nastavnom jedinicom *Množenje brojeva*, a potom učenike upoznaje s komutativnošću množenja u jedinici *Zamjena mjesta faktora*. Nakon nastavne jedinice *Dijeljenje brojeva*, prelazi na množenje i dijeljenje broja 2 čiji je sadržaj raspoređen u dvije nastavne jedinice. Nakon toga učenici se upoznaju s množenjem i dijeljenjem brojem 10. Potom su redom smještene nastavne jedinice množenja i dijeljenja brojeva od tri do devet. Nakon 12. nastavne jedinice, *Dijeljenje brojem 4*, Markovac smješta nastavne jedinice *Veza množenja i dijeljenja* te *Parni i neparni brojevi*. Nastavne jedinice *Dijeljenje brojem 1*, *Nula kao djeljenik* te *Redoslijed izvođenja računskih radnji* dolaze nakon obrade množenja i dijeljenja brojem 6.

15. Množenje brojem 2

Ključni pojmovi: množenje brojem 2.

Obrazovna postignuća: ovladati postupkom množenja brojem 2.

Slika 7. Prikaz teme *Množenje brojem 2* iz *Nastavnog plana i programa* (2006)



Slika 8. Prikaz zadatka iz udžbenika *Matematika 2* (Đurović i Đurović, 2005), nastavna jedinica *Množenje broja 2 i brojem 2*

Razlike u sadržaju i redoslijedu obrade su očekivane zbog različitog broja sati matematike kao i kurikularnih dokumenata koji su se poštovali prilikom pisanja ova dva udžbenika.

Analizirajući udžbenike došlo se do istog zaključka kojeg navodi Glasnović Gracin (2014) koja govori da je u udžbenicima često prisutan samo jedan model koji prikazuje određeni matematički pojam. U oba udžbenika prevladava skupovni model. U Đurović i Đurović (2005) model brojevnog pravca (Slika 8.) pojavljuje se nešto češće nego kod Markovca (2010). Đurović i Đurović (2005) prosječno koriste model brojevnog pravca jednom u dvije nastavne jedinice, a Markovac (2010) model brojevnog pravca spominje svega tri puta. Ostali modeli (model površine, kombinatorni model te skaliranje) se ne pojavljuju u ova dva udžbenika.

Ovim poglavljem dao se uvid u nastavne jedinice vezane uz pojam množenja prirodnih brojeva, analizirajući *Nastavni plan i program* (2006), ishode iz *Nacionalnog okvirnog kurikulum*a (2010) te dva udžbenika iz matematike za drugi razred. Posebno je zanimljivo da se u obrazovnim postignućima ne navodi

upoznavanje učenika s nekim od postojećih konkretnih materijala za množenje. Analizom udžbenika utvrđeno je oskudno pojavljivanje modela aritmetike za množenje prirodnih brojeva, a time i manjak zadataka koji bi se mogli rješavati uz pomoć manipulativnih materijala. Potaknuti nedostatkom zadataka i smanjenom dostupnošću manipulativnih materijala za množenje u razrednoj nastavi, u sljedećim poglavljima govorit će se o važnosti korištenja manipulativnih materijala u razrednoj nastavi matematike. Predstaviti će se novi manipulativni materijal i prikazati aktivnosti koje se pomoću njega mogu provoditi.

4. MANIPULATIVNI MATERIJALI U RAZREDNOJ NASTAVI MATEMATIKE

U prvom dijelu rada govorilo se o pojmu množenja, prikazao se uvid u povijest računske operacije množenja te se govorilo o množenju u razrednoj nastavi. U radu je prikazano nekoliko modela množenja i moglo se primijetiti da je u početnoj fazi uvijek na prvome mjestu iskustvo učenika potaknuto radom s konkretnim materijalima (Glasnović-Gracin, 2012). U sljedećim podnaslovima govorit će se o manipulativnim materijalima u nastavi matematike. Prikazat će se njihova uloga u nastavi matematike, opisat će se metodički pristup pomoću kojeg učenici usvajaju nova matematička znanja koristeći manipulativne materijale te će se prikazati postojeći manipulativni materijal za množenje.

4.1. Uloga manipulativnog materijala u razrednoj nastavi matematike

Pri usvajanju novog matematičkog pojma važna su konkretna iskustva i *manipulativni materijali*⁶ (Corn, 2015). Praksa pokazuje da se konkretni nastavni materijali u razrednoj nastavi matematike koriste, ali najčešće u demonstracijske svrhe, od strane nastavnika, dok ih učenici u svom radu koriste u manjoj mjeri (Glasnović Gracin, 2012). Važnost upotrebe manipulativnih materijala zasniva se na činjenici da je učenje uspješnije ako se aktivira više komponenata za primanje informacija. Pokazano je da se najveći broj informacija prima vizualnom komponentom – približno 80%, nakon čeka slijedi auditivna (Markovac, 2001).

Stručna literatura često preporuča da upotreba manipulativnih ili konkretnih materijala bude „most“ koji spaja konkretno i apstraktno (Marshall i Swan, 2008). „*Konkretni materijali pomažu da se preko konkretnog modela približe, a zatim i usvoje apstraktni matematički sadržaji*“ (Glasnović Gracin, 2012, str. 198). Djeca puno više uživaju u matematičkim iskustvima kada im učitelj ponudi opipljiv, konkretan pristup jer na taj način uspostavljaju vezu s dječjim potrebama i interesima (Sharma, 2001). Nužnost primjene manipulativnih materijala Sharma (2001) prikazuje na sljedećem primjeru:

⁶ Manipulativni materijali (*eng.manipulatives*) su manevrirajući objekti koji su posebno dizajnirani za podučavanje matematičkih pojmova (Boggan i sur., 2010)

Primjer 6. Nužnost korištenja manipulativnih materijala (Sharma, prema Corn, 2015, str.3-4)

„Od učenika četvrtog razreda osnovne škole zatraženo je da pomnože brojeve 72 i 6. Svi su učenici bili u mogućnosti izračunati taj produkt što nam pokazuje da su djeca shvatila proceduralnu komponentu množenja. Nakon toga postavljeno im je jednostavno pitanje: „Što moram dodati ukoliko u ruci imam $43 \cdot 3$ i želim imati $43 \cdot 4$?” Nekoliko učenika odgovorilo je 1 dok ih je nekoliko odgovorilo da se treba dodati 4 jer 3 treba postati 4. Ovi odgovori pokazuju da djeca nisu usvojila konceptualnu komponentu množenja. Tada je profesor izvadio plavi Cuisenaire štapić⁷ i rekao djeci da će plavi štapić predstavljati broj 43. Zatim ih je pitao koliko puta po 43 ima u ruci. Zatim je dodao još jedan plavi štapić i ponovio pitanje. Konačno ih je upitao: „Ukoliko u ruci imam $43 \cdot 3$ što moram dodati?” Svi učenici su odgovorili da moramo dodati jedan plavi štapić. Kad ih je upitao koji broj trebaju dodati umnošku $43 \cdot 3$ kako bi postao $43 \cdot 4$ odgovorili su 43.“

Prilikom korištenja manipulativnih materijala učitelji se trebaju voditi *metodičkim načelom*⁸ zornosti. Zornost se odnosi na sve radnje kojima se apstraktni matematički sadržaj prikazuje na perceptivan način. Zornost mora biti prisutna u početnoj nastavi matematike zbog apstraktnog matematičkog gradiva kojeg treba shvatiti i zbog razine intelektualne razvijenosti učenika u razrednoj nastavi (izvor: predavanje Metodike matematike 1, 2015). Dakle, učenik korištenjem manipulativnih materijala treba samostalno doći do spoznaja (Glasnović Gracin, 2012). Svako konkretno iskustvo treba se pratiti „vođenim istraživanjem“ u kojem su stvoreni prirodni uvjeti za stjecanje spoznaja (Sharma, 2001).

Cope (2015) navodi zahtjeve potrebne za uspješan sat matematike u kojem se koriste manipulativni materijali. Navedene zahtjeve sadrži i novi manipulativni materijal o kojem će biti govora u sedmom poglavlju. Zahtjevi koje navodi su idući:

- manipulativni materijal treba se sastojati od elemenata koji se mogu pomicati kako bi učenici mogli bolje ilustrirati matematički proces novog pojma;
- svaki učenik treba pokušati individualno istraživati pri čemu se moraju dati jasne upute;
- manipulativni materijal treba biti primjeren matematičkom pojmu;
- matematički pojam koji se prikazuje upotrebom manipulativnog materijala mora biti potkrijepljen matematičkim zapisom.

⁷ Cuisenaire štapići su didaktički komplet koji se sastoji od drvenih ili plastičnih štapića raznih veličina i boja (Corn, 2015).

⁸ Metodička načela su temeljne ideje na kojima počiva nastava matematike, a svrha primjene načela je nastavu matematike učiniti što efikasnijom. (izvor: predavanja Metodike matematike 1).

U istraživanju kojeg su proveli Hunt, Nipper i Nash (2011) željelo se doznati preferiraju li učitelji više manipulativne ili *virtualne materijale*⁹ u nastavi matematike. Rezultati su pokazali da 76% učitelja smatra da je manipulativni materijal jednostavniji za korištenje od virtualnog, a 82% njih smatra da su manipulativni materijali bolji kao pomoć u razumijevanju matematičkih sadržaja od virtualnih. Ispitanici su navodili prednosti manipulativnih materijala. Neki od navedenih argumenata su:

- manipulativni materijali potiču kreativnost učenika;
- cijene materijala su pristupačnije od virtualnih;
- manipulativni materijali pružaju primanje informacija kinestetičkim i vizualnim putem;
- jednostavniji su i praktičniji za korištenje.

Drugim istraživanjem, koje su proveli Marshall i Swan (2008), željelo se doznati u kojim situacijama i na koji način učitelji koriste manipulativne materijale te koji je stav učitelja kada je u pitanju efikasnost nastave u kojoj se koristi manipulativni materijal. Učitelji su stava da su manipulativni materijali izvrsna vizualna pomoć te da uz njih dolazi do boljeg razumijevanja matematičkih sadržaja. Također smatraju da učenici pokazuju veću angažiranost i interes za nastavu prilikom korištenja manipulativnih materijala. Kao najveće probleme, učitelji su naveli nedostatak konkretnih materijala u školama (materijali se moraju dijeliti s ostalim učiteljima). Također, smatraju da su manipulativni materijali ponekad veća distrakcija učenicima nego pomoć, jer učenici ne slušaju upute. Smatraju da u takvim situacijama manipulativni materijali u nastavi postaju beznačajni (Marshall i Swan, 2008).

Sharma (2001) je primjetio da učitelji često koriste samo jednu vrstu manipulativnog materijala na svim stupnjevima ovladavanja matematičkim pojmom, radi čega se učenici „vežu“ za taj materijal.

„Zbog toga mnogoj djeci to manipulativno pomagalo predstavlja kraj, a ne sredstvo za rješavanje ili usvajanje koncepta. Djeca osjećaju da bez dotičnog pomagala nije moguće riješiti zadatak. Kada im ponudite neko drugo pomagalo (npr. štapiće umjesto kocaka), nisu u stanju obaviti postupak.“ (Sharma, 2001, str.130).

⁹ Virtualni materijali su interaktivni i vizualni prikazi dinamičkih objekata koji pružaju mogućnost za gradnju matematičkih znanja koristeći računalnu tehnologiju (Hunt i sur., 2011).

Iz ovog razloga nije nužno da se u nastavi koristi samo jedan komplet skupog materijala, već da se uključe vrlo dostupni i korisni manipulativni materijali koje učenici mogu nositi u pernici i samostalno ih izraditi (Glasnović Gracin, 2012).

4.2. Metodički pristup usvajanja novog matematičkog pojma pomoću manipulativnog materijala

Pod ovim podnaslovom prikazat će se metodički pristup usvajanja novog matematičkog pojma pomoću manipulativnog materijala prema ideji profesora Sharpe (2001) koju on naziva „*Peterostupna spirala*“. Navedeni metodički pristup bit će korišten i u sedmom poglavlju prilikom prikaza sata obrade novog nastavnog sadržaja iz područja množenja, uz korištenje manipulativnog materijala.

„*Peterostupna spirala*“ prikazuje metodički pristup usvajanja novog matematičkog pojma pomoću manipulativnog materijala u pet koraka koji su međusobno povezani. Koraci su: *Slobodna igra*, *Primarne vještine i primarni koncepti*, *Manipulativne aktivnosti*, *Zapisivanje konkretnog iskustva* i *Iskustva na apstraktnoj razini*. Pristup se odnosi na vođenje djece od konkretnog iskustva prema apstraktnoj spoznaji koristeći manipulativne materijale.

1. korak : SLOBODNA IGRA

Prvi korak metodičkog pristupa naziva se *Slobodna igra*. Prije početka prezentacije novih pojmova, učitelj treba stvoriti situaciju slobodne igre u kojoj učenici upoznaju manipulativni materijal. Time učenici zadovoljavaju svoj prirodan poriv prema senzoričkom istraživanju i taktilnim doživljajima (Sharma, 2001). Učenici mogu pokazati svoju kreativnost manipuliranjem materijalom na različite načine, otkrivati i istraživati te usavršavati vizualno-prostorne sposobnosti. Ukoliko im se uskrati vrijeme slobodne igre, odnosno upoznavanje s materijalom, učenici će biti nepažljivi jer njihova prirodna znatiželja neće biti zadovoljena.

2. korak : PRIMARNE VJEŠTINE I PRIMARNI KONCEPTI

Drugi korak slijedi nakon slobodne igre, a on podrazumijeva identificiranje svih primarnih koncepata. U ovom koraku je potrebno aktivirati primarne pojmove, dakle pojmove usvojene na prethodnoj razini (primjerice potrebne predmatematičke vještine). Ukoliko želi prezentirati algoritam množenja $7 \cdot 5$, učitelj treba krenuti od primarnih pojmova povezanih sa zadatkom. U ovom slučaju su to: znanja o

množenju, zbrajanju i vještine slijeđenja uputa u nizu. Kako bi učenike pripremio za usvajanje algoritma množenja, učitelj treba posvetiti nekoliko minuta za ponavljanje svakog primarnog koncepta, odnosno predmatematičke vještine. Ovaj korak je važan radi stvaranja veza između pojmova i postupaka. U ovom koraku učitelj odabire niz aktivnosti s različitim stupnjem složenosti. Sharma (2001) preporuča podjelu učenika u skupine, pri čemu se u skupinama nalaze učenici s jednakom razinom kognitivnog funkcioniranja. Svaka skupina dobiva igru koja odgovara njihovim kompetencijama. Od učitelja se zahtijeva oprezno planiranje nastavnog sata i visoke organizacijske kompetencije.

3. korak: MANIPULATIVNE AKTIVNOSTI

U ovom dijelu sata učitelj posvećuje vrijeme novom pojmu koristeći manipulativni materijal. Primjerice: koristeći manipulativni materijal, *Cuisenaire štapiće*, učenicima se prikazuje algoritam množenja na primjeru $7 \cdot 5$. Učenici odbrojavaju sedam žutih štapića kojima se označava broj pet. Računska operacija množenja $7 \cdot 5$ tumači se kao $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ (Corn, 2015), čime se proširuje pojam zbrajanja. Najvažniji čimbenik na ovom stupnju je upotreba raznovrsnih didaktičkih materijala (Sharma, 2001) jer nijedan didaktički materijal ne može biti dobar za sve pojmove, učenike, niti za sve razine učenja matematike. Zbog toga učitelj za svaku nastavnu situaciju treba tražiti optimalne materijale.

4. korak: ZAPISIVANJE KONKRETNOG ISKUSTVA

Nakon manipulativnih aktivnosti učenika i učitelja, učitelj prenosi konkretnu aktivnost na reprezentativni i apstraktni stupanj. Učenici prelaze s konkretne razine pojma na upoznavanje grafičke simbolizacije, odnosno zapisivanje putem matematičkih simbola. Učitelj zapisuje

$$\underline{7 \cdot 5}$$



$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$$

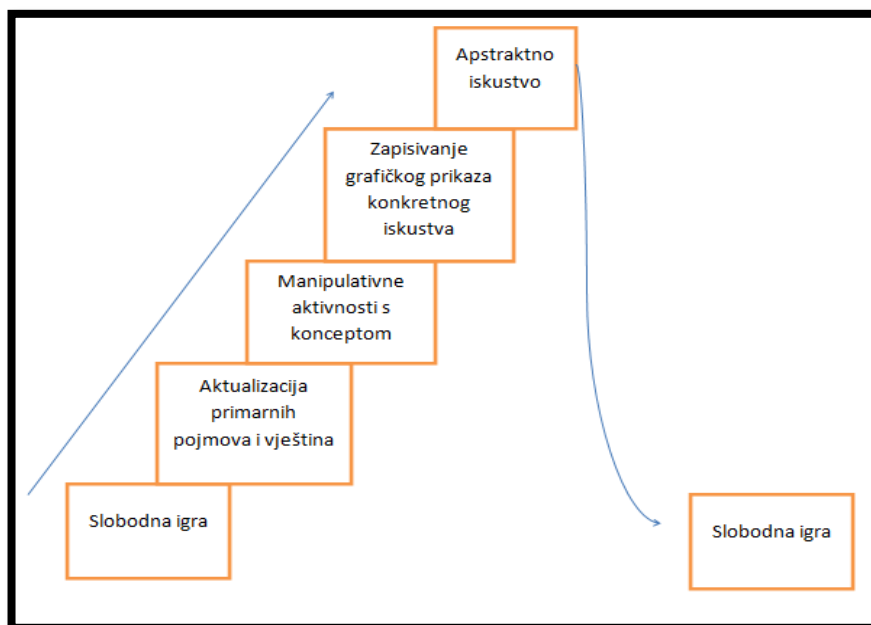
$$= 35$$

Odnosno:

$$7 \cdot 5 = 35$$

5. korak: ISKUSTVA NA APSTRAKTNOJ RAZINI

U prvom koraku metodike „Peterostupne spirale“ pod imenom *Slobodna igra*, rečeno je da učenik istražuje i otkriva matematiku putem slobodne aktivnosti i preko konkretnih iskustva. Isto načelo vrijedi u apstraktnim iskustvima. Apstraktna iskustva uvode se u odgovarajućem trenutku, prirodnim slijedom, kada učenik ima savladane prethodne vještine matematičkog pojma uz upotrebu manipulativnih materijala (Sharma, 2001). U tom dijelu sata učenici rješavaju tekstualne i problemske zadatke kako bi „učvrstili“ novostekeno znanje o matematičkom pojmu. *„Najbolji primjer apstraktnoga je jezik, odnosno konceptualizacija matematičkih ideja na razini jezičnog izražavanja. Zbog toga je važno da učitelji svakodnevno podučava djecu verbalizaciji ideja i postupaka“* (Sharma, 2001, str. 139). Učenici trebaju steći naviku verbalnog i objašnjavanja svojih postupaka prilikom rješavanja zadataka, davanja potpunih odgovora. Nakon obrade novog matematičkog pojma na svim razinama, učitelj treba ponoviti peterostupni postupak sa svakim novim pojmom (Slika 9.).



Slika 9. Shematski prikaz metodike vođenja od konkretnog prema apstraktnom

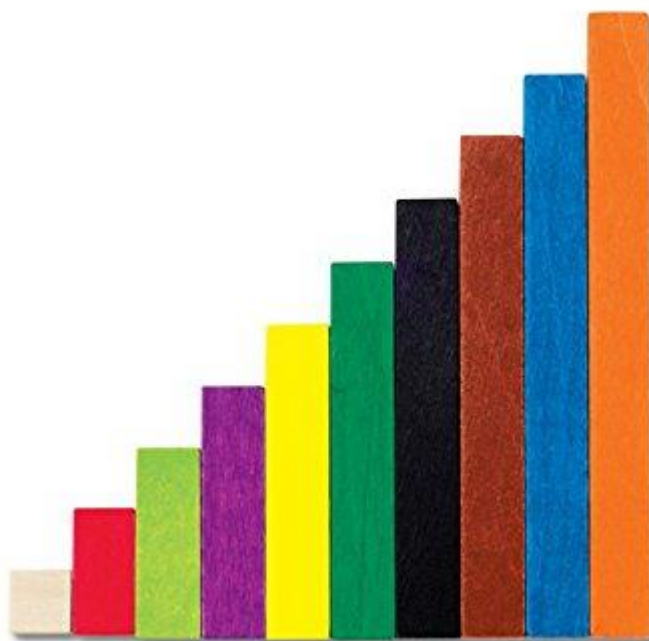
(Sharma, 2001, str.139)

Uvođenjem novih pojmova, učenici prolaze kroz tri stupnja formiranja pojmova, a oni su: promatranje i opažanje, predodžba o pojmu te formiranje pojma (Kurnik, 2001). Početni stupanj, stupanj promatranja i opažanja, odnosi se na osjetilnu spoznaju pojma: konkretne objekte i upoznaju njihova svojstva (Kurnik, 2001). U drugom stupnju, stupnju predodžbe o pojmu, učenici se navode da uoče nešto opće i zajedničko o pojmu (Kurnik, 2001). Kod množenja, učenici se potiču da uoče zbrajanje jednakih pribrojnika. Treći se stupanj odnosi na izdvajanje bitnog općeg svojstva. To bi u obradi množenja bio zaključak da se množenje uvodi zbog skraćivanja zapisa uzastopnog zbrajanja jednakih pribrojnika. Pojam se nakon pažljive analize, apstrahiranjem svojstava koje stvarno postoje u svijetu oko nas i poopćavanjem (Kurnik, 2001). U nižim razredima osnovne škole, proces formiranja pojma treba se provoditi što pažljivije i primjerenije jer svaki stupanj ima svoju težinu i važnost za razvoj mišljenja učenika (Kurnik, 2001).

4.3. Postojeći manipulativni materijal za množenje u razrednoj nastavi

Do sada se u radu na mnogim mjestima govorilo o važnosti manipulativnih materijala u nastavi matematike. „*Rad s konkretnim didaktičnim materijalima trebao bi biti neizostavna aktivnost u razrednoj nastavi matematike, ali i poslije, posebice u dopunskoj nastavi i u radu s učenicima s posebnim potrebama*“ (Jerac i Glasnović Gracin, 2012, str. 64). U ovom potpoglavlju govorit će se o postojećem manipulativnom materijalu za množenje u razrednoj nastavi. Opisat će se i slikovno prikazati Cuisenare štapići (*Slika 10.*) kao primjer manipulativnog materijala primjeren za množenje u razrednoj nastavi. Također, prikazat će se i kratak osvrt na manipulativan materijal Stern blokove.

Štapići dolaze u deset različitih duljina, počevši od 1 cm, a svaki sljedeći štapić je za 1 cm duži) (Corn, 2015). Štapići nose ime svojeg izumitelja, belgijskog učitelja Georgesa Cuisenairea (1891.-1976.) koji je promatrao učenike za vrijeme podučavanja i došao do zaključka kako boje pomažu djeci s teškoćama u učenju. Tako je 1947. počeo podučavati aritmetiku pomoću raznobojnih drvenih štapića. Osim vizualne pomoći (različite boje), materijal je djeci omogućilo i taktilni doživljaj. Učenici su postali mnogo uspješniji i motiviraniji u učenju (Corn, 2015).



Slika 10. Komplet Cuisenaire štapića

„Svaka veličina Cuisenaireovog štapića ima svoju određenu i nepromjenjivu boju, što njegovu duljinu čini lako prepoznatljivom, bez potrebe za mjerenjem pomoću kocke koja predstavlja jedinicu i bez prebrojavanja jedinica. Budući da na štapićima nema nikakvih oznaka ili podjela na jedinice, oni omogućuju djeci da svaku količinu sagledavaju kao cjelinu, a ne kao skupinu zasebnih jedinica. To ujedno razvija i učinkovite metode računanja koje ne ovise o brojenju u jedinicama“ (Corn, 2015, str. 7).

Cuisenaire štapići pogodni su za razvijanje predmatematičkih vještina nizanja te dobivanja *prostornog zora*¹⁰. Koristan su manipulativni materijal kod obrade novih pojmova kod zbrajanja i oduzimanja, množenja i dijeljenja, razlomaka, kvadrata prirodnih brojeva, polinoma te aritmetičke sredine i medijana (Corn, 2015).

Cuisenaire štapići prikladni su za učenike koji matematičku informaciju obrađuju uglavnom vizualno, od cjeline prema dijelovima (Corn, 2015). Zbog toga su štapići prikladni za usvajanje tablice množenja jer su istraživanja pokazala da učenici bolje pamte tablicu množenja kada je kreiraju samostalno pomoću konkretnih materijala Corn (2015) predlaže aktivnost popunjavanja tablice množenja pomoću Cuisenaire

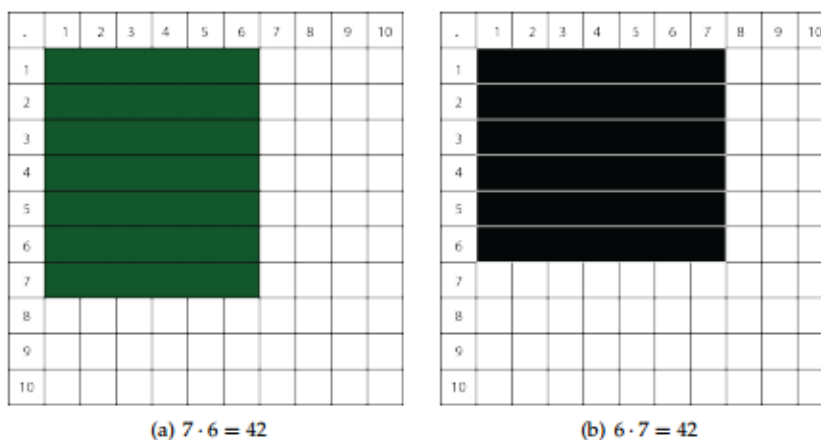
¹⁰ Pod pojmom prostorni zor (eng. spatial ability, spatial sense) podrazumijevamo intuitivni osjećaj za oblike u prostoru, kao i osjećaj za geometrijske aspekte svijeta koji nas okružuje i oblike koje formiraju objekti oko nas. On uključuje koncepte tradicionalne geometrije, a osobito sposobnost raspoznavanja, vizualnog prikazivanja i transformacije geometrijskih oblika (Corn, 2015)

štapića. Učitelj podijeli učenicima praznu 10 x 10 tablicu (Slika 11.). Koristeći znanje o „vrijednosti“ svakog štapića, učenici popunjavaju tablicu množenja.

.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Slika 11. Tablica množenja (Corn, 2015, str.27)

Ovom aktivnošću učenici zorno uočavaju komutativnost množenja. Učenici to otkrivaju iskustveno. Na slici 10. može se vidjeti da je „prekriven“ jednak broj kvadratića pomoću 6 crnih kao i pomoću 7 tamnozelenih štapića. Učenici donose zaključak da je $7 \cdot 6 = 6 \cdot 7$.



Slika 12. Prikaz komutativnosti pri upotrebi Cuisenaire štapića (Corn, 2016, str.76)

Sljedeći manipulativni materijal pogodan za množenje su Stern blokovi. „To je jednostavan manipulativni komplet na bazi malih jediničnih kocaka s kojima se lako rukuje i pomoću koji se jednostavno gradi dekadski brojevni sustav te računske operacije u njemu“ (Jerec i Glasnović Gracin, 2012, str. 154). Dobili su naziv po njemačkoj učiteljici Catherine Stern (1894.-1973.) koja ih je osmislila te uvela u nastavu.

Ovaj komplet namijenjen je modeliranju zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, odnosno razvijanju aritmetičkih koncepata i postupaka na konkretnoj razini (Sharma, 2001). Za razliku od Cuisenaire štapića, nema blokova koji predstavljaju brojeve između 1 i 10, što znači da za manipulaciju brojevima manjima od 10, učenici moraju kombinirati pojedinačnim kockicama koje predstavljaju jedinicu i odbrojavati ih jednu po jednu. Zato se pretpostavlja da Stern blokovi nisu toliko primjereni za učenje računske operacije množenja u razrednoj nastavi, već su pogodniji za zbrajanje i oduzimanje.

35

5. *MNOŽILICA* – MANIPULATIVNI MATERIJAL ZA MNOŽENJE

U ovom dijelu rada govorit će se o manipulativnom materijalu za množenje, koji je za ovu priliku osmislila autorica rada. Zbog smanjene dostupnosti manipulativnih materijala za množenje, autorica je osmislila materijal koji se može naći na klupi svakog školarca. Radi se o prenamjeni dječje igračke „*Hama perle*“¹¹ u svrhu učenja množenja.

„*Hama perle*“ (Slika 14.) je igračka namijenjena djeci starijoj od pet godina. Igračka je osmišljena na način da kod djece potiče kreativnost, što je osobita kvaliteta, obzirom da se upravo u toj dobi povećava kreativnost djece (Tatalović Vorkapić, 2013). Također, radi se o *konstruktivnoj igri*¹² čija je glavna karakteristika jačanje kognitivnih vještina djece (kritičko razmišljanje, povezivanje uzroka i posljedica, zaključivanje, poticanje mašte te kreativnost). Pretpostavlja se da će učenici razredne nastave prepoznati „Hama set“ kao jednu od igračaka iz ranijeg djetinjstva. Prenamjenom igračke, učenici će izraditi vlastiti manipulativni materijal za učenje množenja. *Množilica* je prikladan manipulativan materijal za učenje matematike jer učenici upotrebljavaju igračku poznatu iz ranijeg djetinjstva za učenje i savladavanje novih znanja i vještina, za što se tvrdi da motivirajuće djeluje na učenike (Tatalović Vorkapić, 2013). Također se očekuje da će učenici bolje prihvatiti materijal koji su sami izradili, nego materijal koji je već gotov kupljen u trgovini.



Slika 14. Hama set

¹¹ Hama perle (engl. *Hama Beads*) je dječja igračka koja se sastoji od seta šarenih perli i Hama ploče (*Hama Pegboard*). Perle se mogu smještati na ploču, na način da tvore sliku.

¹² Konstruktivna igra podrazumijeva baratanje predmetima s namjerom da se od njih nešto stvori (npr. gradnja kule od kocaka) (Tatalović Vorkapić, 2013)

5.1. Izrada *Množilice*

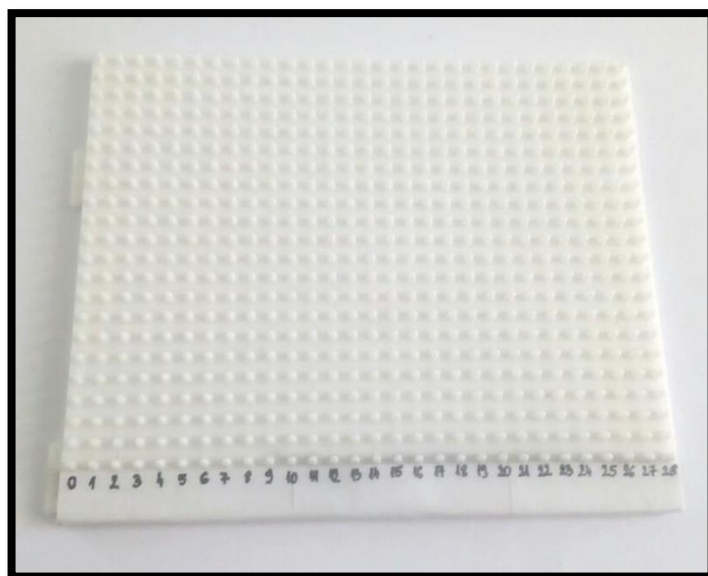
Množilica se izrađuje spajanjem „Hama perli“ i prenamjenom „Hama ploče“. Spajanjem perli nastaju jednobojni „štapići“, čija boja i veličina (odnosno broj spojenih perli) obilježavaju brojeve od jedan do deset.



Slika 15. Prikaz izrade *Množilice*

Prvo se određuje koja boja će označavati koji broj. Potom se perle slažu na „Hama ploču“ u niz, jedna do druge. Preporuča se da učenici sami slažu perle, a roditelji ili učitelji nadgledaju rad i interveniraju ukoliko to smatraju potrebnim. Sljedeći korak u izradi „štapića“ prepušta se učiteljima ili roditeljima. Perle se spajaju pod toplinom glačala, plastika se topi i perle se međusobno lijepe. Obavezna je upotreba posebnog papira (dobije se u „Hama setu“) koji se stavlja na perle kako se ne bi zalijepile na glačalo. Nakon što se glačalom prođe nekoliko puta po perlama, perle se ostavljaju da se ohlade. Kada učitelj ili roditelj procijene da je prošlo dovoljno vremena, skida se zaštitni papir, a „štapići“ se vade van iz ploče.

Četvrtasta „Hama ploča“ (Slika 16.) također se mora prilagoditi i izmijeniti za potrebu izrade manipulativnog materijala. Prva dva reda plastičnih šiljaka moraju se odrezati tako da ostane samo glatka površina ploče. Zatim se tankim flomasterom redom, ispod svakog šiljka, ispišu brojevi počevši od nule. Prvi dio posla odrađuju učitelji ili roditelji zbog potrebe za korištenjem noža ili škara, a učenici mogu ispisati brojeve na ploču.



Slika 16. Četvrtasta ploča *Množilice*

Množilica je primjer materijala koji je jeftin. S jednim „Hama setom“ mogu se napraviti štapići za cijeli razred, odnosno za svakog učenika, s minimalnim novčanim davanjima. Učenici i roditelji mogu sudjelovati u izrađivanju štapića, što učenicima može pružiti zadovoljstvo i zabavu. Svaki učenik dobiva svoj vlastiti materijal koji je izradio sa učiteljem ili roditeljima. Osim kod kuće, štapići se mogu izrađivati na satovima likovne kulture ili na satu razrednog odjela.

5.2. Metodika obrade pojma množenje u razrednoj nastavi pomoću *Množilice*

Množilica je didaktički komplet koji se sastoji od „štapića“ različitih boja i plastične „Hama ploče“. Jedan set *Množilice* čini 100 „štapića“¹³. Štapići se izrađuju u deset različitih veličina. Počinje se s jednom perlom, a svaki sljedeći štapić je za jednu perlu dulji. Štapići se slažu prema raspoloživim bojama perli koje nudi „Hama set“. Najvažnije je da su štapići jednake vrijednosti iste boje kod svih učenika. Boje i veličine štapića, u materijalu izrađenom za potrebe ovog rada, prikazane su na slici 17.

¹³ Pretpostavlja se da će za svaki broj biti dovoljno deset štapića budući da se u drugom razredu radi tablica množenja do $10 \cdot 10$.

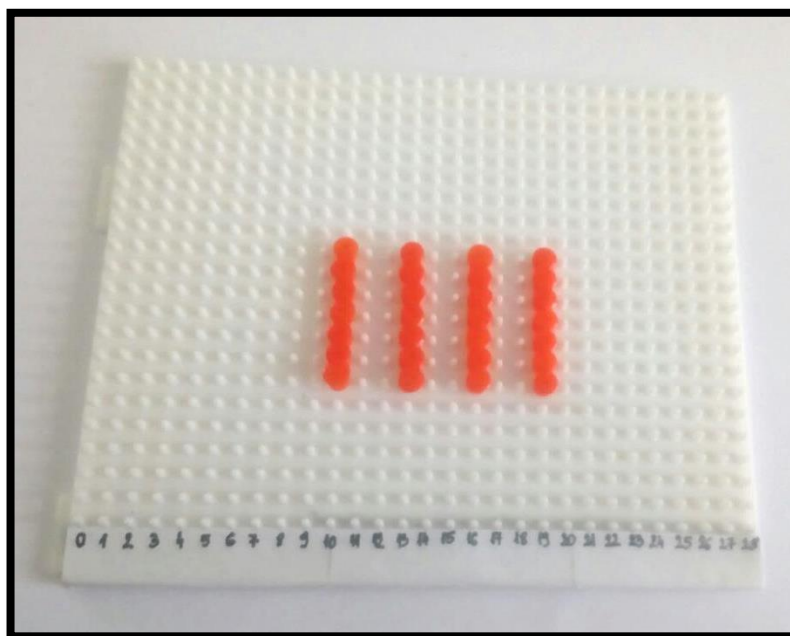
- jedna zelena perla - broj 1 
- dvije bijele perle - broj 2 
- tri svijetloplave perle - broj 3 
- četiri roze perle - broj 4 
- pet ljubičastih perli - broj 5 
- šest crnih perli - broj 6 
- sedam narančastih perli - broj 7 
- osam crvenih perli - broj 8 
- devet žutih perli - broj 9 
- deset plavih perli - broj 10 

Slika 17. Boje i vrijednosti štapića *Množilice*

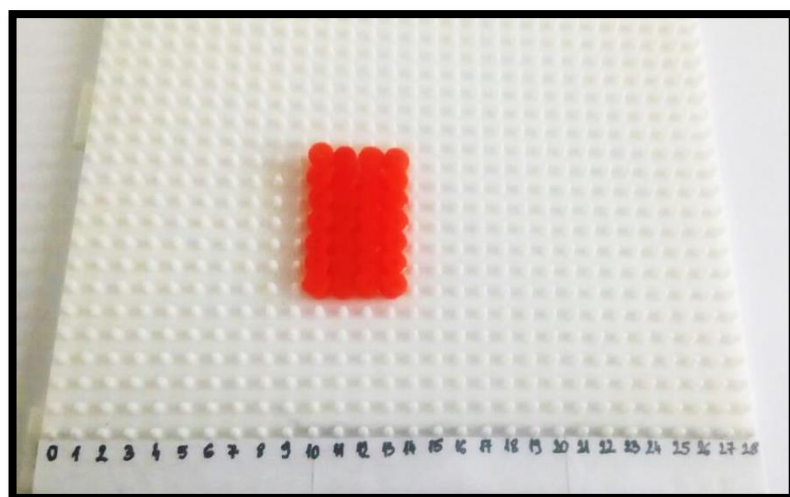
Iako svojim karakteristikama *Množilica* sliči Cuisenaire štapićima, postoje razlike između ta dva materijala. „Štapići“ *Množilice* i Cuisenaire štapići imaju svoju određenu i nepromjenjivu boju koja odmah sugerira na broj koji štapić predstavlja, ali „štapići“ *Množilice* imaju naglašene jedinice. Time je učenicima omogućeno da u početnom radu s *Množilicom* lakše odrede vrijednost „štapića“. U slučaju nesigurnosti, učenik uvijek može jednostavno prebrojiti od koliko se perli sastoji „štapić“ i nastaviti dalje s radom. Za razliku od Cuisenaire štapića, kod kojih učenik mora uspoređivati duljine štapića kako bi otkrio njihove „vrijednosti“. S vremenom će učenik početi povezivati broj s bojom pa više neće biti potrebe za prebrojavanjem.

Učenicima se pomoću *Množilice* mogu prikazati tri modela množenja, a to su: model skupa, model brojevnog pravca i model površine pravokutnika (2.2.1. *Modeli množenja u razrednoj nastavi matematike*), a s Cuisenaire štapićima dva modela množenja – model skupa i model površine pravokutnika. Pretpostavlja se da je *Množilica* poželjan manipulativni materijal u nastavi matematike upravo zbog tri modela množenja koji se mogu prikazati. Analizirajući udžbenike, primijetilo se da autori koriste samo model skupa i, nešto rjeđe, model brojevnog pravca. Iz nastavne prakse je poznato da se pri obradi gradiva nastavne jedinice koristi samo jedan model (najčešće model skupa). Pomoću *Množilice* učitelj ima mogućnost pokazati učenicima čak tri modela množenja na nastavnom satu koristeći samo jedan manipulativni materijal. Satovi matematike time bi bili puno bogatiji, a učeničko znanje o množenju dublje. Također, u kasnijoj fazi kada *Množilica* služi za provjeru

točnosti zadatka ili pomoć u rješavanju zahtjevnijih zadataka, učenik ima slobodu odabrati korištenje modela koji mu najbolje odgovara. Na sljedećim slikama mogu se vidjeti tri moguća modela množenja na *Množilici*, prikazana na primjeru množenja $4 \cdot 7$.



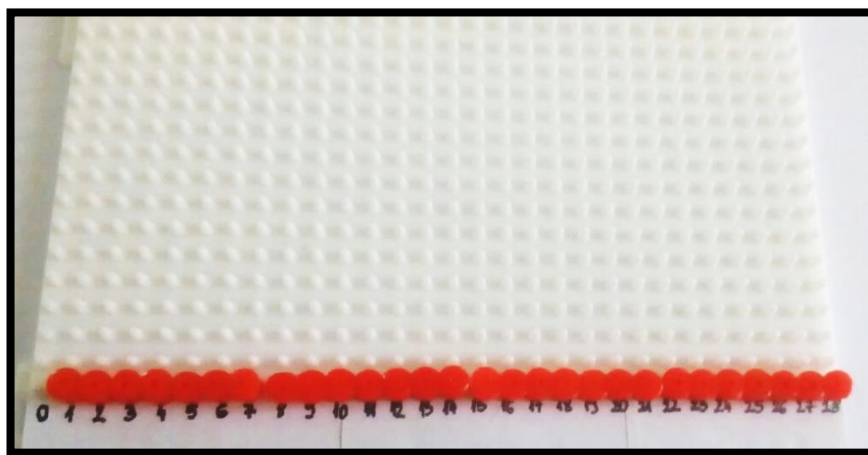
Slika 18. model skupa prikazan na *Množilici*



Slika 19. Model površine prikazan na *Množilici*

Množilicom se može prikazati model brojevnog pravca, što nije slučaj kod Cuisenaire štapića. Zbog veličine ploče koja se nalazi u Hama setu, brojevni pravac možemo prikazati do broja 28. Najpoželjnije bi bilo da se mogu prikazati brojevi do 100, ali veličina ploče to ne dopušta. Model brojevnog pravca rijetko se koristi za prikaz

množenja većih brojeva zbog nepraktičnosti crtanja. Brojevni pravac *Množilice* time štedi vrijeme jer učenik može koristiti model bez da „gubi vrijeme“ na crtanje. Prednost mu je i dinamičnost zbog nizanja štapića na šiljke uz rub brojevnog pravca.



Slika 20. Model brojevnog pravca prikazan na *Množilici*

Prilikom prezentiranja novog nastavnog sadržaja pomoću *Množilice*, učitelj se treba držati metodike usvajanja novog matematičkog pojma, odnosno vođenja djece od konkretne prema apstraktnoj razini. U potpoglavlju 4.2. prikazan je metodički slijed obrade novog matematičkog pojma pomoću manipulativnog materijala profesora Sharpe (2001). Istim metodičkim slijedom bit će prikazana upotreba *Množilice* u razrednoj nastavi matematike. U ovom dijelu rada prikazat će se prva dva stupnja Sharpeove spirale. Prvi stupanj odnosi se na upoznavanje učenika s materijalom¹⁴. U prvom stupnju učenici se kroz igru upoznaju s materijalom, a u drugom stupnju ponavljaju potrebna znanja i vještine za usvajanje novih matematičkih pojmova. Prilikom obrade matematičkog pojma množenja, učenici ponavljaju znanja o računskoj operaciji zbrajanja. Preostali metodički slijed može se vidjeti u šestom poglavlju pod naslovom *Primjeri aktivnosti na Množilici za množenje u razrednoj nastavi*.

¹⁴ *Množilica* se može uvesti i ranije u razrednu nastavu matematike, i to već u prvom razredu (zbrajanje i oduzimanje), ali za potrebe rada kreće se s pretpostavkom da je to učenicima prvi susret s *Množilicom*.

Primjeri aktivnosti:

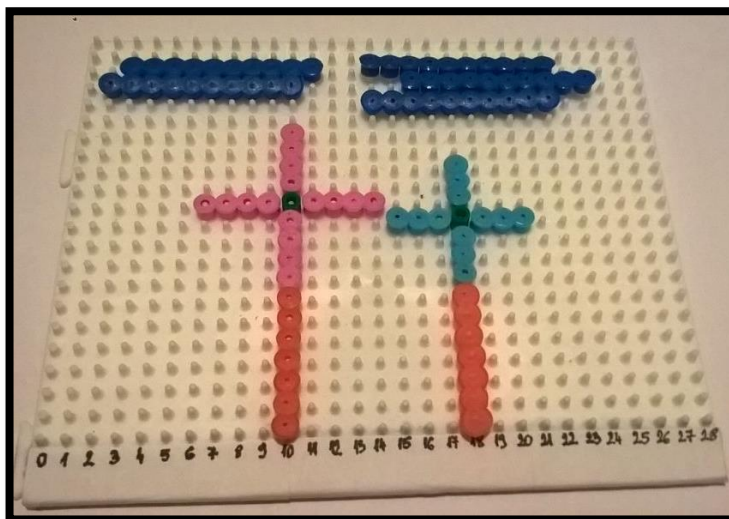
1.aktivnost : Slobodna igra – „Stvori sliku“

Cilj aktivnosti: upoznavanje s materijalom i zadovoljavanje prirodnog poriva prema senzoričkom istraživanju i taktilnim doživljajima

Učenici dobivaju uputu da izvade *Množilice* te da cijeli komplet stave ispred sebe na klupu. Zatim učitelj zadaje prvi zadatak , a on glasi : *Složite sliku dvaju cvjetova i neba koristeći pet tamnoplavih štapića, četiri štapića roze boje, četiri štapića svijetloplave boje, dva zelena i dva narančasta štapića.*

Dok učenici izvršavaju zadatak, učitelj obilazi učenike i promatra radove učenika. Nakon izvršene aktivnosti, učenici prezentiraju radove ostalim učenicima iz razreda. Važno je da učenici primijete različitost boja i duljina štapića, ali i da su štapići iste boje jednakih duljina. Promatranjem ostalih radova učenici mogu zamijetiti i ostale moguće prikaze zadane aktivnosti. Na taj način učenici dobivaju svijest o materijalu.

Trajanje aktivnosti: 5 minuta



Slika 21. Primjer mogućeg učeničkog rada (aktivnost *Stvori sliku*)

2. aktivnost: Primarne vještine i primarni koncepti – „Zbrajalica“

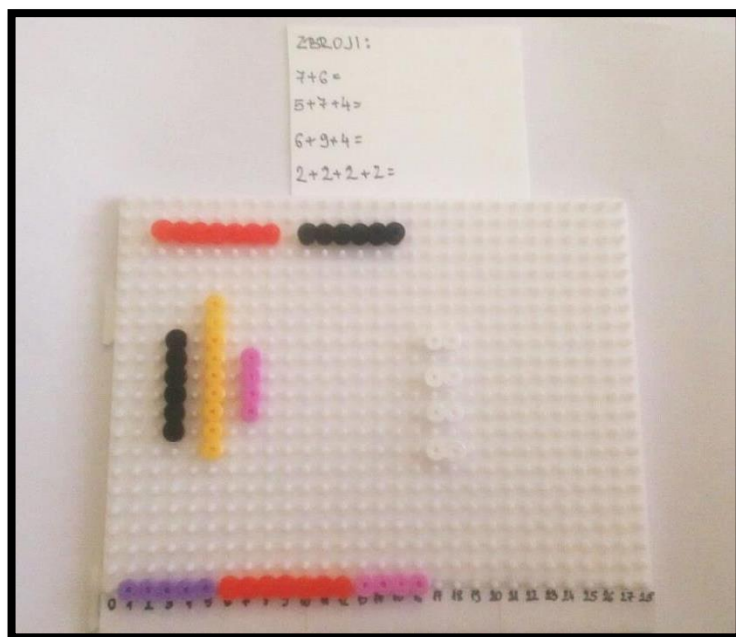
Cilj aktivnosti: ponavljanje predmatematičkih vještina i znanja (zbrajanje brojeva) te priprema za usvajanje novog matematičkog pojma

Učenicima se najavljuje nova aktivnost u kojoj *Množilica* postaje *Zbrajalica*. Učitelj dijeli učenicima kartice sa zadatcima računske operacije zbrajanja. Svaki učenik dobiva jednu karticu. Na svakoj kartici se nalaze četiri zadatka. Zadatak učenika je da jednakosti s kartice prikažu pomoću *Množilice*, s time da jedan zadatak (po izboru) prikažu na brojevnom pravcu. Učenici provjeravaju točnost svojih zadataka s prijateljem iz klupe, a učitelj obilazi učenike i pomaže ukoliko učenici imaju probleme sa svladavanjem zadatka. Zadnji zadatak na kartici mora se odnositi na zbrajanje jednakih pribrojnika.

Zadatci na karticama su sljedeći:

Zbroji: 5+9= 3+4+6= 8+4+7= 7+7+7+7=	Zbroji: 4+8= 5+1+7= 3+9+4= 3+3+3+3=	Zbroji: 3+9= 2+3+7= 5+8+4= 8+8+8+8=
Zbroji: 5+6= 9+1+2= 10+3+8= 1+1+1+1=	Zbroji: 9+2= 6+2+4= 8+4+5= 6+6+6+6=	Zbroji: 5+8= 3+4+7= 6+7+9= 9+9+9+9=
Zbroji: 8+6= 6+1+7= 9+5+6= 4+4+4+4=	Zbroji: 7+6= 5+7+4= 6+9+4= 2+2+2+2=	Zbroji: 10+8= 6+3+1= 7+4+6+5= 5+5+5+5=

Trajanje aktivnosti: 10 minuta



Slika 22. Primjer mogućeg učeničkog rada (aktivnost Zbrajalica)

Nakon provjere zadataka, prelazi se na manipulativnu aktivnost s ciljem svladavanja novog matematičkog pojma.

U ovom poglavlju prikazale su se osnovne značajke *Množilice* – manipulativnog materijala za učenje i poučavanje sadržaja iz matematike osmišljenog za potrebe ovog rada. Prikazan je način izrade materijala te prva dva koraka metodičkog slijeda *Peterostupne spirale* profesora Sharpe (2001) pri usvajanju matematičkih pojmova pomoću upotrebe manipulativnih materijala. Preostala tri koraka metodičkog slijeda i pripadajućih aktivnosti prikazane su u sljedećem poglavlju pod imenom *Primjeri aktivnosti s Množilicom za množenje u razrednoj nastavi*.

6. PRIMJERI AKTIVNOSTI S MNOŽILICOM ZA MNOŽENJE U RAZREDNOJ NASTAVI

U ovom poglavlju ponudit će se pripreme za nastavne sate u kojima se koristi manipulativni materijal, *Množilica*, pri usvajanju odnosno uvježbavanju računske operacije množenja.

6.1. Pripreme za satove usvajanja novog matematičkog sadržaja množenja s manipulativnim materijalom *Množilica*

U ovom dijelu rada prikazane su tri pripreme za usvajanje novog matematičkog pojma s manipulativnim materijalom *Množilica*. U pripravama će biti prikazani osnovni podatci o nastavnom satu, a oni su: nastavna cjelina, nastavna tema, nastavna jedinica, ključni pojmovi i obrazovna postignuća iz NPP-a. Također će se prikazati zadatci nastavnog sata (obrazovni, funkcionalni i odgojni), korelacije te struktura nastavnog sata u kratkim crtama. Potom će se dati detaljan opis aktivnosti. U pripremama su prikazane prve tri teme iz NPP-a koje se odnose na računsku operaciju množenje. Teme se sljedeće: „Množenje brojeva“, „Zamjena mjesta faktora“ te „Množenje brojem 2“. Prikazane su aktivnosti manipulativnih aktivnosti, aktivnosti zapisivanja konkretnog iskustva te aktivnosti iskustva na apstraktnoj razini (prema Sharma, 2001).

Prve dvije aktivnosti, *Slobodna igra* i *Primarne vještine i primarni koncepti*, prikazane su u poglavlju 5.2. pod naslovom *Metodika obrade pojma množenje u razrednoj nastavi pomoću Množilice*.

Priprava za nastavni sat obrade nastavne jedinice *Množenje brojeva*

Nastavna cjelina: Množenje brojeva

Nastavna tema: Množenje brojeva

Nastavna jedinica: Množenje brojeva

Ključni pojmovi: zbrajanje, pribrojnik, množenje, umnožak, faktor

Obrazovna postignuća: razumjeti množenje kao zbrajanje jednakih pribrojnika; pisati množenje matematičkim zapisom

Zadatci nastavnog sata:

- a) **obrazovni:** upoznati i usvojiti pojam množenja na konkretnim primjerima, uputiti u postupak računske operacije množenja, usvojiti i primijeniti nazive članova računske operacije množenja.
- b) **funkcionalni:** razvijati sposobnosti povezivanja, zapažanja, mišljenja i zaključivanja, razvijati kreativnost učenika, izoštravati moć zapažanja.
- c) **odgojni:** razvijati kulturu slušanja i govorenja, samostalnost i savjesnost u radu, strpljivost, upornost i urednost u izvršavanju zadataka, razvijanje pažnje.

Korelacija:

- a) **unutarpredmetna:** zbrajanje jednoznamenkastih brojeva, geometrijski likovi
- b) **međupredmetna:** Hrvatski jezik – usmeno izražavanje
Likovna kultura – prepoznavanje boja i oblika

Struktura nastavnog sata

Uvodni dio (5 minuta)

- rješavanjem tri zadataka zbrajanja jednoznamenkastih brojeva učenici ponavljaju znanja o toj računskoj operaciji (rješavanje zadataka s dva i tri različita pribrojnika)
- učenici ponavljaju nazive članova računske operacije zbrajanja na primjerima

Glavni dio (35 minuta)

- učenike se uvodi u množenje koristeći manipulativni materijal *Množilica*

PRVA AKTIVNOST - učenici na *Množilici* rješavaju zadatke zbrajanja jednakih pribrojnika, nakon čega učitelj uvodi množenje kao novu računsku operaciju uzastopnog zbrajanja jednakih pribrojnika.

DRUGA AKTIVNOST- učenike se upoznaje s modelima množenja rješavajući tekstualne zadatke pomoću *Množilice*.

TREĆA AKTIVNOST – samostalan rad učenika – učenici prikazuju rješenje zadanog zadatka množenja na *Množilici* koristeći jedan od modela množenja po vlastitom izboru.

ČETVRTA AKTIVNOST- samostalni rad učenika – prikaz rješenja tekstualnog zadatka pomoću manipulativnog materijala koristeći skupovni model.

Završni dio (5 minuta)

- učitelj provodi usmenu sintezu sata postavljajući učenicima pitanja o sadržaju današnjeg nastavnog sata

- zadavanje domaće zadaće

TJEK AKTIVNOSTI:

Prva aktivnost: Manipulativna aktivnost

Cilj aktivnosti: prikazivanje množenja kao uzastopno zbrajanje jednakih pribrojnika pomoću manipulativnog materijala

Aktivnost se nastavlja na posljednju aktivnost iz poglavlja 5.2. u kojoj su učenici trebali na *Množilici* prikazati rješenja računskom operacijom zbrajanja.

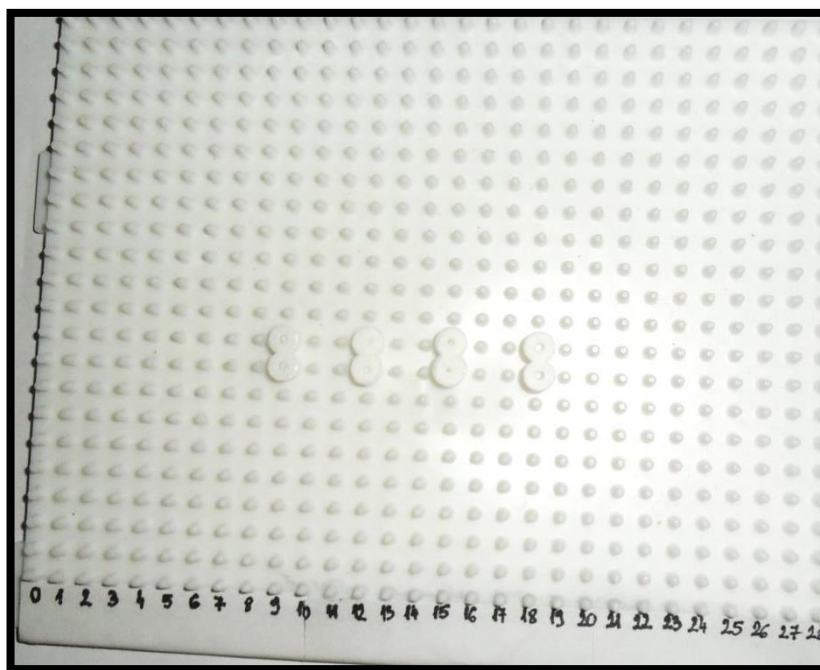
Tijek aktivnosti: Učenici dobivaju uputu da na *Množilici* prikažu zadnji zadatak s kartice. Pošto su učenici imali različite zadatke, svaki od učenika prezentira svoj način rada na *Množilici* (primjer rada na slici 23.). Učenici prezentiraju zadatak i strategiju rješavanja, odnosno koje su štapiće odabrali i zašto.

Nakon prezentacija učeničkih radova, učitelj nastavlja razgovor. Heurističkim razgovorom učenici zaključuju da su zbrajali vrijednosti štapića jednake

„vrijednosti“. Učitelj zatim uvodi novu računsku operaciju množenje koju definira učenicima kao uzastopno zbrajanje jednakih pribrojnika. Učitelj odabire jedan od zadnjih zadataka s kartice te na tom zapisu učenike upoznaje s novom računskom operacijom te nazivima članova računске operacije množenja. Učitelj zapisuje nazive na ploču, a učenici u bilježnice.

$$2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$4 \cdot 2 = 8$$



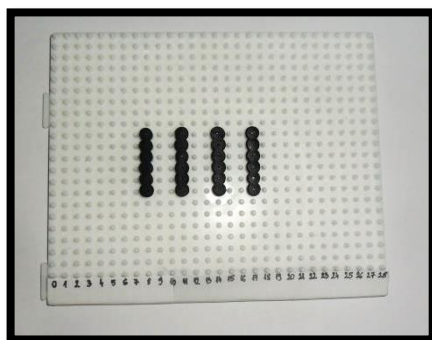
Slika 23. Prikaz na *Množilici* - prva aktivnost

Druga aktivnost: Upoznavanje s modelima množenja

Cilj aktivnosti: upoznati učenike s modelima množenja koristeći manipulativni materijal

Tijek aktivnosti: Učitelj zadaje novi primjer na kojima će učenike upoznati s modelom skupa. Učitelj zadaje prvi zadatak riječima: **Učenici su na satu tjelesne i zdravstvene kulture podijeljeni u 4 kolone. U svakoj koloni nalazi se 6 učenika. Koliko ukupno ima učenika?**

Zadatak je prikazati situaciju zadanu zadatkom na *Množilici*. Najprije, učenici trebaju odabrati koje štapiće će koristiti s obzirom na zadani zadatak. Vodeći se iskustvom, zamišljaju izgled četiri kolone i da se u svakoj nalazi šest učenika. Tako učenici dolaze do zaključka da će koristiti četiri štapića vrijednosti šest (Slika 24.). Smještaju ih na *Množilicu* kako je prikazano na slici. Vodeći se analogijom prethodnog primjera učitelj navodi učenike da pokušaju samostalno doći do zapisa, računskom operacijom množenja, odnosno $4 \cdot 6 =$.



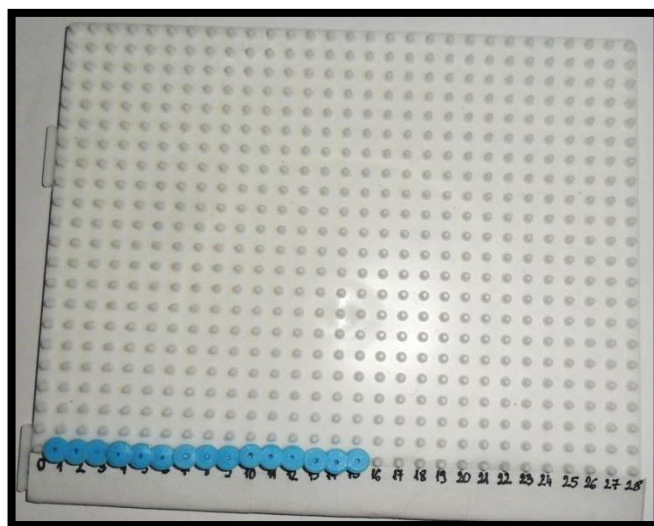
Slika 24. Prikaz tekstualnog zadatka na *Množilici*

Učitelj ispituje kako su štapići posloženi na *Množilici*. Promatranjem, učenici zapažaju da su štapići smješteni u kolone, odnosno skupine. Učitelj objašnjava da su rješenje prikazali skupovni modelom. Sada se traži od učenika da navedu gdje je na *Množilici* vidljiv prvi, a gdje drugi faktor. Heurističkim razgovorom učenici dolaze do spoznaje da je prvi faktor vidljiv u broju kolona, odnosno broju štapića, a drugi faktor u broju učenika u svakoj koloni, odnosno broju perli u štapićima. Umnožak je vidljiv u broju elemenata u sva četiri skupa, odnosno u ukupnom broju perli.

Zatim učitelj zadaje novi zadatak riječima koji glasi: **Ante prođe biciklom 3 kilometra u jednom danu. Koliko kilometara Ante prijeđe u 5 dana?** Učitelj vodi razgovor s učenicima o zadatku, dakle što je poznato i što se traži. Učenici odgovaraju da je poznato koliko kilometara prođe Ante biciklom u jednom danu, a traži se koliko kilometara prođe u pet dana. Učitelj želi navesti učenike da zaključe kako bi zadatak bilo najbolje prikazati na brojevnom pravcu pa ih pita kako bi bilo najjednostavnije prikazati ukupan prijeđeni put na *Množilici*. Učenici zaključuju da ploča ima nacrtan brojevni pravac na koji se mogu nanosti štapići te da je brojevni pravac najpogodniji za prikaz rješenja zadatka. Učitelj daje uputu da učenici poslože

štapiće na donji dio ploče, odnosno na brojevni pravac, tako da počnu slagati od nule. Učenici se odlučuju koristiti svijetloplavim štapićima, odnosno nanositi na brojevni pravac pet puta štapić vrijednosti tri (Slika 25.). Učenici su nakon slaganja uočili da im zadnja perla zadnjeg štapića „leži“ na broju 15, odnosno da je to rješenje zadatka. Učenici stvaraju zapis u bilježnice na osnovi prikaza s *Množilice*.

$$3 \cdot 5 = 15$$



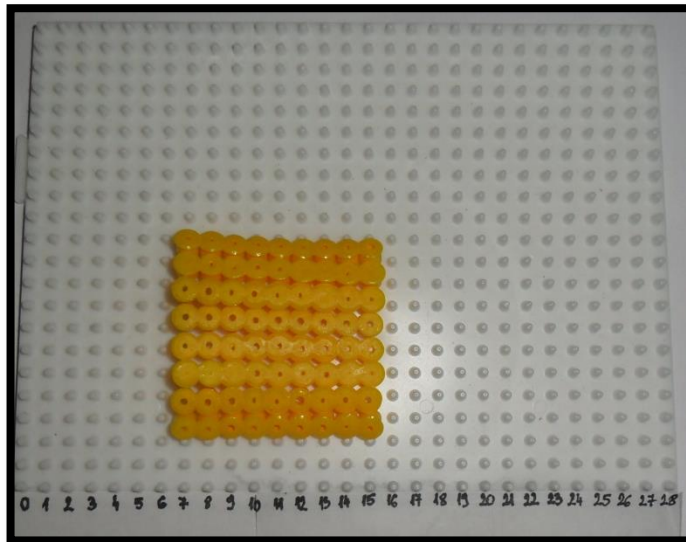
Slika 25. Prikaz na *Množilici* modelom brojevnog pravca

Zatim, učenici trebaju navesti gdje se vidi prvi, a gdje drugi faktor. Učenici navode da je prvi faktor broj tri i da on pokazuje broj kilometara, a broj 5 je drugi faktor i on pokazuje broj dana. Zatim, učitelj razgovorom navodi učenike na ime korištenog modela pitanjem: *Kako bi se zvao ovaj model? Na prošlom primjeru imali smo skupovni model jer smo štapiće prikazivali po skupinama, a sada smo rješenje prikazivali na brojevnom pravcu*“. Analogijom, učenici zaključuju da se radi o modelu brojevnog pravca. Učitelj govori učenicima da brojevni pravac u množenju mogu koristiti kada se u tekstu zadatka neka radnja ponavlja u istom vremenskom periodu.

U sljedećem koraku učitelj treba upoznati učenike s modelom površine pravokutnika. Pa tako učitelj zadaje novi tekstualni zadatak: **Dvorana u kinu ima 8 redova, a u svakom redu nalazi se 9 naslonjača. Koliko dvorana ima naslonjača?** Učitelj navodi da štapiće poslože jedne do drugih, bez redova razmaka. Učenici smještaju

osam žutih štapića koji „vrijede“ devet na ploču (Slika 26.). „Čitaju“ prikaz s *Množilice* te ga zapisuju u svoje bilježnice (osam štapića po devet perli).

$$8 \cdot 9 = 72$$



Slika 26. Prikaz na Množilici modelom površine pravokutnika

Učitelj ispituje učenike na koji geometrijski lik ih podsjeća dobiveni prikaz. Učenici odgovaraju da ih prikaz podsjeća na lik pravokutnika. Učitelj objašnjava da su umnožak sada prikazali modelom koji se zove model pravokutnika. Učitelj daje zadatak učenicima da sami istraže što je na prikazu prvi faktor, a što drugi faktor. Učitelj im pomaže u prebrojavanju te razgovorom dolaze do zaključka da u zadatku nije zadano što je prvi, a što drugi faktor. U zadatku nije navedeno treba li se prvo navoditi broj redova pa prebrojati stolce u tom redu ili broj stupaca pa zatim prebrojati stolce. Također, zaključuju da je ukupan broj perlica umnožak, ali da prebrojavanje predugo traje. Zbog toga se zadatak riješio računskom operacijom množenja.

Treća aktivnost: samostalna interpretacija modela

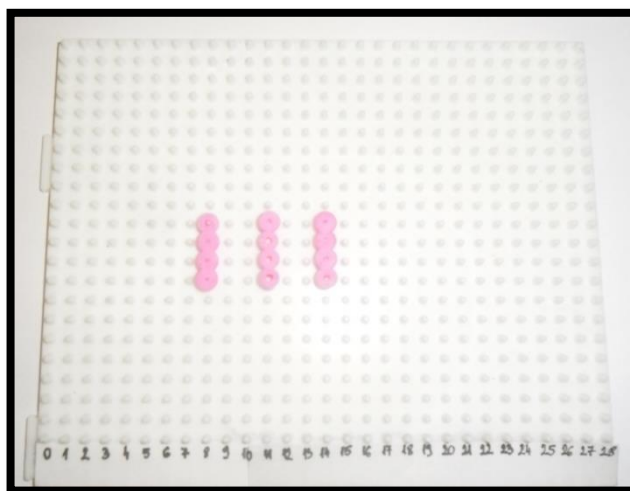
Učitelj zapisuje zadatak računske operacije množenja na ploču koji glasi: $4 \cdot 8 =$. Zadatak učenika je da navedeni zadatak prikažu na *Množilici* koristeći neki od tri modela – model skupa, model brojevnog pravca ili model površine pravokutnika. Učenicima se pruža sloboda. Prikazuju zadatak modelom koji će prezentirati ostatku

razreda nakon završetka aktivnosti. Prilikom prezentiranja, učenik će morati navesti model, koje je štapiće odabrao i koji je konačni rezultat.

Četvrta aktivnost: samostalno rješavanje tekstualnog zadatka uz korištenje *Množilice* i skupovnog modela

Zadatak glasi: **Koliko ukupno nogu imaju tri mačke?**

Učenici se prvo prisjećaju da mačke imaju četiri noge. Potom odlučuju koje će štapiće izabrati pošto „mačke imaju četiri noge“. Odabiru štapiće koji predstavljaju broj četiri. Uzimaju tri štapića, po jednu za svaku mačku. Dakle, tri roza štapića koja smještaju na ploču po skupinama (*Slika 27.*).



Slika 27. Prikaz rješenja tekstualnog zadatka na *Množilici*

Nakon toga uključuje se učitelj koji vodi učenike do konačnog zapisa tako da učenici „čitaju“ potrebne informacije s *Množilice*. Realnu situaciju interpretiraju u matematičkom kontekstu, na način da određuju što predstavlja prvi, a što drugi faktor. Stvara se zapis množenja na ploči i u bilježnicama te daje pisani odgovor.

Pred kraj sata, učitelj ispituje učenike o današnjem satu i radi kratku sintezu. Nakon toga zadaje domaću zadaću.

Priprava za nastavni sat obrade nastavne jedinice *Zamjena mjesta faktora*

Nastavna cjeline: Množenje brojeva

Nastavna tema: Zamjena mjesta faktora

Nastavna jedinica: Zamjena mjesta faktora

Ključni pojmovi: množenje, faktor, zamjena mjesta faktora

Obrazovna postignuća: razumjeti i primijetiti svojstvo komutativnosti množenja

Zadaci nastavnog sata:

- a) **obrazovni:** upoznati i usvojiti svojstvo komutativnosti množenja, produbljivati prije stečena znanja o računskoj operaciji množenje.
- b) **funkcionalni:** razvijati funkcionalno mišljenje za matematičke zakonitosti, razvijati sposobnost za apstrahiranje konkretne situacije i njezino formalno opisivanje pomoću matematičkih pojmova.
- c) **odgojni:** razvijati sposobnost izražavanja općih ideja matematičkim jezikom, izgrađivanje pravilnih odnosa prema suučenicima i kritičkog odnosa.

Korelacija:

- a) unutarpredmetna: zbrajanje jednoznamenkastih brojeva, množenje brojeva
- b) međupredmetna: Hrvatski jezik – usmeno izražavanje

Struktura i trajanje etapa nastavnog sata

Uvodni dio (10 minuta)

- učenici se prisjećaju zapisivanja algoritma množenja brojeva na način da rješavaju zadatke zbrajanja jednakih pribrojnika pa ih potom zapisuju u obliku računске operacije množenja
- učenici ponavljaju nazive članova računске operacije množenja na primjerima zadataka

Glavni dio (25 minuta)

- učenici usvajaju pojam zamjene mjesta faktora koristeći *Množilicu*

PRVA AKTIVNOST - učenici se susreću s pojmom zamjene mjesta faktora (komutativnosti množenja) na primjerima zadataka uz pomoć *Množilice*.

DRUGA AKTIVNOST – samostalan rad učenika na tekstualnom zadatku pomoću *Množilice*.

TREĆA AKTIVNOST – rad u paru – rješavanje tekstualnog zadatka pomoću modela brojevnog pravca na *Množilici*.

ČETVRTA AKTIVNOST – rješavanje tekstualnog zadatka pomoću modela površine na *Množilici*.

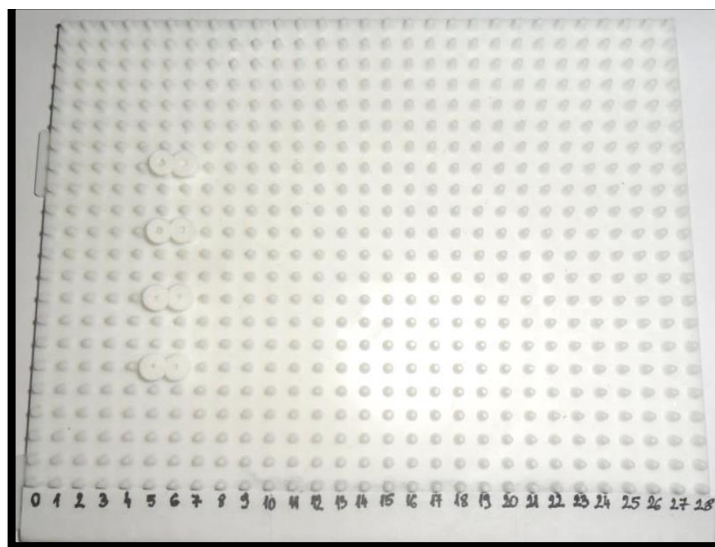
Završni dio (10 minuta)

- sinteza sata u kojoj učitelj provjerava učinak sata
- zadavanje domaće zadaće

TIJEK AKTIVNOSTI

Prva aktivnost: Manipulativna aktivnost i zapisivanje konkretnog iskustva

Učitelj daje uputu učenicima da izvade svoje *Množilice* i stave ih na klupu ispred sebe. Učitelj zadaje učenicima prvi dio tekstualnog zadatka: **Tin ima četiri police za knjige u svojoj sobi. Na svakoj polici ima po dvije knjige. Koliko knjiga ima Tin?** Učitelj daje uputu da prvo prikažu zadatak na *Množilici* modelom skupa. Učitelj napominje da to nije cijeli zadatak i neka na *Množilici* smjeste štapiće na lijevu stranu.



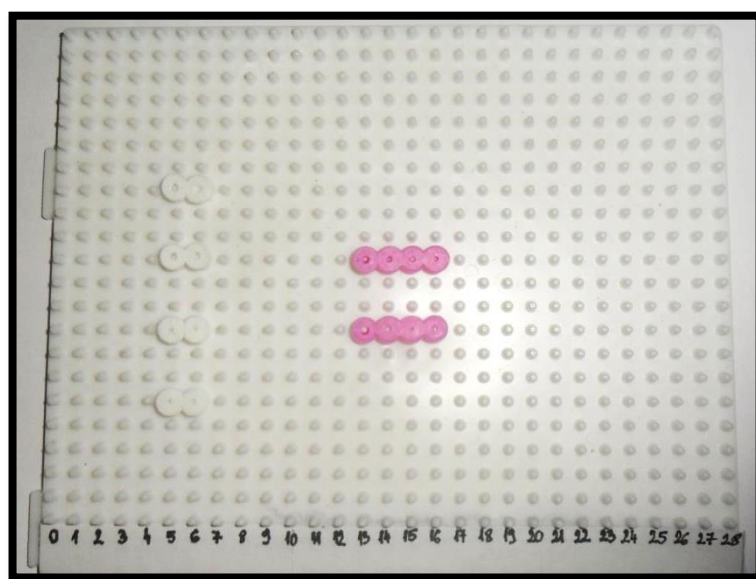
Slika 28. Prikaz rješenja prvog dijela zadatka na *Množilici*

Učenici uzimaju četiri bijela štapiće i stavljaju ih na ploču (*Slika 28.*). Svoj rad prate govorom: *Imam četiri puta po dvije knjige. Ukupno osam knjiga.* Stvaraju zapis u obliku umnoška. Učitelj stvara zapis na ploči po navođenju učenika.

$$4 \cdot 2 = 8$$

Učitelj čita drugi dio zadatka. On glasi: **Matija ima dvije police za knjige i na svakoj polici po četiri knjige. Tko ima više knjiga, Tin i Matija?**

Učitelj govori učenicima da ponove postupak rješavanja uz napomenu da ovaj dio zadatka prikažu na desnoj strani *Množilice*.



Slika 29. Prikaz konačnog rješenja na *Množilici*

Učenici uzimaju dva roza štapića i smještaju ih na desnu stranu ploče (*Slika 29.*). Zapisuju rješenje računskom operacijom množenja. Učitelj stvara zapis na ploči uz navođenje učenika.

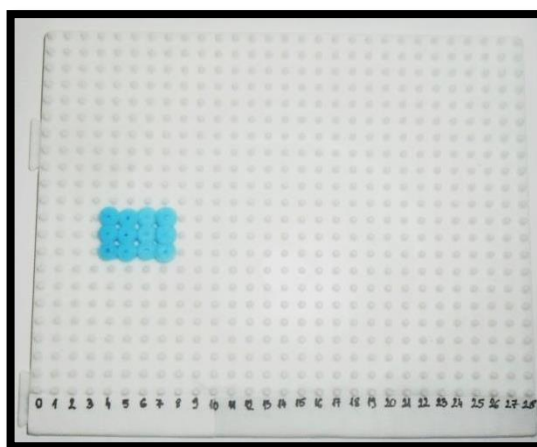
$$4 \cdot 2 = 8$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

Vodi se heuristički razgovor o pitanju postavljenom u zadatku. Učenici odgovaraju da oba dječaka imaju jednako mnogo knjiga. Učitelj svojim pitanjima navodi učenike da zamijete sličnost u oba zapisa računске operacije množenja, nakon čega učenici zaključuju da su u zadacima faktori isti, samo što su prvi i drugi faktor zamijenili mjesta. Uočavaju da je umnožak isti u oba zadatka.

Učitelj uvodi novi primjer. Upućuje učenike na zaključak iz prethodnog primjera. Zadatak učenika je da istraže što se događa kada faktori mijenjaju mjesta. Zadaje učenicima da na *Množilicu* postave četiri štapića svijetloplave boje („vrijednost“ tri) koristeći model površine, a zatim da rješenje prikažu računskom operacijom množenja (*Slika 30.*). Učitelj to isto zapisuje na ploču nakon što učenici završe s rješavanjem.

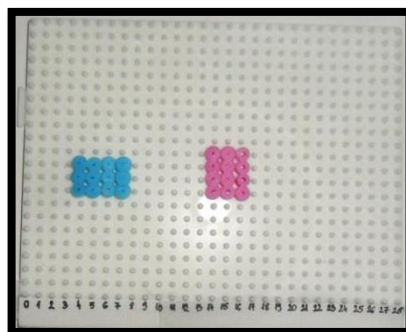
$$4 \cdot 3 = 12$$



Slika 30. Prikaz rješenja modelom površine

Heurističkim razgovorom učenici zaključuju da je prvi faktor prikazuje broj štapića, a drugi faktor od koliko se perli sastoji štapić. Učenik zadaje učenicima da prvo u bilježnici faktorima zamijene mjesta, a zatim to prikažu na *Množilici* pokraj prethodnog primjera (*Slika 31.*).

$$3 \cdot 4 = 12$$



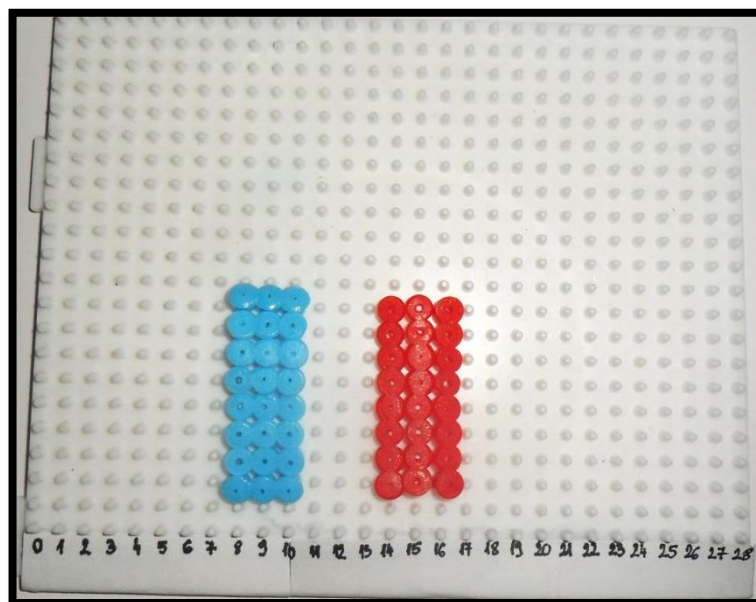
Slika 31. Prikaz konačnog rješenja

Učenici zamjećuju da su koristili različite štapiće, odnosno u terminima matematike mijenjali mjesta faktorima, a da je ukupan broj perli, odnosno umnožak, ostao isti. Pitanjima i razgovorom o primjeru, učenici dolaze do spoznaje da ako faktori zamijene mjesta, umnožak se neće promijeniti.

Točna formulacija pravila se zapisuje u bilježnice: *Ako faktori zamijene mjesta, umnožak ostaje isti.*

Druga aktivnost: samostalan rad učenika na primjeru pomoću *Množilice*

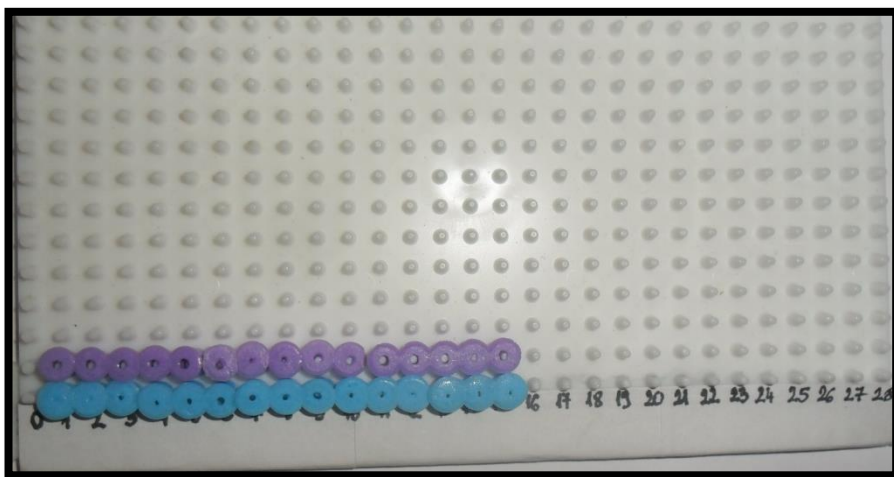
Tijek aktivnosti: Na sljedećem primjeru učenici samostalno trebaju prikazati na *Množilici* zamjenu mjesta faktora. Zadatak je $8 \cdot 3 =$. Cilj ovog primjera jest da se učenicima osvijesti važnost poznavanja pravila komutativnosti prilikom savladavanja tablice množenja. Učenike se navodi da zamijete razliku u vremenu i složenosti postupka potrebnog da se modelom prikaže računaska operacija $8 \cdot 3 =$, odnosno $3 \cdot 8 =$. Na tom primjeru učenici uočavaju da im je duže vremena trebalo da postave osam štapića „vrijednosti“ tri i da to zbroje, nego kada su trebali staviti samo tri štapića „vrijednosti“ osam da bi se prikazala jednaka površina, odnosno umnožak (Slika 32.). Pri izvođenju zadatka, učitelj treba poticati učenike da usmeno objašnjavaju svaki svoj korak i ideju.



Slika 32. Prikaz komutativnosti množenja na *Množilici* modelom površine pravokutnika

Treća aktivnost: rad u paru – rješavanje zadatka modelom brojevnog pravca

Cilj sljedeće aktivnosti je da učenici učvrste svoja znanja o množenju i zamjeni mjesta faktora. U paru, učenici na *Množilici* rješavaju zadatak riječima modelom brojevnog pravca koji glasi: **Ana ima 5 traka duljine 3 centimetra, a Tina ima 3 trake duljine 5 centimetara. Kolika je ukupna duljina trake koju ima svaka djevojčica?**



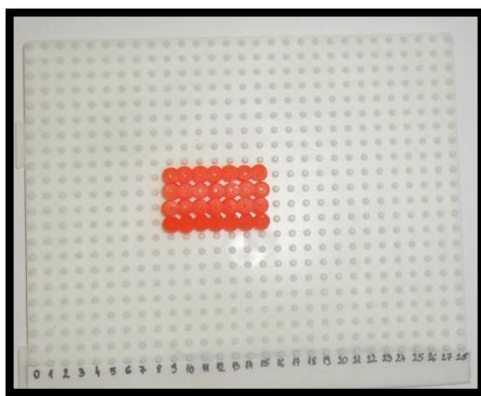
Slika 33. Prikaz komutativnosti množenja na *Množilici* pomoću modela brojevnog pravca

Heurističkim razgovorom učenici zaključuju da se zadatak najbolje može prikazati modelom brojevnog pravca jer je sugeriran kontekstom zadatka. Učitelj napominje da rješenja zadataka prikažu na *Množilici* jedan iznad drugog. Učenici prvo postavljaju na ploču pet štapića „vrijednosti“ tri, a rješenje zapisuju u bilježnicu računskom operacijom množenja. Potom, red iznad, nanose tri štapića „vrijednosti“ pet (Slika 33.) i rješenje zapisuju u bilježnicu računskom operacijom množenja. Promatrajući rješenja i vodeći razgovor s učiteljem, dolazi se do zaključka da se oba zadatka mogu riješiti prikazivanjem samo jednog rješenja na *Množilici* pošto su faktori zamijenili mjesta, a rezultat je ostao isti.

Četvrta aktivnost: rješavanje zadatka modelom površine

Učitelj zadaje novi zadatak riječima koji glasi: **Ivan i Luka slažu zgrade od lego kockica. Ivan je složio zgradu od 4 reda u kojem se nalazi po 7 lego kockica, a Luka je složio zgradu od 7 redova u kojima se nalazilo po 4 lego kockice. Koji dječak je za slaganje zgrade upotrijebio više kockica?** Učenici zadatak trebaju prikazati *Množilicom*, a zatim računskom operacijom množenja.

Cilj je da učenici već čitajući zadatak, primjete da su im zadani isti faktori. Zaključuju da će na ploču smjestiti četiri štapića „vrijednosti“ sedam jer će na taj način prikazati oba rješenja zadatka. Istovremeno, imat će četiri reda sa sedam perli i sedam stupaca s četiri perle (*Slika 34.*). Vodeći se ti zaključkom, učenici stavljaju na ploču četiri narančasta štapića vrijednosti sedam. Stvaraju zapis u bilježnice računskom operacijom množenja te daju pisani odgovor. Učenicima koji još uvijek nisu spremni na donošenje ovakvog zaključka dozvoljava se da zadatak riješe korak po korak, pa tek onda formiraju zaključak.



Slika 34. Prikaz rješenja modelom površine

Nakon riješenog zadatka, učitelj provodi sintezu sata usmenim ispitivanjem učenika, a zatim zadaje domaću zadaću.

Priprava za nastavni sat obrade nastavne jedinice *Množenje brojem 2*

Nastavna cjelina: Množenje brojeva

Nastavna tema: Množenje brojem 2

Nastavna jedinica: Množenje brojem 2

Ključni pojmovi: množenje brojem 2

Obrazovna postignuća: ovladati postupkom množenja brojem 2

Zadaci nastavnog sata:

a) obrazovni: znati množiti brojem 2, znati prikazati množenje brojem 2 na manipulativnom materijalu te pri tome koristiti modele množenja (skupovni model, model brojevnog pravca te model površine pravokutnika).

b) funkcionalni: razvijati sposobnost povezivanja, zapažanja, mišljenja i zaključivanja.

c) odgojni: razvijati kulturu slušanja i govorenja, samostalnost i savjesnost u radu, strpljivost, upornost i urednost u izvršavanju zadataka, razvijanje pažnje.

Korelacija:

a) unutarpredmetna: zbrajanje dvoznamenkastih i jednoznamenkastih brojeva do 100, množenje brojeva

b) međupredmetna: Hrvatski jezik – usmeno izražavanje

Tjelesna i zdravstvena kultura – razvijanje fine motorike

Struktura i trajanje etapa nastavnog sata:

Uvodni dio (10 minuta)

- ponavljanje potrebnih znanja za sat obrade novog nastavnog sadržaja
- učenici na ploči i u bilježnice rješavaju nekoliko zadataka zbrajanja jednakih pribrojnika, povezuju to sa znanjem o množenju te zapisuju zadatke u obliku računske operacije množenja

Glavni dio (30 minuta)

- upotrebom manipulativnog materijala *Množilica* učenici na konkretan način dolaze do spoznaja od množenju brojem 2

PRVA AKTIVNOST: rješavanje zadatka uzastopnog zbrajanja broja 2 pomoću *Množilice*. Zadatak se povezuje s računskom operacijom množenja pri čemu se učenike potiče na verbalizaciju ideja i postupaka.

DRUGA AKTIVNOST: rješavanje tekstualnih zadataka pomoću *Množilice* upotrebom različitih modela množenja i primjenom komutativnosti množenja.

TREĆA AKTIVNOST: učenici rješavaju tekstualni zadatak pomoću koje uočavaju karakteristiku množenjem broja/brojem 2.

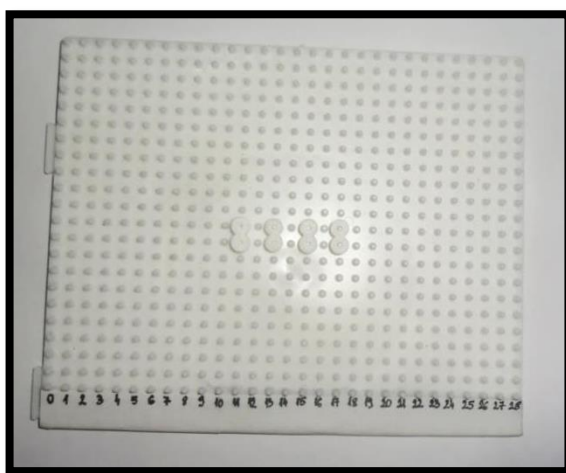
Završni dio sata (5 minuta)

- usmena sinteza sata i provjeravanje učinka sata
- zadavanje domaće zadaće

Prva aktivnost: Manipulativna aktivnost

Cilj aktivnosti: usvajanje znanja o novom matematičkom pojmu pomoću manipulativnih aktivnosti.

Učitelj zadaje učenicima da izvade *Množilice* i pogledaju zadatak na ploči. Zadatak glasi $2+2+2+2=$. Učitelj daje sljedeću uputu: Prikažite pomoću *Množilice* navedeni zadatak.



Slika 35. Prikaz rješenja zadatka na Množilici

Nakon što su učenici prikazali zadatak na *Množilici* (Slika 35.), učitelj ispituje učenike na koji način su došli do rješenja. Očekivani učenički odgovor: *Prvi pribrojnik je broj 2 i stavio sam jedan bijeli štapić na ploču. Drugi pribrojnik je broj 2 i njegov štapić sam stavio pokraj prvog štapića. Sljedeća dva pribrojnika su isto broj 2 pa sam i njihove štapiće stavio na ploču. To je ukupno osam.*

$$2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

Učitelj ispituje učenike: *Koliko ste bijelih štapića koristili?*

Učenik: *Koristili smo četiri bijela štapića koji „vrijede“ dva.*

Učitelj: *Koristili ste četiri štapića koji „vrijede“ dva. Kako bismo to mogli drugačije zapisati?*

Učenik zaključuje na osnovu znanja koja ima o računskoj operaciji množenje. Učenik daje odgovor da se to može zapisati pomoću računske operacije množenja te da jednakost glasi $4 \cdot 2 = 8$

Učitelj zapisuje zapis množenja na ploču na sljedeći način:

$$2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

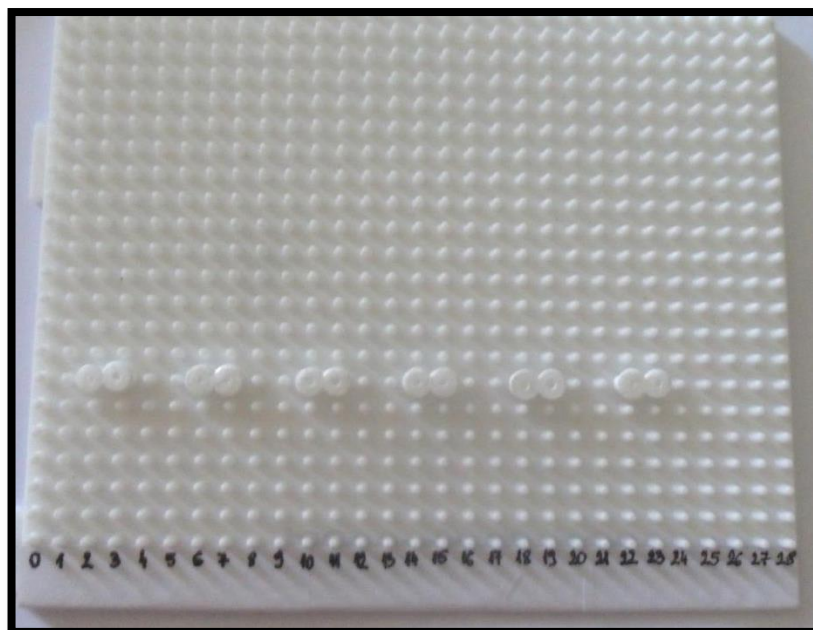
$$4 \cdot 2 = 8$$

Druga aktivnost: Iskustva na apstraktnoj razini

Cilj aktivnosti: ovladati novim nastavnim sadržajem rješavanjem dodatnih zadataka

Primjer 1. Model skupa

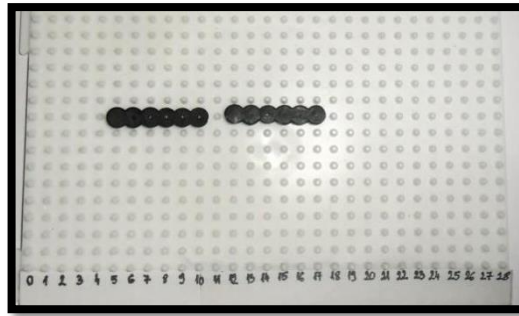
Učitelj čita kratak tekstualni zadatak kojeg učenici zapisuju u svoje bilježnice. Zadatak glasi : **Koliko kotača ima 6 bicikala?** Učitelj daje uputu za rješavanje: *Prikažite rješenje zadatka na Množilici, a zatim ga zapišite u zapišite u bilježnice u obliku računske operacije množenja.*



Slika 36. Prikaz rješenja modelom skupa

Tijek aktivnosti: Koristeći *Množilicu*, učenici stavljaju na pločicu šest bijelih štapića koji „vrijede“ dva (bicikl ima dva kotača) (*Slika 36.*). Zatim to iskustvo zapisuju u bilježnicu računskom operacijom zbrajanja te dolaze do rezultata. Zatim to zapisuju računskom operacijom množenja: $6 \cdot 2 = 12$. Provjeravaju svoj rad tako da se zadatak riješi na ploči. Učitelj vodi heuristički razgovor i ispituje učenike na koji su još način mogli prikazati rješenje zadatka na *Množilici*. Učitelj potiče učenike da koriste već stečena znanja o množenju navodeći učenike na komutativnost množenja. Potom učenici zaključuju da su rješenje zadatka mogli prikazati nanošenjem dvaju štapića crne boje koji „vrijede“ šest (*Slika 37.*), odnosno da zamijene mjesta faktorima. Učenici prikazuju to na *Množilici* i stvaraju novi zapis u bilježnice.

$$6 \cdot 2 = 12$$

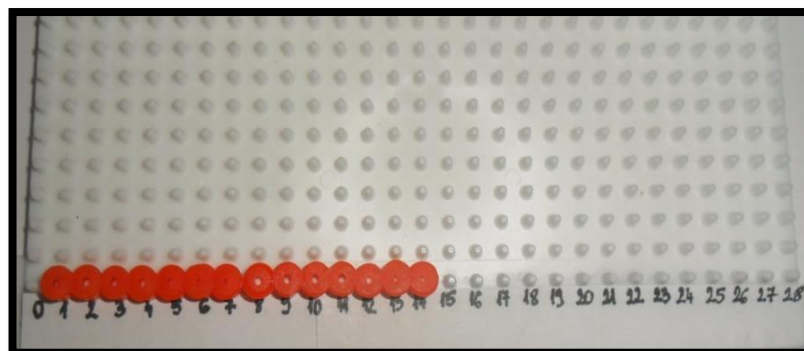


Slika 37. Prikaz zamjene mjesta pribrojnika

Primjer 2. Model brojevnog pravca

Učitelj zadaje učenicima novi zadatak. Učenici ga zapisuju u bilježnicu. Zadatak glasi: **Zec preskoči 2 metra u jednom skoku. Koliko metara preskoči zec u 7 skokova?** Heurističkim razgovorom učenike se motivira da zaključe kako je model brojevnog pravca najprigodniji za prikaz rješenja na *Množilici*. Učitelj obilazi učenike, promatra njihov rad i daje dodatne upute i pomoć ukoliko je potrebno.

Radi konteksta zadatka očekuje se da će učenici na brojevni pravac sedam puta nanijeti štapić vrijednosti dva (Slika 38.). Učitelj ih heurističkim razgovorom navodi i na pravilo komutativnosti. Primjenom znanja o komutativnosti množenja, učenici donose zaključak da isti zadatak mogu riješiti zamjenom mjesta faktora, odnosno da na brojevni pravac nanose dva štapića vrijednosti sedam, umjesto sedam štapića vrijednosti dva. Učenici koriste *Množilicu*, odnosno njezin donji dio na kojem se nalazi označeni brojevni pravac.



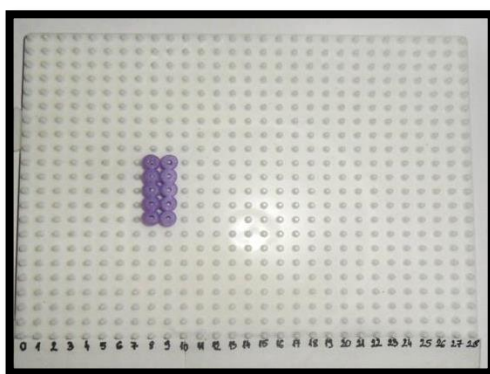
Slika 38. Prikaz rješenja na brojevnom pravcu Množilice

Primjer 3. Model površine

Učenici prelaze na novi zadatak i zapisuju ga u bilježnicu. Zadatak glasi: **Anin vrt ima 5 redova. U svakom redu nalaze se dvije gredice. Koliko gredica ima Anin vrt?** Učitelj daje uputu za rješavanje: *Prikažite rješenje zadatka pomoću Množilice tako da štapiće posložite na način kako izgledaju gredice u vrtu. Potom zapišite računskom operacijom množenja u bilježnice.*

Koristeći znanje o komutativnosti množenja s prethodne nastavne jedinice, učenici uočavaju da rješenje mogu prikazati na način da koriste dva štapića ljubičaste boje (Slika 39.), odnosno vrijednosti pet. Prema prikazu na *Množilici*, stvaraju zapis računskom operacijom množenja u svoje bilježnice.

$$5 \cdot 2 = 10$$

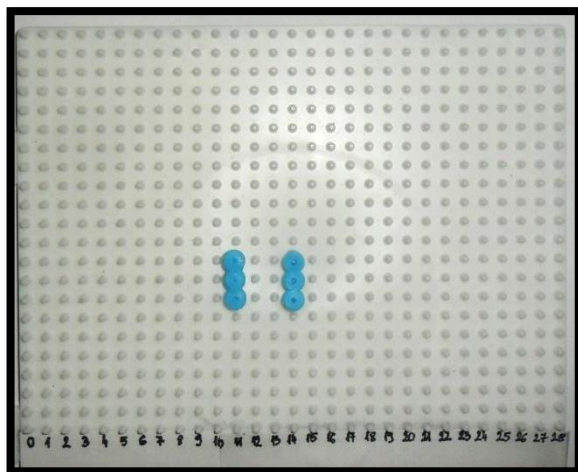


Slika 39. Prikaz rješenja modelom površine

Treća aktivnost: Dva puta više (udvostručavanje)

Učitelj zadaje učenicima novi zadatak riječima koji glasi: **Marta je jučer na igralištu provela 3 sata, a Mila dva puta više. Koliko je sati Mila bila na igralištu?** Zadatak učenika je da rješenje prikažu računskom operacijom množenja te pomoću *Množilice*.

Učenici uzimaju dva svijetloplava štapića i stavljaju ih na *Množilice* (Slika 40.). Stvaraju zapis u bilježnice da je $2 \cdot 3 = 6$.



Slika 40. Prikaz rješenja zadatka na *Množilici*

Učitelj heurističkim razgovorom želi potaknuti učenike da primijete „udvostučavanje“, odnosno da se faktor 3 uvećao dva puta. Ispituje učenike kako su došli do rješenja, a učenici odgovaraju da su broj tri pomnožili s dva. Zatim ispituje učenike da li su čuli za riječ *duplo* ili *dvostruko* i što ona znači. Učenici znaju da *duplo* ili *dvostruko* znači dvostruko više. Učitelja zanima kako bi učenici *duplo* prikazali pomoću množenja, a oni odgovaraju da ako žele nešto *duplo* da to moraju pomnožiti brojem dva. Na taj način učenici su došli do zaključka da kada je u zadatku jedan od faktora dva, da se drugi faktor „udvostruči“, odnosno uveća dva puta.

U završnom dijelu sata, učitelj vodi usmenu sintezu sata da dobije povratnu informaciju o rezultatu izvedenog rada na satu te zadaje domaću zadaću.

6.2. Priprava za sat ponavljanja matematičkog sadržaja množenja s manipulativnim materijalom

U ovom potpoglavlju dat će se prijedlog aktivnosti za sat ponavljanja iz matematike u drugom razredu razredne nastave. Nastavna jedinica odnosi se na ponavljanje tablice množenja. Ovaj sat održava se nakon svih odrađenih satova koji se odnose na množenje i dijeljenje u drugom razredu. Dakle, sat podrazumijeva ponavljanje velike nastavne cjeline. Prikazat će se timski oblik rada¹⁵ po stanicama. Timovi će biti heterogeni¹⁶. Svaki član tima imat će svoju ulogu prema vlastitim znanju i sposobnostima. Uloge određuje učitelj, a one su sljedeće: vođa tima, pomoćnik vođe i članovi tima. Učitelj će za timove pripremiti zadatke i za svakog učenika listić za odgovore. Na listiću za odgovore učenici upisuju rješenja zadataka sa svih stanica. Ukupno ima šest stanica. Na svakoj stanici nalazit će se zadatci i upute. Svaki tim će se na stanici zadržati 5 minuta, nakon čega učitelj prekida rad te se timovi „sele“ na novu stanicu. Kada svi timovi prođu sve stanice, timovi prezentiraju rad sa zadnje stanice ostatku razreda. Ostali učenici pažljivo slušaju prezentacije ostalih timova te provjeravaju svoja rješenja na listiću za odgovore.

¹⁵ Timski oblik rada je skupni oblik rada u kojem svaki član tima ima svoj zadatak, različit od ostalih (Banić, 2006).

¹⁶ Heterogeni timovi su timovi sastavljeni su od učenika različitih znanja i sposobnosti (Banić, 2006).

Priprava za sat uvježbavanja matematičkog sadržaja množenja s manipulativnim materijalom

Nastavna cjelina: Množenje brojeva

Nastavna tema: Tablica množenja

Nastavna jedinica: Ponavljanje – množenje

Ključni pojmovi: množenje, tablica množenja

Obrazovna postignuća: ovladati tablicom množenja u skup brojeva do 100

Zadatci nastavnog sata:

a)obrazovni: uvježbati računsku operaciju množenja, uvježbati postupak i u slučaju kada su zadaci zadani u nešto složenijem obliku.

b)funkcionalni: osposobljavati učenika za praktično primjenjivanje usvojenih znanja iz množenja.

c)odgojni: razvijati kulturu slušanja i govorenja, samostalnost i savjesnost u radu, strpljivost, upornost i urednost u izvršavanju zadataka, razvijanje pažnje.

Korelacija:

a) unutarpredmetna: množenje jednoznamenkastih brojeva

b) međupredmetna: Hrvatski jezik – usmeno izražavanje

Likovna kultura – prepoznavanje boja i oblika

Struktura nastavnog sata

Uvodni dio (10 minuta)

- ponavljanje računske operacije množenja rješavanjem primjera na ploči i u bilježnicama
- ponavljanje pravila o radu u timu
- podjela učenika u šest heterogenih tima

Glavni dio (30 minuta)

- samostalni rad učenika na radnim stanicama, na svakoj stanici zadržavaju se 5 minuta

PRVA STANICA: Učenici rješavaju zadatke s nastavnog listića uz pomoć *Množilice*.

DRUGA STANICA: Učenici rješavaju zadane zadatke iz područja množenja. Rješenja zadataka se provjeravaju preko slagalice.

TREĆA STANICA: Učenici pomoću računske operacije množenja otkrivaju od koliko se perlica sastoji robot prikazan *Množilicom*.

ČETVRTA STANICA: Učenici prikazuju zadatke računskom operacijom množenja prema zadanim primjerima na *Množilici* pomoću modela brojevnog pravca.

PETA STANICA: Učenici osmišljavaju tekstualne zadatke prema zadanim primjerima računske operacije množenja na *Množilici*.

ŠESTA STANICA: Učenici rješavaju zadatke množenja, a potom ih prikazuju na *Množilici*.

Završni dio (10 minuta)

- prezentiranje rada – vođe timova prezentiraju rješenja zadnje stanice na kojoj je njegov tim bio
- heuristički razgovor

Prije samog početka rada u timovima, učitelj, ponavljanjem množenja jednoznamenkastih brojeva, priprema učenike za sat vježbanja i ponavljanja (Markovac, 2001.). Učenici će na nekoliko primjera ponoviti računsku operaciju množenja do 100 (primjerice $5 \cdot 8$, $3 \cdot 7$, $4 \cdot 9$) tako da jedan učenik rješava primjer na ploču, a ostali učenici u svoje bilježnice. Zatim slijedi informiranje o načinu rada na ostatku sata. Učenici, između ostaloga, ponavljaju pravila o tome kako se treba ponašati u timu. Zatim učitelj dijeli učenike u timove te svaki tim smješta na njegovu prvu stanicu. Za vrijeme rada timova, učitelj obilazi timove, promatra njihov rad i kontrolira vrijeme.

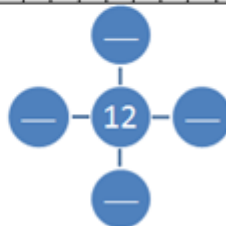
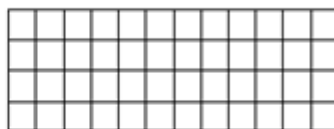
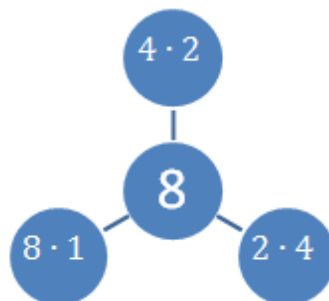
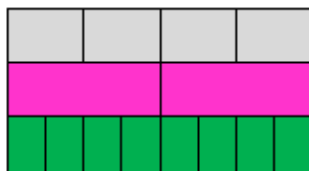
1. STANICA

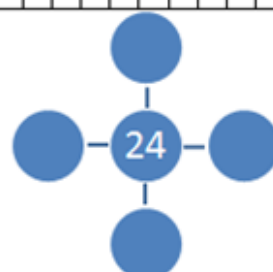
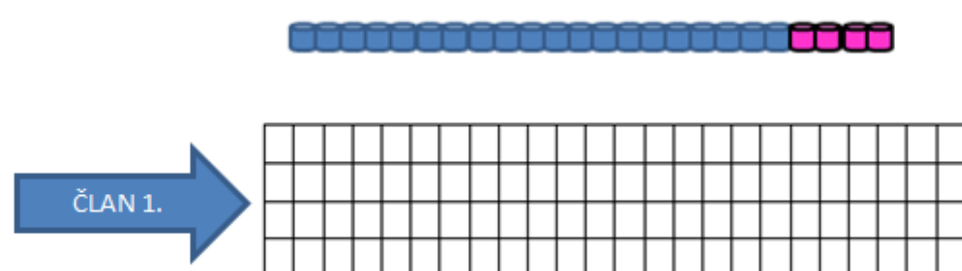
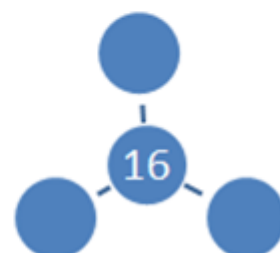
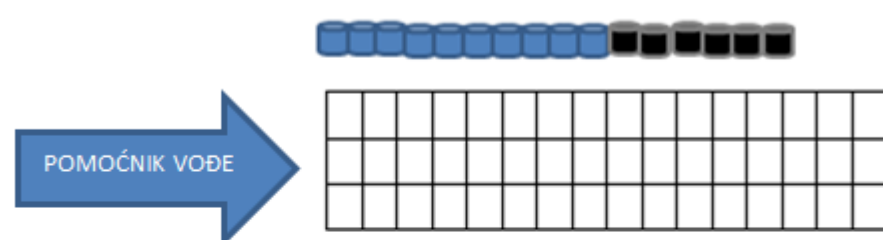
Učenike na stanici čeka prikazani radni listić. Aktivnost je osmišljena s ciljem da se učenici prisjete korištenja *Množilice*. U ovom slučaju radi se o složenijim zadacima kakve učenici nisu rješavali uz pomoć *Množilice*. U timu se trebaju podijeliti zadatci pa tako kraj svakog zadatka piše kome je zadatak namijenjen. Učenike pri tome treba informirati o preostalom vremenu kako bi znali organizirati svoj rad.

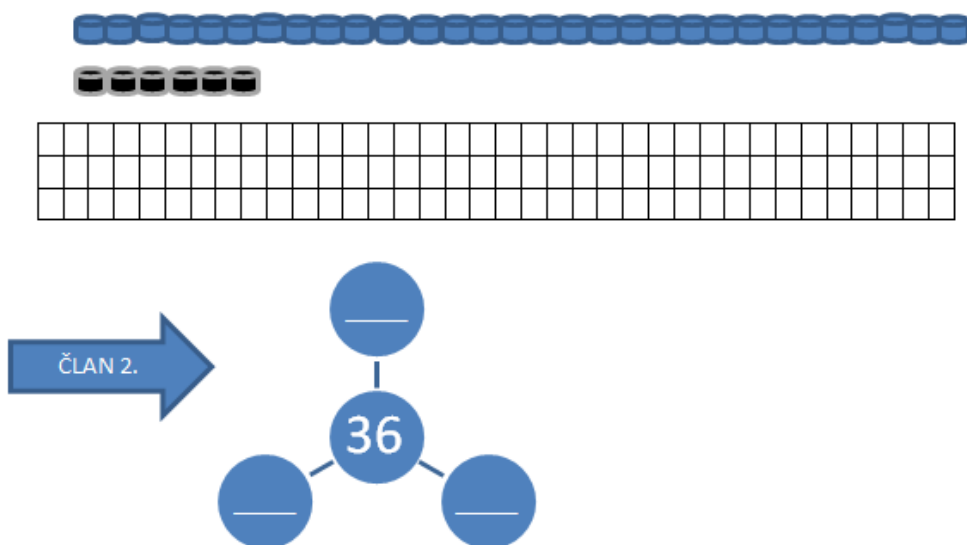
1. PLAVA STANICA

PRED VAMA SE NALAZE ZADATCI KOJE TREBATE RIJEŠITI UZ POMOĆ *MNOŽILICE*. PAŽLJIVO PROČITAJTE SVAKI ZADATAK. NEMOJTE ZABORAVITI NA VRIJEME!

Otkrijte sve faktore koji mogu dati zadani umnožak koristeći *Množilicu*. Faktore obojite u bojama *Množilice*, a zatim napišite jednakosti. Promotrite primjer!







2. STANICA

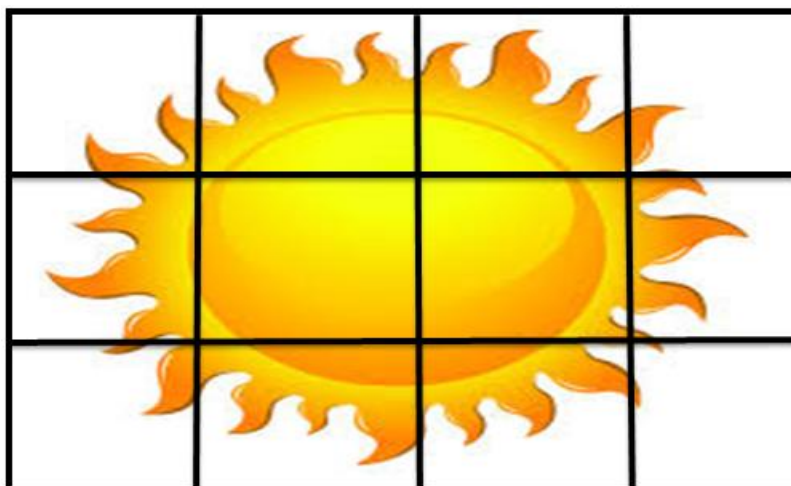
Na ovoj stanici učenici će slagati matematičke slagalice. Na tvrdom A4 papiru su iscrtana polja, a na svakom polju je jedan zadatak računske operacije množenja. Slika A4 formata izrezana je u obliku slagalica (12 komada), a na njima pišu rješenja zadataka. Učenici trebaju riješiti zadatke na tvrdom papiru, pronaći rješenja među slagalicama te zalijepiti na tvrdi papir kako bi dobili cijelu sliku. Svaki tim dobiva drugačiju sliku. Pošto učenici rade u timu, vođa tima treba podijeliti posao. Prijedlog je da se odredi koji će učenici rješavati koje polje, a potom zajedno pronalaze i lijepe dijelove slagalice.

2. ŽUTA STANICA

PRED VAMA SE NALAZE ZADATCI KOJE TREBATE RIJEŠITI. PO POTREBI RIJEŠITE ILI RIJEŠENJE PROVJERITE *MNOŽILICOM*. PAŽLJIVO PROČITAJTE SVAKI ZADATAK. NEMOJTE ZABORAVITI NA VRIJEME!

Riješite zadatke na smeđem papiru, a zatim pronađite rješenja među slagalicama kako bi dobili cijelu sliku. Dio slagalice zalijepite na polje na kojem je isto rješenje kao i na slagalici. Dobivenu sliku možete nositi sa sobom na sljedeću stanicu.

$7 \cdot 8$	$6 \cdot 6$	$3 \cdot 9$	$4 \cdot 8$
$2 \cdot 8$	$10 \cdot 5$	$9 \cdot 8$	$4 \cdot 1$
$6 \cdot 0$	$3 \cdot 2$	$7 \cdot 4$	$5 \cdot 5$



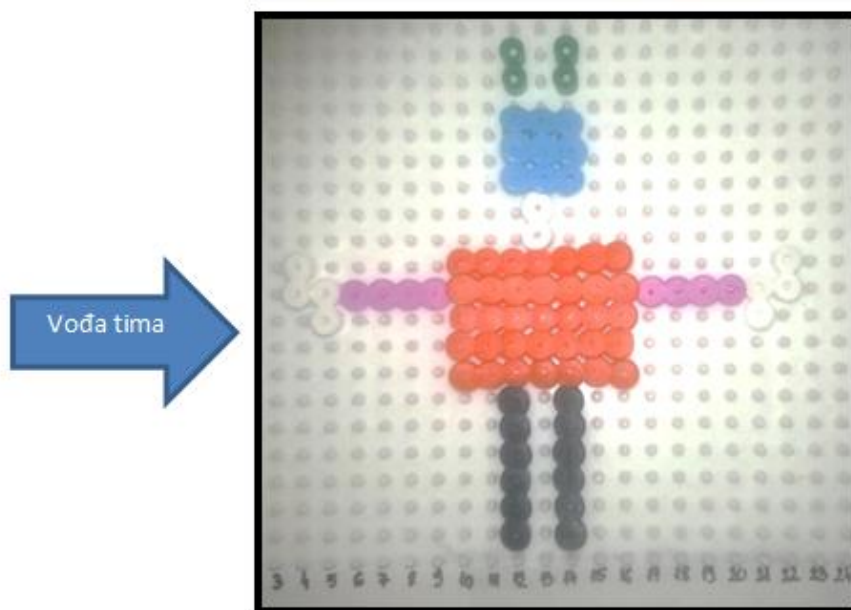
3. STANICA

Učenike na stanici čeka prikaz sa slike. Svaki učenik dobiva svog robota. Roboti su prilagođenu znanju učenika i njihovim sposobnostima. Tako vođa tima dobiva robota sa složenijim zadacima, pomoćnik vođe malo jednostavniji, a članovi timova jednostavnije prikaze robota. U tablicu se unašaju brojevi perli na određenim dijelovima tijela robota. Svaki od učenika popunit će svoju tablicu te nakon toga međusobno provjeravaju rješenja i korigiraju eventualne pogreške. Na kraju zbrajaju dobivene umnoške.

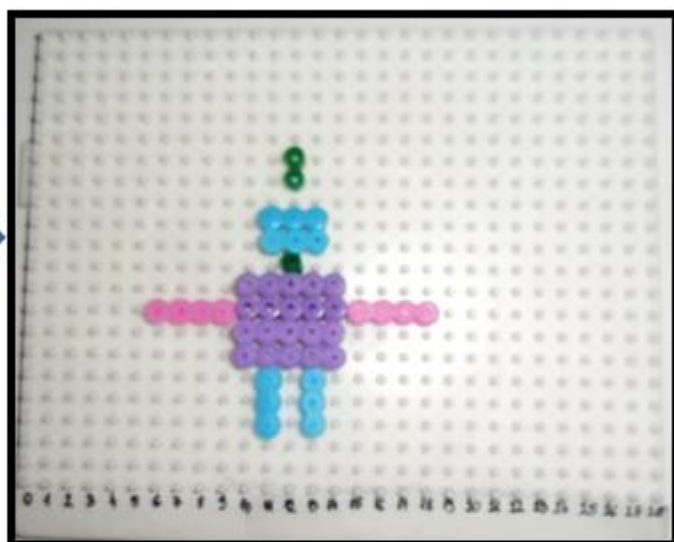
3. CRVENA STANICA

PRED VAMA SE NALAZI *MNOŽILICA*. *MNOŽILICA* PRIKAZUJE NEOBIČNOG ROBOTA. VAŠ JE ZADATAK IZRAČUNATI KOLIKO UKUPNO PERLI ČINI ROBOTA. TREBATE KORISTITI RAČUNSKE OPERACIJE MNOŽENJA I ZBRAJANJA!

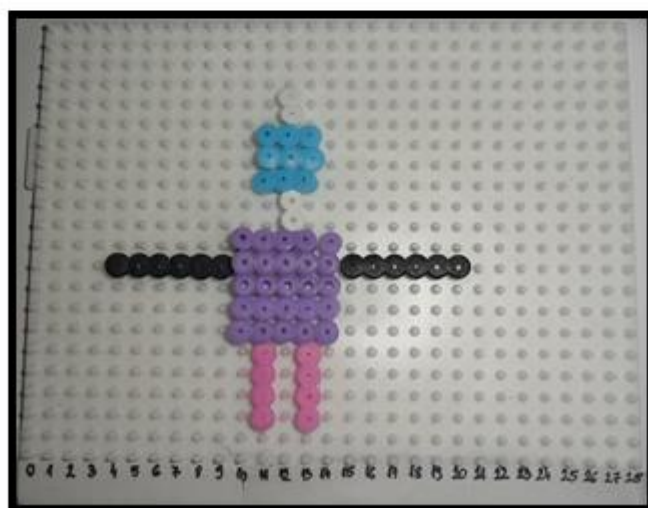
DIO TIJELA	MNOŽENJE	REZULTAT
NOGE		
TRUP		
RUKE		
VRAT		
LICE		
ANTENE		
		UKUPNO=



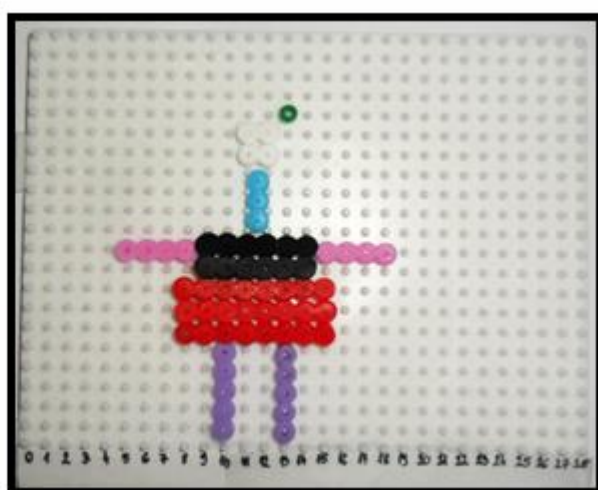
Pomočník



Član 1.



Član 2.



4. STANICA

Pred učenicima se nalazi *Množilica* na kojoj su prikazana rješenja zadataka modelom brojevnog pravca. Zadatak učenika je da napišu zapis računskom operacijom množenja za svaki prikazani zadatak.

4. ZELENA STANICA

PRED VAMA SE NALAZI *MNOŽILICA* SA ZADANIM RJEŠENJIMA ZADATAKA MODELOM BROJEVNOG PRAVCA. VAŠ ZADATAK JE DA NAPIŠETE ZAPIS RAČUNSKOM OPERACIJOM MNOŽENJA ZA SVAKI PRIKAZANI ZADATAK. KRENITE OD NARANČASTIH ŠTAPIĆA PREMA DOLJE.

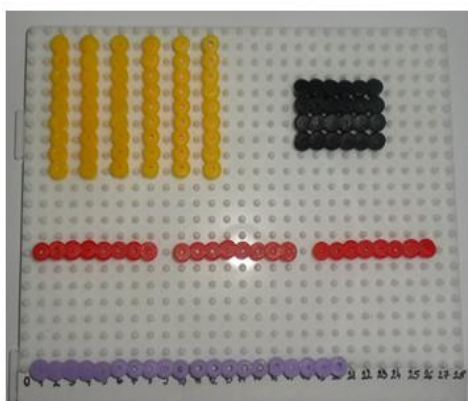


5. STANICA

Na ovoj stanici učenicima je zadatak osmisliti četiri tekstualna zadatka na temelju prikaza s *Množilice*.

5. LJUBIČASTA STANICA

PRED VAMA SE NALAZI *MNOŽILICA* S PRIKAZANIM ZADATCIMA. VAŠ ZADATAK JE DA OSMISLITE ZADATAK S RIJEČIMA ZA SVAKU PRIKAZANU RAČUNSKU OPERACIJU MNOŽENJA I DA ZADATAK RIJEŠITE.



Mogući primjeri rješenja:

1. *ljubičaste perle*: Planinar prohoda 5 kilometara u jednom satu. Koliko kilometara je planinar prohodao nakon 4 sata hodanja? – model brojevnog pravca

2. *crvene perle*: U jednom danu voćar ubere 8 kilograma jabuka. Koliko kilograma jabuka je voćar ubrao nakon 3 dana? – model skupa

3. *crne perle*: Učionica je podijeljena u 4 reda i u svakom redu se nalazi 6 stolaca. Koliko ukupno ima stolaca u učionici? - model površine pravokutnika

4. *žute perle*: Svaki dan baka potroši 9 kuna na kruh i mlijeko. Koliko kuna baka potroši na kruh i mlijeko za 6 dana? – model skupa

6. STANICA

Na šestoj stanici učenici moraju riješiti dobivene zadatke množenja, a potom ih prikazati na svojim *Množilicama*. Prilikom prikazivanja na *Množilici*, učenici trebaju iskoristiti sva tri modela (model skupa, model brojevnog pravca i model površine pravokutnika), prema vlastitom izboru.

6. ROZA STANICA

RIJEŠITE ZADATKE, A ZATIM IH PRIKAŽITE NA *MNOŽILICI* KORISTEĆI SVA TRI MODELA MNOŽENJA (MODEL SKUPA, MODEL BROJEVNOG PRAVCA, MODEL POVRŠINE PRAVOKUTNIKA) PO VLASTITOM IZBORU.

$$9 \cdot 4 =$$

$$3 \cdot 10 =$$

$$7 \cdot 6 =$$

$$7 \cdot 2 =$$

$$8 \cdot 9 =$$

$$6 \cdot 3 =$$

$$6 \cdot 5 =$$

$$2 \cdot 4 =$$

$$8 \cdot 4 =$$

7. ZAKLJUČAK

Množenje je jedan od najvažnijih matematičkih pojmova s kojima se učenici prvi puta susreću u drugom razredu osnovne škole. Učenici proširuju i nadograđuju znanja o množenju na ostalim stupnjevima obrazovanja, što dodatno naglašava važnost usvajanja temeljnih znanja o množenju. Analizom kurikularnih dokumenata, NPP-a i NOK-a, prikazala su se očekivana obrazovna postignuća i ishodi koje bi učenici trebali imati nakon završenog prvog obrazovnog ciklusa. U oba dokumenta naglašeno je savladavanje tablice množenja te primjena računske operacije množenja u svakodnevnim situacijama. Analizom udžbenika saznalo se da su u najvećoj mjeri zastupljeni numerički zadatci. Od modela aritmetike prisutan je, u manjoj mjeri, model skupa i povremeno model brojevnog pravca, dok ostalih modela množenja nema. Metodička literatura nalaže da se prilikom početnog učenja množenja, odnosno osiguravanja izgradnje osnovnih spoznaja o množenju, računska operacija množenja prikazuje kao uzastopno zbrajanje jednakih pribrojnika, konkretizacijom pomoću čim više modela množenja. Matematički sadržaji, pa tako i množenje, su za učenike apstraktni, radi čega se prikazuju modelima, zornim prikazima koji olakšavaju njihovo usvajanje i razumijevanje.

Prilikom početnog poučavanja računske operacije množenja, učenici bi trebali samostalno manipulirati didaktičkim materijalom kako bi pomoću vizualnog pomagala shvatili princip množenja. Upotreba materijala važna je zbog intelektualnih sposobnosti učenika koji se tada nalaze u razdoblju konkretnih intelektualnih operacija. Zbog toga bi usvajanje računske operacije množenja trebalo započeti konkretnim iskustvima te razvijanjem govora koji prati iskustvene manipulacije. Učenike treba poticati da opisuju ono što vide, odnosno rade. Upotrebom već stečenog znanja (računske operacije zbrajanja i prebrojavanja) učenici dolaze do apstraktnog, simboličkog zapisa nove računske operacije.

Praksa pokazuje da se konkretni materijali najčešće koriste u demonstracijske svrhe, a učenici manipuliraju materijalima u manjoj mjeri (Glasnović Gracin, 2014). Razlog tome je manjak manipulativnih materijala u školama jer je originalan materijal često vrlo skup pa si škole to ne mogu priuštiti.

Uz upotrebu manipulativnih materijala, moderna metodika matematike pred učitelje postavlja zahtjev da osmisle nastavu koristeći sve modele za množenje jer se

pravilnim doziranjem modela nastava može itekako poboljšati. U zadovoljavanju tih zahtjeva može pomoći za ovu priliku osmišljeni manipulativni materijal *Množilica*. Predlaganjem *Množilice* ostvario se osnovni cilj ovog rada – ponuditi materijal koji je cijenom prihvaljiv, a daje široki spektar upotrebe u nastavi matematike. *Množilicom* se istovremeno učenicima mogu prikazati čak tri modela množenja – model skupa, model brojevnog pravca i model površine pravokutnika, a može se uvesti i u prvom razredu kao materijal pogodan za učenje računske operacije zbrajanja.

U radu su dani primjeri satova obrade i uvježbavanja računske operacije množenja u kojima se poštuje *Peterostupna spirala*, model koji poštuje metodiku usvajanja novog matematičkog pojma od konkretnog doživljaja prema apstraktnoj spoznaji.

Želja svakog učitelja je da njegovi učenici napreduju u znanju. Da bi se to ostvarilo, učenike treba postupno uvoditi u matematičke pojmove. Treba im pružiti konkretna iskustva kroz primjenu različitih modela pomoću kojih učenici lakše usvajaju matematičke ideje i na taj način nadograđuju svoja znanja iz matematike. Očekuje se da bi korištenje manipulativnog materijala *Množilice* u tom smislu pomoglo ostvarivanju učeničkog napretka u matematičkom znanju. *Množilica*, iako osmišljena za potrebe sadržaja iz množenja, mogla bi biti od pomoći i u drugim područjima razredne nastave matematike.

LITERATURA

1. Banić, Sonja (2006). *Kako pripremiti i voditi rad u timovima*. Miš 33(7), 117-123.

Preuzeto sa:

[http://mapmf.pmfst.unist.hr/~zzoric/MNM%201&2/materijali%20uz%20predavanja/Kako%20organizirati%20rad%20u%20timovima%20\(1\).pdf](http://mapmf.pmfst.unist.hr/~zzoric/MNM%201&2/materijali%20uz%20predavanja/Kako%20organizirati%20rad%20u%20timovima%20(1).pdf) (1.7.2017.)

2. Boggan, Matthew, Harper, Sallie, Whitmire, Anna (2010). *Using manipulatives to teach elementary mathematics*. Journal of Instructional Pedagogies.

Preuzeto sa: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1096945.pdf> (5.7.2017.)

3. Buggle, Franz (2002). *Razvojna psihologija Jeana Piageta*. Zagreb: Naklada slap

4. Cope, Liza (2015). *Math Manipulatives: Making the Abstract Tangible*. Delta State University.

Preuzeto sa:

http://www.deltastate.edu/PDFFiles/DJE/spring-2015/dje_spring_2015_cope-final.pdf (15.3.2017.)

5. Corn, Petra (2015). *Cuisenaire Štapići* (Diplomski rad). Osijek: Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku.

Preuzeto sa: www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/COR17.pdf (7.3.2017.)

6. Corn, Petra (2016). *Cuisenairovi štapići*. Osječki matematički list, 16, 67-82.

Preuzeto sa: <http://hrcak.srce.hr/file/244700> (7.3.2017.)

7. Čekrlja, Boris (2001). *Vremeplovom kroz matematiku*. Banja Luka: BL KO

8. Đurović, Ivo, Đurović, Jasenka (2005). *Matematika 2: udžbenik za drugi razred*. Zagreb: Školska knjiga

9. Glasnović Gracin, Dubravka (2012). *Upotreba konkretnih materijala u razrednoj nastavi matematike*. Zbornik radova 5.Kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske, 197-202. Zagreb: Profil

10. Glasnović Gracin, Dubravka (2014a). *Modeli aritmetike za razrednu nastavu. Poučak*, 59 (15), 12–21.
Preuzeto sa: <http://hrcak.srce.hr/140113> (7.3.2017.)
11. Gusić, Ivica (1995). *Matematički rječnik*. Zagreb: Element.
12. Gusić, Matea (2012). *Računanje prstima*. Matka, 21 (82), 98.
Preuzeto sa: <http://hrcak.srce.hr/file/152403> (23.3.2017.)
13. Hunt, Annita, Nipper, Kelli L., Nash, Linda E. (2011). *Virtual vs. Concrete Manipulatives in Mathematics Teacher Education: Is One Type More Effective Than the Other?*. Current Issues in Middle Level Education, 16(2), 1-6.
Preuzeto sa: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1092638.pdf>
14. Jerec, Haritina, Glasnović Gracin, Dubravka (2012). *Stern blokovi*. MiŠ, 64 (13), 154-159.
Preuzeto sa: <http://mis.element.hr/list/18/broj/64/clanak/908/stern-blokovi> (6.7.2017.)
15. Kurnik, Zdravko (2001). *Metodika uvođenja novih pojmova*. MiŠ, 12 (2), 55-59.
Preuzeto sa: <http://mis.element.hr/list/4/broj/12/clanak/142/metodika-uvodenja-novih-pojmova> (18.5.2017.)
16. Liebeck, Pamela (1995). *Kako djeca uče matematiku: metodički priručnik za učitelje razredne nastave, nastavnike i profesore matematike*. Zagreb: Educa.
17. Majstorović, Ružica (2016). *Egipatska i babilonska dostignuća* (Diplomski rad). Osijek: Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku.
Preuzeto sa: <https://repositorij.mathos.hr/islandora/object/mathos%3A26/datastream/PDF/view> (4.6.2017.)
18. Markovac, Josip (2001). *Metodika početne nastave matematike*. Zagreb: Školska knjiga.
19. Markovac, Josip (2010). *Matematika 2: udžbenik za drugi razred osnovne škole*. Zagreb: Alfa

20. Marshall, Linda, Swan, Paul (2008). *Exploring the Use of Mathematics Manipulative Materials: Is it What We Think It Is?*. EDU-COM International Conference.

Preuzeto sa: <http://ro.ecu.edu.au/ceducom/33/> (20.3.2017.)

21. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2006). *Nastavni plan i program za osnovnu školu*. Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta.

22. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2011). *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje*. Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta.

23. Predavanja Metodike Matematike 1 (2015).

24. Reić Ercegovac, Ina (2012.) *Teorija kognitivnog razvoja Jeana Piageta*. Filozofski fakultet Split.

Preuzeto sa: https://marul.ffst.hr/centri/circo/Nastava/Kognitivni_razvoj.pdf (4.6.2016.)

25. Sharma, Mahesh C. (2001). *Matematika bez suza: kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike*. Lekenik: Ostvarenje.

26. Srdić, Branka (2004). *Kako su računali stari Egipćani?*. Math.e, Vol.3.

Preuzeto sa: <http://e.math.hr/egipat/index.html> (4.6.2017.)

27. Tatalović Vorkapić, Sanja (2013). *Razvojna psihologija*. Učiteljski fakultet u Rijeci.

Preuzeto sa:

http://www.ufri.uniri.hr/files/nastava/nastavni_materijali/razvojna_psihologija.PDF (6.6.2017.)

Kratka biografska bilješka

- Osobni podatci:

Ime i prezime: Maja Bolfek

Datum i mjesto rođenja: 27.11.1993., Zagreb

Adresa: Slatina Svedruška 35, 49234 Petrovsko

E-mail: maja.bolfek93@gmail.com

Mob: 091 767 4334

- Obrazovanje:

2012.-2017. Učiteljski fakultet Čakovec, Sveučilište u Zagrebu

2008.- 2012. Jezična gimnazija, Srednja škola Krapina

2000.-2008. Osnovna škola Antuna Mihanovića, Petrovsko

- Jezici:

Engleski jezik: aktivno poznavanje pisma i govora

Njemački jezik: pasivno poznavanje

Talijanski jezik: pasivno poznavanje

- Znanja i vještine rada na računalu:

Dobro poznavanje MS Windows OS-a i MS Office paketa

Poznavanje HTML-a

- Zanimljivosti:

2017. Položen osnovni tečaj znakovnog jezika

Izjava o samostalnoj izradi rada

Ja, Maja Bolfek, izjavljujem da sam ovaj rad, *Manipulativni materijal za množenje u razrednoj nastavi matematike*, izradila samostalno uz potrebne konzultacije, savjete i uporabu navedene literature.

Potpis:

IZJAVA

o odobrenju za pohranu i objavu ocjenskog rada

kojom ja Maja Bolfek, OIB: 37913382442, student Učiteljskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, kao autor ocjenskog rada pod naslovom: *Manipulativni materijal za množenje u razrednoj nastavi matematike* dajem odobrenje da se, bez naknade, trajno pohrani moj ocjenski rad u javno dostupnom digitalnom repozitoriju ustanove Učiteljskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu i Sveučilišta te u javnoj internetskoj bazi radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu, sukladno obvezi iz odredbe članka 83. stavka 11. *Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju* (NN 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15).

Potvrđujem da je za pohranu dostavljena završna verzija obranjenog i dovršenog ocjenskog rada. Ovom izjavom, kao autor ocjenskog rada dajem odobrenje i da se moj ocjenski rad, bez naknade, trajno javno objavi i besplatno učini dostupnim:

a) široj javnosti

b) studentima i djelatnicima ustanove

c) široj javnosti, ali nakon proteka 6 / 12 / 24 mjeseci (zaokružite odgovarajući broj mjeseci).

**Zaokružite jednu opciju. Molimo Vas da zaokružite opciju a) ako nemate posebnih razloga za ograničavanje dostupnosti svog rada.*

Vrsta rada: a) završni rad preddiplomskog studija

b) diplomski rad

Mentor/ica ocjenskog rada:

Naziv studija:

Odsjek

Datum obrane: _____

Članovi povjerenstva: 1. _____

2. _____

3. _____

Adresa elektroničke pošte za kontakt:

Čakovec,

(vlastoručni potpis studenta)

(opcionalno)

U svrhu podržavanja otvorenog pristupa ocjenskim radovima trajno pohranjenim i objavljenim u javno dostupnom digitalnom repozitoriju ustanove Učiteljskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, ovom izjavom dajem pravo iskorištavanja mog ocjenskog rada kao autorskog djela pod uvjetima *Creative Commons* licencije:

- 1) CC BY (Imenovanje)
- 2) CC BY-SA (Imenovanje – Dijeli pod istim uvjetima)
- 3) CC BY-ND (Imenovanje – Bez prerada)
- 4) CC BY-NC (Imenovanje – Nekomercijalno)
- 5) CC BY-NC-SA (Imenovanje – Nekomercijalno – Dijeli pod istim uvjetima)
- 6) CC BY-NC-ND (Imenovanje – Nekomercijalno – Bez prerada)

Ovime potvrđujem da mi je prilikom potpisivanja ove izjave pravni tekst licencija bio dostupan te da sam upoznat s uvjetima pod kojim dajem pravo iskorištavanja navedenog djela.

(vlastoručni potpis studenta)

O *Creative Commons* (CC) licencijama

CC licencije pomažu autorima da zadrže svoja autorska i srodna prava, a drugima dopuste da umnožavaju, distribuiraju i na neke načine koriste njihova djela, barem u nekomercijalne svrhe. Svaka CC licencija također osigurava autorima da će ih se priznati i označiti kao autore djela. CC licencije pravovaljane su u čitavom svijetu. Prilikom odabira autor treba odgovoriti na nekoliko pitanja - prvo, želi li dopustiti korištenje djela u komercijalne svrhe ili ne, a zatim želi li dopustiti prerade ili ne? Ako davatelj licence odluči da dopušta prerade, može se također odučiti da od svatko tko koristi djelo, novonastalo djelo učini dostupnim pod istim licencnim uvjetima. CC licencije iziskuju od primatelja da traži dopuštenje za sve ostala korištenja djela koje su prema zakonu isključivo pravo autora, a koje licencija izrijeком ne dopušta.

Licencije:



Imenovanje (CC BY)

Ova licencija dopušta drugima da distribuiraju, mijenjaju i prerađuju Vaše djelo, čak i u komercijalne svrhe, dokle god Vas navode kao autora izvornog djela. To je najotvorenija CC licencija.

Sažetak licencije: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.hr>

Puni pravni tekst: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>



Imenovanje-Dijeli pod istim uvjetima (CC BY-SA)

Ova licencija dopušta drugima da mijenjaju i prerađuju Vaše djelo, čak i u komercijalne svrhe, dokle god Vas navode kao autora i licenciraju novonastala djela pod istim uvjetima (sve daljnje prerade će također dopuštati komercijalno korištenje).

Sažetak licencije: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.hr>

Puni pravni tekst: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>



Imenovanje-Bez prerada (CC BY-ND)

Ova licencija dopušta redistribuiranje, komercijalno i nekomercijalno, dokle god se djelo distribuira cjelovito i u neizmijenjenom obliku, uz isticanje Vašeg autorstva.

Sažetak licencije: <https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/deed.hr>

Puni pravni tekst: <https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/legalcode>



Imenovanje-Nekomercijalno (CC BY-NC)

Ova licencija dopušta drugima da mijenjaju i prerađuju Vaše djelo u nekomercijalne svrhe. Iako njihova nova djela bazirana na Vašem moraju Vas navesti kao autora i biti nekomercijalna, ona pritom ne moraju biti licencirana pod istim uvjetima.

Sažetak licencije: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.hr>

Puni pravni tekst: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>



Imenovanje-Nekomercijalno-Dijeli pod istim uvjetima (CC BY-NC-SA)

Ova licencija dopušta drugima da mijenjaju i prerađuju Vaše djelo u nekomercijalne svrhe, pod uvjetom da Vas navedu kao autora izvornog djela i licenciraju novonastala djela pod istim uvjetima.

Sažetak licencije: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.hr>

Puni pravni tekst: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode>



Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada (CC BY-NC-ND)

Ovo je najrestriktivnija od CC licencija – dopušta drugima da preuzmu Vaše djelo i da ga dijele s drugima pod uvjetom da Vas navedu kao autora, ali ga ne smiju mijenjati ili koristiti u komercijalne svrhe.

Sažetak licencije: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.hr>

Puni pravni tekst: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

Zahvala

U prvom redu, zahvaljujem doc.dr.sc. Dubravki Glasnović Gracin koja je prihvatila moju molbu za mentorstvom. Veliko hvala dugujem mag.educ.math. Matei Gusić koja je od prvog dana pomagala u izradi ovog rada svojim savjetima te joj hvala na pomoći i strpljenju .

Željela bih se zahvaliti obitelji na podršci i razmišljanju koje su mi pružali sve ove godine tijekom mog školovanja. Hvala i prijateljima Katarini, Jeleni i Tomici koji su bili uz mene cijelo vrijeme mog studiranja i učinili ga nezaboravnim, a mom Mihaelu hvala što je vjerovao u mene.

Na kraju, zahvaljujem se svojim roditeljima i sestri. Bez njihove pomoći i ljubavi, ništa od ovog nebi bilo moguće. Hvala im na podršci, strpljenju i povjerenju!

Maja Bolfek